СОДЕРЖАНИЕ

Удальцов В. А. Корреляционный поляриметр двадцатисантиметрового диапазона 5

Рыжов Ю. А., Юдин О. И. О влиянии неоднородностей электронной концентрации ионосферы на измерение некоторых ее параметров 13

Разин В. А., Цейтлин Н. М. К вопросу об измерении радиоизлучения атмосферы и поверхности Земли 21

Гершман Б. Н. и Гинзбург В. Л. Несколько замечаний о распространении электромагнитных волн в анизотропной, диспергирующей среде 31

Канер Э. А., Белов Ю. А. О проникновении электромагнитного поля в магнитоактивную плазму 47

Алексин В. Ф., Степанов К. Н. К теории электромагнитных флюктуаций в плазме 61

Мень А. В. К гипотезе переноса «замороженной» турбулентности при исследовании флюктуаций в неоднородной среде 70

Бункин Ф. В. К феноменологической теории тепловых флюктуаций в макроскопических системах 83

Гречишкин В. С. и Кюнцель И. А. Искажения формы линий ядерного квадрупольного резонанса за счет аппаратурных факторов 95

Скрипов Ф. И., Альтман Э. Л. Реакция приемного контура в опытах по свободной ядерной индукции в слабых магнитных полях 104

Белянцев А. М., Богатырев Ю. К. Формирование ударных электромагнитных волн с двумя разрывами 116

Коробков Ю. С., Эйдман В. Я. О реакции излучения при движении заряда в волноводе, заполненном анизотропным диэлектриком 122

Малышев В. А. Теория плоского диода с однородным катодом, работающим в режиме насыщения 128

Плешивцев Н. В. Зависимость коэффициента распыления меди от температуры мишени, плотности тока и угла падения ионов аргона с энергией $10 \div 30$ *кэв* 136

Ахманов С. А., Кравцов Ю. А. Двухконтурный генератор с нелинейной емкостью 144

Фридрих З. Количественные оценки способов дискретизации 155

Гончаров А. М., Тарантович А. С. Система коммутации головок магнитного барабана на полупроводниках 155

Краткие сообщения и письма в редакцию

Гетманцев Г. Г. О происхождении космического радиоизлучения и космических лучей 172

Басс Ф. Г., Ханкина С. И. Потери энергии частицы, движущейся над идеально проводящей статистически неровной поверхностью 174

Шестопалов В. П., Якименко И. П., Филь В. Д. Распространение несимметричных электромагнитных волн в плазменном стержне и их излучение 176

Шестопалов В. П., Якименко И. П., Плохой В. В. Несимметричные электромагнитные волны в спиральном волноводе с продольно намагниченным ферритом 179

Белянцев А. М., Островский Л. А. Распространение импульсов в линиях передачи с полупроводниковыми диодами 183

Диденко А. И. и Панов Ю. А. Расчет шунтового сопротивления и добротности двухрядных лестничных замедляющих структур 187

Рапопорт Г. Н. Приближенный метод нелинейной теории ЛБВ 191

Козлов И. Г. О влиянии разброса скоростей электронов в электронном пучке на работу усилительной ЛБВ 192

Рожкова Г. И. Нестационарные процессы в контуре с переменными параметрами 194

Урицкий З. И. и Иванов Е. Н. К теории внешнего фотоэффекта с полупроводников 197

Алексеев А. С., Савин Г. П. Устройство для определения длительностей запусков в ритмичном производстве нескольких изделий на одном оборудовании . . 199

Письма в редакцию 201

Информация

Информация о предстоящих конференциях 202

Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. I, № 5, 1961 . . . . . .

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ ПОЛЯРИМЕТР ДВАДЦАТИСАНТИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА*

В. А. Удальцов

Описывается поляриметр двадцатисантиметрового диапазона, в основу которого положен корреляционный метод двухканального приема. Обсуждаются недостатки корреляционного измерителя и методы борьбы с ними; отмечаются преимущества измерителя по сравнению с компенсационным и модуляционным. Показано, что с помощью корреляционного поляриметра может быть измерена как поляризованная, так и неполяризованная компоненты сигнала. Рабочий образец поляриметра имеет следующие параметры: полоса пропускания 4 *мгц*, коэффициент шума 5, постоянная времени выходного фильтра 25 *сек*. Экспериментальная чувствительность, определенная по тепловому эквиваленту, 0,3°К, расчетная чувствительность для указанных параметров корреляционного поляриметра 0,1°К. Этот поляриметр позволил провести поляризационные измерения излучения Крабовидной туманности с точностью $\pm 0{,}15\%$ от суммарного излучения туманности. Обнаружена линейная поляризация радиоизлучения Крабовидной туманности на волне 21 *см* (степень поляризации $p = 0{,}5\%$ и позиционный угол плоскости поляризации $\varphi = 82^\circ \pm 5^\circ$).

Для приема слабых линейно поляризованных сигналов с гладким спектром в Крымской научной станции ФИАН был разработан корреляционный поляриметр двадцатисантиметрового диапазона**. В основу поляриметра был положен метод двухканального приема с „выделением коррелированного сигнала из некоррелированных шумов“ [1,2]. Применение корреляционного метода приема позволило уменьшить влияние эффектов, не позволяющих в ряде случаев реализовать флюктуационную чувствительность радиоастрономических приемников. К таким эффектам относятся, как известно, паразитная модуляция в модуляционных приемниках и флюктуации коэффициента усиления и коэффициента шума в компенсационных и модуляционных приемниках.

Скелетная схема корреляционного поляриметра приведена на рис. 1. Линейно поляризованный сигнал, поступающий через рупор 1 в круглый волновод 2, раскладывается с помощью волноводных переходов 3, 4 на две перпендикулярные коррелированные составляющие и через адаптеры 3, 6 подается на смесители 7, 8. Преобразованные с помощью общего гетеродина 9 сигналы вместе с шумами $U_{ш_1}(t)$ и $U_{ш_2}(t)$*** усиливаются предварительными усилителями промежуточной частоты 10, 11. Далее сигналы и шумы $v_1(t)$ и $v_2(t)$ усиливаются основными

---

* Корреляционный поляриметр не представляет собой принципиально новой аппаратуры; однако в радиоастрономической практике он применяется и описывается впервые. У радиоастрономов он может вызвать специальный интерес как прибор, с помощью которого была обнаружена слабая линейная поляризация Крабовидной туманности на волне 21 *см*.

** В разработке и наладке поляриметра принимали участие Б Е. Евстафьев и Ю. П. Бутров.

*** Здесь $U_{ш_1}(t)$, $U_{ш_2}(t)$ — шумовые напряжения, обусловленные собственными шумами приемных каналов поляриметра. Индексы 1, 2 относятся к первому и второму каналам соответственно.

усилителями промежуточной частоты 12, 13 и подаются на корреляционный (перемножающий) блок 14:

$$v_1(t) = U_{ш_1}(t) + U_c(t);$$
$$v_2(t) = U_{ш_2}(t) + U_c(t). \qquad (1)$$

С целью упрощения все выражения для напряжений даются в тексге с точностью до постоянных коэффициентов.

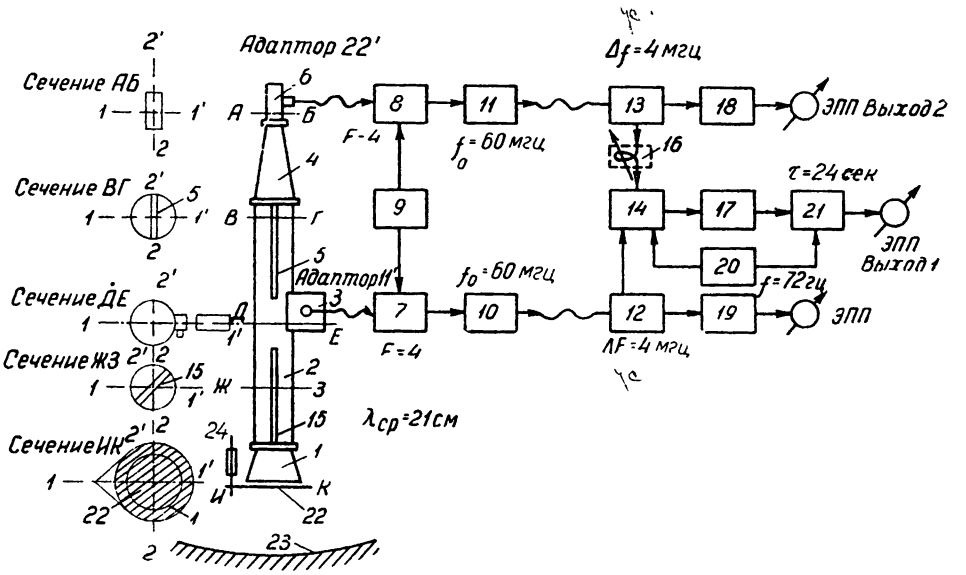


Рис. 1. Блок-схема корреляционного поляриметра:

1 — круглый рупор, 2 — круглый волновод, 3, 6 — переходы с прямоугольного волновода на коаксиал (адапторы), 4 — плавный переход с круглого волновода на прямоугольный, 5 — закорачивающая пластина, 7, 8 — коаксиальные смесители, 10, 11 — предварительные усилители промежуточной частоты, 12, 13 — основные усилители промежуточной частоты, 14 — корреляционный (перемножающий) блок, 15 — поглощающая согласованная пластина, 16 — „тромбон" (коаксиальная линия переменной длины), 17 — избирательный низкочастотный усилитель на *RC*-элементах, 18, 19 — компенсаторы с АРУ, 20 — звуковой генератор модулирующего и опорного напряжения, 21 — фазовый детектор и фильтр низких частот, 22 — поляризационный фильтр, 23 — рефлектор.

Перемножение $v_1(t) \cdot v_2(t)$ необходимо для „выделения сигнала из шумов". При статистической независимости $U_{ш_1}(t)$, $U_{ш_2}(t)$ и $U_c(t)$ среднее значение произведения $v_1(t) \cdot v_2(t)$ равно

$$\overline{v_1(t) \cdot v_2(t)} = \overline{U_c^2}. \qquad (2)$$

Из соотношения

$$v_1 \cdot v_2 = 4^{-1}[(v_1 + v_2)^2 - (v_1 - v_2)^2] \qquad (3)$$

следует, что перемножение может быть произведено по типовой схеме [3] путем осуществления нескольких простых операций, характеризуемых правой частью уравнения (3). Все необходимые операции над $v_1(t)$ и $v_2(t)$ осуществляются в блоке 14 (рис. 2). Полученный таким образом сигнал на выходе корреляционного блока дальше усиливается и регистрируется. Для исключения флюктуаций, обусловленных уходом нуля усилителя постоянного тока, усиление осуществляется на частоте 72 *гц* с помощью блока 17. Предварительно сигнал модулируется с помощью генератора 20. В качестве усилителя частоты модуляции использован усилитель с селективной отрицательной обратной

связью и с калиброванной ступенчатой регулировкой коэффициента усиления. Вторичное линейное детектирование слабых сигналов выполняет фазовый детектор 21, управляемый опорным напряжением генератора 20.

В корреляционном приемнике существенное значение имеет отсутствие коррелированных собственных шумов приемника. Эти шумы, как показано в работе [5], снижают его чувствительность. Коррелированные шумы в нашем случае могут быть обусловлены связью между каналами в волноводном тракте. Они могут также быть обусловлены шумами гетеродина, прошедшими через смесители. Уменьшение связи между каналами в волноводном тракте достигается тщательностью его изготовления, настройки и точным ортогональным расположением анализаторов. В нашей аппаратуре развязка между каналами была не менее 70 *дб*.

Уменьшение шумов гетеродина, прошедших через смеситель, до уровня 10^{-4} от собственных шумов смесителя и УПЧ получено за счет

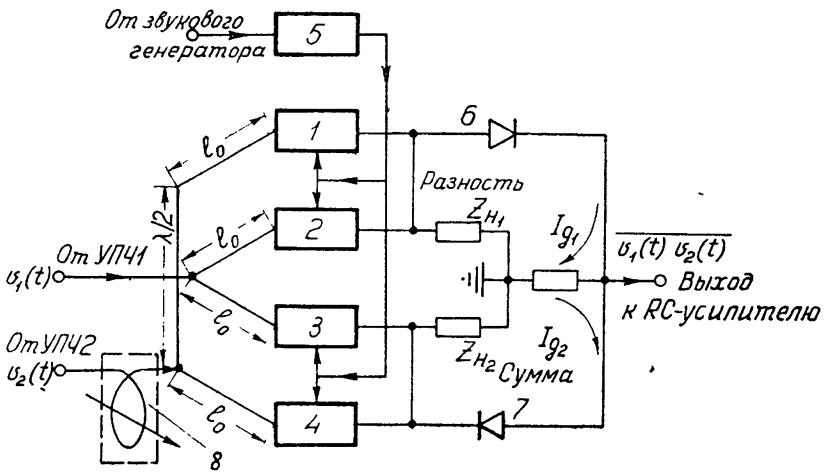


Рис. 2. Схема корреляционного блока:

1, 2, 3, 4 — буферные каскады (на общих нагрузках этих каскадов $z_{н_1}$ и $z_{н_2}$ сигналы $v_1(t)$ и $v_2(t)$ складываются в фазе и противофазе; противофазность обусловливается полуволновой фазовой задержкой; в этих же каскадах путем их запирания и отпирания осуществляется низкочастотная модуляция сигнала); 5—усилитель частоты модуляции; 6, 7 — квадратичные детекторы (встречное включение детекторов позволяет получить на общей нагрузке $z_{нд}$ искомое произведение $v_1(t) \cdot v_2(t)$; 8 — „тромбон"—линия переменной длины, служащая для фазовой настройки корреляционного приемника с целью получения оптимального режима (величина коррелированного сигнала $v_1(t) \cdot v_2(t)$ на выходе коррелятора зависит от соотношения фаз между $v_1(t)$ и $v_2(t)$; она максимальна при синфазности и противофазности $v_1(t)$ и $v_2(t)$ и равна нулю при фазовом сдвиге между ними $\pi/2$).

сужения полосы пропускания в тракте передачи частоты гетеродина. Сужение полосы достигается применением добротных объемных резонаторов. Высокодобротные объемные резонаторы ограничивают шумы гетеродина узкой полосой пропускания. В приемнике использованы коаксиальные смесители 7, 8 с двумя настраиваемыми шлейфами и гетеродинными резонаторами. С помощью специального коаксиального удлинителя смесители настраивались на хорошее пропускание по прямому и зеркальному каналам (КСВ по прямому и зеркальному каналам был не хуже 1,15).

Для уменьшения шум-фактора использовались отобранные из большой партии смесительные кристаллы с малой относительной шумовой температурой ($t < 1{,}1$) и малыми потерями преобразования

($L \cong 4{,}5$ *дб*). Гетеродин 9 выполнен на маячковой лампе. Предварительные усилители промежуточной частоты (60 *мгц*) собраны по малошумящей схеме с полосой пропускания 7 *мгц* и коэффициентом шума 1,6. Смесители 7, 8, гетеродин 9 и предварительные усилители 10, 11 конструктивно выполнены в виде отдельного блока с герметическим кожухом. Блок устанавливается непосредственно на антенне. Адапторы 3, 6 соединяются со смесителями 7, 8 высокочастотными кабелями длиной 2,5 *м* (затухание в кабелях не более 0,4 *дб*). В качестве детекторов используются пентоды в диодном включении, которые обеспечивают хорошую квадратичность при напряжении на их входе до 0,15 *в*.

Полоса пропускания основных усилителей промежуточной частоты 12, 13—4 *мгц*. Коэффициент шума всего приемника (по каждому из каналов) с учетом потерь в высокочастотных кабелях $4 \div 5$.

При поляризационных измерениях для оценки степени поляризации необходимо измерять интенсивность неполяризованной составляющей сигнала. Для этого в описываемом приемнике перед рупором помещается поляризационный фильтр 22, который пропускает одну составляющую поляризации приходящего полного потока энергии. Поляризационный фильтр представляет собой экран из параллельно натянутых медных проводов диаметром 0,9 *мм* с шагом 0,1, ориентированных под углом 45° к анализаторам. Фильтр расположен в плоскости раскрыва рупора и на время поляризационных измерений отводится от рупора. Конструктивно фильтр крепится на оси мотора с дистанционным управлением 24. При измерениях неполяризованной составляющей (с фильтром) чувствительность приемника снижается, так как возникает связь между каналами через фильтр. Последнее вызывает появление коррелированных шумов. Кроме того, фильтр рассогласовывает волноводный тракт, что приводит к уменьшению сигнала.

Без поляризационного фильтра КСВ высокочастотного тракта на прямой и зеркальной частотах не хуже 1,2 по обоим приемным каналам. С фильтром СКВ высокочастотного тракта $2 \div 5$. Это значит, что за счет рассогласования пропускается лишь $40 \div 90\%$ потока энергии одной поляризации. В нашем случае суммарное ослабление сигнала, обусловленное применением поляризационного фильтра, соответствует коэффициенту 2,4 в относительных единицах. Так, при приеме неполяризованной составляющей излучения Крабовидной туманности температура антенны $T_a = 46°\text{K}$ вместо $T_a = 110°\text{K}$ (см. рис. 3а).

Коэффициент ослабления сигнала, обусловленный поляризационным фильтром, определяется сравнением компенсационных записей излучения Крабовидной туманности, полученных с фильтром и без фильтра.

Ухудшение условий приема неполяризованной составляющей не имеет существенного значения, поскольку поляриметр используется для измерений потоков энергии с малой степенью поляризации, т. е. с относительно большой величиной неполяризованной составляющей.

При поляризационных измерениях необходимо знать, как изменяются параметры аппаратуры при приеме поляризованной и неполяризованной компонент сигнала. В нашем случае эти изменения обусловлены влиянием фильтра и нестабильностью коэффициента усиления. Для контроля за усилением применялась система калибровки с помощью плоской поглощающей согласованной пластины, помещаемой в круглом волноводе рис. 1 параллельно основной плоскости поляриметра. Такая пластина излучает как черное тело; поляризация излучения—линейная (в плоскости пластины). Пластина, расположенная под углом 45° к анализаторам, позволяет получить калибровочный сигнал $T_{a\,к} \cong 290°\text{K}$.

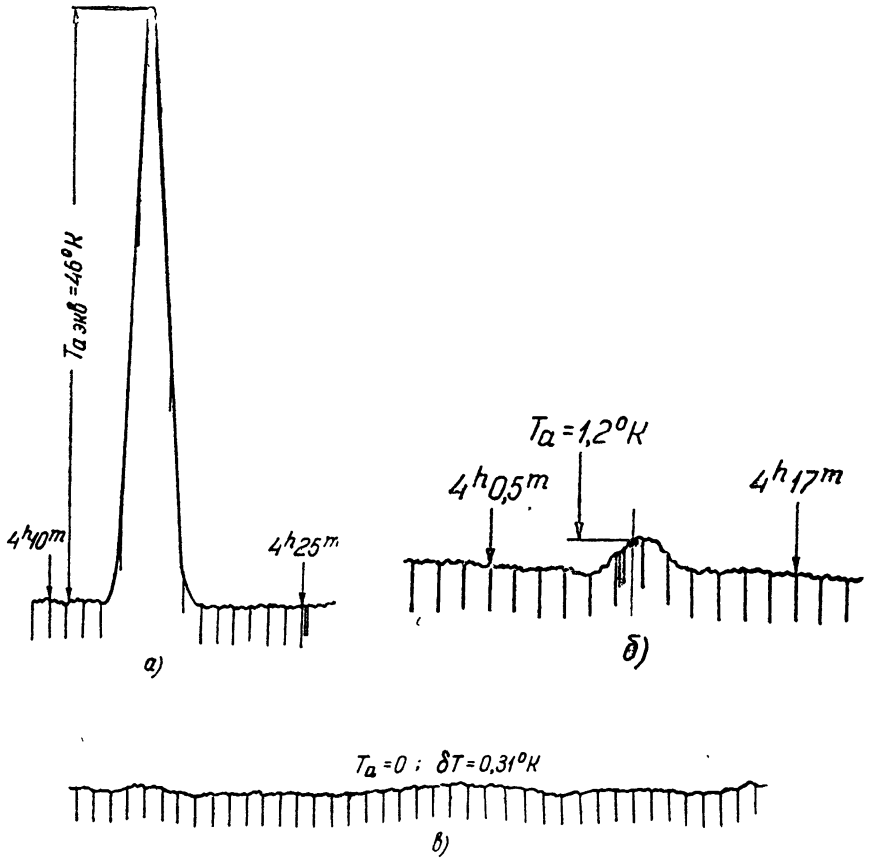


Рис. 3. а) Образец записи неполяризованной составляющей радиоизлучения Крабовидной туманности. Запись получена с выхода 1 (см. рис. 1) с помощью поляризационного фильтра при ослаблении в *RC*-усилителе в 10 *дб*.

б) Образец записи поляризованной составляющей радиоизлучения Крабовидной туманности. Запись получена с выхода 1 без поляризационного фильтра (ослабление в *RC*-усилителе в 10 *дб*).

в) Запись „нуля", полученная с выхода 1 без применения поляризационного фильтра при ориентировке диаграммы направленности антенны в область „неба" с температурой, равной „нулю" (ослабление в *RC*-усилителе в 8 *дб*).

Для поляризационных измерений абсолютная калибровка в принципе не нужна. Однако она использовалась для настройки аппаратуры с целью определения чувствительности приемника и оценки эффективной площади антенной системы. Для дополнительного контроля за усилением и для одновременной записи поляризованной и неполяризованной составляющих сигнала используются компенсационные блоки 18, 19. В блоках имеется усилитель с усиленной автоматической регулировкой усиления (АРУ), детектор и компенсатор. АРУ, использованная для стабилизации нулевого уровня компенсатора *, осуществлена по экранным сеткам дополнительного усилителя промежуточной частоты

* Этот метод стабилизации нулевого уровня компенсатора предложен А. Н. Сухановским.

в блоках 18, 19. В качестве управляющего напряжения АРУ используется усиленное напряжение с выхода детектора блоков 18, 19, обусловленное собственными шумами приемника. Для уменьшения искажений при записи сигналов постоянная времени АРУ делается в несколько раз больше периода изменения сигнала, обусловленного диаграммой направленности антенны.

Определяющее значение при поляризационных измерениях слабых сигналов имеет чувствительность аппаратуры. Если предположить, что

а) напряжения на выходе приемника, обусловленные сигналом и шумами (статистически независимыми), являются стационарными случайными функциями времени, имеют в пределах полосы пропускания усилителей гладкий спектр и подчиняются нормальному закону распределения вероятностей;

б) флюктуации коэффициента усиления приемника отсутствуют;

в) частотные характеристики приемников до детектора идентичны и подобны характеристике идеального полосового фильтра;

г) антенная температура, обусловленная сигналом и фоном, пренебрежимо мала по сравнению с температурой собственных шумов, то в соответствии с [4,5] предельная чувствительность поляриметра определится соотношением *:

$$\delta T_{\text{а пр}} = T_0 \sqrt{(F_1 - 1)(F_2 - 1)/2\Delta f \tau}\,, \qquad (4)$$

где F_1, F_2 — коэффициенты шума первого и второго каналов приемника соответственно, Δf — полоса пропускания приемника до детектора, τ — постоянная времени выходного фильтра. При $F = 5$, $\Delta f = 4$ *мгц*, $\tau = 24$ *сек*, $T_0 = 290°$K имеем: $\delta T_{\text{а пр}} = 0{,}1°$K. Экспериментальная чувствительность рабочего образца поляриметра, измеренная с помощью теплового эквивалента, составляла $\delta T_{\text{а эксп}} = 0{,}3°$K.

Разница между $\delta T_{\text{а пр}}$ и $\delta T_{\text{а эксп}}$ обусловлена наличием флюктуаций коэффициента усиления. Оценка влияния флюктуаций коэффициента усиления может быть проведена в соответствии с [7] по флюктуациям постоянной составляющей тока на выходе радиометра. Если через $\Delta J_{\text{кр}}$, $\Delta J_{\text{м}}$, $\Delta J_{\text{к}}$ обозначить флюктуации постоянной составляющей тока на выходе корреляционного, модуляционного и компенсационного радиометров, то в соответствии с [5–8] можно записать:

$$\frac{\Delta J_{\text{кр}}}{\Delta J_{\text{м}}} = \frac{T_{\text{ф}} + T_{\text{а}}}{T_{\text{а}}}\,; \qquad (5)$$

$$\frac{\Delta J_{\text{кр}}}{\Delta J_{\text{к}}} = \frac{T_{\text{ф}} + T_{\text{а}}}{T_{\text{ш}} + T_{\text{ф}} + T_{\text{а}}}\,; \qquad (6)$$

$$\frac{\Delta J_{\text{м}}}{\Delta J_{\text{к}}} = \frac{T_{\text{а}}}{T_{\text{ш}} + T_{\text{ф}} + T_{\text{а}}}\,, \qquad (7)$$

где $T_{\text{ш}}$ — шумовая температура приемника, $T_{\text{ф}}$, $T_{\text{а}}$ — антенные температуры фона и сигнала соответственно.

Для нашего случая (сантиметровый диапазон) $T_{\text{ф}} = 0$. Это значит, что флюктуации коэффициента усиления в поляриметре сказываются на его чувствительности так же, как в случае модуляционного радиометра (см. [6] и [7]). В модуляционном приемнике, как известно, это

* Нетрудно видеть, что предельная чувствительность поляриметра при $F_1 = F_2 = F$ соответствует предельной чувствительности компенсационного приемника и соответственно выше предельной чувствительности модуляционного приемника

влияние незначительное. Расчеты и измерения чувствительности в нашем случае, как видно, хорошо согласуются с этими выводами. Близкое значение экспериментальной и расчетной чувствительности указывает, кроме того, на оптимальную (по чувствительности) настройку рабочего образца поляриметра.

Рассмотренная схема корреляционного поляриметра, таким образом, имеет определенные преимущества перед модуляционной и компенсационной. Она обладает высокой предельной чувствительностью, не требует модулятора и свободна от недостатка компенсационной схемы, обусловленного флюктуациями коэффициента усиления и коэффициента шума.

Описанный приемник использовался для поляризационных измерений радиоизлучения Крабовидной туманности. Для иллюстрации возможностей поляриметра приведем краткие сведения об этих измерениях и их результатах.

Измерения проводились с антенной диаметром 31 *м* [9]. Геометрическая ось рефлектора была ориентирована на склонение Крабовидной туманности $\delta = 22°$. Юстировка геометрической оси антенны производилась по Крабовидной туманности на волне 9,6 *см*. Электрическая ось антенны совмещалась с геометрической. Ширина диаграммы направленности по уровню 3 *дб*, измеренная по радиоизлучению Крабовидной туманности, составляла 32′. Эффективная площадь приема антенны, определенная по потоку радиоизлучения Крабовидной туманности на частоте 1419 *мгц* ($p = (9{,}8Б \pm 1{,}15) \cdot 10^{-24}$ *вт·м*$^{-2}$ *гц*$^{-1}$ [10]), равна (330 ± 30) *м*^{2}. Антенная температура неполяризованной компоненты излучения туманности составляла 110° К. Зеркальный канал не подавлялся; поэтому прием осуществлялся в двух полосах, ограниченных частотами $f_р = (1500 \pm 2)$ *мгц* и $f_з = (1480 \pm 2)$ *мгц*. Измерения при таких условиях соответствуют измерениям в одной полосе $\Delta f = 4$ *мгц* на $\lambda_{ср} = 21$ *см*.

При поляризационных измерениях слабых сигналов с неподвижными антеннами существенное значение имеют паразитные поляризационные эффекты. Для проверки устойчивости паразитных поляризационных эффектов, обусловленных антенной системой и оцененных в работе [11], производились контрольные измерения на волне 9,6 *см*. Измерения показали, что в моменты прохождения источника через электрическую ось антенны паразитные поляризационные эффекты отсутствовали. Поэтому поляризованный сигнал оценивался по этим моментам времени. На рис. 3 приведены образцы записей поляризованной и неполяризованной компонент излучения Крабовидной туманности. На этом же рисунке приведен образец записи „нулевого уровня", иллюстрирующий экспериментальную чувствительность поляриметра (0,3°К). Калибровочный коэффициент определялся с помощью теплового эквивалента и при ослаблении в *RC*-усилителе в 10 *дб* был равен 0,55°К на деление (при 8 *дб* 0,35°К на деление соответственно).

Запись неполяризованной компоненты рис. 3а получена с помощью поляризованного фильтра. Ослабление сигнала по мощности, обусловленное поляризационным фильтром, равно 2,4. Запись поляризованной компоненты рис. 3в проведена при позиционном угле основной плоскости поляриметра (77°), близком к позиционному углу плоскости поляризации (82°). Максимальный поляризованный сигнал соответствовал $T_а = 1{,}2$°К.

Для определения поляризационных характеристик излучения Крабовидной туманности (степени поляризации и позиционного угла плоскости поляризации) было проведено 30 записей при различных позиционных углах основной плоскости поляриметра. Позиционный угол

„основной плоскости поляриметра" изменялся посредством поворота всей волноводной системы приемника 1—6 рис. 1 вокруг оси круглого волновода.

Методика измерений при различных позиционных углах и учет паразитных поляризационных эффектов в используемой нами антенне подробно проанализированы и описаны в [11,12].

Обработка полученных результатов дает основания полагать, что на волне 21 *см* при полосе 4 *мгц* имеет место линейная поляризация радиоизлучения Крабовидной туманности. Степень поляризации излучения $\rho = 0{,}5 \pm 0{,}15\%$; позиционный угол плоскости поляризации $\varphi = 82° \pm 5°$.

Полученные данные с учетом результатов измерений на других волнах радиодиапазона позволяют в первом приближении определить частотные зависимости ρ и φ и объяснить их эффектом Фарадея в туманности и ионосфере [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. S. J. Goldstein, Proc. IRE, **43**, 1663 (1955).
2. В. С. Воюцкий, Радиотехника и электроника, **3**, 244 (1958).
3. Генерирование электрических колебаний специальной формы, изд. Сов. радио, М., 1951.
4. В. В. Бунимович, Флюктуационные процессы в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1951.
5. А. Г. Кисляков, Изв. высш уч. зав.—Радиофизика, **1**, № 4, 81 (1958).
6. Н. В. Карлов, Радиотехника и электроника, **1**, 852 (1956).
7. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, **2**, 438 (1957).
8. Ф. В. Бункин, Н. В. Карлов, ЖТФ, **25**, 741 (1955).
9. В. В. Виткевич, В. А. Удальцов, Радиотехника и электроника, **2**, 1548 (1957).
10. P. G. Mezger, Z. Astroph., **46**, 234 (1958).
11. А. Д. Кузьмин, В. А. Удальцов, Астрон ж, **36**, 33 (1959).
12. В. А. Удальцов, Астрон ж (в печати); Труды ФИАН СССР (в печати).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
9 мая 1961 г.

CORRELATION POLARIMETER IN THE 20 *cm* BAND

V. A. Udaltsov

The 20-cm band polarimeter based on the correlation method of two-channel reception has been described. The disadvantages of correlation apparatus and methods of their elimination were discussed; the advantages of correlation polarimeter in comparison with the compensation and modulation ones were pointed out. It was shown that both polarized and nonpolarized components of a signal can be measured by correlation polarimeter. The working polarimeter has the following parameters: the pass band—4Mc, the noise factor — 5 the time constant of the output filter — 25 sec. Experimental sensitivity measured by the thermal equivalent is equal 0,3°K, the calculating sensitivity of the correlation polarimeter with the above parameters is 0,1°K. The polarimeter allowed to carry out the polarization measurements of Krab nebula with the accuracy of $\pm 0{,}15\%$ relative to the total emission of the nebula. The linear polarization of Krab nebula radio emission at the 21 cm (polarization degree—$p = 0{,}5\%$ and the position angle of the polarization plane —$\varphi = 82° \pm 5°$) was detected.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

О ВЛИЯНИИ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ИОНОСФЕРЫ НА ИЗМЕРЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЕЕ ПАРАМЕТРОВ

Ю. А. Рыжов, О. И. Юдин

Предложен метод измерения электронной концентрации с помощью искусственных спутников Земли, основанный на измерении фазового инварианта тригармонической волны. Рассмотрено влияние диффракции радиоволн на ионосферных неоднородностях на флюктуации фазового инварианта; обсуждается вопрос о флюктуациях приведенной разности допплеровских частот из-за диффракции на случайных неоднородностях электронной концентрации. Дана оценка точности измерения этим методом.

1. МЕТОД ФАЗОВОГО ИНВАРИАНТА

В ряде работ [1-3] рассмотрены некоторые методы изучения ионосферы и межпланетного газа с помощью искусственных спутников Земли и ракет. В частности, речь идет об измерении электронной концентрации $N(z_0)$ в точке нахождения спутника и интегральной электронной концентрации вдоль радиуса Земли $\int_0^{z_0} N(z)dz$. Для измерения этих параметров ионосферы можно использовать различные эффекты: допплеровское смещение частоты, эффекты, связанные с вариациями фазовых путей и времен группового запаздывания в ионосфере, и т. п. Общим для этих методов является исключение эффектов, связанных с изменением только геометрических параметров. В статье [3] показано, что предложенные методы приводят (с точностью до постоянных коэффициентов) к одинаковым функциональным зависимостям измеряемых величин от концентрации электронов.

В данной статье предлагается для определения $N(z)$ использовать измерение фазового инварианта $\overline{\Theta}$ в тригармонической волне [4]. Последний метод, давая, по существу, те же результаты, что и методы, рассмотренные в [3], более прост с точки зрения оценки флюктуаций.

В том же приближении, что и в [3], фазовый инвариант для плоской тригармонической волны, распространяющейся в ионосфере, может быть записан в виде:

$$\overline{\Theta} = \varphi_0 - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{2\pi e^2 \Delta\omega^2}{mc\cos\chi\,\omega_0\omega_1\omega_2}\left[\int_0^{z_0} N(z)\,dz - \operatorname{tg}^2\chi\int_0^{z_0}\frac{N(z)\,z}{R_0}\,dz\right]. \tag{1}$$

При выводе этого выражения мы использовали выражение для фазового пути в сферически слоистой ионосфере [3]:

$$\dot{L}_\Phi = r_0 - \frac{2\pi e^2}{m\omega\cos\chi}\left[\int_0^{z_0}\frac{N}{\omega \pm \omega_L}\,dz - \operatorname{tg}^2\chi\int_0^{z_0}\frac{Nz}{R_0(\omega \pm \omega_L)}\,dz\right] \tag{2}$$

и считали, что $\omega_L = (eH_0/mc)\cos\gamma \ll \omega_0;\ \omega_1;\ \omega_2$. В приведенных выражениях использованы следующие обозначения: φ_0 — фаза несущей частоты ω_0, φ_1, φ_2 — фазы колебаний ω_1, ω_2, χ — зенитный угол спутника. Частоты в тригармонической волне связаны соотношением:

$$\omega_0 - \omega_1 = \omega_2 - \omega_0 = \Delta\omega.$$

Изменение фазового инварианта при распространении тригармонической волны в среде обусловлено дисперсией. В ионосфере дисперсия вызывается как зависимостью показателя преломления от частоты, так и диффракцией на случайных неоднородностях показателя преломления. Первая причина приводит к регулярным изменениям фазового инварианта в зависимости от расстояния, проходимого волной в среде. Диффракция на случайных неоднородностях вызывает флюктуации фазового инварианта [6,7].

Необходимо уточнить место предлагаемого метода в ряду других методов, описанных в литературе. По сравнению с методом, использующим эффект Фарадея, методы, основанные на измерении допплеровского смещения приведенной разности двух когерентных частот, разности времен группового запаздывания и фазового инварианта более точны, так как на их точность не влияет вращение спутника и неоднородность магнитного поля Земли. В методе, использующем разность допплеровских частот, измеряется величина

$$\frac{d\Phi}{dt} \sim \left[N(z_0)\left(1 - \frac{z_0}{R_0}\operatorname{tg}^2\chi\right)\frac{dz_0}{dt} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^{z_0} N\,dz - \frac{3\sec\chi - 1}{R_0}\int_0^{z_0} Nz\,dz \right)\operatorname{tg}\chi\frac{d\chi}{dt}\right],$$

отличающаяся от величины $\bar{\Theta}(N)$ (1). Одновременное измерение и $d\Phi/dt$ и $\bar{\Theta}(N)$ (или времени группового запаздывания) при прочих равных условиях позволит более точно определять $N(z_0)$ и $\int_0^{z_0} N dz$.

2. ФЛЮКТУАЦИИ ФАЗОВОГО ИНВАРИАНТА

Во всех известных нам работах не учитывалось влияние флюктуаций измеряемых величин. Представляется необходимым провести этот учет как с точки зрения влияния флюктуаций на точность измерений, так и в целях изучения статистической структуры ионосферы. Как уже упоминалось выше, сравнительно просто может быть проведена оценка флюктуаций фазового инварианта.

Для оценки интенсивности флюктуаций фазового инварианта тригармонической волны, распространяющейся в ионосфере, необходимо найти спектр структурной функции фазового инварианта. Тем же методом, что и в [5,6], можно получить спектр $F_\Theta(\varkappa, 0)$ для случая произвольной величины разности волновых чисел $\Delta k = k_0 - k_1 = k_2 - k_0$:

$$F_\Theta(\varkappa, 0) = \frac{4\pi^3 e^4 L}{m^2}\left\{\frac{2}{c^2}\left(\frac{\Delta\omega^4}{\omega_0^2\omega_1^2\omega_2^2}\right) - \frac{k_0^2}{\omega_0^4}\left[1 - \frac{\sin(\varkappa^2 L/k_0)}{\varkappa^2 L/k_0}\right] - \right.$$

$$- \frac{k_1^2}{4\omega_1^2}\left[1 - \frac{\sin(\varkappa^2 L/k_1)}{\varkappa^2 L/k_1}\right] - \frac{k_2^2}{4\omega_2^2}\left[1 - \frac{\sin(\varkappa^2 L/k_2)}{\varkappa^2 L/k_2}\right] +$$

$$+\frac{k_0k_1}{\omega_0^2\omega_1^2}\left[1-\frac{\sin\left[\varkappa^2(k_0+k_1)L/2k_0k_1\right]}{\varkappa^2(k_0+k_1)L/2k_0k_1}\right]+\frac{k_0k_1}{\omega_0^2\omega_1^2}\left[1-\frac{\sin\left(\varkappa^2\Delta kL/2k_0k_1\right)}{\varkappa^2\Delta kL/2k_0k_1}\right]+$$

$$+\frac{k_0k_2}{\omega_0^2\omega_2^2}\left[1-\frac{\sin\left[\varkappa^2(k_0+k_2)L/2k_0k_2\right]}{\varkappa^2(k_0+k_2)L/2k_0k_2}\right]+\frac{k_0k_2}{\omega_0^2\omega_2^2}\left[1-\frac{\sin\left(\varkappa^2\Delta kL/2k_0k_2\right)}{\varkappa^2\Delta kL/2k_0k_2}\right]- \quad (3)$$

$$-\frac{k_1k_2}{2\omega_1^2\omega_2^2}\left[1-\frac{\sin\left[\varkappa^2(k_1+k_2)L/2k_1k_2\right]}{\varkappa^2(k_1+k_2)L/2k_1k_2}\right]-\frac{k_1k_2}{2\omega_1^2\omega_2^2}\times$$

$$\times\left[1-\frac{\sin\left(\varkappa^2\Delta kL/k_1k_2\right)}{\varkappa^2\Delta kL/k_1k_2}\right]\Bigg\}\Phi_N(\varkappa,0),$$

где L — путь, проходимый плоской тригармонической волной в среде, а $\Phi_N(\varkappa, 0)$ — трехмерный спектр флюктуаций концентрации электронов.

Из приведенного выше выражения видно, что если поле флюктуаций концентрации электронов — локально-однородное и изотропное, то и поле флюктуаций фазового инварианта (в отличие от тропосферы [6]) тоже локально-однородное. Указанное отличие от тропосферного случая связано с дисперсией показателя преломления. Как показано в [8], в настоящее время имеются прямые доказательства существования турбулентности в нижней ионосфере. Турбулентность в E-области не является, вообще говоря, изотропной, а в F-области характер неоднородностей, по-видимому, существенно отличается от локально-однородной турбулентности. Однако для оценок порядка величины флюктуаций мы будем считать, что

$$\Phi_N(\varkappa, 0) = 0{,}033\, C_N^2\, \varkappa^{-11/3} \qquad (\varkappa_0 < \varkappa < \varkappa_{\text{макс}}). \quad (4)$$

Оценки C_N^2 из анализа различных экспериментальных данных [8] приводят к значению $C_N^2 \simeq 2{,}3\cdot 10^4$ *см*$^{-20/3}$.

Неоднородность поля флюктуаций фазового инварианта, связанная с влиянием крупномасштабных неоднородностей, определяется эффектами, учитываемыми геометрической оптикой. По существу, эти эффекты могут быть отнесены к измеряемой величине и они автоматически учитываются формулой (1). Из выражения для спектра (3) следует, что условие применимости геометрической оптики имеет вид $\varkappa \ll 2\pi(\Delta\lambda L)^{-1/2}$ и интенсивность „мелкомасштабных" флюктуаций определяется энергией, заключенной в пределах от $\varkappa_1 \ll 2\pi(\Delta\lambda L)^{-1/2}$ до $\varkappa_{\text{макс}}$. Конкретный выбор значения $\varkappa_1$ на окончательных результатах не сказывается.

Интенсивность „мелкомасштабных" флюктуаций выражается интегралом

$$\overline{\Delta\Theta^2} = \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_{\text{макс}}} F_\Theta(\varkappa, 0)\, \varkappa\, d\varkappa. \quad (5)$$

После ряда преобразований можно получить выражение, удобное для оценок

$$\overline{\Delta\Theta^2} = \frac{1{,}8\, C_N^2\, \Delta\omega\, \omega_0^2 \pi^6 e^8}{m^4 c\, \omega_1^3 \omega_2^3}\, \varkappa_0^{-1/6} L^{11/6}. \quad (6)$$

Среднее значение фазового инварианта (измеряемая величина) по порядку величины равно

$$\bar{\Theta} \simeq \frac{2\pi e^2 \Delta\omega^2}{mc\,\omega_0\omega_1\omega_2}\,\overline{N}L. \quad (7)$$

Отношение

$$K = \frac{\overline{\Theta}}{\sqrt{\overline{\Delta\Theta^2}}} = \frac{4{,}5\,\overline{m}N\,\Delta\omega^{3/2}\,\omega_1^{1/2}\,\omega_2^{1/2}}{\pi^3 c^{1/2} C_N\,\omega_0^2}\,(\lambda_0 L)^{1/12} \qquad (8)$$

характеризует превышение измеряемой величины над флюктуациями. В таблице 1 приведены значения этого отношения для нескольких длин волн ($\lambda = 30$ *м*, 3 *м*, 0,3 *м*) и для расстояний от 200 до 2000 *км*.

Таблица 1

		λ		
		30 *м*	3 *м*	0,3 *м*
$\Delta\omega \ll \omega_0$	$\overline{\Theta}$	$1{,}7(1{,}0 \div 10)$	$1{,}7(10^{-1} \div 1{,}0)$	$1{,}7(10^{-2} \div 10^{-1})$
	K	4,0	13,5	39,0
$\Delta\omega = \omega_0/2$	$\overline{\Theta}$	$1{,}7(10^2 \div 10^3)$	$1{,}7(10 \div 10^2)$	$1{,}7(1{,}0 \div 10)$
	K	1,0	4,0	11,0

Из этой таблицы видно, что при определенном выборе параметров аппаратуры можно реализовать случай, когда регулярные изменения фазового инварианта не превышают 2π и измеряемая величина $\overline{\Theta}$ на порядок выше уровня флюктуаций. Как уже упоминалось выше, в наших оценках не учитывается влияние слоя F, поэтому оценки, приведенные в таблице 1, дают только порядки величин. Очевидно, что влияние верхних слоев ионосферы может привести только к росту $\overline{\Delta\Theta^2}$; что касается отношения K, то вид его зависимости от L может существенно измениться.

Для конструирования аппаратуры, измеряющей фазовый инвариант в тригармонической волне, необходимо заметить, что разность фаз двух колебаний, из которых одно получается при смешении несущего и бокового колебаний, а второе — при смешении несущего колебания и другого бокового (также разностная частота), является величиной, пропорциональной фазовому инварианту.

3. ФЛЮКТУАЦИИ ПРИВЕДЕННОЙ РАЗНОСТИ ДОППЛЕРОВСКИХ ЧАСТОТ

Рассмотрим вопрос о влиянии турбулентных неоднородностей на точность измерения допплеровского смещения разности двух когерентных частот.

Структурная функция приведенной разности фаз имеет вид:

$$D_s(\rho) = \overline{\{[m\varphi_1(\rho, L) - n\varphi_2(\rho, L)] - [m\varphi_1(0, L) - n\varphi_2(0, L)]\}^2} = \\ = m^2\overline{\Delta\varphi_1^2} - 2mn\,\overline{\Delta\varphi_1\Delta\varphi_2} + n^2\overline{\Delta\varphi_2^2}, \qquad (9)$$

где

$$\overline{\Delta\varphi_{1,2}^2} = \overline{[\varphi_{1,2}(\rho, L) - \varphi_{1,2}(0, L)]^2};$$

$$\overline{\Delta\varphi_1\Delta\varphi_2} = \overline{[\varphi_1(\rho, L) - \varphi_1(0, L)]\,[\varphi_2(\rho, L) - \varphi_2(0, L)]^2},$$

$\varphi_{1,2}(\rho, L)$ — флюктуации фазы в плоскости $x = L$ на расстоянии ρ от оси x и $m\omega_1 = n\omega_2 = \omega$.

Двухмерный спектр приведенной разности фаз имеет вид:

$$F_s(\varkappa, 0) = \frac{4\pi^3 e^2 L k^2}{m^2}\left\{2\left(\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\omega_1^2\omega_2^2}\right)^2 - \frac{1}{\omega_1^4}\left[1-\frac{\sin(\varkappa^2 L/k_1)}{\varkappa^2 L/k_1}\right]-\right.$$
$$-\frac{1}{\omega_2^2}\left[1-\frac{\sin(\varkappa^2 L/k_2)}{\varkappa^2 L/k_2}\right]+\frac{2}{\omega_1^2\omega_2^2}\left[1-\frac{\sin[\varkappa^2(k_1+k_2)L/2k_1k_2]}{\varkappa^2(k_1+k_2)L/2k_1k_2}\right]+ \tag{10}$$
$$\left.+\frac{2}{\omega_1^2\omega_2^2}\left[1-\frac{\sin[\varkappa^2(k_2-k_1)L/2k_1k_2]}{\varkappa^2(k_2-k_1)L/2k_1k_2}\right]\right\}\Phi_N(\varkappa, 0).$$

В методе когерентных частот для определения распределения электронной концентрации в ионосфере измеряют производную по времени от приведенной разности фаз, так как сама приведенная разность фаз не однозначна (меняется в пределах, много больших 2π). Для вычисления флюктуаций этой величины необходимо знать временной спектр приведенной разности фаз. Наиболее просто временные флюктуации могут быть найдены, если воспользоваться гипотезой „замороженной турбулентности". Тогда временной спектр приведенной разности фаз может быть найден из пространственного спектра. При использовании гипотезы „замороженной турбулентности" необходимо учитывать и скорости дрейфа неоднородностей в ионосфере, и скорость движения спутника в направлении, перпендикулярном линии наблюдатель—спутник. Ввиду того, что скорость спутника намного превышает скорости дрейфов в ионосфере, в основном будут сказываться флюктуации, связанные с движением спутника. При этом задача рассматривается в том же приближении, что и в [5], т. е. речь идет о распространении плоской волны в бесконечной турбулентной среде. Флюктуации приведенной разности фаз приводят к размытию спектральной линии приведенной разности допплеровских частот.

Интересующая нас задача о точности измерения допплеровского смещения приведенной разности когерентных частот эквивалентна задаче об изучении спектральной линии генератора, размытой из-за флюктуаций частоты [9,10]. Речь идет, таким образом, о форме спектральной линии колебания вида

$$y(t) = A\cos[\nu_g t + \alpha(t)]; \qquad \alpha(t) = \int_{t_0}^{t}\Delta\nu(\xi)d\xi, \tag{11}$$

где A — амплитуда, ν_g — измеряемая приведенная разность частот, $\alpha(t)$ — случайная фаза, $\Delta\nu(t)$ — флюктуации частоты. Вообще говоря, процесс $\alpha(t)$ не является стационарным ввиду неоднородности поля приведенной разности фаз. Тем не менее, если учесть конечность времени наблюдения или исключить близкие к нулю частоты, как это сделано в [11], для оценки ширины спектральной линии рассматриваемого процесса можно воспользоваться результатами указанных выше работ. Известно [9], что когда спектральная плотность флюктуаций частоты $\omega(f)$ при $f = 0$ равна нулю, образование конечной ширины линии не будет иметь места и задача сведется к выделению монохроматической линии из шумов. Можно показать, что спектральная плотность флюктуаций приведенной разности частот вблизи нуля пропорциональна $f^{-2/3}$. Это означает, что спектральная линия будет иметь конечную ширину и для определения разности допплеровских частот необходимо определить положение максимума в спектре $y(t)$. Для оценки эффективной ширины спектральной линии можно воспользоваться выражением [10]:

$$\Delta f = \sqrt{B_\nu(0)/2\pi}, \tag{12}$$

где $B_\nu(\tau)$ — функция корреляции флюктуаций разности приведенных частот.

Таким образом, нас интересует средний квадрат флюктуаций разности приведенных частот. Покажем, что, зная двухмерный спектр приведенной разности фаз, можно найти двухмерный спектр разности частот в предположении гипотезы замороженной турбулентности. Используем разложение локально-изотропного поля флюктуаций разности фаз:

$$S(\boldsymbol{r}) = S(0,0,0) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}}\right) d\varphi(\boldsymbol{\varkappa});$$
$$d\varphi(\boldsymbol{\varkappa})\, d\varphi^*(\boldsymbol{\varkappa}') = \delta(\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}')\Phi_s(\boldsymbol{\varkappa})\, d\boldsymbol{\varkappa}\, d\boldsymbol{\varkappa}', \tag{13}$$

$\Phi_s(\boldsymbol{\varkappa})$ — трехмерный спектр приведенной разности фаз. Предположим, что неоднородности смещаются ветром в поперечном по отношению к трассе (к оси x) направлении со скоростью v_n. Тогда временные флюктуации разности фаз могут быть рассмотрены с помощью (13), если в этом выражении заменить y на $v_1 t$, а z на $v_3 t$:

$$S(x_1, v_2 t, v_3 t) = S(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{i\varkappa_1 x_1} e^{i\boldsymbol{\varkappa}_n \boldsymbol{v}_n t}\right) d\varphi(\boldsymbol{\varkappa});$$
$$\boldsymbol{\varkappa}_n = (\varkappa_2, \varkappa_3). \tag{14}$$

Продифференцируем флюктуации разности фаз по времени:

$$\Delta\nu(x_1, v_2 t, v_3 t) = -\int_{-\infty}^{\infty} i(\boldsymbol{\varkappa}_n \boldsymbol{v}_n)\, e^{i\varkappa_1 x_1} e^{i\boldsymbol{\varkappa}_n \boldsymbol{v}_n t}\, d\varphi(\boldsymbol{\varkappa}). \tag{15}$$

Возвращаясь к старым переменным, получим разложение поля флюктуаций приведенной разности частот:

$$\Delta\nu(\boldsymbol{r}) = -\int_{-\infty}^{\infty} i(\boldsymbol{\varkappa}_n \boldsymbol{v}_n)\, e^{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}}\, d\varphi(\boldsymbol{\varkappa}). \tag{16}$$

Поле $\Delta\nu(\boldsymbol{r})$ однородно, но неизотропно. Определим функцию корреляции $\Delta\nu$:

$$B_\nu(\boldsymbol{\rho}) = \overline{\Delta\nu(\boldsymbol{r})\Delta\nu^*(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho})} = \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{\varkappa}_n \boldsymbol{v}_n)^2 \Phi_s(\boldsymbol{\varkappa})\, e^{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}}\, d\boldsymbol{\varkappa}. \tag{17}$$

Из этого выражения следует, что $\Phi_s(\boldsymbol{\varkappa})(\boldsymbol{\varkappa}_n \boldsymbol{v}_n)^2 = \Phi_{\Delta\nu}(\boldsymbol{\varkappa})$ — трехмерный спектр флюктуаций приведенной разности частот.

Введем в рассмотрение двухмерный спектр флюктуаций приведенной разности допплеровских частот:

$$F_{\Delta\nu}(\varkappa_2, \varkappa_3, x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\Delta\nu}(\boldsymbol{\varkappa})\, e^{i\varkappa_1 x_1}\, d\varkappa_1. \tag{18}$$

В частности,

$$F_{\Delta\nu}(\varkappa_2, \varkappa_3, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_s(\boldsymbol{\varkappa})(\boldsymbol{\varkappa}_n \boldsymbol{v}_n)^2 d\varkappa_1 = (\boldsymbol{\varkappa}_n \boldsymbol{v}_n)^2 F_s(\varkappa_2, \varkappa_3, 0), \tag{19}$$

где $F_s(\varkappa_2, \varkappa_3, 0)$ — двухмерный спектр приведенной разности фаз,

$$\overline{(\Delta\nu)^2} = B_\nu(0) = 2\int_{\infty}^{\infty} (\boldsymbol{\varkappa}_n \boldsymbol{v}_n)^2 F_s(\varkappa_2, \varkappa_3, 0)\, d\varkappa_2\, d\varkappa_3. \tag{20}$$

Найдем временной спектр флюктуаций $\omega_0(f)$. Рассматривая корреляционную функцию $\Delta v(\boldsymbol{r})$ в плоскости $x = L$ и полагая $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{v}_n\tau$, будем считать функцию $R_0(\tau) = B_v(v_n\tau)$ корреляционной функцией флюктуаций $\Delta v(\boldsymbol{r}, t)$ [5]. Вводя спектральную плотность процесса $w_v(f) = 2\int_{-\infty}^{\infty} R_v(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$, найдем:

$$w_0(f) = 2\int_{-\infty}^{\infty} B_v(v_n\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = 2\int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{\varkappa}_n\boldsymbol{v}_n) F_s(\varkappa_2, \varkappa_3, 0)\, e^{i\boldsymbol{\varkappa}_n\boldsymbol{v}_n\tau}\, d\tau\, d\boldsymbol{\varkappa}_n,$$

так как

$$B_v(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{\varkappa}_n\boldsymbol{v}_n)^2\, e^{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}}\, e^{-i\varkappa_1 x_1} F_s(\varkappa_2, \varkappa_3, x_1)\, d\boldsymbol{\varkappa}\, dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{\varkappa}_n\boldsymbol{v}_n)^2 F_s(\varkappa_2, \varkappa_3, \rho_1)\, e^{i\boldsymbol{\varkappa}_n\boldsymbol{\rho}}\, d\boldsymbol{\varkappa}_n. \tag{21}$$

Окончательно получим:

$$w_v(f) = 4\pi\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \boldsymbol{v}_n\boldsymbol{\varkappa}_n) F_s(\boldsymbol{\varkappa}_n, 0)(\boldsymbol{\varkappa}_n\boldsymbol{v}_n)^2\, d\boldsymbol{\varkappa}_n. \tag{22}$$

Для простоты положим, что v_n направлена по оси y, тогда, интегрируя по $\varkappa_2$, найдем:

$$w_v(f) = \frac{8\pi\omega^2}{v_n}\int_0^{\infty} F_s\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v_n^2} + \varkappa_3^2}, 0\right) d\varkappa_3 = \omega^2 w_s(f),$$

так как (см. [5])

$$\frac{8\pi}{v_n}\int_0^{\infty} F_s\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v_n^2} + \varkappa^2}, 0\right) d\varkappa = w_s(f),$$

где $w_s(f)$ — спектральная плотность флюктуаций приведенной разности фаз. Этот результат можно было предсказать заранее, поскольку мы рассматриваем производную процесса со стационарными приращениями. Эта производная является стационарным процессом со спектром $w(f) = 4\pi f^2 w_s(f)$, где w_s — спектр исходного процесса со стационарными приращениями. Из выражения (20), перейдя к полярным координатам, получим:

$$B_v(0) = 2\pi^2 v_n^2\int_0^{\infty} F_s(\varkappa, 0)\,\varkappa^3 d\varkappa. \tag{23}$$

Оценка, проведенная по формуле (12), приводит к значению эффективной ширины спектральной линии $\Delta f = 12$ *гц* для частот $f_{1,2} = 20$ *мгц* и 40 *мгц* ($L = 200$ *км*, $v_n = 8$ *км·сек*$^{-1}$).

Таким образом, измеряемая спектральная линия на частоте ν_g может оказаться довольно сильно размытой. Точность определения ν_g, таким образом, непосредственно связана с точностью определения положения максимума в спектре $w_v(f)$ и определяется применяемой аппаратурой и методом обработки результатов измерений. Из этого

следует, что ошибка измерения ν_g может быть заметно уменьшена по сравнению с величиной Δf. По порядку величины это не противоречит имеющимся экспериментальным данным [12].

Аналогичная ситуация имеет место и при измерении $\bar{\Theta}$. Приведенные в таблице 1 значения отношения $\bar{\Theta}/\sqrt{\overline{\Delta\Theta^2}}$ характеризуют максимальные флюктуации Θ. В зависимости от метода обработки результатов измерений точность определения Θ может быть повышена.

В заключение можно отметить, что более детальное рассмотрение затронутых вопросов даст возможность использовать рассмотренные выше экспериментальные методы для изучения флюктуаций в ионосфере.

ЛИТЕРАТУРА

1 Я Л. Альперт, УФН, **64**, 3 (1958).
2. Я. Л. Альперт, УФН, **71**, 369 (1960).
3. Э. Е. Митякова, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, Изв высш уч. зав.—Радиофизика, **3**, 949 (1960).
4. В. А. Зверев, Сб. Памяти А. А Андронова, изд. АН СССР, М, 1955.
5 В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд АН СССР, М, 1959
6 Ю. А Рыжов, Э. П. Лаптева, Изв высш. уч зав —Радиофизика, **3**, 976 (1960).
7 В А Зверев, Изв высш уч зав —Радиофизика, **3**, 723 (1960).
8 В И Татарский, Изв. высш уч зав —Радиофизика, **3**, 551 (1960)
9. А Н. Малахов, Радиотехника и электроника, **2**, 1295 (1957).
10 А Н Малахов, ЖЭТФ, **30**, 884 (1956).
11 В С Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, 1, 20 (1958).
12 W. J. Ross, J. Geophys. Res., **65**, 2607 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 21 июня 1961 г.

ON INFLUENCE OF ELECTRON DENSITY IRREGULARITIES ON MEASUREMENT OF SOME PARAMETERS OF THE IONOSPHERE

Yu. A. Ryzhov, O. I. Yudin

The method based on measurement of phase invariant of a trigarmonic wave has been proposed for electron density measurement using the artificial satellites. The influence of radio wave diffraction by ionospheric irregularities on phase invariant fluctuations has been considered. Fluctuations of the reduced Doppler frequency difference, due to diffraction by random electron density irregularities is discussed. The estimation of a measurement accuracy is given.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

К ВОПРОСУ ОБ ИЗМЕРЕНИИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ АТМОСФЕРЫ И ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ*

В. А. Разин, Н. М. Цейтлин

Обращается внимание на то, что при использовании больших антенных систем эффективно излучающий слой атмосферы или поверхности земли может оказаться во френелевой зоне, где диаграмма направленности антенны еще не сформировалась. В связи с этим выводится выражение для температуры антенны, справедливое при любом относительном расположении антенны и излучающих тел. С помощью этого выражения рассматривается вопрос об измерении радиоизлучения атмосферы и поверхности земли, а также вопрос об учете излучения земли при абсолютных измерениях интенсивности космического радиоизлучения.

При измерении радиоизлучения атмосферы и поверхности земли с помощью достаточно больших антенных систем приходится иметь дело со случаем, когда источники излучения расположены во френелевой зоне антенны. В самом деле, если размер антенны D, а длина волны λ, то зона френелевой диффракции простирается на расстояние $r \simeq D^2/\lambda$ от антенны; например, при $D \simeq 25$ *м* и $\lambda = 3$ *см* $r \simeq 20$ *км*, в то время как высота слоя атмосферы, эффективно излучающего на волне 3 *см*, всего лишь около 5 *км* [1].

В зоне френелевой диффракции поле излучения антенны (если она используется как передающая) осциллирует в пространстве, и для его описания нельзя воспользоваться понятием диаграммы направленности антенны**. Исходя из принципа взаимности, легко понять, что „отклик" антенны на излучение точечного источника, расположенного в зоне Френеля, будет существенно зависеть от того, находится ли источник излучения в диффракционном максимуме или минимуме поля антенны. Следовательно, для нахождения мощности, поступающей в антенну от тела, расположенного во френелевой зоне, необходимо интегрирование по объему тела. Яркостная же температура, определяющая величину мощности излучения, выходящего из тела через его поверхность, в этом случае, вообще говоря, не может быть использована для нахождения антенной температуры T_a***. Значение этого обстоятельства для исследований радиоизлучения атмосферы и поверхности земли, насколько нам известно, еще не обсуждалось. Поэтому ниже будет

---

* Доклад на Всесоюзной научной сессии, посвященной Дню Радио, Москва, 1961

** Пространственные осцилляции поля антенны в направлении потока излучения исчезают при удалении от антенны на такое расстояние, когда размер первой зоны Френеля становится больше размера антенны, т. е $\sqrt{r\lambda} > D$ или $r > D^2/\lambda$. На таком расстоянии поле антенны имеет локально структуру плоской волны, и его распределение в пространстве может быть описано диаграммой направленности. Это так называемая дальняя или фраунгоферова зона антенны.

*** Если излучающее тело находится в зоне Фраунгофера, то, как известно,

$$T_a = \int_{\Omega} T_я(\vartheta, \varphi)\, F(\vartheta, \varphi)\, d\Omega \Big/ \int_{4\pi} F(\vartheta, \varphi)\, d\Omega, \qquad (*)$$

где $T_я(\vartheta, \varphi)$—яркостная температура тела, $F(\vartheta, \varphi)$—диаграмма направленности антенны по мощности, ϑ, φ—полярные углы, Ω—телесный угол тела.

приведен вывод общего выражения для температуры антенны и получены из него некоторые следствия применительно к измерениям радиоизлучения атмосферы и поверхности земли.

1. Получить общее выражение для температуры антенны T_a можно несколькими способами. Например, можно было бы падающее на антенну излучение разложить на плоские волны и, поскольку „отклик" антенны на плоскую волну известен, определить напряжение на выходных клеммах антенны, используя принцип суперпозиции. Такой способ весьма удобен, если источники расположены на расстояниях от антенны, значительно превышающих D^2/λ. При этом волны от отдельных точечных источников на размерах антенны можно считать плоскими, чем и объясняется простота решения задачи (в результате получается формула (*)). Однако, когда источники расположены во френелевой зоне, вычислять мощность, улавливаемую антенной, проще, используя теорему взаимности [2] (если, разумеется, условия применимости теоремы взаимности выполнены). Для простоты предположим, что среды, окружающие антенну, изотропны и не вызывают магнитных потерь энергии. Обозначим посредством $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ напряженности электрического и магнитного полей антенны, δ-запитываемой током плотности $\boldsymbol{j}$, а через $\boldsymbol{E}^{ст}$, $\boldsymbol{H}^{ст}$—поля, возбуждаемые сторонними флюктуационными токами $\boldsymbol{j}^{ст}$, распределенными в окружающих антенну телах.

Ниже нас будут интересовать лишь спектральные характеристики всех этих величин, и, хотя это специально не будет оговариваться или отражаться в обозначениях, все последующие соотношения следует понимать как соотношения между спектральными характеристиками величин.

Согласно теореме взаимности,

$$\int \boldsymbol{j}^{ст}\boldsymbol{E}dV = \int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}^{ст}dV. \tag{1}$$

Умножим каждую часть равенства (1) на комплексно-сопряженную величину, усредним по ансамблю и воспользуемся тем, что пространственная функция корреляции сторонних токов имеет вид:

$$\overline{j_\alpha^{ст}(\boldsymbol{r}_1)\,j_\beta^{ст*}(\boldsymbol{r}_2)} = \frac{k\omega T}{4\pi^2}\,\varepsilon''\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2),$$

где k—постоянная Больцмана, T—температура тел, ε''—мнимая часть диэлектрической проницаемости тел (см. [3,4]). В результате получим:

$$\int_{V_т} \frac{k\omega T}{4\pi^2}\,\varepsilon''\,|\boldsymbol{E}|^2\,dV = \overline{|\varepsilon^{ст}|^2}\,I^2. \tag{2}$$

В формуле (2) $\varepsilon^{ст}$—напряжение на выходных клеммах антенны, обусловленное излучением окружающих антенну тел, I—полный ток, запитывающий антенну, $V_т$—объем излучающих тел. По определению температуры антенны $\overline{|\varepsilon^{ст}|^2} = \frac{1}{\pi}\,kT_aR_\Sigma$ *, где R_Σ —сопротивление излучения антенны. Если, кроме того, учтем, что $R_\Sigma I^2/2 = P$—это мощность, излучаемая антенной при запитывании ее током I, а $(\omega/8\pi)\,\varepsilon''\,|E|^2 = -\operatorname{div}\boldsymbol{S}$, где $\boldsymbol{S}$—вектор Пойнтинга, то из соотношения (2) получим общее выражение для T_a **:

---

* Предполагается, что используется шкала круговых частот ω от $-\infty$ до $+\infty$.

** Легко показать, что выражение (3) справедливо и при наличии магнитных потерь в окружающих антенну телах.

$$T_a = -\frac{1}{P}\int_{V_г} T \operatorname{div} \boldsymbol{S}\,dV. \tag{3}$$

Заметим, что $-\frac{1}{P}\operatorname{div}\boldsymbol{S}\,dV$ есть доля мощности излучения антенны, поглощаемая в элементе объема dV. Обозначив это отношение через α, формулу (3) можно записать в виде:

$$T_a = \int_{V_1} \alpha T\,dV. \tag{4}$$

В такой форме выражение для температуры антенны может быть найдено также из простых термодинамических соображений (см. [5], § 2, 3).

Для ряда приложений формулу (3) целесообразно преобразовать, воспользовавшись тождеством $T \operatorname{div} \boldsymbol{S} = \operatorname{div}(T\boldsymbol{S}) - \boldsymbol{S} \operatorname{grad} T$. Интеграл по объему от $\operatorname{div}(T\boldsymbol{S})$ можно затем преобразовать в интеграл по поверхностям излучающих тел. Таким образом,

$$T_a = \frac{1}{P}\int_{f_г} T(\boldsymbol{Sn})\,df + \frac{1}{P}\int_{V_т} \boldsymbol{S} \operatorname{grad} T\,dV, \tag{5}$$

где $f_т$ — поверхность тел, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к элементу поверхности тела, направленная внутрь тела, $\boldsymbol{S}$ — значение вектора Пойнтинга внутри тел.

2. Итак, для определения температуры антенны необходимо знать вектор Пойнтинга антенного поля и распределение температуры в телах. Точное вычисление $\boldsymbol{S}$, однако, весьма сложно, поэтому здесь мы ограничимся лишь качественным рассмотрением задачи.

Для определенности в дальнейшем мы будем рассматривать только зеркальные антенны. (Поле любых других антенн качественно может быть рассмотрено аналогично тому, как это сделано ниже.)

Как известно [6,7], мощность, излучаемая такими антеннами в переднее полупространство, во френелевой зоне концентрируется в волновом пучке, поперечное сечение которого имеет размеры порядка нескольких размеров апертуры антенны (например, через круглую площадку диаметра $3D$ с центром на оси волнового пучка и ориентированную перпендикулярно этой оси, на расстоянии $D^2/25\lambda$ от антенны проходит около 99% всей мощности, излучаемой антенной в переднее полупространство)*. В заднем полупространстве поле антенны представляет собой суперпозицию поля облучателя и поля, рассеянного отражателем. Долю мощности, излучаемую антенной в заднее полупространство, будем обозначать символом $\beta_з$. Таким образом, если P — вся мощность, излучаемая антенной, то в переднее полупространство излучается мощность $(1-\beta_з)P$. По мере удаления от антенны на расстояние больше D^2/λ эта мощность распределяется по главному и боковым лепесткам диаграммы направленности антенны. Обозначив долю мощности, уходящую в боковые лепестки, посредством $\beta_б$, найдем, что в главном лепестке диаграммы направленности антенны сосредоточена мощность $(1-\beta_б-\beta_з)P = (1-\beta)P$, где $\beta = \beta_б + \beta_з$ — фактор рассеяния антенны. В соответствии с этой качественной картиной распределения антенного поля в пространстве разобьем область интегрирования в выражении (5) на три части:

* Излучением, поступающим в переднее полупространство непосредственно от облучателя антенны, пренебрегаем. Это пренебрежение оправдывается тем, что облучатели зеркальных антенн конструируются обычно таким образом, чтобы мощность, излучаемая ими в переднее полупространство, составляла не более $1 \div 2\%$ от общей мощности, излучаемой антенной.

по волновому пучку, по части переднего полупространства вне волнового пучка и по заднему полупространству. Такое разбиение особенно целесообразно, когда изменение температуры внутри волнового пучка происходит лишь вдоль оси l пучка, оставаясь практически постоянным по его сечению f_l.

Это с достаточной точностью выполняется в случае атмосферы и земли. Действительно, даже при размерах антенны $D \simeq 100$ *м* сечение волнового пучка имеет линейные размеры порядка $300 \div 500$ *м*, так что изменение температуры атмосферы в сечении f_l не превышает 3°К*, и им можно пренебречь с погрешностью, не превышающей 1%. Что касается земли, то и ее температуру по сечению пучка можно считать постоянной, так как глубина проникновения радиоволн в землю составляет всего $(5 \div 10)\,\lambda$ даже для сухой почвы; при $\lambda \lesssim 10 \div 15$ *м* температура земли до такой глубины практически постоянна, и к тому же волны распространяются почти нормально к поверхности земли.

Считая внутри волнового пучка $T = T(l)$, запишем выражение (5) в виде**:

$$T_a = \left\{ \frac{1}{P} \int_{f_{l_0}} T(l_0)\, \boldsymbol{S}df - \frac{1}{P} \int_{f_{l_1}} T(l_1)\, \boldsymbol{S}df + \frac{1}{P} \int_{l_0}^{l_1} \frac{\partial T}{\partial l} \left[\int_{f_l} \boldsymbol{S}df \right] dl - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{P} \int_{f_б} T\boldsymbol{S}df + T_{a(0-l_0)} + T_{a_{отр}} \right\} + T_{a_б} + T_{a_з}, \qquad (6)$$

где $T_{a_б}$ — температура антенны от излучения части переднего полупространства вне волнового пучка, $T_{a_з}$ — температура антенны от излучения заднего полупространства, $f_б$—боковая поверхность волнового пучка, l_0, l_1—пределы интегрирования вдоль l—точки пересечения оси волнового пучка с граничными поверхностями рассматриваемого излучающего тела; $T_{a(0-l_0)}$ и $T_{a_{отр}}$ соответственно характеризуют отклик антенны на излучение части пространства внутри волнового пучка между антенной и поверхностью исследуемого тела и на излучение, отраженное от этого тела по направлению оси l. Выражение в фигурных скобках есть температура антенны от излучения. приходящего по направлению оси волнового пучка (по направлению главного лепестка в сформировавшейся диаграмме). Проводя в третьем слагаемом этого выражения интегрирование по частям и обозначая посредством $S_l = \int_{f_l} \boldsymbol{S}df$ полный поток энергии через поперечное сечение пучка f_l, получим:

$$T_a = \left\{ -\frac{1}{P} \left[\int_{l_0}^{l_1} T \frac{\partial S_l}{\partial l}\, dl + \int_{f_б} T\boldsymbol{S}df \right] + T_{a(0-l_0)} + T_{a_{отр}} \right\} + T_{a_б} + T_{a_з}. \qquad (7)$$

С помощью этого соотношения можно достаточно точно оценить величину T_a. Разобьем условно область френелевой диффракции на две части: зону геометрической оптики ($\lambda \ll r < D^2/(10 \div 25)\,\lambda$), когда на раскрыве антенны укладывается больше трех-пяти зон Френеля, и зону

---

* Для сферически слоистой атмосферы с зависимостью температуры только от высоты: $T = T_0 - 6{,}5\,h$ (*км*), где T_0—температура у поверхности земли

** В формулах (6) и (7) для удобства принято $\boldsymbol{S}df > 0$

резко осциллирующего поля, когда на раскрыве антенны укладывается от одной до трех-пяти зон Френеля ($D^2/(10 \div 25)\lambda < r < D^2/\lambda$).

Рассмотрим сначала прием излучения из зоны геометрической оптики ($T_a^г$). В этой области вся энергия, излучаемая антенной в переднее полупространство, сосредоточена в волновом пучке и равна, как уже сказано, $(1-\beta_з)P$, а величины $T_{a_б}$ и $\int_{f_б} TSdf$ равны нулю. Таким образом,

$$T_a^г = \left\{ -\frac{1}{P} \int_{l_0}^{l_1} T \frac{\partial S_l}{\partial l} dl + T'_{a_{(0-l_0)}} + T'_{a_{отр}} \right\} + T'_{a_з} \qquad (8)$$

(в выражении (8) и ниже штрихами отмечены величины, относящиеся к случаю, когда излучение исходит из области геометрической оптики). Изменение величины S_l определяется поглощением электромагнитных волн (считаем, что внутри излучающего объема отражения несущественны):

$$dS_l = -\varkappa S_l dl, \qquad (9)$$

где $\varkappa$—коэффициент поглощения в направлении оси волнового пучка. Из соотношений (9) и (8), учитывая, что $S_l = S_{l_0} e^{-\int_{l_0}^{l} \varkappa dl}$, где S_{l_0}—поток энергии через сечение f_{l_0} волнового пучка, равный

$$S_{l_0} = (1-\beta_з) P e^{-\int_0^{l_0} \varkappa dl} (1-R)$$

(R—эффективный коэффициент отражения по мощности от поверхности излучающего тела), получаем:

$$T_a^г = \left\{ (1-\beta_з)(1-R) e^{-\int_0^{l_0} \varkappa dl} \int_{l_0}^{l_1} T\varkappa e^{-\int_{l_0}^{l} \varkappa dl} dl + T'_{a_{(0-l_0)}} + T'_{a_{отр}} \right\} + T'_{a_з}. \qquad (10)$$

Для того, чтобы оценить отклик антенны на излучение из зоны осциллирующего поля ($T_a^{осц}$), рассмотрим другой крайний случай—прием излучения из фраунгоферовой зоны ($T_a^ф$) Для этого воспользуемся соотношением (6), где в качестве волнового пучка возьмем главный лепесток диаграммы направленности, в котором сосредоточена мощность излучения $P_{гл} = (1-\beta_б-\beta_з)P^*$. Тогда

$$T_a^ф = \left\{ (1-\beta_б-\beta_з)(1-R) e^{-\int_0^{l_0} \varkappa dl} \int_{l_0}^{l_1} T\varkappa e^{-\int_{l_0}^{l} \varkappa dl} dl + \right.$$
$$\left. + T_{a_{(0-l_0)}} + T_{a_{отр}} \right\} + T_{a_б} + T_{a_з}. \qquad (11)$$

В формуле (11) так же, как и в (10), выражение в фигурных скобках характеризует отклик антенны на излучение, принимаемое по направ-

* Величину $T_a^ф$ легко получить также из выражения (*), которое, в свою очередь, непосредственно следует из (3) или (5).

лению главного лепестка ($T_{a_{гл}}$). Из сравнения (10) и (11) следует, что в случае, когда можно пренебречь величинами $T'_{a_{(0-l_0)}}$, $T'_{a_{отр}}$ и $T_{a_{(0-l_0)}}$, $T_{a_{отр}}$,

$$\frac{T^{г}_{a_{гл}}}{T^{ф}_{a_{гл}}} = \frac{1-\beta_з}{1-\beta_б-\beta_з} = K > 1. \tag{12}$$

Таким образом, если можно воспользоваться соотношением (12), то

$$T^{г}_{a_{1л}} > T^{ф}_{a_{гл}}.$$

Ясно, что при приеме излучения из промежуточной области осциллирующего поля

$$T^{ф}_{a_{гл}} < T^{осц}_{a_{гл}} < T^{г}_{a_{гл}} = KT^{ф}_{a_{гл}}.$$

В качестве оценки для $T^{осц}_{a_{гл}}$ можно взять среднее арифметическое от $T^{г}_{a_{гл}}$ и $T^{ф}_{a_{гл}}$, т. е.

$$T^{осц}_{a_{гл}} \simeq T^{ф}_{a_{гл}}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{\beta_б}{1-\beta}\right). \tag{13}$$

При обычных значениях $\beta \simeq 0{,}2 \div 0{,}4$ и $\beta_б \simeq \beta_з$

$$T^{осц}_{a_{гл}} \simeq T^{ф}_{a_{гл}}\,[1+(0{,}05 \div 0{,}15)]. \tag{14}$$

3. Перейдем теперь к рассмотрению измерений радиоизлучения атмосферы и земли.

а) Измерение радиоизлучения атмосферы. В случае атмосферы $l_0 = 0$ и $R = 0$ (так как отражения в атмосфере можно считать несущественными), т. е. $T_{a_{(0-l_1)}} = T'_{a_{(0-l_0)}} = T_{a_{отр}} = T'_{a_{отр}} = 0$. С учетом этого отклик антенны на радиоизлучение атмосферы выражается соотношениями (10), (11), (13), где $l_1 = l_a$—эффективная длина пути волны в атмосфере (см. [1]). При относительных измерениях (например, при измерении поглощения в атмосфере по ее собственному радиоизлучению) фоновые шумы ($T_{a_б}$ и $T_{a_з}$), по существу, исключаются, и измеряемое приращение температуры антенны равно приращению $T_{a_{гл}}$. Приведем выражения для $T_{a_{гл}}$:

при $l_a < D^2/(10 \div 25)\,\lambda$

$$T^{г}_{a_{гл}} = (1-\beta_з)\int_0^{l_a} T\varkappa e^{-\int_0^{l}\varkappa dl}\,dl; \tag{15}$$

при $D^2/(10 \div 25)\,\lambda < l_a < D^2/\lambda$

$$T^{осц}_{a_{гл}} \simeq \left(1-\beta_з-\frac{\beta_б}{2}\right)\int_0^{l_a} T\varkappa e^{-\int_0^{l}\varkappa dl}\,dl; \tag{15а}$$

при $l_a \gg D^2/\lambda$

$$T^{ф}_{a_{1л}} = (1-\beta_з-\beta_б)\int_0^{l_a} T\varkappa e^{-\int_0^{l}\varkappa dl}\,dl. \tag{15б}$$

При абсолютных измерениях необходим также учет величин $T_{a_б}$ и $T_{a_з}$. Если антенна направлена в зенит, $T_{a_б}$ целиком определяется радиоизлучением атмосферы, а $T_{a_з}$ — излучением земли*. Однако при произвольной ориентации антенны в $T_{a_б}$ и $T_{a_з}$ вносят вклад и излучение земли, и излучение атмосферы. Не разграничивая общее фоновое (т. е. попадающее в антенну помимо основного направления) излучение на $T_{a_б}$ и $T_{a_з}$, рассмотрим отдельно фоновое излучение атмосферы $T_{a\,ф\,атм}$ и земли $T_{a\,ф\,земли}$ при двух направлениях луча антенны: в зенит и под малым углом к горизонту.

Очевидно, когда антенна направлена в зенит, а эффективно излучающий слой атмосферы находится в области геометрической оптики, $T^{г}_{a\,ф\,атм}=0$. Если же основная толща атмосферы расположена во фраунгоферовой зоне, то на сантиметровых и дециметровых волнах $T^{ф}_{a\,ф\,атм}\simeq 6\beta_б$ (°К) [8], что составляет при $\beta_б\simeq 0{,}1\div 0{,}2$ около 1°К. Величина $T_{a_{ф\,атм}}$ получается такого же порядка и тогда, когда атмосфера находится в осциллирующей области антенны.

Если антенна направлена на горизонт, то на сантиметровых и дециметровых волнах получаются соответственно значения

$$T^{г}_{a\,ф\,атм}\simeq 3\beta_з\ [°К]\simeq 0{,}5°К \quad \text{и} \quad T^{ф}_{a\,ф\,атм}\simeq 3\beta\ [°К]\simeq 1°К.$$

При оценке фонового радиоизлучения земли будем считать, что эффективно излучающий слой земли находится по отношению к антенне в области геометрической оптики. В этом приближении за отражателем находится область нулевого поля (область тени), а поле вне отражателя в заднем полупространстве целиком определяется излучением облучателя. Так как по отношению к облучателю земля расположена во фраунгоферовой зоне, при расчете $T_{a\,ф\,земли}$ можно воспользоваться выражением (*), в котором F—диаграмма облучателя, $T=T_0\,(1-R)$, а интегрирование проводится по телесному углу $\Omega_з$, под которым из облучателя видна поверхность земли. Примем для оценки, что излучение облучателя в заднем полупространстве вне зеркала является изотропным. Тогда из формулы (*) получим:

$$T_{a\,ф\,земли}\simeq \beta_н T_0 \int\limits_{\Omega'_з} (1-R)\,d\Omega \Big/ \int\limits_{\Omega'_з} d\Omega, \tag{16}$$

где $\beta_н$—фактор рассеяния антенны в нижнее полупространство, занимаемое землей, а $\Omega'_з$—часть $\Omega_з$, в которой поле облучателя отлично от нуля.

Оценим по формуле (16) $T_{a\,ф\,земли}$ для антенны, направленной в зенит, и для антенны, направленной на горизонт.

1) Антенна направлена в зенит. Переходя к сферическим координатам φ и ϑ (ϑ—угол луча с поверхностью земли) с центром в месте расположения облучателя, получаем из формулы (16):

---

* В $T_{a_з}$ вносит, разумеется, некоторый вклад излучение атмосферы, отраженное от поверхности земли. Но, как будет ясно из дальнейшего изложения, этот вклад на сантиметровых и дециметровых волнах составляет доли градуса, а на миллиметровых волнах удобно оценивать сразу температуру $T_{a_б}+T_{a_з}$, обусловленную как излучением атмосферы, так и излучением земли, включая и отраженное от земли излучение атмосферы.

$$T_{\text{аф земли}} = \beta_{\text{н}} T_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\vartheta_1}^{0} (1-R)\cos\vartheta d\vartheta \Big/ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\vartheta_1}^{0} \cos\vartheta\, d\vartheta,$$

где $\vartheta_1 = \pi/2 - \theta/2$, θ—видимый угол раскрыва антенны из центра облучателя. Обычно $\theta \approx 120°$ и $\vartheta_1 \simeq 30°$, т. е.

$$T_{\text{аф земли}} \simeq 2\beta_{\text{н}} T_0 \int_{-\pi/6}^{0} (1-R)\cos\vartheta\, d\vartheta. \tag{17}$$

Расчет по формуле (17) дает при диэлектрической проницаемости почвы $\varepsilon = 4$

$$\begin{aligned} T_{\text{аф земли}} &\simeq 0{,}65\beta_{\text{н}} T_0; \\ T_{\text{аф земли}} &\simeq 0{,}7\beta_{\text{н}} T_0. \end{aligned} \tag{18}$$

(Коэффициент 0,65 отвечает горизонтальной поляризации, а 0,7—вертикальной.)

2) Антенна направлена под малым углом к горизонту. В этом случае

$$T_{\text{аф земли}} \simeq \beta_{\text{п}} T_0 \left[2\int_{\theta/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{-\pi/2}^{0} (1-R)\cos\vartheta d\vartheta + 2\int_{0}^{\theta/2} d\varphi \int_{-\pi/2}^{-\theta/2} (1-R)\cos\vartheta d\vartheta\right] \times$$

$$\times \left[2\int_{\theta/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{-\pi/2}^{0} \cos\vartheta\, d\vartheta + 2\int_{0}^{\theta/2} d\varphi \int_{-\pi/2}^{-\theta/2} \cos\vartheta d\vartheta\right]^{-1}.$$

При $\theta \simeq 120°$ с погрешностью $10 \div 15\%$

$$T_{\text{аф земли}} \simeq \beta_{\text{п}} T_0 \int_{-\pi/2}^{0} \cos\vartheta\,(1-R)\, d\vartheta. \tag{19}$$

Формула (19) совпадает с соответствующим выражением, приведенным в обзоре [8], где имеется расчет $T_{\text{аф земли}}$, выполненный для разных значений ε в предположении, что земля расположена во фраунгоферовой зоне. При $\varepsilon = 4$, согласно [8],

$$\begin{aligned} T_{\text{аф земли}} &= 0{,}63\beta_{\text{н}} T_0; \\ T_{\text{аф земли}} &= 0{,}8\beta_{\text{н}} T_0, \end{aligned} \tag{20}$$

где коэффициент 0,6 отвечает горизонтальной поляризации, а 0,8—вертикальной. Как следует из сравнения (18) и (20), величины $T_{\text{аф земли}}$, вычисленные по формулам (17) и (19) при $\varepsilon = 4$ и при одном и том же значении $\beta_{\text{н}}$, с погрешностью $10 \div 15\%$ совпадают. Это дает возможность использовать формулы (17) и (19) и соответствующие расчеты для разных ε, приведенные в [8], для оценок $T_{\text{аф земли}}$ при произвольном направлении луча антенны. Заметим, что $\beta_{\text{н}} = \beta_{\text{з}}$, если антенна направлена в зенит, в то время как при направлении ее луча под малым углом к горизонту, когда волновой пучок еще не касается поверхности земли, $\beta_{\text{н}} \simeq \frac{1}{2}\beta_{\text{з}}$. В этом случае уменьшается и фоновая температура антенны от излучения земли.

На миллиметровых волнах радиотемпература атмосферы близка к температуре земли T_0; поэтому фоновая температура $T_{\text{а}_\text{б}} + T_{\text{а}_\text{з}}$ близка к βT_0 и составляет при $\beta \simeq 0{,}2 \div 0{,}3$ примерно $60° \div 90°$К.

б) Измерение радиоизлучения земли. Температуру эффективно излучающего слоя земли толщиной $(5 \div 10)\,\lambda$ можно считать постоянной и равной T_0*. Если этот слой земли расположен в области геометрической оптики, то (см. формулу (10))

$$T_{\text{г}_{\text{земли}}} = \left\{(1-\beta_{\text{з}})\,(1-R)\exp\left(-\int_0^{l_0}\varkappa dl\right) T_0 \int_{l_0}^{l_1}\varkappa\exp\left(-\int_{l_0}^{l}\varkappa dl\right) dl + \right.$$

$$\left. + T'_{\text{a}(0-l_0)} + T'_{\text{a}_{\text{отр}}}\right\} + T'_{\text{a}_{\text{з}}}$$

или, учитывая, что

$$\int_{l_0}^{l_1}\varkappa\exp\left(-\int_{l_0}^{l}\varkappa dl\right) dl = -\int_{l_0}^{l_1}\frac{d}{dl}\left[\exp\left(-\int_{l_0}^{l}\varkappa dl\right)\right] dl \simeq 1,$$

так как $\exp\left(-\int_{l_0}^{l_1}\varkappa\, dl\right) \ll 1$,

$$T'_{\text{a}_{\text{земли}}} = \left\{(1-\beta_{\text{з}})\,(1-R)\,T_0\exp\left(-\int_0^{l_0}\varkappa\, dl\right) + T'_{\text{a}(0-l_0)} + T'_{\text{a}_{\text{отр}}}\right\} + T'_{\text{a}_{\text{з}}}, \quad (21)$$

где $T'_{\text{a}(0-l_0)}$ и $T'_{\text{a}_{\text{отр}}}$ определяются излучением атмосферы. Принимая, что температура атмосферы вблизи поверхности земли также равна T_0, имеем:

$$T'_{\text{a}(0-l_0)} = (1-\beta_{\text{з}})\int_0^{l_0} T\varkappa\exp\left(-\int_0^{l}\varkappa\, dl\right) dl \simeq (1-\beta_{\text{з}})\,T_0\left[1-\exp\left(-\int_0^{l_0}\varkappa dl\right)\right];$$

$$T'_{\text{a}_{\text{отр}}} = RT_{\text{a}_{\text{гл}}}, \quad (22)$$

где $T_{\text{a}_{\text{гл}}}$ определяется согласно (15) в направлении зеркального отражения луча антенны от поверхности земли.

Выражение, аналогичное (21), получается и в случае, если эффективно излучающий слой земли расположен во фраунгоферовой зоне. При этом, однако, вместо $\beta_{\text{з}}$ нужно использовать β, а $T_{\text{a}_{\text{гл}}}$ определять по формуле (15б).

Фоновая температура антенны от излучения земли равна нулю при направлении электрической оси антенны нормально к поверхности земли, а при направлении на горизонт рассчитывается согласно (19).

В заключение отметим, что полученные выше результаты применимы не только при исследовании радиоизлучения атмосферы и земли, но и при измерении радиоизлучения любых распределенных источников достаточно больших размеров, температура которых по сечению волнового пучка антенны постоянна.

Авторы признательны М. А. Миллеру и В. С. Троицкому за обсуждение полученных результатов.

---

* Для учета градиента температуры земли вместо T_0 надо писать $T_{\text{ср}} \simeq T_0 + \frac{1}{\varkappa_{\text{ср}}}\frac{\partial T}{\partial l}$, где $\varkappa_{\text{ср}} = \frac{1}{l_1-l_0}\int_{l_0}^{l_1}\varkappa\, dl$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 4, 21 (1959).
2. М. Л. Левин, ЖТФ, 25, 2313 (1955).
3. С. М. Рытов, Теория электрических флюктуаций и теплового излучения, изд. АН СССР, М., 1953.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957, стр. 470.
5. Д. Л. Пози, Р. Н. Брейсуэлл, Радиоастрономия, ИЛ, М, 1958.
6. Г. С. Горелик, Колебания и волны, ГИФМЛ, М, 1959, гл. VIII, IX.
7. Антенны сантиметровых волн, ч. I, изд. Сов. радио, М., 1950.
8. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, 393 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 мая 1961 г.

TO THE QUESTION OF ATMOSPHERE AND EARTH SURFACE RADIO EMISSION MEASUREMENT

V. A. Razin, N. M. Tseitlin

It was noticed that an effectively radiating layer may be displaced in Fresnel's zone where the antenna pattern is not yet formed, when using large antenna systems.

In this connection the antenna temperature expression has been obtained, which is true for any relative positions of the antenna and radiation sources. The question of atmosphere and earth surface radio emission measurement has been examined by means of this expression, as well as accounting the earth emission in absolute measurements of cosmic radio emission intensity.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ, ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Б. Н. Гершман и В. Л. Гинзбург

Рассматривается вопрос о распространении волн в произвольной анизотропной, однородной в пространстве и постоянной во времени среде как при учете пространственной дисперсии, так и в пренебрежении ею. Простым способом выведены различные соотношения между выражениями, квадратичными относительно амплитуд полей. Получены неравенства для производных от компонент $\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ по частоте ω. Показано, что в отсутствие пространственной дисперсии вектор групповой скорости всегда образует острый угол с волновым вектором $\boldsymbol{k}$, а величина $\hat{n}^2=(n-i\varkappa)^2$ в отсутствие поглощения всегда вещественна. Выясняется причина, по которой указанные утверждения могут быть несправедливыми при наличии пространственной дисперсии.

В последнее время в теории распространения электромагнитных волн в однородных средах основное внимание уделяется учету влияния пространственной дисперсии, особенно в применении к магнитоактивной плазме и кристаллам. Для таких сред, являющихся анизотропными, обычно получаются весьма громоздкие выражения для показателя преломления n, показателя поглощения $\varkappa$ и вектора групповой скорости $\boldsymbol{U}$ в зависимости от частоты ω и волнового вектора $\boldsymbol{k}$. В связи с этим полезно иметь в виду некоторые теоремы и соотношения, носящие весьма общий характер. Ряд таких соотношений не встречался нам в литературе; другие мы получили несколько проще или в более общем виде, чем в известных нам статьях.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СВЯЗИ МЕЖДУ ВЫРАЖЕНИЯМИ, КВАДРАТИЧНЫМИ ОТНОСИТЕЛЬНО АМПЛИТУД ПЛОСКИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Исходим из следующих уравнений электромагнитного поля:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t}; \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \tag{1.1}$$

Здесь векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ определены таким образом, что сила, действующая на движущийся со скоростью $\boldsymbol{v}$ заряд e, равна

$$\boldsymbol{F}=e\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right).$$

Имея в виду однородную в пространстве и постоянную во времени среду, будем рассматривать плоские монохроматические волны. Для электрического поля $\boldsymbol{E}$ имеем:

$$\boldsymbol{E}(r, t)=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}+\boldsymbol{E}_0^{*} e^{-i(\omega t-\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}\right). \tag{1.2}$$

Аналогичные выражения используются для $\boldsymbol{D}'$ и $\boldsymbol{B}$. В (1.2) в соответствии с интересующей нас здесь постановкой задачи частота ω считается вещественной.

Векторы $\boldsymbol{D}_0'$ и $\boldsymbol{E}_0$ связаны между собой соотношениями:

$$D'_{0i} = \varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) E_{0j}; \quad \varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) - i\frac{4\pi\sigma_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})}{\omega};$$
$$D'^{*}_{0i} = \varepsilon'^{*}_{ij} E^{*}_{0j}; \quad \varepsilon'^{*}_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) = \varepsilon_{ij}(-\omega, -\boldsymbol{k}^{*}), \tag{1.3}$$

где тензоры ε_{ij} и σ_{ij} — эрмитовские, по дважды встречающимся индексам проводится суммирование и последнее соотношение вытекает из требования вещественности $\boldsymbol{D}'$ при вещественном $\boldsymbol{E}$. Связь (1.3) при сделанных предположениях является самой общей. В частности, если $\boldsymbol{D}'$ зависит от $\boldsymbol{B}$, то выражение (1.3) также справедливо, ибо $\boldsymbol{B}$ можно связать с $\boldsymbol{E}$ с помощью второго из уравнений поля (1.1). Пренебрежение пространственной дисперсией в немагнитной среде эквивалентно использованию тензора

$$\varepsilon'_{ij}(\omega, 0) \equiv \varepsilon'_{ij}(\omega); \tag{1.4}$$

в изотропной среде $\varepsilon'_{ij}(\omega) = \varepsilon'(\omega)\delta_{ij}$.

В случае магнитной среды предельный переход $k \to 0$ в $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ не вполне тривиален [1]. Ниже при использовании уравнений (1.1), (1.3) для случая (1.4) рассматриваемая среда будет для простоты считаться немагнитной ($\mu'_{ij} = \delta_{ij}$). Вместо предельного перехода $k \to 0$ при отсутствии пространственной дисперсии можно с самого начала использовать уравнения, пригодные и для магнитных сред *:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t}; \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t};$$
$$D'_{0i} = \varepsilon'_{ij}(\omega) E_{0j}; \quad B_{0i} = \mu'_{ij}(\omega) H_{0j}. \tag{1.5}$$

Для неоднородных волн $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 - i\boldsymbol{k}_2$, причем вещественные векторы $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$ не параллельны. По последней причине в неоднородных волнах плоскости равных фаз и амплитуд не совпадают (поле меняется в пространстве по закону $e^{-\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{r} \mp i\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{r}}$). В изотропной среде без пространственной дисперсии $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(\omega)$ и при отсутствии поглощения величина $\varepsilon'(\omega) = \varepsilon(\omega)$ является вещественной. Поэтому в такой непоглощающей, изотропной среде $\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 = 0$ и $k_1^2 - k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)$. В анизотропной среде, даже в отсутствие поглощения, характер неоднородных волн более сложен и заслуживает исследования (насколько нам известно, оно не проведено). Ниже будут рассматриваться лишь однородные плоские

В вопросе об обозначениях в литературе нет никакого единства, что и заставило нас определить все величины. В [2], например, используется форма записи (1.1), но с обозначением $\boldsymbol{D}$ вместо $\boldsymbol{D}'$. В [1] употребляется форма записи (1.1), но в отличие от [1] мы в (1.3) обозначаем тензор комплексной проницаемости через ε_{ij} (вместо $\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}$ в [1]; кроме того, в [1,2] используется запись $e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - \omega t)}$ вместо $e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}$, принятой в настоящей статье). Наконец, в [3] и ряде курсов теории поля полагается $\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{D} - i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}$, где $\boldsymbol{j}$—ток проводимости. Авторы, отнюдь не считая обозначения настоящей статьи наилучшими, исходили лишь из целесообразности ввести обозначения, наиболее близкие к употребляемым в недавно вышедших книгах [1,3]

волны, в которых $\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}\hat{n}\boldsymbol{s} \equiv \frac{\omega}{c}(n - i\varkappa)\boldsymbol{s}$, где единичный вектор $\boldsymbol{s}$ вещественен.

Для полей типа (1.2) уравнения (1.1) принимают вид:

$$\omega \boldsymbol{D}_0' = -c\,[\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}_0]; \quad \omega \boldsymbol{B}_0 = c\,[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_0] \tag{1.6}$$

и аналогично

$$\omega \boldsymbol{D}_0'^{*} = -c\,[\boldsymbol{k}^*\boldsymbol{B}_0^*]; \quad \omega \boldsymbol{B}_0^* = c\,[\boldsymbol{k}^*\boldsymbol{E}_0^*]. \tag{1.6а}$$

Для прозрачной среды * $\boldsymbol{k}^* = \boldsymbol{k}$ и уравнения (1.6) и (1.6а) совпадают. Нужно подчеркнуть, что до тех пор, пока не используется полная система уравнений поля (например, при употреблении только связей (1.3)), частота ω и волновой вектор $\boldsymbol{k}$ независимы. Если же речь идет о решениях уравнений поля (1.6), то уже $\omega = \omega(\boldsymbol{k})$.

Умножая уравнения (1.6) соответственно на $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{B}_0$, получаем (при $\omega \neq 0$):

$$\boldsymbol{D}_0'\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_0 = \frac{c}{\omega}\,\boldsymbol{k}\,[\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{B}_0]. \tag{1.7}$$

В прозрачной среде, кроме того,

$$\boldsymbol{D}_0'\boldsymbol{E}_0^* = \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_0^*, \tag{1.8}$$

как это следует из (1.6) и (1.6а). Из (1.6) после умножения уравнений соответственно на $\boldsymbol{E}_0^*$ и $\boldsymbol{B}_0^*$ получаем:

$$\omega\,(\boldsymbol{D}_0'\boldsymbol{E}_0^* \pm \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_0^*) = c\boldsymbol{k}\,\{[\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{B}_0] \pm [\boldsymbol{E}_0^*\boldsymbol{B}_0]\}. \tag{1.9}$$

Для прозрачной среды отсюда и из (1.8) следует, что

$$[\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{B}_0^*] = [\boldsymbol{E}_0^*\boldsymbol{B}_0]. \tag{1.10}$$

Из (1.6) и (1.6а) аналогичным путем получаем соотношения:

$$\omega\,([\boldsymbol{D}_0'\boldsymbol{B}_0^*] \pm [\boldsymbol{D}_0'^{*}\boldsymbol{B}_0]) = -c\,\{[[\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}_0]\,\boldsymbol{B}_0^*] \pm [[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_0]\,\boldsymbol{D}_0'^{*}]\}; \tag{1.11}$$

$$\omega\,([\boldsymbol{D}_0'^{*}\boldsymbol{B}_0] \pm [\boldsymbol{D}_0'\boldsymbol{B}_0^*]) = -c\,\{[[\boldsymbol{k}'^{*}\,\boldsymbol{B}_0^*]\,\boldsymbol{B}_0] \pm [[\boldsymbol{k}^*\boldsymbol{E}_0^*]\,\boldsymbol{D}_0']\}; \tag{1.11а}$$

$$\omega\,(D_{0i}'B_{0j}^* \pm B_{0i}D_{0j}'^{*}) = c\{[\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}_0]_i B_{0j}' \pm [\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_0]_i D_{0j}'^{*}\}. \tag{1.11б}$$

Для полноты картины упомянем и о других очевидных соотношениях, вытекающих из (1.6):

$$\boldsymbol{k}\boldsymbol{D}_0' = 0; \quad \boldsymbol{k}\boldsymbol{B}_0 = 0; \quad \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{D}_0' = 0; \quad \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{E}_0 = 0. \tag{1.12}$$

Если мы имеем дело не с полем типа (1.2), а с волновым пакетом, то для каждой из фурье-амплитуд пакета соотношения (1.6)—(1.12), конечно, сохраняются. При этом, однако, амплитуды E_0 и другие зависят от $\boldsymbol{k}$ и $\omega(\boldsymbol{k})$. Поэтому соотношения, получающиеся из (1.7)—(1.12) в результате дифференцирования по k_l ($l = 1, 2, 3$), можно относить к произвольному монохроматическому пакету только в случае, когда производные от амплитуд по k_l сокращаются. Как мы увидим, такого рода соотношения существуют.

---

* Разумеется, прозрачная среда является также непоглощающей, но не наоборот. Хорошо известным примером непоглощающей, непрозрачной среды является изотропная плазма без соударений в области частот, где $\varepsilon = 1 - 4\pi e^2 N/m\omega^2 < 0$ (подробнее см., например, [3]).

Продифференцируем (1.9) с учетом (1.3) по k_l. В результате получаем:

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_l}\left\{\frac{\partial\,[\omega\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})]}{\partial \omega} E_{0j}E^*_{0i} \pm \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}^*_0\right\} =$$

$$= c\,\{[\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{B}^*_0]_l \pm [\boldsymbol{E}^*_0\boldsymbol{B}_0]_l\} - \omega\frac{\partial\varepsilon'_{ij}}{\partial k_l}E_{0j}E^*_{0i} +$$

$$+\left\{(c\,[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_0] \mp \omega\boldsymbol{B}_0)\frac{d\boldsymbol{B}^*_0}{dk_l} \pm (c[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}^*_0] - \omega\,\boldsymbol{B}^*_0)\frac{d\boldsymbol{B}_0}{dk_l}\right\} - \tag{1.13}$$

$$-\left\{(c\,[\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}^*_0]_j + \omega\varepsilon'_{ij}E^*_{0i})\frac{dE_{0j}}{dk_l} + (\pm\, c[\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}_0]_i + \omega\varepsilon'_{ij}E_{0j})\frac{dE^*_{0i}}{dk_l}\right\}.$$

Для прозрачной среды $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}^*$ и $\varepsilon_{ij} = \varepsilon^*_{ji}$. Тогда при учете соотношений (1.6)—(1.6а) уравнение (1.13) с верхним знаком принимает вид:

$$\overline{W}\boldsymbol{U} = \overline{\boldsymbol{S}}; \quad \boldsymbol{U} = \frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}; \quad \overline{\boldsymbol{S}} = \overline{\boldsymbol{S}}_0 + \overline{\boldsymbol{S}}';$$

$$\overline{W} = \frac{1}{16\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})]E_{0j}E^*_{0i} + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}^*_0\right\}; \tag{1.14}$$

$$\overline{\boldsymbol{S}}_0 = \frac{c}{16\pi}([\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{B}^*_0] + [\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{B}_0]); \quad \overline{S}'_l = -\frac{\omega}{16\pi}\frac{\partial\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})}{\partial k_l}E^*_{0i}E_{0j}.$$

Итак, при вещественных $\boldsymbol{k}$ из (1.13) с верхним знаком действительно получается соотношение (1.14), не зависящее от производных dE_{0l}/dk_l и других.

Для непрозрачной среды, а в случае выбора нижнего знака и для прозрачной среды, уравнения (1.13) не представляют, видимо, какой-либо ценности, так как в них остаются производные от амплитуд поля по k_l. Что же касается формулы (1.14), то она связывает вектор групповой скорости $\boldsymbol{U} = \partial\omega/\partial\boldsymbol{k}$ со средней по времени плотностью энергии $\overline{\boldsymbol{W}}$ и со средним по времени потоком энергии $\overline{\boldsymbol{S}}$ (см. [1–6]). В отсутствие пространственной дисперсии поток $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_0$, где $\boldsymbol{S}_0$ — вектор Пойнтинга. Роль и смысл потока $\boldsymbol{S}'$ будут ясны из частного случая, рассмотренного в разделе 3.

Заметим, что без пространственной дисперсии соотношение (1.9) с верхним знаком имеет вид:

$$\overline{W}_0 = \frac{\boldsymbol{D}'_0\boldsymbol{E}^*_0 + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}^*_0}{16\pi} = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\overline{\boldsymbol{S}}_0. \tag{1.15}$$

При отсутствии не только пространственной, но и частотной дисперсии $\overline{W} = \overline{W}_0$ и уравнение (1.14) принимает форму: $\overline{W}_0\boldsymbol{U} = \overline{\boldsymbol{S}}_0$. Отсюда и из (1.15) $\boldsymbol{k}\boldsymbol{U}/\omega = 1$ или $U_k = V_\Phi$, где U_k — проекция $\boldsymbol{U}$ на $\boldsymbol{k}$ и $V_\Phi = \omega/k$ — фазовая скорость.

Из (1.11)—(1.11а), действуя так же, как и при переходе от (1.9) к (1.14), получаем соотношения, которые выпишем здесь только для прозрачной среды при выборе верхнего знака, когда сокращаются слагаемые с производными от амплитуд поля по k_l:

$$\overline{T}_{ij} = -\overline{g}_i U_j; \quad U_j = \frac{\partial \omega}{\partial k_j}; \qquad \overline{T}_{ii} = \overline{T}_{ij,0} + \overline{T}'_{ij};$$

$$\overline{g}_i = \frac{1}{16\pi c}([\boldsymbol{D}'_0 \boldsymbol{B}^*_0]_i + [\boldsymbol{D}'^*_0 \boldsymbol{B}_0]_i) + \frac{k_i}{16\pi}\frac{\partial \varepsilon_{jm}(\omega, \boldsymbol{k})}{\partial \omega} E'_{0j} E_{0m}; \tag{1.16}$$

$$\overline{T}_{ij,0} = \frac{B_{0i}B^*_{0j} + B_{0i}B_{0j} + E_{0i}D'^*_{0j} + E^*_{0i}D'_{0j}}{16\pi} - \frac{\delta_{ij}}{32\pi}(2\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}^*_0 + \boldsymbol{E}_0\boldsymbol{D}'^*_0 + \boldsymbol{E}^*_0\boldsymbol{D}'_0);$$

$$\overline{T}'_{ij} = -\frac{k_l}{16\pi}\frac{\partial \varepsilon_{ml}(\omega, \boldsymbol{k})}{\partial k_j} E_{0m} E_{0l}.$$

Формулы (1.14) и (1.16) были получены в [5,6], где использовалась релятивистски инвариантная форма записи уравнений поля, а среда с самого начала считалась прозрачной. Последнее post factum оправдано, так как для непрозрачной среды из уравнения (1.13) и аналогичных, по-видимому, нельзя получить никаких ценных выводов. Что же касается формы записи и вывода соотношений (1.14)—(1.15), то это, конечно, является вопросом вкуса или привычки. Однако приведенный выше вывод представляется нам настолько простым, что переход к редко используемым в макроскопической электродинамике релятивистским уравнениям оказывается сложнее самого доказательства и уже поэтому нецелесообразен.

Заметим, что в [5,6] вектор $\overline{g}_i$ считается усредненной по времени плотностью импульса, а $\overline{T}_{ij}$ — средним тензором напряжений. Сейчас, однако, нет никаких сомнений в том, что такой выбор четырехмерного тензора энергии-импульса неправилен (см. [2], §§ 16,56 и [7]). С другой стороны, в определенных условиях (при распространении волны в среде) вектор $\overline{g}_i$ имеет смысл плотности суммарного импульса поля и среды [7,8]. Таким образом, уравнение (1.16), несомненно, может представлять интерес при рассмотрении импульсов и сил, связанных с электромагнитными волнами в среде. Здесь, однако, нужен дополнительный анализ, который мы не проводили.

2. НЕРАВЕНСТВА, ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ В ОБЛАСТИ ПРОЗРАЧНОСТИ

Известно, что дисперсионные соотношения для изотропных сред в области прозрачности могут быть использованы для вывода некоторых условий, определяющих характер изменения диэлектрической проницаемости ε с частотой ω. На основе этих условий может быть доказано, что $U = \left|\frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{k}}\right| \leqslant c$ (см. [2], § 64). Ниже мы проведем аналогичное исследование, имея в виду более сложный случай анизотропной диспергирующей среды, электромагнитные свойства которой характеризуются тензором $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - i\frac{4\pi\sigma_{ij}}{\omega}$. Для таких сред можно получить следующие формулы, являющиеся простейшим обобщением обычных дисперсионных соотношений (см. [1,11]); в (2.1) для простоты считается, что недиагональные элементы ε'_{ij} либо симметричны, либо антисимметричны) и кроме того ε_{ij} и σ_{ij} являются четными функциями $\boldsymbol{k}$):

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) - \delta_{ij} = 8\int_0^\infty \frac{\sigma_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})}{\omega'^2 - \omega^2}\, d\omega';$$

$$\frac{4\pi[\sigma_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) - \sigma_{ij}(0)]}{\omega} = -\frac{2}{\pi}\omega\int_0^\infty \frac{\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) - \delta_{ij}}{\omega'^2 - \omega^2}\, d\omega'. \tag{2.1}$$

В (2.1) интегралы при $\omega = \omega'$ нужно понимать в смысле главного значения. Заметим, что при наличии пространственной дисперсии формулы (2.1) являются частным случаем более общих дисперсионных соотношений (см. [9] и приложение к [1]). При комплексных волновых векторах $\boldsymbol{k}$ вопрос о смысле и значениях тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ нуждается, вообще говоря, в дополнительном анализе. Насколько нам известно, в этом вопросе нет еще полной ясности и, например, в [1] вектор $\boldsymbol{k}$ обычно считается вещественным. Для прозрачной среды, которая нас и будет в основном интересовать, поступать таким образом, видимо, можно без особых опасений (этот момент не вполне очевиден, так как считать поглощение строго равным нулю, вообще говоря, нельзя).

Записывая тензор $\varepsilon'_{ij}(\omega)$ в виде $\varepsilon'_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ij}(\omega) - i\dfrac{4\pi\sigma_{ij}(\omega)}{\omega}$, можно считать тензоры $\varepsilon_{ij}(\omega)$ и $\sigma_{ij}(\omega)$ эрмитовскими. При этом выделяющееся тепло выражается через σ_{ij}. Для монохроматического поля (1.2) при усреднении по высокой частоте отнесенное к единице времени и единице объема тепло равно [1,2,4,10]

$$q = -\frac{i\omega}{16\pi}(\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{D}_0'^* - \boldsymbol{E}_0^*\boldsymbol{D}_0') = -\frac{i\omega}{16\pi}(\varepsilon_{ij}'^*(\omega, \boldsymbol{k}) - \varepsilon'_{ji}(\omega, \boldsymbol{k}))E_{0i}E_{0j}^* =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_{ij}^* E_{0i}E_{0j}^* = \frac{1}{2}\sigma_{ij}E_{0j}E_{0i}^*. \tag{2.2}$$

Эта формула для среднего по времени тепла получается лишь в пренебрежении пространственной дисперсией, когда $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) = \varepsilon'_{ij}(\omega)$ или для почти прозрачной среды (переход к пределу вещественных $\boldsymbol{k}$). Если же $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ зависит от $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}$ является комплексным, то величина q не имеет смысла среднего выделяющегося тепла [10]. Достаточно сказать, что q может быть отлично от нуля при полном отсутствии поглощения (см. раздел 3). В этих случаях, однако, отличны от нуля средние потоки $\overline{\boldsymbol{S}_0}$ и $\overline{\boldsymbol{S}'}$, с изменением которых в пространстве и связан вклад в величину q. Ниже мы будем использовать формулу (2.2) только при вещественных значениях $\boldsymbol{k}$ или в отсутствие пространственной дисперсии.

Если среда находится в состоянии термодинамического равновесия, то при $\sigma_{ij} \neq 0$

$$2q = \sigma_{ij}E_{0i}^*E_{0j} > 0. \tag{2.3}$$

Эрмитовская квадратичная форма (2.3) может быть приведена к сумме квадратов вида $2q = \lambda_1|E_1'|^2 + \lambda_2|E_2'|^2 + \lambda_3|E_3'|^2 > 0$. При этом в силу произвольности $\boldsymbol{E}_0$ все коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ должны быть положительными. Приведение квадратичной формы (2.3) к сумме квадратов аналогично операции представления матрицы из элементов σ_{ij} в диагональной форме. Вводя детерминант $D(\lambda) = |\sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}|$, можно сформулировать неравенство (2.3) в виде требования, согласно которому все три корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ уравнения

$$D(\lambda) = |\sigma_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) - \lambda(\omega, \boldsymbol{k})\,\delta_{ij}| = 0 \tag{2.4}$$

должны быть положительными. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$D(\lambda = 0) = |\sigma_{ij}| > 0; \tag{2.5}$$

$$\Delta_{ii} > 0: \tag{2.5а}$$

$$\sigma_{ii} > 0, \tag{2.5б}$$

где Δ_{ij} — миноры, отвечающие элементу σ_{ij} детерминанта $|\sigma_{ij}|$, а Δ_{ii} и σ_{ii} — соответствующие суммы по i.

Для получения интересующих нас неравенств продифференцируем первое из уравнений (2.1) по частоте ω. При этом учет пространственной дисперсии несущественен, поскольку вещественный вектор $\boldsymbol{k}$ входит в (2.1) как независимый параметр (уравнения поля мы здесь не используем). Для сокращения записи ниже в разделе 2 аргумент $\boldsymbol{k}$ опускается. Как и в изотропном случае [2], при переходе в область прозрачности можно не обращать внимания на особенности в подынтегральных выражениях при $\omega = \omega'$. По последней причине можно проводить обычное дифференцирование по параметру ω и, следовательно,

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}(\omega)}{\partial \omega} = 16\omega \int_0^\infty \frac{\sigma_{ij}(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)^2}\, d\omega'. \tag{2.6}$$

Суммируя левые и правые части трех из соотношений (2.6), написанных для диагональных компонент тензоров ε_{ij} и σ_{ij}, имеем:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ii}(\omega)}{\partial \omega} = 16\omega \int_0^\infty \frac{\sigma_{ii}(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)^2}\, d\omega'. \tag{2.7}$$

Поскольку при учете неравенства (2.5б) подынтегральное выражение в (2.7) всегда положительно во всей области интегрирования, то в отсутствие поглощения на частоте ω (точнее, при очень слабом поглощении) получаем:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ii}(\omega)}{\partial \omega} = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \omega} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \omega} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \omega} > 0. \tag{2.8}$$

Как и в изотропном случае [2], используя условие (2.5б), можно получить, помимо (2.8), еще одно неравенство. Умножая обе части первого из уравнений (2.1) на ω^2 и так же, как и в случае (2.6), дифференцируя по частоте ω без учета особенности при $\omega = \omega'$, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\left[\omega^2(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij})\right] = 16\omega \int_0^\infty \frac{\sigma_{ij}(\omega')\,\omega'^2}{(\omega'^2 - \omega^2)^2}\, d\omega'. \tag{2.9}$$

Суммируя соотношения (2.9) при $i = j$ и используя условие (2.5б), получаем:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ii}(\omega)}{\partial \omega} > \frac{2(3 - \varepsilon_{ii}(\omega))}{\omega}. \tag{2.10}$$

Для перехода к изотропному случаю при отсутствии пространственной

дисперсии необходимо положить $\varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij}$. Тогда неравенства (2.8), (2.10) сводятся к следующим простым условиям [2]:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} > 0; \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} > \frac{2(1-\varepsilon)}{\omega}. \tag{2.11}$$

До сих пор мы опирались лишь на одно из ограничений (2.5)—(2.5б). Из двух других условий (2.5), (2.5а) получение в общем случае определенных следствий, аналогичных (2.8) и (2.10), весьма затруднительно. Возникающие здесь трудности связаны с тем обстоятельством, что условия (2.5), (2.5а) содержат комбинации из произведений компонент тензора σ_{ij}. Поэтому неравенства (2.5), (2.5а) не удается использовать аналогично тому, как это сделано в отношении неравенства (2.5б).

Иная и более благоприятная ситуация возникает для некоторых типов анизотропных сред, если при этом использовать простейшие формы записи эрмитовского тензора ε_{ij}, реализующиеся при подходящем выборе систем координат.

В отсутствие внешних магнитных полей без пространственной дисперсии тензор ε_{ij} является симметричным ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) и вещественным. Такой тензор приводится к главным осям; тогда его компоненты при $i = j$ равны ε_1, ε_2 и ε_3 ($\varepsilon_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Далее будем рассматривать кристаллические среды, для которых главные оси из соображений симметрии фиксированы. К числу таких кристаллов не относятся только кристаллы триклинной и моноклинной систем, у которых имеет место дисперсия осей и нельзя при всех частотах ω оси тензоров ε_{ij} и σ_{ij} считать совпадающими. В кристаллах более высокой симметрии оси этих тензоров совпадают при всех ω. Тогда из (2.1) и (2.5) после перехода к системе главных осей легко придти к следующим неравенствам:

$$\partial\varepsilon_1/\partial\omega > 0; \quad \partial\varepsilon_2/\partial\omega > 0; \quad \partial\varepsilon_3/\partial\omega > 0; \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\omega} > \frac{2(1-\varepsilon_1)}{\omega}; \quad \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\omega} > \frac{2(1-\varepsilon_2)}{\omega}; \quad \frac{\partial\varepsilon_3}{\partial\omega} > \frac{2(1-\varepsilon_3)}{\omega}. \tag{2.13}$$

При учете пространственной дисперсии в общем случае $\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, -\boldsymbol{k})$ и лишь в негиротропной среде (в частности, при наличии центра симметрии) $\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, \boldsymbol{k})$. В последнем случае результаты (2.12)—(2.13) иногда сохраняются, но зависимость главных осей от $\boldsymbol{k}$ фактически усложняет картину (о кристаллооптике с учетом пространственной дисперсии см. [11]).

Для простейшей магнитоактивной среды (например, плазмы) при выборе за ось z направления внешнего магнитного поля имеем:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

где величины ε_1, ε_2 и g вещественны и зависят, помимо ω, только от k (но не от $\boldsymbol{k}/k$). Из (2.1), (2.5)—(2.5б) в этом случае получаем, что

$$\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\omega} > 0; \quad \frac{\partial(\varepsilon_1 + g)}{\partial\omega} > 0; \quad \frac{\partial(\varepsilon_1 - g)}{\partial\omega} > 0. \tag{2.15}$$

Помимо того имеем неравенства

$$\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\omega} > \frac{2(1-\varepsilon_2)}{\omega}; \quad \frac{\partial(\varepsilon_1+g)}{\partial\omega} > \frac{2(1-\varepsilon_1-g)}{\omega}; \quad \frac{\partial(\varepsilon_1-g)}{\partial\omega} > \frac{2(1-\varepsilon_1+g)}{\omega}. \tag{2.16}$$

Неравенства для $\partial\varepsilon_{ij}/\partial\omega$ накладывают известные ограничения на показатель преломления $n(\omega, \boldsymbol{s})$ для распространяющихся в прозрачной среде однородных, плоских волн $\left(\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c} n\boldsymbol{s},\ n > 0\right)$. В общем случае получить отсюда соответствующие условия для n довольно трудно, так как вытекающая из уравнений поля связь между ε_{ij} и n (т. е. дисперсионное уравнение) является весьма громоздкой; она, как известно, имеет вид:

$$|\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) - n^2\delta_{ij} + n^2 s_i s_j| = 0. \tag{2.17}$$

В изотропной среде без пространственной дисперсии для поперечных волн $n^2 = \varepsilon(\omega)$ и из (2.11) следует, что

$$\frac{dn}{d\omega} > 0;\ \frac{d(n\omega)}{d\omega} > n;\ \frac{d(n\omega)}{d\omega} > \frac{1}{n}. \tag{2.18}$$

Отсюда ясно, что групповая скорость в рассматриваемом случае

$$\boldsymbol{U} = \frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}} = c\left(\frac{d(n\omega)}{d\omega}\right)^{-1}\boldsymbol{s}$$

всегда параллельна $\boldsymbol{s}$ и $U < c$. На первый взгляд, такое доказательство [2] неравенства $U < c$, имеющего явно релятивистский характер, может вызвать некоторое недоумение, поскольку дисперсионные соотношения (2.1) являются следствием только принципа причинности. То же относится и к неравенствам (2.11), если не говорить об учете условия (2.3), следующего из принципа возрастания энтропии. Дело, однако, в том, что использование связи $n^2 = \varepsilon$ в данном случае эквивалентно учету уравнений поля, которые релятивистски инвариантны. В сочетании с принципом причинности отсюда как раз и следует, что сигнал не может распространяться со скоростью, большей c.

При наличии пространственной дисперсии использование неравенств типа (2.11)—(2.13), не говоря уже о более сложных, для получения каких-либо сведений об $n(\omega, \boldsymbol{s})$ особенно затруднительно, так как n входит в этом случае в само выражение для $\varepsilon = \varepsilon\left(\omega, \frac{\omega}{c} n\right)$. Напротив, для анизотропной среды без пространственной дисперсии, исходя из (2.12)—(2.13) и (2.15)—(2.16), вероятно, можно доказать неравенство

$$U = \left|\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}\right| < c. \tag{2.19}$$

В дополнении это неравенство доказано для одноосных кристаллов. Более общий случай не рассматривался, поскольку доказательство, несомненно, весьма громоздко, а особых оснований сомневаться в (2.19) нет. Действительно, из известного кинематического вывода выражения для групповой скорости, а также формулы (1.14), ясен смысл вектора $\partial\omega/\partial\boldsymbol{k}$ как скорости сигнала и скорости течения энергии в прозрачной среде. Поэтому из релятивистских соображений можно ожидать соблюдения неравенства (2.19) в любой прозрачной среде. В этом плане доказательство неравенства (2.19) на основе уравнений поля и нера-

венств типа (2.11) — (2.13) представляет лишь методический интерес *.

Проекция групповой скорости на $\boldsymbol{k}$ равна [3]

$$U_k = \frac{\boldsymbol{k}}{k}\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c}{\partial(n\omega)/\partial\omega} = U\cos\Phi, \tag{2.20}$$

где Φ — угол между $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{k}$.

Из (2.19) и (2.20) ясно, что

$$|\partial(\omega n)/\partial\omega| > 1. \tag{2.21}$$

Как мы увидим в разделе 3, при отсутствии пространственной дисперсии угол Φ вседа является острым и $d\omega/dk > 0$. Поэтому в отсутствие пространственной дисперсии

$$\partial(n\omega)/\partial\omega > 1. \tag{2.22}$$

3. ДВЕ ТЕОРЕМЫ, КАСАЮЩИЕСЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ОТСУТСТВИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ

Укажем на две теоремы, касающиеся распространения электромагнитных волн в анизотропных средах в отсутствие пространственной дисперсии. В дальнейшем будут выяснены причины, по которым эти теоремы могут оказаться несправедливыми для пространственно диспергирующих сред.

Первая теорема такова: в отсутствие пространственной дисперсии угол Φ между направлениями групповой скорости $\boldsymbol{U}$ и волнового вектора $\boldsymbol{k}$ (фазовой скорости) является острым, т. е. $|\Phi| < \pi/2$.

Для доказательства воспользуемся справедливым в области прозрачности соотношением (1.14), которое без учета пространственной дисперсии принимает вид:

$$\overline{W}\boldsymbol{U} = \overline{\boldsymbol{S}}_0, \tag{3.1}$$

где $\overline{W}$ — средняя во времени плотность энергии электромагнитного поля ($\overline{W} > 0$), а $\overline{\boldsymbol{S}}_0 = \frac{c}{16\pi}([\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{B}_0^*] + [\boldsymbol{E}_0^*\boldsymbol{B}_0]) = \frac{c}{8\pi}[\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{B}_0^*]$ (см. (1.10)).

С помощью уравнений поля (1.6) и (1.6а) для среднего во времени потока $\overline{\boldsymbol{S}}_0$ получаем:

$$\overline{\boldsymbol{S}}_0 = \frac{c}{16\pi}([\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{B}_0^*] + [\boldsymbol{E}_0^*\boldsymbol{B}_0]) = \tag{3.2}$$

$$= \frac{c^2}{16\pi\omega}\{(\boldsymbol{k}^* + \boldsymbol{k})(\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{E}_0^*) - \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_0^*) - \boldsymbol{E}_0^*(\boldsymbol{k}^*\boldsymbol{E}_0)\}.$$

* Нужно заметить, что из кинематических соображений отождествлять скорость сигнала с вектором $\boldsymbol{U} = \partial\omega/\partial\boldsymbol{k}$ можно лишь при известных условиях (этого нельзя, например, сделать в области аномальной дисперсии, когда сигнал сильно деформируется и может оказаться, что $d\omega/dk > c$). В этой связи справедливость неравенства (2.19) для сред данного класса указывает на непротиворечивость использования выражения $\partial\omega/\partial\boldsymbol{k}$ в качестве скорости сигнала в этих средах (в области аномальной дисперсии неравенство (2.19) может нарушаться в связи с наличием поглощения, которое в (2.19) считалось отсутствующим). По-видимому, наиболее общее, простое и достаточно убедительное доказательство условия (2.19) основано на использовании теоремы (1.14) и требования, чтобы скорость переноса энергии была меньше c (этот аргумент возник при обсуждении с В. П. Силиным, которому авторы признательны также за ряд замечаний).

Рассмотрим сначала для общности распространение волн при наличии поглощения, когда $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 - i\boldsymbol{k}_2$. Проектируя уравнение (3.2) на направление распространения волны, определяемого вектором $\boldsymbol{k}_1$, имеем:

$$\boldsymbol{k}_1\overline{\boldsymbol{S}_0} = \frac{c^2}{16\pi\omega}\{2k_1^2(\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{E}_0^*) - 2(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{E}_0)(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{E}_0^*) + \\ + i[(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{E}_0)(\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{E}_0^*) - (\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{E}_0^*)(\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{E}_0)]\}. \tag{3.3}$$

Если векторы $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$ коллинеарны (однородные плоские волны), последнее слагаемое исчезает и легко установить, что $\boldsymbol{k}_1\overline{\boldsymbol{S}_0} > 0$. В области прозрачности, когда $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1$, находим, что

$$\boldsymbol{k}\overline{\boldsymbol{S}_0} > 0. \tag{3.4}$$

В отсутствие поглощения легко доказать, что имеет место неравенство $\boldsymbol{k}\boldsymbol{S}_0 > 0$, более общее, чем (3.4) ($\boldsymbol{S}_0$—мгновенное значение потока энергии). Неравенство (3.4) означает, что угол Φ между направлениями $\overline{\boldsymbol{S}_0}$ и $\boldsymbol{k}$ острый (это справедливо для угла между $\overline{\boldsymbol{S}_0}$ и $\boldsymbol{k}_1$ и при наличии поглощения). Этот результат, если принять во внимание (3.1), эквивалентен доказательству того, что $|\Phi| < \pi/2$.

Вторая теорема относится к распространению однородных плоских волн в непоглощающей среде ($\sigma_{ij} \to 0$) при отсутствии пространственной дисперсии. Она состоит в том, что при этих ограничениях значения квадрата комплексного показателя поглощения $\hat{n}^2=(n-i\varkappa)^2$ всегда вещественны.

Возможны различные способы доказательства. Но, по-видимому, приводимое ниже и в значительной мере ясное из [2] доказательство является одним из самых простых. Используем свойства обратного тензора ε_{ij}^{-1}, принимая во внимание, что для непоглощающей среды $E_i = \varepsilon_{ij}^{-1}D_j$ и тензор ε_{ij}^{-1} эрмитовский. Подставляя вторую из формул (1.6) в первую, получим уравнение:

$$\boldsymbol{D}' = \hat{n}^2(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{E})). \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует, что $\boldsymbol{D}'\boldsymbol{s}=0$, т. е. продольная компонента вектора $\boldsymbol{D}'$ равна нулю. Для поперечных компонент D_1 и D_2 из (3.5) получаем: $D_\alpha = \hat{n}^2E_\alpha$ ($\alpha = 1,2$). При учете соотношения $E_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}D_\beta$ ($\beta=1,2$) уравнение (3.5) принимает вид: $D_\alpha - \hat{n}^2\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}D_\beta = 0$. Значения $\hat{n}^2$ определяются из условия существования нетривиального решения этого уравнения:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\hat{n}^2} - \varepsilon_{11}^{-1} & -\varepsilon_{12}^{-1} \\ -\varepsilon_{21}^{-1} & \dfrac{1}{\hat{n}^2} - \varepsilon_{22}^{-1} \end{vmatrix} = 0. \tag{3.6}$$

Дискриминант квадратного уравнения (3.6) для $\frac{1}{\hat{n}^2}$ равен $\Delta=(\varepsilon_{11}^{-1}-\varepsilon_{22}^{-1})^2+$ $+4\varepsilon_{12}^{-1}\varepsilon_{21}^{-1}$ и, поскольку тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ является эрмитовским, $\Delta=(\varepsilon_{11}^{-1}-\varepsilon_{22}^{-1})^2+$ $+4|\varepsilon_{12}^{-1}|^2$. При $\Delta>0$ значения $\frac{1}{\hat{n}^2}$, а следовательно, и $\hat{n}^2$ будут вещественными. При этом, если $\hat{n}^2>0$, то $n\neq 0$ и $\varkappa=0$; если же $\hat{n}^2<0$, то $n=0$ и $\varkappa\neq 0$. В первом случае поле осциллирует в пространстве, не убывая, а во втором убывает, но без осцилляций (см. примечание в конце статьи).

Две только что доказанные теоремы * интересны и в том отношении, что их справедливость не может быть гарантирована при наличии пространственной дисперсии. Так, в последнем случае можно указать примеры, связанные с распространением волн в нагретой, магнитоактивной плазме [12] или в кристаллических средах [13], когда неравенство $\boldsymbol{kU}>0$ явно нарушается. Более того, анализ конкретных случаев показывает, что угол Φ может быть любым. Например, возможно, что векторы $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{U}$ антипараллельны, т. е. $\Phi=\pi$.

Укажем причины, по которым становится недействительным приведенное выше доказательство неравенства $\boldsymbol{kU}>0$. Дело в том, что при учете пространственной дисперсии из равенства $\overline{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{U}=\overline{\boldsymbol{S}}$ (см. (1.14)) не следует соотношение (3.1), так как полный поток энергии электромагнитного поля $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_0+\boldsymbol{S}'$. Напомним, что для компонент вектора $\overline{\boldsymbol{S}'}$ имеет место формула $\overline{S_l'}=-\frac{\omega}{16\pi}\frac{\partial\varepsilon_{ij}(\omega,\boldsymbol{k})}{\partial k_l}E_{0l}^*E_{0j}$. Естественно, что при $\boldsymbol{S}'\neq 0$ невозможно гарантировать правильность утверждений, полученных в приближении $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_0$.

Приведенное выше выражение для $\overline{\boldsymbol{S}'}$ получено при выводе формулы (1.14). Для сред со слабой пространственной дисперсией [13] можно несколько конкретизировать вид функции $\varepsilon_{ij}'(\omega,\boldsymbol{k})$, а иногда и не вводить ее в явном виде. Так для изотропной, негиротропной немагнитной среды учет слабой пространственной дисперсии сводится к использованию связей (ε, α и β — функции ω)

$$\boldsymbol{D}'=\varepsilon\boldsymbol{E}+\alpha\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}+\beta\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E};\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}. \tag{3.7}$$

Подставим эти выражения в общее соотношение, вытекающее из уравнения поля (1.1):

$$\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E}\frac{\partial\boldsymbol{D}'}{\partial t}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial H^2}{\partial t}=-\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{S}_0;\quad \boldsymbol{S}_0=\frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{EH}]. \tag{3.8}$$

Тогда, если для простоты пренебречь зависимостью ε, α и β от ω, после интегрирования по частям получаем:

---

* При отсутствии пространственной дисперсии справедлива еще одна теорема, касающаяся распространения плоских волн в анизотропных средах с поглощением. Именно, можно утверждать, что $n\varkappa>0$, т е n и $\varkappa$ имеют одинаковый знак. Для изотропной среды это очевидно, так как $(n-i\varkappa)^2=\varepsilon-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$ и $n\varkappa>0$ при $\sigma>0$. Общее доказательство можно провести, используя условие (2.3). Заметим, что для излучающей среды (например, в лазерах и мазерах) $n\varkappa<0$, так как $\sigma<0$ При учете пространственной дисперсии неравенство $n\varkappa>0$ может оказаться несправедливым и для поглощающей среды (см , например, [11]).

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\operatorname{div} S; \quad 8\pi W = \varepsilon E^2 + H^2 - \alpha (\operatorname{div} E)^2 + \beta (\operatorname{rot} E)^2;$$

$$S = S_0 + \frac{\alpha}{4\pi} E \operatorname{div} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\beta}{4\pi} \left[E \operatorname{rot} \frac{\partial E}{\partial t} \right];$$

$$16\pi \overline{W} = \varepsilon E_0 E_0^* + H_0 H_0^* - \alpha (kE_0)(kE_0^*) + \beta [kE_0][kE_0^*]; \qquad (3.9)$$

$$16\pi \overline{S} = c \{ [E_0^* H_0] + [E_0 H_0^*] \} + \alpha\omega \{ E_0 (kE_0^*) + E_0^* (kE_0) \} -$$

$$- \beta\omega \{ [E_0 [kE_0^*]] + [E_* [kE_0]] \},$$

где при переходе к средним по времени значениям $\overline{W}$ и $\overline{S}$ поставлено поле типа (1.2) с вещественным k.

Использование связи (3.7) эквивалентно введению проницаемости $\varepsilon_{ij} = (\varepsilon + \beta k^2)\delta_{ij} - (\alpha + \beta) k_i k_j$. Если подставить такое ε_{ij} в (1.14), пренебрегая производными от ε_{ij} по ω, придем к (3.9), как это и должно быть.

Остановимся теперь на случае плазмы, где особенно легко выяснить физический смысл дополнительного потока S'. Будем использовать кинетическое уравнение для функции распределения электронов:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \nabla_r f + \frac{e}{m} \left(E + \frac{1}{c} [vH] \right) \nabla_v f = 0. \qquad (3.10)$$

В (3.10) пренебрежено соударениями; кроме того, мы не учитываем движения ионов, т. е. ограничиваемся рассмотрением высокочастотных полей (см. [3]). Пространственная дисперсия в плазме возникает из-за теплового движения и учитывается в (3.10) членом $v\nabla_r f$. Умножая (3.10) на $mv^2/2$ и интегрируя по скоростям, обычным образом получаем (см., например, [4], где пространственная дисперсия не учитывалась):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \int \frac{mv^2}{2} f \, dv \right) = -\operatorname{div} \left\{ \frac{c}{4\pi} [EH] + \int \frac{mv^2}{2} v f \, dv \right\}. \qquad (3.11)$$

Таким образом, полный поток энергии $S = S_0 + \int \frac{mv^2}{2} v f \, dv$ складывается из потока энергии поля и потока энергии частиц (электронов). Разумеется, и в данном случае поток S' можно выразить через $\varepsilon_{ij}(\omega, k)$ для плазмы.

При усреднении во времени (для монохроматического поля) первое слагаемое в (3.11) исчезает. Если рассматривать к тому же распространение однородных плоских волн в направлении оси z, то для средних значений из (3.11) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial z} \overline{(S_0 + S')} = \frac{\partial}{\partial z} \overline{S} = 0.$$

Отсюда следует очевидный вывод, что при учете теплового движения частиц в непоглощающей среде сохраняется усредненный во времени полный поток энергии:

$$\overline{S} = \overline{S}_0 + \overline{S'} = \text{const}. \qquad (3.12)$$

Соотношение (3.12) представляет интерес в том отношении, что оно ясно указывает на возможность изменения среднего по времени потока вектора Пойнтинга $\overline{S}_0$, несмотря на отсутствие поглощения. Этот момент оказывается тесно связанным с нарушением при учете пространственной дисперсии также и второй из указанных выше теорем.

При решении конкретных задач о распространении волн в магнитоактивной плазме [3] и в кристаллических средах [13] с учетом пространственной дисперсии выясняется возможность нарушения второй теоремы, т. е. утверждения о вещественности $\hat{n}^2$ в непоглощающей среде. Именно оказывается, что и в такой среде возможно распространение волн с комплексными $\hat{n}^2$ (а следовательно, комплексными $\hat{n}$). В приведенном ранее доказательстве вещественности $\hat{n}^2$ использовалось свойство эрмитовости тензора $\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}(\omega)$, а также независимости $\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}(\omega)$ от $\hat{n}$. При наличии же пространственной дисперсии $\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}(\omega, k) = \varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}\left(\omega, \frac{\omega}{c}\hat{n}\right)$ и квадраты корней уравнения (3.6) вовсе не обязаны быть вещественными.

Если величина $\hat{n}^2$ является комплексной, то поле будет осциллировать с изменяющейся в пространстве амплитудой. В то же время, согласно (3.12), усредненный по времени полный поток энергии $\overline{S}$ постоянен. Поэтому, если среда занимает полупространство $z > 0$ и на бесконечности $\overline{S}(z \to \infty) = 0$, то и везде $\overline{S} = 0$. Следовательно, для полупространства и волн с комплексными $\hat{n}^2$ при отсутствии поглощения $\overline{S}_0 = -\overline{S}'$, т. е. средний поток энергии поля $\overline{S}_0$ компенсируется потоком неэлектромагнитного происхождения в среде $\overline{S}'$. В случае плазмы, как мы видели, этот неэлектромагнитный поток представляет собой просто поток кинетической энергии (мы говорим о неэлектромагнитной природе потока S', имея в виду, что аналогичный поток может существовать и при отсутствии поля; если же рассматривается поток S' в поле волны, то он, конечно, определяется полем E_0, как это и имеет место согласно (1.14)). Заметим, что вопрос о характере волн в непоглощающей среде с комплексным значением $\hat{n}^2$ в несколько другом плане недавно рассмотрен также в статье [15].

ДОПОЛНЕНИЕ

Докажем неравенство $|\partial\omega/\partial k| = < c$ на примере распространения группы волн в одноосном кристалле. В системе главных осей симметричного тензора ε_{ij} дисперсионное уравнение (2.17) имеет вид:

$$k^2(\varepsilon_1 k_x^2 + \varepsilon_2 k_y^2 + \varepsilon_3 k_z^2) - \frac{\omega^2}{c^2}[k_x^2\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_3) + k_y^2\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_3) + k_z^2\varepsilon_3(\varepsilon_1+\varepsilon_2)] + \frac{\omega^4}{c^4}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 0. \tag{Д.1}$$

Для одноосных кристаллов $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_\parallel$. Тогда из (Д.1) для обыкновенной волны получаем уравнение:

$$k^2 = k_0^2\varepsilon_\perp = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp, \tag{Д.2}$$

а для необыкновенной волны имеем соотношение:

$$\varepsilon_\perp k_x^2 + \varepsilon_\parallel k_z^2 = \varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel. \tag{Д.3}$$

При переходе к уравнениям (Д.2) и (Д.3) мы без ограничения общности положили $k_y = 0$. Дисперсионное уравнение (Д.2) для обыкновенной волны имеет такой же вид, как и для изотропной среды (с заменой ε на $\varepsilon_\perp$). Доказательство условия $U < c$ здесь совершенно аналогично приведенному в [2] для изотропной среды (см. также раздел 2).

Для необыкновенной волны доказательство условия (2.19) несколько сложнее. Дифференцируя уравнение (Д.3) по k_x и k_z, найдем компоненты групповой скорости $\partial\omega/\partial k_x$ и $\partial\omega/\partial k_z$ и ее абсолютную величину $U = \left|\sqrt{(\partial\omega/\partial k_x)^2 + (\partial\omega/\partial k_z)^2}\right|$. При этом получаем:

$$U = \frac{cn\sqrt{\sin^2\alpha/\varepsilon_\parallel^2 + \cos^2\alpha/\varepsilon_\perp^2}}{1+B}, \qquad (Д.4)$$

где

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_x}{k_z}; \quad B = \omega n^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon_\perp^2}\frac{\partial\varepsilon_\perp}{\partial\omega} + \frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_\parallel^2}\frac{\partial\varepsilon_\parallel}{\partial\omega}\right).$$

Используя неравенства (2.12), которые в рассматриваемом случае принимают вид $d\varepsilon_\parallel/d\omega > 0$ и $d\varepsilon_\perp/d\omega > 0$, мы видим, что $U < c$, если

$$\frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_\parallel^2} + \frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon_\perp^2} < \frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_\parallel} + \frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon_\perp}. \qquad (Д.5)$$

При получении условия (Д.5) было учтено уравнение (Д.3). Используя тождество типа $\frac{d}{d\omega}[\omega^2(\varepsilon-1)] - 2\omega(\varepsilon-1) = \omega^2\frac{d\varepsilon}{d\omega}$, мы можем величину B, которая входит в формулу (Д.4), представить в следующем виде:

$$B = n^2\left\{\cos^2\alpha\frac{1-\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\perp^2} + \sin^2\alpha\frac{1-\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\parallel^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\omega}\left[\frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon_\perp^2}\frac{d}{d\omega}(\omega^2(\varepsilon_\perp-1)) + \frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_\parallel^2}\frac{d}{d\omega}(\omega^2(\varepsilon_\parallel-1))\right]\right\}.$$

С помощью неравенства (2.13), учитывая (Д.3), убеждаемся, что $U<c$, если выполнено неравенство, обратное (Д.5). Таким образом, утверждение $U < c$ доказано и для необыкновенной волны.

Заметим, что условие $|\partial\omega/\partial k| = U < c$ можно без труда доказать и для магнитоактивной среды, свойства которой определяются тензором (2.14), если распространение происходит по направлению постоянного магнитного поля или перпендикулярно к нему.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
3. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
4. В Л. Гинзбург, Изв высш. уч. зав —Радиофизика, **4**, 74 (1961).
5. С. М Рытов, ЖЭТФ, **17**, 930 (1947).
6. М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, **26**, 680 (1954).
7. G. Marx, G. Gyorgui, Ann. Phys., **16**, 241 (1955).
8. В. Л. Гинзбург, УФН, **69**, 537 (1959).
9. М. А. Леонтович, ЖЭТФ, **40**, 907 (1961).
10. В. Л. Гинзбург, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

11. В. М Агранович, В Л. Гинзбург, УФН (в печати)
12 Б Н Гершман, Изв высш уч зав —Радиофизика, 3, 1146 (1960).
13. В. Л Гинзбург, ЖЭТФ, 34, 1594 (1958).
14 Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, 37, 695 (1959)
15 О П Погуце, В. Д Шафранов, ЖЭТФ (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
1 ноября 1961 г.

SOME REMARCS TO THE RADIO WAVE PROPAGATION IN ANISOTROPIC DISPERSIVE MEDIUM

B. N. Gershman, V. L. Ginzburg

The problem of radio wave propagation in an arbitrary anisotropic medium uniform in space and time is considered both neglecting and taking into consideration the space dispersion. Various relations between the expressions which are quadratic relative to the fields amplitudes, are deduced by the simple method. Inequalities are obtained for the frequency ω derivatives of components $\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$. It is shown that in the absence of space dispersion the vector of group velocity always forms an acute angle with the wave vector $\boldsymbol{k}$ and the value $\hat{n}^2=(n-i\varkappa)^2$ is always real when there is no absorbtion. It is cleared up why the above statements may be not correct in the case of space dispersive media.

Примечание при корректуре. Заметим, что при другой постановке задачи, когда вектор $\boldsymbol{k}$ вещественен и частота $\omega = \omega' - i\gamma$ комплексна, утверждение о вещественности $\hat{n}^2$ эквивалентно заключению о вещественности $\omega^2 = \dfrac{k^2\hat{n}^2}{c^2}$.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

О ПРОНИКНОВЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МАГНИТОАКТИВНУЮ ПЛАЗМУ

Э. А. Канер, Ю. А. Белов

В кинетическом приближении исследовано распространение обыкновенной и необыкновенной волн поперек внешнего магнитного поля в полуограниченной плазме (с учетом движения ионов). Найдены функции распределения частиц при диффузном отражении электронов и ионов от поверхности плазмы. Изучены особенности поверхностного поглощения, вычислены эффективные глубины проникновения электрического и магнитного полей в предельных случаях слабой и сильной пространственной дисперсии Основное внимание уделено резонансным свойствам плазмы на «гибридной» частоте $\sqrt{\Omega_e \Omega_i}$, а также в областях электронной Ω_e и ионной Ω_i гирочастот

Исследованием проникновения электромагнитной волны в полуограниченную плазму занимались многие авторы [1–6]. В известной работе Ландау [1] рассмотрено проникновение квазистационарного поля в полуограниченную, однокомпонентную плазму в отсутствие магнитного поля при зеркальном отражении электронов от границы. В работах Силина [2], Степанова [4], Шафранова [3] та же задача решена при наличии постоянного магнитного поля $\boldsymbol{H}$, перпендикулярного границе. Нам известна лишь одна работа (Днестровского и Костомарова [6]), в которой исследовано проникновение обыкновенной волны в плазму при $\boldsymbol{H}$, параллельном поверхности. В указанной статье решение получено в виде ряда по степеням малого параметра $\mu = 8\pi nT/H^2$ (n—плотность плазмы, T — электронная температура в энергетических единицах). Движение ионов, а следовательно, и различные резонансные явления, связанные с этим движением и проявляющиеся в необыкновенной волне, не учитывались. Граничное условие для функции распределения электронов отличалось от обычно принимаемого условия зеркального отражения, так как „граница" плазмы предполагалась размытой (электроны удерживались в области $z > 0$ неоднородным стационарным магнитным полем $H(z)$, переходящим в однородное на бесконечности).

Шафранов [3] сделал попытку рассмотреть проникновение переменного поля при произвольной ориентации $\boldsymbol{H}$ относительно поверхности. Однако, как правильно указано в [6], его исходное предположение, что оператор проводимости в магнитном поле является разностным оператором по координатам, справедливо лишь в исключительном случае, когда магнитное поле перпендикулярно границе и отражение электронов зеркальное. В работе [11] изучен электронный циклотронный резонанс в приближении сильной пространственной дисперсии.

В настоящей статье рассматривается проникновение обыкновенной и необыкновенной волн в плазму в магнитном поле, параллельном поверхности. Никаких ограничений на величину μ не накладывается. Граница плазмы моделируется условием диффузного отражения электронов и ионов, т. е. предполагается, что частицы после столкновения с поверхностью имеют равновесную максвелловскую функцию распределения. Мы оставляем в стороне вопрос о том, каким способом реализуется граница с подобными свойствами.

1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ. ПЛОТНОСТЬ ТОКА

Исходная система уравнений состоит из кинетических уравнений для электронов и ионов и уравнений Максвелла:

$$i\omega f_\alpha + v_z(\partial f_\alpha/\partial z) \pm \Omega_\alpha\,(\partial f_\alpha/\partial\varphi) = -\,e_\alpha \boldsymbol{E}\boldsymbol{v}(\partial f_{0\alpha}/\partial\varepsilon) \qquad (1.1)$$

$$(\alpha = e,\ i);$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = (\omega^2/c^2)\boldsymbol{E} - (4\pi i\omega/c^2)\boldsymbol{j}; \qquad (1.2)$$

$$\boldsymbol{j} = \sum_\alpha e_\alpha \int \boldsymbol{v} f_\alpha\, d\boldsymbol{p}. \qquad (1.3)$$

Уравнения (1.1) — линеаризованные кинетические уравнения для неравновесных добавок f_α к максвелловским функциям распределения электронов и ионов, ω—частота внешнего поля ($\boldsymbol{E} \sim \exp(i\omega t)$), $\boldsymbol{v}$—скорость, ε — энергия, $\boldsymbol{p}$ — импульс, e_α — заряд частиц, ϑ, φ — углы в пространстве скоростей $\boldsymbol{v} = v(\cos\vartheta,\ \sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi)$, $d\boldsymbol{p}$ — элемент импульсного объема, $f_{0\alpha}(\varepsilon) = n_\alpha (2\pi m_\alpha T_\alpha)^{-3/2}\exp(-\varepsilon/T_\alpha)$ — равновесная функция распределения, $\Omega_\alpha = |e_\alpha|H/m_\alpha c$ — гирочастота, c — скорость света, n_α, m_α, T_α — плотность, масса и температура частиц; знак плюс отвечает электронам, минус — ионам. Ось $0z$ направлена вдоль внутренней нормали к границе плазмы, $0x$—вдоль постоянного магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Электромагнитная волна распространяется в направлении оси $0z$, т. е. поперек внешнего магнитного поля.

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} f_\alpha(0;\boldsymbol{v}) &= 0 \qquad (v_z > 0);\\ \lim f_\alpha(z,\boldsymbol{v}) &= 0 \qquad (z \to \infty). \end{aligned} \qquad (1.4)$$

Условие диффузного отражения на поверхности плазмы $z = 0$ соответствует отсутствию корреляций между значениями функции распределения f падающих и зеркально отразившихся частиц.

Хорошо известно [7], что решение кинетического уравнения с граничными условиями (1.4) является разрывной функцией. Разрыв происходит вдоль характеристики

$$z = \frac{v\sin\vartheta}{\Omega}(1 - \cos\varphi) \equiv z_0(v,\vartheta,\varphi).$$

Физическая причина появления разрыва в решении связана с тем, что в параллельном магнитном поле электроны (или ионы), находящиеся на достаточно большом расстоянии от поверхности ($z > z_0(v,\vartheta,\varphi)$), не могут (без столкновения) достигнуть поверхности. Поэтому все частицы плазмы естественным образом делятся на две группы. Те частицы, которые не сталкиваются с поверхностью, ничего „не знают" о ней и, очевидно, описываются той же функцией распределения, что и в безграничной среде. Выполнение граничного условия (1.4) обеспечивается частицами второй группы. С учетом этого обстоятельства можно написать решение уравнений (1.1) [7,8].

Однако, чтобы не иметь дела с разрывной функцией распределения, удобнее перейти к уравнениям для фурье-трансформаций искомых функций по координатам, которые, очевидно, непрерывны. Именно так решалась аналогичная задача в теории циклотронного резонанса в металлах [9]. Используя результаты работы [9], приведем окончательное выражение для фурье-компонент плотности тока:

$$i_\mu(k) = \sigma_{\mu\nu}(k)\mathcal{E}_\nu(k) - \int_0^\infty dk' Q_{\mu\nu}(k,k')\mathcal{E}_\nu(k'), \qquad (1.5)$$

где подразумевается суммирование по дважды повторяющимся индексам от 1 до 3;

$$\sigma_{\mu\nu}(k) = \sum_{\alpha} \frac{n_\alpha e_\alpha^2}{m_\alpha \Omega_\alpha \pi^{3/2}} \int_0^\infty dx\, x^{3/2} e^{-x} \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta\, n_\mu(\vartheta)\, n_\nu(\vartheta) \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi n_\mu(\varphi) \exp(-\gamma_\alpha \varphi) \int_{-\infty}^{\varphi} d\lambda \exp(\gamma_\alpha \lambda) \cos\left[k r_\alpha \sqrt{x} \sin\vartheta (\cos\lambda - \cos\varphi)\right] n_\nu(\lambda); \quad (1.6)$$

$$Q_{\mu\nu}(k, k') = \sum_{\alpha} \frac{n_\alpha e_\alpha^2}{m_\alpha \Omega_\alpha \pi^{5/2}} r_\alpha \int_0^\infty dx\, x^2 e^{-x} \int_0^\pi d\vartheta \sin^2\vartheta\, n_\mu(\vartheta) n_\nu(\vartheta) \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi n_\mu(\varphi) e^{-\gamma_\alpha \varphi} \int_{-\infty}^{\varphi} d\varphi' |\sin\varphi'| \cos\left[k r_\alpha \sqrt{x} \sin\vartheta (\cos\varphi - \cos\varphi')\right] \times \quad (1.7)$$

$$\times \int_{\lambda(\varphi')}^{\varphi'} d\lambda\, e^{\gamma_\alpha \lambda} n_\nu(\lambda) \cos\left[k' r_\alpha \sqrt{x} \sin\vartheta (\cos\varphi' - \cos\lambda)\right].$$

Здесь $\lambda(\varphi)$ — ближайший, предшествующий φ корень уравнения $\cos\lambda = \cos\varphi$. График функции $\lambda(\varphi)$ приведен на рис. 1; $r_\alpha = v_\alpha / \Omega_\alpha$ — характерный радиус гирации, $v_\alpha = (2T_\alpha / m_\alpha)^{1/2}$ — характерная тепловая скорость частиц, $\gamma_\alpha = (i\omega + \nu)/\Omega_\alpha$ $(\nu \to 0)$, $n_\mu(\vartheta) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, \sin\vartheta)$, $n_\mu(\varphi) = (1, \cos\varphi, \sin\varphi)$.

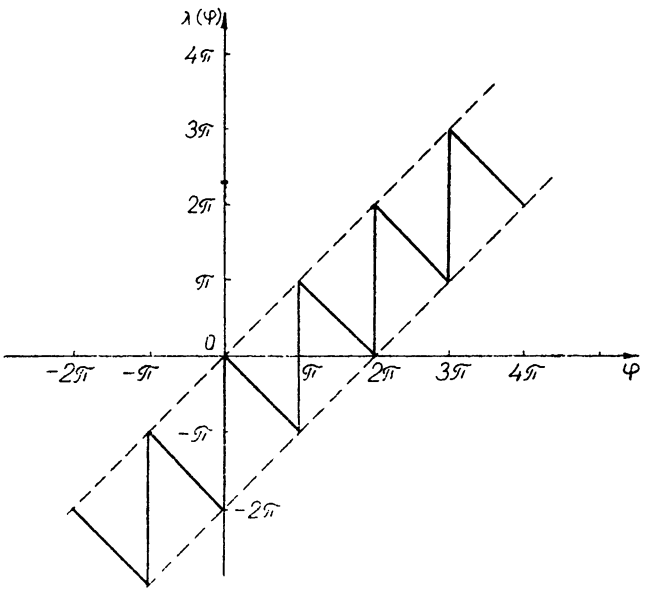


Рис. 1

Выражение для члена с $Q_{\mu\nu}$ в плотности тока можно несколько упростить, производя интегрирование по частям в интеграле по φ'. Результат таков:

$$\int_{\circlearrowleft}^{\infty} dk' Q_{\mu\nu}(k; k') \mathcal{E}_\nu(k') = \int_{\circlearrowleft}^{\infty} dk' \mathcal{E}_\nu(k') \frac{q_{\mu\nu}(k; k')}{k - k'}; \quad (1.8)$$

$$q_{\mu\nu}(k;k') = \sum_{\alpha} \frac{n_\alpha e_\alpha^2}{m_\alpha \Omega_\alpha \pi^{5/2}} \int_0^\infty dx\, x^{3/2} e^{-x} \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta\, n_\mu(\vartheta)\, n_\nu(\vartheta) \times$$

$$\times \left\{ \left(e^{2\pi\gamma_\alpha} - 1\right)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi n_\mu(\varphi)\, e^{-\gamma_\alpha \varphi} \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda n_\nu(\lambda)\, e^{\gamma_\alpha \lambda} \times \right.$$

$$\times \left[\sin\left(kr_\alpha \sqrt{x} \sin\vartheta(\cos\lambda - \cos\varphi)\right) + \right. \tag{1.9}$$

$$\left. + \sin\left[r_\alpha \sqrt{x} \sin\vartheta(k - k' + k\cos\varphi - k'\cos\lambda)\right] \right] +$$

$$+ \int_0^\pi d\varphi\, n_\mu(\varphi) \int_{-\varphi}^{\varphi} d\lambda n_\nu(\lambda)\, e^{\gamma_\alpha(\lambda-\varphi)} \left[\sin\left(kr_\alpha \sqrt{x} \sin\vartheta(\cos\lambda - \cos\varphi)\right) - \right.$$

$$\left. \left. - \sin\left(k' r_\alpha \sqrt{x} \sin\vartheta\,(\cos\lambda - \cos\varphi)\right) \right] \right\}.$$

Из общих формул (1.6)—(1.9) очевидно, что компоненты тензоров, в которых индекс x встречается один раз, тождественно равны нулю (за счет интегрирования по ϑ). В диагональные компоненты электроны и ионы дают вклад одного знака, а в недиагональные (с индексами yz и zy) — разного знака (благодаря гиротропии). Формально это получается заменой $n_\mu(\varphi) \to n_\nu(-\varphi)$ в формулах (1.6), (1.7), (1.9).

Запишем уравнения Максвелла для фурье-компонент:

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathcal{E}_\mu(k) + 2E'_\mu(0) = -\frac{4\pi i\omega}{c^2} \left(\sigma_{\mu\nu}(k)\, \mathcal{E}_\nu(k) - \int_0^\infty dk' Q_{\mu\nu}(k;k') \mathcal{E}_\nu(k') \right); \tag{1.10}$$

$$\frac{\omega}{4\pi i} \mathcal{E}_z(k) = \sigma_{z\nu}(k)\, \mathcal{E}_\nu(k) - \int_0^\infty dk' Q_{z\nu}(k;k')\, \mathcal{E}_\nu(k'). \tag{1.11}$$

Уравнение (1.11) определяет $\mathcal{E}_z(k)$ через $\mathcal{E}_x(k)$ и $\mathcal{E}_y(k)$.

2. ЭФФЕКТИВНЫЕ ГЛУБИНЫ ПРОНИКНОВЕНИЯ

Эффективную глубину проникновения для всех величин определим следующим образом:

$$\delta_f = [f(0)]^{-1} \int_0^\infty dz f(z). \tag{2.1}$$

Глубина проникновения магнитного поля с помощью уравнений Максвелла выражается через импеданс:

$$\delta_{H_{x,y}} = H_{x,y}^{-1}(0) \int_0^\infty dz H_{x,y}(z) = (c^2 Z_{y,x})/4\pi i\omega, \tag{2.2}$$

где

$$Z_\mu = -\frac{4\pi i\omega}{c^2} \frac{E_\mu(0)}{E'_\mu(0)} \qquad (\mu = x, y), \tag{2.3}$$

поскольку

$$H_x(z) = (c/i\omega) E'_y(z), \quad H_y(z) = (-c/i\omega)\, E'_x(z).$$

Связь $E_\mu(0)$ с фурье-компонентой $\mathcal{E}_\mu(k)$ дается выражением:

$$E_\mu(0) = \pi^{-1} \int_0^\infty \mathcal{E}_\mu(k) dk. \tag{2.4}$$

Эффективная глубина проникновения электрического поля равна

$$\delta_{E_\mu} = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}_\mu(0)}{E_\mu(0)} = -\frac{\mathcal{E}_\mu(0)}{2E'_\mu(0)}\frac{4\pi i\omega}{c^2 Z_\mu}. \tag{2.5}$$

Аналогичным образом можно определить глубины проникновения токов [1].

Следовательно, для вычисления глубин проникновения необходимо решить уравнения Максвелла (1.10), (1.11) относительно фурье-компонент полей $\mathcal{E}_\mu(k)$. Ясно, что в общем случае решение этих интегральных уравнений с неразностными ядрами невозможно. Поэтому исследование будет проведено лишь в предельных случаях слабой и сильной пространственной дисперсии. Слабая дисперсия отвечает малым значениям параметров $kr_\alpha \sim r_\alpha/\delta_{ef} \ll 1$, т. е. либо достаточно низкой температуре и относительно малой плотности плазмы, либо сильным магнитным полям. При сильной пространственной дисперсии параметры kr_α велики, и необходимо вычислить асимптотику $\sigma_{\mu\nu}(k)$ и $Q_{\mu\nu}(k; k')$ при больших kr. В частности, в области электронного и ионного циклотронных резонансов имеет место сильная пространственная дисперсия, поскольку резонансное возрастание высокочастотного тока в плазме приводит к сильному экранированию внешнего поля и резкому уменьшению эффективной глубины проникновения.

3. ОПЕРАТОР ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ В ПРЕДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

а) В случае слабой пространственной дисперсии $\sigma_{\mu\nu}(k)$ и $Q_{\mu\nu}(k, k')$ необходимо разложить в ряд по степеням kr_α. Тогда

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\sum_\alpha \frac{\omega_{0\alpha}^2}{i\omega}\begin{Vmatrix} 1-\frac{1}{2}\frac{(kr_\alpha)^2}{1+\gamma_\alpha^2}; & 0; & 0 \\ 0; \ \frac{\gamma_\alpha^2}{1+\gamma_\alpha^2}-\frac{(kr_\alpha)^2}{2}\frac{\gamma_\alpha^2-8}{(\gamma_\alpha^2+1)(\gamma_\alpha^2+4)}; & \mp\frac{\gamma_\alpha}{1+\gamma_\alpha^2}\left[1+\frac{3(kr_\alpha)^2}{\gamma_\alpha^2+4}\right] \\ 0; \ \pm\frac{\gamma_\alpha}{1+\gamma_\alpha^2}\left[1+\frac{3(kr_\alpha)^2}{\gamma_\alpha^2+4}\right]; & \frac{\gamma_\alpha^2}{1+\gamma_\alpha^2}-\frac{3(kr_\alpha\gamma_\alpha)^2}{2(\gamma_\alpha^2+1)(\gamma_\alpha^2+4)} \end{Vmatrix}. \tag{3.1}$$

Верхний знак относится к электронам, нижний — к ионам. Поскольку член с $Q_{\mu\nu}$ содержит множители r_α, то при его вычислении мы ограничимся лишь первыми неисчезающими членами $Q_{\mu\nu}(0; 0)$:

$$Q_{\mu\nu}(0;0) = \sum_\alpha \frac{\omega_{0\alpha}^2}{4\pi\Omega_\alpha^2}\left(\frac{8T_\alpha}{\pi^3 m_\alpha}\right)^{1/2} M^\alpha_{\mu\nu}; \tag{3.2}$$

$$M^\alpha_{xx} = \frac{\pi}{2\gamma_\alpha^2}\left[1-\frac{1+\exp(-2\pi\gamma_\alpha)}{2(1+4\gamma_\alpha^2)}\right];$$

$$M^\alpha_{yy} = -\frac{\pi}{(1+\gamma_\alpha^2)^2}\left[1-\frac{\gamma_\alpha^2}{2}+\frac{3(4\gamma_\alpha^4-5\gamma_\alpha^2+6)}{4(1+4\gamma_\alpha^2)(9+4\gamma_\alpha^2)}(1+\exp(-2\pi\gamma_\alpha))\right]; \tag{3.3}$$

$$M^\alpha_{zz} = -\frac{\pi}{2(1+\gamma_\alpha^2)^2}\left[1-2\gamma_\alpha^2-\frac{9(6\gamma_\alpha^2+1)}{2(1+4\gamma_\alpha^2)(9+4\gamma_\alpha^2)}(1+\exp(-2\pi\gamma_\alpha))\right];$$

$$M^{\alpha}_{yz} = -M^{z}_{zy} = \mp \frac{3\pi\gamma_\alpha}{2(1+\gamma_\alpha^2)^2}\left[1 - \frac{(8\gamma_\alpha^2-7)(1+\exp(-2\pi\gamma_\alpha))}{2(1+4\gamma_\alpha^2)(9+4\gamma_\alpha^2)}\right];$$

$$\omega_{0\alpha}^2 = 4\pi n_\alpha e_\alpha^2/m_\alpha.$$

б) В случае сильной пространственной дисперсии необходимо вычислить асимптотику $\sigma_{\mu\nu}(k)$ при больших значениях kr_α. После простых, но довольно громоздких вычислений по методу стационарной фазы получаем:

$$\sigma_{\mu\nu} = \sum_\alpha \frac{\omega_{0\alpha}^2}{4\pi\Omega_\alpha}\begin{Vmatrix} \dfrac{\pi^{1/2}\operatorname{cth}\pi\gamma_\alpha}{kr_\alpha}; & 0; & 0 \\ 0; & \dfrac{\sqrt{\pi}\operatorname{cth}\pi\gamma_\alpha}{kr_\alpha}; & \mp\dfrac{\sqrt{\pi}\,\gamma_\alpha\operatorname{cth}\pi\gamma_\alpha}{(kr_\alpha)^3} \\ 0; & \pm\dfrac{\sqrt{\pi}\,\gamma_\alpha\operatorname{cth}\pi\gamma_\alpha}{(kr_\alpha)^3}; & \dfrac{2\gamma_\alpha}{(kr_\alpha)^2}\left(1-\dfrac{\sqrt{\pi}\,\gamma_\alpha\operatorname{cth}\pi\gamma_\alpha}{kr_\alpha}\right) \end{Vmatrix}. \quad (3.4)$$

Можно показать, что в случае сильной пространственной дисперсии недиагональными компонентами в тензоре эффективной проводимости можно пренебречь.

Это пренебрежение соответствует малости высокочастотного холловского поля. Физическая причина указанного пренебрежения связана с тем, что в условиях резко выраженного (аномального) скин-эффекта ($kr_\alpha \gg 1$) основной вклад в ток дают электроны (ионы) лишь вблизи поверхности плазмы, когда они движутся параллельно ее границе. Ясно, что искривление их орбит и связанное с ним поле $\mathcal{E}_z(k)$ в этой области не играет роли. Действительно, $\mathcal{E}_z(k) \sim (\sigma_{zy}/\sigma_{zz})\mathcal{E}_y$ (без учета тока смещения). Если в σ_{zz} пренебречь вторым (резонансным) слагаемым по сравнению с первым, то $|\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_y| \sim |\sigma_{yz}/\sigma_{zz}| \sim |(kr_\alpha)^{-1}\operatorname{cth}\pi\gamma_\alpha| \lesssim 1$. Наоборот, когда основную роль в σ_{zz} играет резонансный член, то $|\sigma_{yz}/\sigma_{zz}| \sim |\gamma_\alpha^{-1}|$, а вклад $\mathcal{E}_z$ в $j_y(k)$ оказывается относительно малым (порядка $|\sigma_{yz}^2/\sigma_{yy}\sigma_{zz}| \sim (kr)^{-2}$). Учет членов с $Q_{\mu\nu}$ не меняет этих оценок. Поэтому при нахождении фурье-компоненты тангенциальной составляющей поля $\mathcal{E}_t(k)$ в рассматриваемом предельном случае можно не учитывать $\mathcal{E}_z(k)$. Асимптотика Q_{xx} и Q_{yy} при больших kr_α, $k'r_\alpha$ имеет вид:

$$Q_{xx} = Q_{yy} = \sum_\alpha \frac{\omega_{0\alpha}^2}{4\pi\Omega_\alpha}\left\{\frac{\sqrt{\pi}\,\delta(k-k')}{kr_\alpha(e^{2\pi\gamma_\alpha}-1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{ch}^2\pi\gamma_\alpha}{\sqrt{\pi}\,(e^{2\pi\gamma_\alpha}-1)(k+k')r_\alpha(kk')^{1/2}} + \frac{(3+e^{-2\pi\gamma_\alpha})\ln(k/k')}{2\pi^{3/2}r_\alpha(k^2-k'^2)}\right\}. \quad (3.5)$$

Вычисление эффективной глубины проникновения электрического поля в случае сильной пространственной дисперсии требует знания асимптотики $Q_{\mu\nu}(0; k')$ при больших $k'r_\alpha$, поскольку глубина проникновения δ_{E_μ} выражается через $\mathcal{E}_\mu(0)$ (см. (2.5)) и, следовательно, через $\int_0^\infty Q_{\mu\nu}(0; k')\mathcal{E}_\nu(k')dk'$. Учитывая, что $\mathcal{E}_z(k)$ не играет роли, достаточно найти $Q_{xx}(0; k')$ и $Q_{yy}(0; k')$:

$$Q_{xx}(0;\,k)=\sum_{\alpha}\frac{\omega_{0\alpha}^2}{4\pi i\omega}\,\frac{1+e^{-2\pi\gamma_\alpha}}{k(2\pi kr_\alpha)^{1/2}\Gamma(1/4)};$$
$$Q_{yy}(0;\,k)=\sum_{\alpha}\frac{\omega_{0\alpha}^2}{4\pi i\omega}\,\frac{3\gamma_\alpha^2}{2(1+\gamma_\alpha^2)}\,\frac{1+e^{-2\pi\gamma_\alpha}}{k(2\pi kr_\alpha)^{1/2}\Gamma(1/4)}, \tag{3.6}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

4. СЛАБАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ. РЕЗОНАНС НА «ГИБРИДНОЙ» ЧАСТОТЕ

При достаточно низких температурах и плотностях плазмы либо в сильном магнитном поле реализуются условия слабой пространственной дисперсии, когда $|kr_e|\ll|kr_i|\ll 1$. Величина k по порядку равна $1/\lambda_{ef}$, где λ_{ef} — эффективная длина электромагнитной волны в плазме. В этом случае $r_e\ll r_i\ll\lambda_{ef}$.

а) Обыкновенная волна. Уравнение для обыкновенной волны ($\boldsymbol{E}\parallel\boldsymbol{H}$) имеет вид:

$$\left[k^2-\frac{\omega^2}{c^2}+\frac{4\pi i\omega}{c^2}\,\sigma_{xx}(0)\right]\mathcal{E}_x(k)-\frac{4\pi^2 i\omega}{c^2}\,Q_{xx}(0;\,0)E_x(0)=-2E_x'(0). \tag{4.1}$$

В $\sigma_{xx}(0)=\sum_{\alpha}\frac{\omega_{0\alpha}^2}{4\pi i\omega}$ можно пренебречь ионным вкладом. Поскольку

$$E_x(0)=-\frac{c^2Z_x}{4\pi i\omega}E_x'(0),$$

$$\mathcal{E}_x(k)=\frac{-E_x'(0)\,[2+\pi Q_{xx}(0;\,0)\,Z_x]}{k^2-\omega^2/c^2+\omega_{0e}^2/c^2}. \tag{4.2}$$

Из (4.2) легко найти как распределение полей, так и эффективные глубины проникновения. Обыкновенная волна в плазме затухает экспоненциально, если $\omega<\omega_{0e}$ (полное внутреннее отражение). Если пренебречь током смещения ($\omega\ll\omega_{0e}$) и считать член с $Q_{xx}(0;\,0)$ малым, то импеданс имеет вид:

$$Z_x=R_x+iX_x=\frac{4\pi}{c}\left[\frac{i\omega}{\omega_{0e}}+\left(\frac{T_e}{2\pi mc^2}\right)^{1/2}a_x^e+\right.$$
$$\left.+\frac{m}{M}\left(\frac{T_i}{2\pi Mc^2}\right)^{1/2}a_x^i\right], \tag{4.3}$$

где

$$a_x^\alpha=1-\frac{1+e^{-2\pi\gamma_\alpha}}{2(1+4\gamma_\alpha^2)};\qquad m=m_e;\qquad M=m_i.$$

Вещественная часть импеданса R связана с поглощательной способностью плазмы. Вектор Пойнтинга через границу плазмы $S=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{4\pi}\right)^2R_x|H_y(0)|^2$, а поглощательная способность $A=8\pi S/c|H_y(0)|^2=cR_x/4\pi$. Из (4.3) видно, что имеется поверхностное поглощение за счет диффузного отражения частиц от границы (объемным поглощением пренебрежено). В отличие от металлов, в которых поверхностное поглощение определяется фермиевской скоростью электронов скоростью электронов]^{10}], в плазме это поглощение, очевидно, связано

с тепловыми скоростями частиц. При зеркальном отражении поверхностное поглощение отсутствует. Можно показать [10], что если q — доля зеркально отразившихся частиц, $A_{sq} = (1 - q) A_s$ (A_s — поглощение при $q = 0$). В отсутствие магнитного поля

$$A_s = \left(\frac{T_e}{2\pi mc^2}\right)^{1/2} + \frac{m}{M}\left(\frac{T_i}{2\pi Mc^2}\right)^{1/2}. \tag{4.4}$$

В магнитном поле поверхностное поглощение осциллирует следующим образом:

$$A_s^e = \left(\frac{T_e}{2\pi mc^2}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{\cos^2(\pi\omega/\Omega_e)}{1-(2\omega/\Omega_e)^2}\right]. \tag{4.5}$$

В сильном поле ($\Omega_e \gg \omega$)A_s убывает, поскольку радиус орбиты и относительная доля электронов, сталкивающихся с границей, уменьшаются:

$$A_s^e = \left(\frac{T_e}{2\pi mc^2}\right)^{1/2}\left(\frac{\omega}{\Omega_e}\right)^2(\pi^2 - 4). \tag{4.6}$$

В этом случае вклад ионов в поверхностное поглощение может оказаться сравнимым с электронной частью, поскольку магнитное поле может быть „сильным" для электронов и „слабым" для ионов. Условия применимости (4.3)—(4.6) имеют вид:

$$v_e/c \ll \omega/\omega_{0e} \ll 1, \quad \mu_e \ll 1, \quad \mu_i \ll m/M, \tag{4.7}$$

где $\mu_\alpha = 8\pi n_\alpha T_\alpha / H^2$ — отношение кинетического давления к магнитному. Неравенство $\omega \ll \omega_{0e}$ обеспечивает малость тока смещения, условие $\omega \gg \omega_{0e}\beta_e$ обеспечивает малую поглощательную способность. Последние два ограничения на величины μ_α выражают условия слабой пространственной дисперсии для электронов и ионов.

Зная импеданс, по формуле (2.2) легко найти эффективную глубину проникновения переменного магнитного поля:

$$\delta_{H_y} = \frac{c^2 Z_x}{4\pi i\omega} = \delta_0\left\{1 - \frac{i\omega_{0e}}{\omega}\left[\left(\frac{T_e}{2\pi mc^2}\right)^{1/2} a_x^e + \frac{m}{M}\left(\frac{T_i}{2\pi Mc^2}\right)^{1/2} a_x^i\right]\right\}, \tag{4.8}$$

где $\delta_0 = c/\omega_{0e} = (mc^2/4\pi ne^2)^{1/2}$. Глубина проникновения электрического поля δ_{E_x} в этом случае не зависит от характера отражения частиц на поверхности:

$$\delta_{E_x} = \delta_0. \tag{4.9}$$

б) Необыкновенная волна. Рассмотрим проникновение в плазму необыкновенной волны, в которой электрический вектор $\boldsymbol{E}$ перпендикулярен постоянному полю $\boldsymbol{H}$ ($\boldsymbol{E} \| 0y$). Благодаря гиротропии в плазме появляется продольная составляющая поля E_z. Для ее нахождения необходимо использовать уравнение (1.11). Запишем исходную систему уравнений в приближении слабой пространственной дисперсии:

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{4\pi i\omega}{c^2}\sigma_{yy}(k)\right]\mathcal{E}_y(k) + \frac{4\pi i\omega}{c^2}\sigma_{yz}(k)\mathcal{E}_z(k) =$$

$$= -2E_y'(0) + \frac{4\pi^2 i\omega}{c^2}[Q_{yy}(0;0)E_y(0) + Q_{yz}(0;0)E_z(0)]; \tag{4.10}$$

$$\left[\sigma_{zz}(k) - \frac{\omega}{4\pi i}\right]\mathcal{E}_z(k) + \sigma_{zy}(k)\,\mathcal{E}_y(k) = \\ = \pi\,[Q_{zz}(0;\,0)\,E_z(0) + Q_{zy}(0;\,0)\,E_y(0)]. \tag{4.11}$$

Подчеркнем, что условием того, что интегральные слагаемые в плотности тока $\int_0^\infty Q_{\mu\nu}(k;\,k')\,\mathcal{E}_\nu(k')dk'$ можно записать в виде $\pi\,Q_{\mu\nu}(0;\,0)\,E_\nu(0)$, является не малость самих $Q_{\mu\nu}(k;\,k')$, а медленность их изменения по сравнению с электрическим полем $\mathcal{E}_\nu(k)$.

Уравнения (4.10) и (4.11) легко решаются. Однако, прежде чем перейти к их решению, укажем на тот резонансный эффект, исследованием которого мы будем заниматься. Речь идет об известном резонансе на „гибридной" частоте

$$\omega = (\Omega_e\Omega_i)^{1/2}.$$

Если пренебречь влиянием границы плазмы, т. е. положить $Q_{\mu\nu} \equiv 0$, то уравнение (4.10) после исключения $\mathcal{E}_z$ имеет вид:

$$\mathcal{E}_y(k) = \frac{-2E'_y(0)}{k^2 + (4\pi i\omega/c^2)\left(\sigma_{yy} - \dfrac{\sigma_{yz}\sigma_{zy}}{\sigma_{zz}}\right)} \tag{4.12}$$

(ток смещения не учитываем). При тех значениях параметров, когда $\sigma_{zz} = 0$, эффективная проводимость $\sigma_{ef} = \sigma_{yy} - (\sigma_{yz}\sigma_{zy})/\sigma_{zz}$ обращается в бесконечность, т. е. имеет место резонанс. В условиях слабой пространственной дисперсии σ_{zz} обращается в нуль на частоте $\omega = eH/c(mM)^{1/2}$. Действительно, при $\Omega_i \ll \omega \ll \Omega_e$

$$\sigma_{zz} = \frac{ne^2i\omega}{m\Omega_e^2}\left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right). \tag{4.13}$$

где $\Omega_c = (\Omega_i\Omega_e)^{1/2} = eH/c(mM)^{1/2}$. (Для простоты ионы считаются однозарядными.)

Ширина резонансной кривой определяется двумя причинами: во-первых, эффективными частотами столкновений (которыми пренебрегли), а во-вторых, пространственной дисперсией или эффектом Допплера. При „гибридном" резонансе, который, очевидно, существенно связан с движением ионов, весьма эффективно генерируются продольные плазменные волны.

Рассмотрим сначала область вне резонанса, когда $\omega \neq \Omega_c$ и пространственную дисперсию можно не учитывать, т. е. заменить $\sigma_{\mu\nu}(k)$ их значениями при $k = 0$. Выкладки, полностью аналогичные приведенным для обыкновенной волны, приводят к следующему выражению для импеданса:

$$Z_y = \frac{4\pi}{c}\left\{\frac{i\omega}{\omega_{0e}}[1 + (\gamma_e\gamma_i)^{-1}]^{1/2} + \left(\frac{T_e}{2\pi mc^2}\right)^{1/2} b\right\}; \tag{4.14}$$

$$b = \frac{2}{\pi}[1 + (\gamma_e\gamma_i)^{-1}]\left\{\gamma_e^2 M^s_{yy} - \frac{2\gamma_e}{[1 + (\gamma_e\gamma_i)^{-1}]}M^s_{yz} - \frac{M^s_{zz}}{[1 + (\gamma_e\gamma_i)^{-1}]^2}\right\}, \tag{4.15}$$

где $M^s_{\mu\nu} = M^e_{\mu\nu} + \left(\dfrac{T_iM}{T_em}\right)^{1/2} M^i_{\mu\nu}$, а $M^\alpha_{\mu\nu}$ определяется формулами (3.3).

При выводе формулы (4.14) мы пренебрегли током смещения. Это пренебрежение законно при $\Omega_e \ll \omega_{0e}$.

Переход к однокомпонентной плазме, т. е. к плазме с неподвижными ионами, дается предельным переходом $M \to \infty$, $\gamma_i \to \infty$. В этом приближении „гибридный" резонанс отсутствует, а импеданс имеет вид:

$$Z_y = \frac{4\pi}{c}\left\{\frac{i\omega}{\omega_{0e}} + \left(\frac{T_e}{2\pi mc^2}\right)^{1/2} a_y^e\right\}, \tag{4.16}$$

где

$$a_y^e = a_x^e - \frac{4\gamma_e^2[1+\exp(-2\pi\gamma_e)]}{(4\gamma_e^2+1)(4\gamma_e^2+9)}. \tag{4.17}$$

Как и в случае обыкновенной волны, резонанса при $\omega = \frac{1}{2}\Omega_e$ и $\omega = \frac{3}{2}\Omega_e$ нет, так как при $2\gamma_e = i, 3i$ особенности в числителе и знаменателе взаимно погашаются. Импеданс осциллирует при изменении H. В сильном магнитном поле поверхностное поглощение отличается от A_s для обыкновенной волны:

$$\frac{cR_y}{4\pi} = \left(\frac{T_e}{2\pi mc^2}\right)^{1/2}\left(\frac{\omega}{\Omega_e}\right)^2\left(\pi^2 - \frac{28}{9}\right).$$

Обратимся к анализу общей формулы (4.14). Величина $1+(\gamma_e\gamma_i)^{-1} = 1 - \Omega_c^2/\omega^2$ вблизи резонанса $\omega = \Omega_c$ мала, а сама формула становится непригодной, поскольку последний член в выражении для b, равный $-\frac{2}{\pi}[1+(\gamma_e\gamma_i)^{-1}]^{-1} M_{zz}^s$, резко возрастает. Поэтому непосредственную окрестность точки резонанса необходимо исследовать отдельно.

Уже из формулы (4.14) видно, что из всех „поверхностных" членов в плотности тока основную роль играет слагаемое с Q_{zz}. Прямые вычисления показывают, что всеми $Q_{\mu\nu}$, кроме Q_{zz}, вблизи резонанса можно пренебречь. Несложные вычисления приводят к следующим формулам для фурье-компонент $\mathcal{E}_y(k)$ и $\mathcal{E}_z(k)$ вблизи резонанса:

$$\mathcal{E}_y(k) = -2E_y'(0)\frac{a}{1+q}\left\{\frac{f(k)}{a} + q\left(\frac{f(k)}{a} - \frac{\varphi(k)}{b}\right)\right\};$$
$$\mathcal{E}_z(k) = -2E_y'(0)\frac{b}{1+q}\left\{\frac{\varphi(k)}{b} + q\left(\frac{\varphi(k)}{b} - \frac{f(k)}{a}\right)\right\}, \tag{4.18}$$

где

$$f(k) = [k^2 + \delta_0^{-2}(\Delta + k^2\rho^2)^{-1}]^{-1};$$
$$\varphi(k) = -i(M/m)^{1/2} f(k)(\Delta + k^2\rho^2)^{-1};$$
$$a = \int_0^\infty dk\, f(k); \quad b = \int_0^\infty dk\, \varphi(k); \quad q = \frac{4\pi i\omega}{c^2}\frac{b^2}{a} Q_{zz}(0;0); \tag{4.19}$$
$$\Delta = 1 - \frac{\omega^2}{\Omega_c^2}; \quad \rho^2 = \frac{3\left(T_i + \frac{1}{4}T_e\right)}{M\omega^2}; \quad \delta_0 = \frac{c}{\omega_{0e}};$$
$$\Omega_c = eH/c(mM)^{1/2}; \qquad |\Delta| \ll 1.$$

В резонансе $\omega = \Omega_c$, $|\gamma_e| = (m/M)^{1/2} \ll 1$, $|\gamma_i| = (M/m)^{1/2} \gg 1$. Благодаря этому, выражение для $Q_{zz}(0;0)$ можно упростить:

$$Q_{zz}(0;0) = -\frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2}(2\pi^5 M)^{-1/2}\left(T_i^{1/2} + \frac{\pi i}{2} T_e^{1/2}\right). \tag{4.20}$$

Как уже указывалось, ширина резонанса определяется (в пренебрежении столкновениями) эффектом Допплера. При точном резонансе $\omega = \Omega_c$ распределение полей имеет вид:

$$E_y(z) = E_y(0)\, e^{-z/\sqrt{2\delta_{0i}\rho}}\left[\cos\frac{z}{\sqrt{2\delta_{0i}\rho}} - (1+2q)\sin\frac{z}{\sqrt{2\delta_{0i}\rho}}\right]; \tag{4.21}$$

$$E_z(z) = E_z(0) e^{-z/\sqrt{2\delta_{0i}\rho}}\left[\cos\frac{z}{\sqrt{2\delta_{0i}\rho}} + (1+2q)\sin\frac{z}{\sqrt{2\delta_{0i}\rho}}\right]; \tag{4.22}$$

$$E_y(0)/E_z(0) = a/b = i\rho\omega_{0i}/c;$$

$$q = i(3\pi)^{-1/2}(\delta_0/\rho)^{1/2}\left(T_i^{1/2} + \frac{\pi i}{2} T_e^{1/2}\right)(T_i + T_e/4)^{-1/2}.$$

Величина ρ в резонансе—порядка r_e. Так как, по предположению, $\delta_0 \gg \rho$, то $|q| \gg 1$ и $|E_y(0)| \ll |E_z(0)|$. Из (4.21) видно, что в резонансе эффективная длина волны в плазме $\lambda_{ef} = (2\delta_{0i}\rho)^{1/2}$. Эффективная глубина проникновения магнитного поля в необыкновенной волне равна

$$\delta_{H_x} = -E_y(0)/E_y'(0) = \frac{2a}{\pi(1+q)} = \left(\frac{\delta_{0i}\rho}{2}\right)^{1/2}(1+q)^{-1}.$$

Учитывая, что $|q| \gg 1$, получим:

$$\delta_{H_x} = (\delta_{0i}\rho/2)^{1/2} q^{-1} = -i\rho(3\pi/2)^{1/2}\left(T_i + \frac{T_e}{4}\right)^{1/2}\left(T_i^{1/2} + \frac{\pi i}{2} T_e^{1/2}\right)^{-1}. \tag{4.23}$$

Эффективная глубина проникновения поперечной компоненты электрического поля в резонансе значительно больше таковой для магнитного поля:

$$\frac{\delta_{E_y}}{\delta_{H_x}} = 2q^2; \qquad \delta_{E_y} \sim \delta_0. \tag{4.24}$$

Продольная компонента $E_z(z)$ в резонансе проникает в плазму значительно дальше:

$$|\delta_{E_z}/\delta_{E_y}| = |b/a| = c/\rho\omega_{0i} \gg 1.$$

Поглощательная способность определяется отношением δ_H к длине волны в вакууме и в резонансе по порядку величины равна ионной части поверхностного поглощения в отсутствие магнитного поля:

$$A = cR_y/4\pi = i\omega\delta_H/c = \frac{3}{2}\pi^{1/2}\beta_i\frac{T_i + T_e/4}{T_i + \pi^2 T_e/4}. \tag{4.25}$$

Замечательно, что в резонансе поглощательная способность плазмы не зависит от плотности и определяется лишь температурой электронов и ионов.

Причина этих своеобразных особенностей резонанса на „гибридной" частоте $\omega = \sqrt{\Omega_e\Omega_i}$ связана с наличием границы плазмы и появ-

лением поверхностного тока $j_\mu(z) = -\pi Q_{\mu\nu}(0;0)E_\nu(0)\delta(z)$, который в условиях резонанса сильно экранирует плазму от внешнего поля. Вблизи границы имеет место эффективная трансформация поперечных волн в продольные, поскольку условие резонанса есть не что иное, как дисперсионное уравнение для продольной волны. Проникшая в плазму поперечная электромагнитная волна на относительно малых расстояниях (порядка электронного радиуса орбиты) почти целиком трансформируется в продольную волну. Хотя продольные и поперечные волны связаны, тем не менее можно говорить о распространении продольной волны, поскольку ее амплитуда значительно больше, чем амплитуда поперечной волны. Эффективная глубина проникновения продольной компоненты E_z оказывается значительно больше глубины проникновения как магнитного поля, так и поперечной компоненты электрического поля. Поэтому поглощательная способность плазмы в резонансе аномально мала.

Условия применимости формул при точном резонансе имеют вид:

$$(2T_i/mc^2)^{1/2}\omega_{0e} \ll \omega = \Omega_c \ll \omega_{0i}. \tag{4.26}$$

Неравенство $\omega \ll \omega_{0i}$ обеспечивает малость тока смещения. Ограничение $\omega \gg \omega_{0e}(2T_i/mc^2)^{1/2}$ тождественно условию слабой пространственной дисперсии для ионов $|kr_i| \ll 1$, а следовательно, и для электронов, так как $r_e \ll r_i$.

5. СИЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ. ЭЛЕКТРОННЫЙ И ИОННЫЙ ЦИКЛОТРОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ

Условия сильной пространственной дисперсии или аномального скин-эффекта реализуются либо при достаточно высоких температурах и плотностях плазмы, либо в области циклотронных резонансов*. При этом эффективная длина электромагнитной волны в плазме должна быть малой по сравнению с характерными размерами орбит частиц в магнитном поле. Указанные ограничения связаны с выполнением неравенств

$$\mu_\alpha \left| \frac{2\pi\gamma_\alpha}{1 - e^{-2\pi\gamma_\alpha}} \right| \ll 1. \tag{5.1}$$

При этих условиях током смещения можно заведомо пренебречь. Для вычисления импеданса и эффективных глубин проникновения необходимо использовать асимптотику (3.4)—(3.6). Как было указано в разделе 3, высокочастотное поле Холла не играет роли, и распределение полей в обыкновенной и в необыкновенной волне описывается одним уравнением:

$$\left\{k^2 + \frac{i\sqrt{\pi}}{k}\frac{\omega}{c^2}\sum_\alpha \frac{\omega_{0\alpha}^2}{v_\alpha}[1 - \exp(-2\pi\gamma_\alpha)]^{-1}\right\}\mathcal{E}(k) -$$

$$-\frac{i\omega}{c^2\pi^{1/2}}\sum_\alpha \frac{\omega_{0\alpha}^2}{v_\alpha}\frac{\operatorname{ch}^2\pi\gamma_\alpha}{\exp(2\pi\gamma_\alpha) - 1}\int_0^\infty \frac{dk'\,\mathcal{E}(k')}{(k+k')(kk')^{1/2}} - \tag{5.2}$$

$$-\frac{i\omega}{2\pi^{3/2}c^2}\sum_\alpha \frac{\omega_{0\alpha}^2}{v_\alpha}(3 + \exp(-2\pi\gamma_\alpha))\int_0^\infty dk' \frac{\ln(k/k')}{k^2 - k'^2}\mathcal{E}(k') = -2E_y'(0).$$

* В области электронного и ионного циклотронных резонансов ширина линий определяется эффективными частотами столкновений электронов и ионов ν_e и ν_i, которые вводятся в выражения для резонансных знаменателей в виде мнимых добавок к частоте ω.

В работе [9] было показано, что при нахождении импеданса всеми интегральными членами в (5.2) можно пренебречь. Учет этих слагаемых не сказывается на зависимости импеданса от магнитного поля, частоты и других параметров и лишь незначительно (в пределах $10^0/_0$) меняет численный множитель в выражении для Z.

Обозначим

$$B = \pi^{1/2} \sum_\alpha \left(\omega_{0\alpha}^2 \nu_\alpha\right) \left[1 - \exp\left(-2\pi \frac{i\omega + \nu_\sigma}{\Omega_\alpha}\right)\right]^{-1}. \tag{5.3}$$

Тогда, пренебрегая интегральными членами, получим:

$$\varepsilon(k) = -2E_y'(0)\, k \left(k^3 + \frac{i\omega}{c^2} B\right)^{-1}, \tag{5.4}$$

откуда

$$cZ/4\pi = \frac{8}{9}\left(\frac{\omega^2}{c}\right)^{1/3} e^{(\pi i/3)} B^{-1/3}. \tag{5.5}$$

Кубический корень определен так, чтобы $R = \mathrm{Re}\, Z > 0$. Эффективная глубина проникновения магнитного поля равна

$$\delta_H = \frac{8}{9}\left(\frac{c^2}{\omega}\right)^{1/3} e^{-\pi i/4} B^{-1/3}. \tag{5.6}$$

Из формул (5.3), (5.5) и (5.6) следует, что вблизи циклотронных резонансов $\Omega_\alpha = \omega/n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) величина B стремится к бесконечности, а импеданс и δ_H становятся малыми — в соответствии с резонансным экранированием плазмы за счет резкого возрастания тока. Формула (5.5) в приближении неподвижных ионов ($M \to \infty$) была получена в [11].

Используя формулы (2.5), (3.6), (5.4), можно найти также эффективную глубину проникновения электрических полей:

$$\delta_{E_\mu} = \frac{1}{Z\sigma_{\mu\mu}(0)}\left\{1 + \frac{4\pi i\omega}{c^2}\int_0^\infty \frac{dk\, Q_{\mu\mu}(0;k)}{k^3 + i\omega B/c^2}\right\} = \\ = (Z\sigma_{\mu\mu}(0))^{-1}\{1 + D_\mu c^{-2}(c^2/\omega B)^{5/6}\}, \tag{5.7}$$

где

$$D_x = 2\pi 3^{-1/2}\Gamma^{-1}(1/4)\exp(-5\pi i/12)\sum_\alpha \omega_{0\alpha}^2 r_\alpha^{-1/2}(1 + e^{-2\pi\gamma_\alpha}); \tag{5.8}$$

$$D_y = (\pi/2)^{1/2}\Gamma(1/4)^{-1}\exp(-5\pi i/12)\sum_\alpha \frac{\gamma_\alpha^2}{1+\gamma_\alpha^2}\omega_{0\alpha}^2 r_\alpha^{-1/2} \times \\ \times(1+\exp(-2\pi\gamma_\alpha)).$$

Исследованные в настоящей работе резонансные эффекты соответствуют обращению в бесконечность диэлектрической проницаемости плазмы ε_{ef}. Наряду с этими имеют место и „резонансы“, связанные с обращением в нуль ε_{ef}. Эффективная длина электромагнитной волны $\lambda_{ef} \sim \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_{ef}}$ при этом становится большой, и предельный случай слабой пространственной дисперсии является хорошим приближением. Исследованию этих особенностей проникновения поля в плазму будет посвящено отдельное сообщение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л Д Ландау, ЖЭТФ, **16**, 574 (1946).
2. В. П Силин, Труды ФИАН, **6**, 199 (1955).
3. В. Д. Шафранов, ЖЭТФ, **34**, 1475 (1958).
4. К. Н. Степанов, ЖЭТФ, **36**, 1457 (1959).
5. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, **37**, 695 (1959); **38**, 912 (1960).
6 Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖЭТФ, **39**, 845 (1960).
7. М. Я. Азбель, ДАН СССР, **99**, 519 (1954).
8. Э. А Канер, ЖЭТФ, **32**, 896 (1958).
9. М. Я. Азбель, Э. А. Канер, ЖЭТФ, **32**, 896 (1957).
10 В. Л. Гинзбург, Г. П Мотулевич, УФН, **55**, 469 (1955).
11. Э. А. Канер, ЖЭТФ, **33**, 544 (1957).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
29 мая 1961 г.

ON PENETRATION OF ELECTROMAGNETIC FIELD INTO MAGNETO-ACTIVE PLASMA

E. A. Kaner, Yu. A. Belov

The ordinary and extraordinary wave propagation across the external magnetic field in the plasma half space has been investigated in the kinetic approximation taking into account ions motion. The particles distribution functions have been found when the electron and ion reflections from the plasma surface being diffuse. The surface absorption peculiarities have been investigated, the effective depth of electric and magnetic field penetration have been calculated in the limit cases of weak and strong space dispersion. The main attention is paid to plasma resonance characteristics on a „hybrid" frequency $\sqrt{\Omega_e \Omega_i}$, as well as in the regions of electron (Ω_e) and ion (Ω_i) gyrofrequencies.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ФЛЮКТУАЦИЙ В ПЛАЗМЕ

В. Ф. Алексин, К. Н. Степанов

Найдены корреляционные функции для электрического и магнитного полей в плазме, находящейся во внешнем магнитном поле. В изотропном случае исследовано асимптотическое поведение корреляционных функций для полей на больших и малых расстояниях, а также рассмотрено движение заряженной частицы под действием флюктуационных полей.

Флюктуации электрического и магнитного полей, плотности электрического тока и плотности объемного заряда можно определить, зная корреляционную функцию для плотности „сторонних" токов. В анизотропных средах с временной дисперсией корреляционная функция сторонних токов определяется формулой Леонтовича—Рытова [1–3], которая справедлива в тех случаях, когда тепловое движение электронов и ионов плазмы слабо влияет на распространение электромагнитных волн, т. е. в области частот, в которой пространственная дисперсия плазмы несущественна.

Учет пространственной дисперсии плазмы, проведенный различными методами [4–11], показывает, что корреляционная функция для фурье-компонент плотности „сторонних" токов имеет вид:

$$\overline{j_m^{\text{ст}}(\boldsymbol{k},\ \omega)\,j_n^{\text{ст}}(\boldsymbol{k}',\ \omega')} = \frac{T\varepsilon''_{mn}\,\omega}{(2\pi)^5}\,\delta(\omega+\omega')\,\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\,, \tag{1}$$

где T—температура плазмы, $2\varepsilon''_{mn} = i[\varepsilon_{nm}(\boldsymbol{k},\ \omega) - \varepsilon_{mn}(\boldsymbol{k},\ \omega)]$—антиэрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости плазмы $\varepsilon_{mn}(\boldsymbol{k},\ \omega)$,

$$\varphi(\boldsymbol{k},\ \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\int e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}\,\varphi(\boldsymbol{r},\ t)\,d\boldsymbol{r}\,dt\,.$$

В настоящей работе на основе соотношения (1) исследуются флюктуации напряженности электрического и магнитного полей в неограниченной плазме, а также рассматривается движение заряженной частицы в плазме под действием флюктуационных электрических полей.

1. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

Напряженность флюктуационных электрического и магнитного полей $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\ t)$, обусловленных „сторонними" токами, определяется из уравнений Максвелла. Для фурье-компонент $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\ \omega)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k},\ \omega)$ получим уравнения:

$$T_{lm}E_m = -\frac{4\pi i}{\omega}\,j_l^{\text{ст}}, \qquad H_m = n\,[\boldsymbol{\varkappa},\ \boldsymbol{E}]_m, \tag{2}$$

где $n = kc/\omega$, $\boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{k}/k$ и

$$T_{lm} = n^2(\varkappa_l\varkappa_m - \delta_{lm}) + \varepsilon_{lm}\,.$$

В плазме, находящейся во внешнем магнитном поле с напряженностью $\boldsymbol{H}_0$, тензор ε_{lm} имеет вид [12]:

$$\varepsilon_{lm} = a\delta_{lm} + b\varkappa_l\varkappa_m + ch_lh_m + d\varepsilon_{lmn}h_n + \\ + e(\varkappa_l[\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{h}]_m - \varkappa_m[\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{h}]_l) + f[\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{h}]_l[\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{h}]_m, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{h}$—единичный вектор в направлении $\boldsymbol{H}_0$. Величины a, b, c, d, e и f являются функциями частоты ω, модуля волнового вектора $\boldsymbol{k}$ и угла Θ между векторами $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{H}_0$. Для нерелятивистской плазмы выражения для этих величин приведены в работе [12]. Отметим, что при замене $\omega \to -\omega$ коэффициенты a, b, ... заменяются на комплексно-сопряженные величины a^*, b^*, ... При замене $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$ эти коэффициенты не изменяются. Отсюда следует, что $\varepsilon_{lm}(-\boldsymbol{k}, -\omega) = \varepsilon^*_{lm}(\boldsymbol{k}, \omega)$.

Решение уравнений (2) имеет вид:

$$E_l = \frac{4\pi i}{\omega D} u_{lm} j^{\text{ст}}_m, \tag{4}$$

где

$$u_{lm} = \delta_{lm}\left[n^2\varkappa_p\varepsilon_{pq}\varkappa_q + \frac{1}{2}\varepsilon_{pq}\varepsilon_{qp} - \frac{1}{2}(\operatorname{Sp}\varepsilon)^2\right] + \\ + \varkappa_l n^2[\varkappa_m \operatorname{Sp}\varepsilon - n^2\varkappa_m - \varkappa_p\varepsilon_{pm}] - \varepsilon_{lp}\varkappa_p\varkappa_m n^2 + \varepsilon_{lm}\operatorname{Sp}\varepsilon - \varepsilon_{lp}\varepsilon_{pm};$$

$$D = \operatorname{Det} T_{lm} = \varkappa_l\varepsilon_{lm}\varkappa_m n^4 + (\varkappa_l\varepsilon_{lm}\varepsilon_{mq}\varkappa_q - \varkappa_l\varepsilon_{lm}\varkappa_m \operatorname{Sp}\varepsilon)n^2 + \operatorname{Det}\varepsilon_{lm}.$$

Отсюда, используя (1), находим корреляционную функцию для фурье-компонент напряженности электрического и магнитного полей

$$\overline{E_l(\boldsymbol{k}, \omega)E_m(\boldsymbol{k}', \omega')} = \frac{T}{2\pi^3\omega|D|^2} u_{lp}u^*_{mq}\varepsilon''_{pq}\delta(\omega+\omega')\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}');$$

$$\overline{H_l(\boldsymbol{k}, \omega)H_m(\boldsymbol{k}', \omega')} = \frac{Tn^2}{2\pi^3\omega|D|^2}\varepsilon_{lpq}\varepsilon_{mrs}\varkappa_p\varkappa_r u_{qi}u^*_{sj}\varepsilon''_{ij}\delta(\omega+\omega')\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'). \tag{5}$$

Так как фурье-компоненты плотности тока в плазме связаны с $E_l(\boldsymbol{k}, \omega)$ соотношением $j_l(\boldsymbol{k}, \omega) = \sigma_{lm}(\boldsymbol{k}, \omega)E_m(\boldsymbol{k}, \omega)$, где $\sigma_{lm} = (\omega/4\pi i)(\varepsilon_{lm}-\delta_{lm})$, и фурье-компонента плотности объемного заряда равна $\rho(k, \omega) = \boldsymbol{kj}/\omega$, то корреляционные функции $\overline{j_l(\boldsymbol{k}, \omega)j_m(\boldsymbol{k}', \omega')}$ и $\overline{\rho(k, \omega)\rho(k', \omega')}$ нетрудно получить, используя (5).

Рассмотрим теперь флюктуации электромагнитного поля в изотропной плазме ($\boldsymbol{H}_0=0$). В этом случае $\varepsilon_{lm} = a\delta_{lm} + b\varkappa_l\varkappa_m$. Удобнее представить это выражение в другом виде:

$$\varepsilon_{lm} = \varepsilon_\perp(\delta_{lm} - \varkappa_l\varkappa_m) + \varepsilon_\parallel\varkappa_l\varkappa_m, \tag{6}$$

где $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ — поперечная и продольная диэлектрические проницаемости плазмы. Как известно, в изотропной плазме могут существовать чисто поперечные (электромагнитные) волны и чисто продольные (ленгмюровские) колебания, для которых электрическое поле соответственно перпендикулярно и параллельно k. Полагая

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\parallel + \boldsymbol{E}_\perp, \quad \boldsymbol{E}_\parallel = \boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{E}), \quad \boldsymbol{E}_\perp = [[\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{E}]\boldsymbol{\varkappa}],$$

найдем из (5):

$$\overline{E_{l\parallel}(\boldsymbol{k}, \omega)E_{m\parallel}(\boldsymbol{k}', \omega')} = \frac{T}{2\pi^3\omega}\frac{\varepsilon''_\parallel}{|\varepsilon_\parallel|^2}\varkappa_l\varkappa_m\delta(\omega+\omega')\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}');$$

$$\overline{E_{l\perp}(\boldsymbol{k}, \omega)E_{m\perp}(\boldsymbol{k}', \omega')} = \frac{T}{2\pi^3\omega}\frac{\varepsilon''_\perp(\delta_{lm}-\varkappa_l\varkappa_m)}{|n^2-\varepsilon_\perp|^2}\delta(\omega+\omega')\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'); \tag{7}$$

$$\overline{H_l(\boldsymbol{k}, \omega)H_m(\boldsymbol{k}', \omega')} = n^2\overline{E_{l\perp}(\boldsymbol{k}, \omega)E_{m\perp}(\boldsymbol{k}', \omega')}.$$

Выражения (7) были получены Силиным [9].

2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ ПОЛЕЙ В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

Величины $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ нетрудно получить из кинетического уравнения с самосогласованным взаимодействием [13]. Без учета „близких" столкновений величины $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ имеют вид (см., например, [14]):

$$\varepsilon_\perp = 1 + \sum_{\alpha=e,i} \frac{\Omega_\alpha^2}{\omega^2} i\sqrt{\pi}\, w(z_\alpha);$$

$$\varepsilon_\parallel = 1 + \sum_{\alpha=e,\,i} \frac{2\Omega_\alpha^2}{\omega^2} z_\alpha^2 \left[1 + i\sqrt{\pi}\, z_\alpha\, w(z_\alpha)\right]; \qquad (8)$$

$$w(z) = e^{-z^2}\left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt\right), \quad z_\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{2}\, k v_\alpha},$$

где $\Omega_\alpha = (4\pi e_\alpha^2 n_\alpha / m_\alpha)^{1/2}$ — ленгмюровская частота частиц сорта α, e_α, m_α и n_α — их заряд, масса и равновесная плотность, $v_\alpha = \sqrt{T/m_\alpha}$ — средняя тепловая скорость. Индексы $\alpha=e$ и $\alpha=i$ служат для обозначения электронов и ионов. Предполагается, что плазма нерелятивистская, т. е. $T \ll m_e c^2$.

Так как „близкие" столкновения приводят к затуханию волн, то корреляция полей будет обусловлена и близкими столкновениями.

Мы рассмотрим корреляционную функцию только для таких частот, для которых „близкие" столкновения несущественны и можно пользоваться выражениями (8). Корреляция полей обусловлена в этом случае тепловым движением электронов и ионов.

Для поперечных составляющих электрического поля и магнитных полей корреляция, обусловленная тепловым движением электронов, может оказаться существенной только в области низких частот $\omega \ll \Omega_e$ (при $\omega \gtrsim \Omega_e$ характерная длина, на которой изменяется поле волны $\delta \sim c/\omega$, будет больше пути v_e/ω, проходимого электроном за период изменения поля). Поэтому наше рассмотрение для поперечных полей будет относиться только к случаю $\omega \ll \Omega_e$. Отметим, что тепловое движение ионов оказывает малое влияние на распространение поперечных волн: слагаемые с $\alpha=i$, входящие в выражение (8) для $\varepsilon_\perp$, значительно меньше электронных слагаемых (по крайней мере в $\sqrt{m_i/m_e}$ раз).

Используя выражение (7), нетрудно получить корреляционные функции для полей в различных точках:

$$\overline{E_{l\parallel}(\boldsymbol{r}_1, \omega)\, E_{m\parallel}(\boldsymbol{r}_2, \omega')} = -\frac{2T}{\pi^2\omega} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} \frac{\varepsilon_\parallel''}{|\varepsilon_\parallel|^2}\, dk\, \delta(\omega+\omega');$$

$$\overline{E_{l\perp}(\boldsymbol{r}_1, \omega) E_{m\perp}(\boldsymbol{r}_2, \omega')} = \frac{2T}{\pi^2\omega}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} - \delta_{lm}\frac{\partial^2}{\partial x_q^2}\right) \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} \frac{\varepsilon_\perp''}{|n^2-\varepsilon_\perp|^2} dk\delta(\omega+\omega'); \qquad (9)$$

$$\overline{H_l(\boldsymbol{r}_1, \omega) H_m(\boldsymbol{r}_2, \omega')} = \frac{2Tc^2}{\pi^2\omega^3}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} - \delta_{lm}\frac{\partial^2}{\partial x_q^2}\right) \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} \frac{\varepsilon_\perp''}{|n^2-\varepsilon_\perp|^2} k^2 dk\delta(\omega+\omega'),$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$.

Исследуем теперь поведение корреляционной функции в изотропной плазме для больших расстояний $r \gg v_e/\omega$. Интегралы, определяющие эти функции, могут быть представлены в виде

$$I(\tau) = \int_0^{i\infty} f(z)\, e^{\tau(z+1/2z^2)}\, dz, \qquad (10)$$

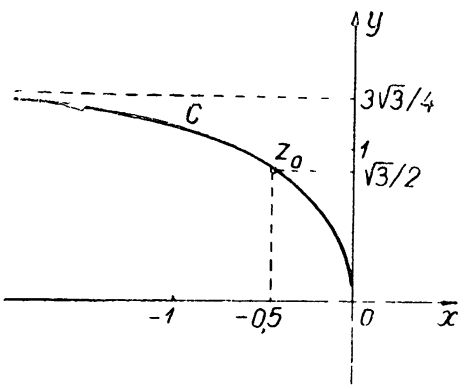


Рис. 1.

где $z = ik(rv_e^2/\omega^2)^{1/3}$, $\tau = (r\omega/v_e)^{2/3}$. Если $r \to \infty$, то интеграл (10) нетрудно вычислить методом перевала. Седловая точка $z_0 = (i\sqrt{3}-1)/2$ и линия скорейшего спуска C показаны на рис. 1. Интегрирование вдоль C около точки z_0 дает:

$$I(\tau) \simeq -\sqrt{\frac{2\pi}{3\tau}} f\left(\frac{i\sqrt{3}-1}{2}\right) e^{-3\tau/4} \times \times e^{i(3\sqrt{3}\tau/4 - \pi/6)}. \qquad (11)$$

Используя (11), получим при $r \gg v_e/\omega$

$$\overline{E_{l\parallel}(\mathbf{r}_1, \omega) E_{m\parallel}(\mathbf{r}_2, \omega')} = \frac{T\Omega_e^2}{\pi\sqrt{3}\,\omega v_e^2 \tau^2} e^{-3\tau/4} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\tau\right) \frac{x_l x_m}{r^3} \delta(\omega + \omega'); \qquad (12)$$

$$\overline{E_{l\perp}(\mathbf{r}_1, \omega) E_{m\perp}(\mathbf{r}_2, \omega')} = \frac{2T\Omega_e^2 e^{-3\tau/4} \cos\left(3\sqrt{3}\tau/4 - \pi/6\right)\left(\delta_{lm} - x_l x_m/r^2\right)}{\pi\sqrt{3}\,\omega v_e^2 \tau r\left[\left(\Omega_e^2/\omega^2 + c^2/2v_e^2\tau\right)^2 + 3c^4/4v_e^4\tau^2\right]} \delta(\omega+\omega'); \qquad (13)$$

$$\overline{H_l(\mathbf{r}_1, \omega) H_m(\mathbf{r}_2, \omega')} = \frac{2T\Omega_e^2 c^2 e^{-3\tau/4} \cos\left(3\sqrt{3}\tau/4 + \pi/6\right)\left(\delta_{lm} - x l x_m/r^2\right)}{\pi\sqrt{3}\,\omega^2 v_e^3 r^2 \sqrt{\tau}\left[\left(\Omega_e^2/\omega^2 + c^2/2v_e^2\tau\right)^2 + 3c^4/4v_e^4\tau^2\right]} \delta(\omega+\omega'), \qquad (14)$$

где $\varepsilon = 1 - \Omega_e^2/\omega^2$. Из выражений (12)–(14) следует, что корреляция между полями практически исчезает на расстоянии $r \sim v_e/\omega$.

Корреляция полей и токов на больших расстояниях ($r \gg v_e/\omega$) обусловлена перемещением электронов, имеющих скорость значительно большую, чем средняя тепловая скорость v_e. Однако при получении выражений (8) для $\varepsilon_\parallel$ и $\varepsilon_\perp$ использовалось нерелятивистское выражение для распределения частиц по скоростям; поэтому полученные ниже выражения для корреляционных функций при $r \gg v_e/\omega$ справедливы, если r не слишком велико ($r \ll c/\omega$).

Для малых расстояний $v_e/\Omega_e \ll r \ll v_e/\omega$ в области низких частот ($\omega \ll \Omega_e$) для функций корреляции продольных электрических полей получим выражение

$$\overline{E_{l\parallel}(\mathbf{r}_1, \omega) E_{m\parallel}(\mathbf{r}_2, \omega')} = \sum_\alpha \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{T v_\alpha}{\Omega_\alpha^2 \left|\sum_\beta \eta_{\gamma\beta}\right|^2} \frac{1}{r^4}\left(\delta_{lm} - \frac{4x_l x_m}{r^2}\right)\delta(\omega+\omega'), \qquad (15)$$

где $\eta_{\gamma\beta} = e_\beta^2 n_\beta / e_\alpha^2 n_\alpha$. Очевидно, что главный вклад в выражение (15) дают ионы ($\alpha = i$).

Известно, что тепловое движение оказывает сильное влияние на проникновение поперечной электромагнитной волны в плазму для низких частот в области аномального скин-эффекта (при $c\omega \lesssim v_e\Omega_e$).

В этом случае поле от источника с частотой ω проникает в плазму на глубину $\sim\delta_a$, где

$$\delta_a = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{v_e c^2}{\omega\Omega_e^2}\right)^{1/3}. \tag{16}$$

Для расстояний $r \ll \delta_a$ функции корреляции для поперечного электрического и магнитных полей имеют вид:

$$\overline{E_{l\perp}(r_1, \omega)E_{m\perp}(r_2, \omega')} = \frac{4}{9\sqrt{3}\pi}\frac{T\omega}{c^2\delta_a}\delta_{lm}\delta(\omega+\omega'); \tag{17}$$

$$\overline{H_l(r_1, \omega)H_m(r_2, \omega')} = \frac{2}{3\pi^2}\frac{T}{\omega\delta_a^3}\left[\delta_{lm}\left(\frac{5}{3} - 2\ln\frac{\gamma r}{\delta_a}\right) + \frac{x_l x_m}{r^2}\right]\delta(\omega+\omega'), \tag{18}$$

где $\ln\gamma = C = 0{,}577$—постоянная Эйлера. Из (17) и (18) следует, что корреляционная функция для поперечного электрического поля при $r \ll \delta_a$ не зависит от r, а для магнитных полей при $l=m$ зависит от r в этом случае очень слабо (логарифмически), а при $l \neq m$ вообще не зависит от r.

3. АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ ПРОДОЛЬНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим теперь автокорреляционную функцию для продольного электрического поля, т. е. функцию корреляции при $r_1 = r_2$. Из (7) получим:

$$\overline{E_l(t)E_m(t')} = \frac{2}{3\pi^2}T\delta_{lm}\int_0^\infty k^2 dk \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon''_\parallel}{|\varepsilon_\parallel|^2}\cos\omega\tau\frac{d\omega}{\omega}, \tag{19}$$

где $\tau = t'-t$. Для простоты рассмотрим сначала плазму, состоящую из частиц одного сорта, например, электронов, объемный заряд которых скомпенсирован в состоянии равновесия объемным зарядом неподвижных ионов. Вводя вместо ω новую переменную интегрирования $z = \omega/\sqrt{2}kv_e$ и проводя интегрирование по k, из (19) получим:

$$\overline{E_l(t)E_m(t')} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\frac{e^2 n_e}{v_e\tau}\delta_{lm}\Psi(x), \quad x = \Omega_e\tau, \tag{20}$$

где функция $\Psi(x)$ имеет вид:

$$\Psi(x) = 1 - \frac{x}{2}\int_0^\infty dz e^{-z^2 - xzq}\frac{1}{pq}\{p(3q^2-p^2)\cos xzp + q(3p^2-q^2)\sin xzp\}. \tag{21}$$

Функции $p(z)$ и $q(z)$, входящие под знак интеграла в (21), определяются выражениями:

$$q(z) = \{[(1-2zF(z))^2 + \pi z^2 e^{-2z^2}]^{1/2} + 1 - 2zF(z)\}^{1/2}; \tag{22}$$

$$p(z) = -\left(\sqrt{\pi}z/q\right)e^{-z^2}; \quad F(z) = e^{-z^2}\int_0^z e^{t^2}dt. \tag{23}$$

Второе слагаемое в (21) учитывает наличие дебаевской экранировки. При $\Omega_e\tau \ll 1$ это слагаемое несущественно и формула (20) переходит в этом случае в выражение, найденное в работе Тейлора [15]. Дебаевская экранировка оказывается существенной при $\Omega_e\tau \gtrsim 1$. В предельном случае $\Omega_e\tau \gg 1$ функция $\Psi(x)$ стремится к нулю.

Если учесть движение ионов, то выражение (19) примет вид:

$$\overline{E_l(t)\,E_m(t')} = \delta_{lm}\frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\sum_{\alpha=e,\,i}\frac{e_\alpha^2 n_\alpha}{v_\alpha \tau}\,\Psi(\Omega_\alpha \tau), \tag{24}$$

где $\Psi(x_\alpha)$ по-прежнему определяется формулой (21), в которой функции $q(z)$ и $p(z)$ определяются соотношениями:

$$q_\alpha^2(z) = \left\{\left[\sum_\beta \eta_{\alpha\beta}(1-2z_\beta\,F(z_\beta))\right]^2 + \left(\sum_\beta \eta_{\alpha\beta}\sqrt{\pi}\,z_\beta\,e^{-z_\beta^2}\right)^2\right\}^{1/2} + \\ + \sum_\beta \eta_{\alpha\beta}(1-2z_\beta F(z_\beta)); \tag{25}$$

$$p_\alpha(z) = -\frac{\sqrt{\pi}}{q_\alpha}\sum_\beta \eta_{\alpha\beta} z_\beta\, e^{-z_\beta^2}; \qquad z_\beta = z\sqrt{m_\beta/m_\alpha}\,. \tag{26}$$

Для малых значений τ ($\Omega_e\tau \ll 1$) $\Psi(x_\alpha) \simeq 1$ и главный вклад в (24) дают, как легко видеть, ионы. Это связано с тем, что изменение флюктуационных полей во времени, обусловленное тепловым движением ионов, происходит значительно медленнее, чем изменение полей, обусловленное перемещением электронов, так как $v_i \ll v_e$.

4. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ФЛЮКТУИРУЮЩИХ МИКРОПОЛЕЙ

В целом ряде задач, например, при вычислении коэффициентов переноса, необходимо знать среднее значение квадрата приращения скорости частицы, проходящей через плазму, под действием флюктуационных микрополей (столкновений).

Рассмотрим движение частицы с зарядом $Z_0 e$ и массой m_0 под действием флюктуационных электрических полей, обусловленных флюктуациями объемного заряда плазмы*. Из уравнений движения $m_0\dot{\boldsymbol{v}} = Z_0 e \boldsymbol{E}_\parallel(\boldsymbol{r}, t)$ получим, полагая $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \Delta\boldsymbol{v}$ ($|\Delta\boldsymbol{v}| \ll v_0$), что среднее значение квадрата приращения скорости частицы за время Δt равно

$$(\overline{\Delta v})^2 = \frac{Z_0^2 e^2}{m_0^2}\int_0^{\Delta t} dt \int_0^{\Delta t} dt' \overline{E_{l\parallel}(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}_0 t,\ t)\,E_{l\parallel}(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}_0 t', t')}\,. \tag{27}$$

Очевидно, что полученное выражение для $(\overline{\Delta v})^2$ применимо только при $\Delta t \ll \tau_p$, где τ_p — время релаксации, т. е. время, в течение которого величина $(\overline{\Delta v})^2$ станет сравнимой с v_0^2. Подставляя в (27) выражение для корреляционной функции продольных электрических полей, из (7) получим:

$$(\overline{\Delta v})^2 = \frac{Z_0^2 e^2 T}{2m_0^2\pi^3}\int_0^{\Delta t} dt \int_0^{\Delta t} dt' \int d\boldsymbol{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0-\omega)(t-t')}\,\frac{\varepsilon''_\parallel}{\omega|\varepsilon_\parallel|^2}\,. \tag{28}$$

Аналогичное выражение получается и для квадрата приращения скорости частицы $(\overline{\Delta v_\perp})^2$ в направлении, перпендикулярном $\boldsymbol{v}_0$. Это выражение отличается от (28) лишь множителем $\sin^2\vartheta$ в подынтегральном выражении (ϑ—угол между векторами $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{v}_0$).

---

* Этот вопрос рассматривался в целом ряде работ (см., например, статью Когана [16] и цитируемую там литературу, работу Томпсона и Хаббарда [18]).

Рассмотрим сначала выражения (27) и (28) без учета ионов. Вводя новые переменные $\tau = t - t'$ и $z = \omega/\sqrt{2}kv_e$ вместо t' и ω и проводя интегрирование по t и ϑ, найдем, что

$$\overline{(\Delta v)^2} = \frac{8\sqrt{\pi}Z_0^2e^4n_e}{v_0}\int\limits_{\tau_{\text{мин}}}^{\Delta t}\frac{\Delta t-\tau}{\tau}\,d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz e^{-z^2-\bar{q}\,\Omega_e\tau}\,\operatorname{sgn}(1+\zeta)\times$$
$$\times\left\{\frac{p^2-q^2}{2qp}\sin(\bar{p}\,\Omega_e\tau)+\cos(\bar{p}\Omega_e\tau)\right\}; \tag{29}$$

$$\overline{(\Delta v_\perp)^2} = \frac{8\sqrt{\pi}Z_0^2e^4n_e}{v_0\Omega_e^2x^2}\int\limits_{\tau_{\text{мин}}}^{\Delta t}\frac{\Delta t-\tau}{\tau^3}d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz e^{-z^2-\bar{q}\Omega_e\tau}\frac{1}{qp}\times$$
$$\times\{\Omega_e\tau\,xq\sin(\bar{p}\Omega_e\tau)\cdot-\Omega_e\tau\,xp\cos(\bar{p}\,\Omega_e\tau)+\operatorname{sgn}(1+\zeta)\sin(\bar{p}\Omega_e\tau)\}, \tag{30}$$

где $\bar{p}=xp(z)\,|1+\zeta|$, $\bar{q}=xq(z)\,|1+\zeta|$, $\zeta=z/x$, $x=v_0/\sqrt{2}v_e$, а величины $q(z)$ и $p(z)$ определяются выражениями (22) и (23).

Интегралы (29), (30) логарифмически расходятся при малых τ. Это обстоятельство связано с неприменимостью используемых корреляционных функций для продольных полей при малых значениях $|r_1-r_2|$ и $t-t'$. Малым значениям $|r_1-r_2|$ соответствуют „столкновения" с малыми параметрами удара. Поэтому интегрирование по τ следует производить от некоторого $\tau=\tau_{\text{мин}}$, где $\tau_{\text{мин}}$ — время столкновения, для которого отклонение частицы еще мало [16].

Рассмотрим выражения (29) и (30) в двух предельных случаях: 1) расстояние, проходимое частицей за время Δt, значительно меньше дебаевского радиуса $\Delta s=v_0\Delta t\ll r_д=v_e/\Omega_e$ и 2) расстояние Δs значительно больше дебаевского радиуса.

В первом случае для любых значений τ имеют место неравенства $\Omega_e q_\pm\tau\ll 1$ и $\Omega_e p_\pm\tau\ll 1$. (В этом случае в выражении (28) можно приближенно считать, что $|\varepsilon_\parallel|=1$.) Учитывая эти неравенства, получим:

$$\overline{(\Delta v)^2} = \frac{8\pi Z_0^2e^4n_e}{m_0^2v_0}\Phi(x)\Delta t\left(\ln\frac{\Delta t}{\tau_{\text{мин}}}-1\right); \tag{31}$$

$$\overline{(\Delta v_\perp)^2} = \frac{8\pi Z_0^2e^4n_e}{m_0^2v_0}\left\{\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)\Phi(x)+\frac{1}{\sqrt{\pi}\,x}e^{-x^2}\right\}\Delta t\left(\ln\frac{\Delta t}{\tau_{\text{мин}}}-1\right), \tag{32}$$

где

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Выражение (32) для $\overline{(\Delta v_\perp)^2}$ совпадает с выражением, полученным Коганом [16].

В другом противоположном случае, когда $\Delta s\gg r_д$, при $\tau>\Delta t$ подынтегральные выражения в (29) и (30) экспоненциально малы при $v_0\ll v_e$. Поэтому интегрирование по τ можно распространить до бесконечности. Учитывая, что, кроме того, $\tau_{\text{мин}}\Omega_e\bar{p}\ll 1$ и $\tau_{\text{мин}}\Omega_e\bar{q}\ll 1$, получим (см. также [18]):

$$\overline{(\Delta v)^2} = \Delta t\,\frac{8\pi Z_0^2e^4n_e}{m_0^2v_0}\left\{\Phi(x)\ln\frac{v_e}{\gamma\tau_{\text{мин}}\Omega_ev_0}+R(x)\right\}; \tag{33}$$

$$\overline{(\Delta v_\perp)^2}=\Delta t\,\frac{8\pi Z_0^2e^4n_e}{m_0^2v_0}\left\{\left[\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)\Phi(x)+\frac{1}{x\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}\right]\ln\frac{v_e}{\gamma\tau_{\text{мин}}\Omega_e v_0}+R_\perp(x)\right\},\tag{34}$$

где

$$R(x)=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dze^{-z^2}\operatorname{sgn}(1+\zeta)\left\{\ln[(p^2+q^2)(1+\zeta)^2]+\frac{q^2-p^2}{qp}\operatorname{arc\,tg}\frac{p}{q}\right\};\tag{35}$$

$$R_\perp(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dze^{-z^2}|1+\zeta|\,(1-\zeta)\left\{3-\frac{2}{1-\zeta}-\ln[(p^2+q^2)(1+\zeta)^2]+\right.\tag{36}$$

$$\left.+\frac{p^2-q^2}{qp}\operatorname{arc\,tg}\frac{p}{q}\right\}.$$

Как видно из (33) и (34), в рассматриваемом случае „столкновения“ с параметром удара, значительно большим дебаевского радиуса, не вносят вклада в $\overline{(\Delta v)^2}$ и $\overline{(\Delta v_\perp)^2}$. Это связано с тем, что флюктуационное электрическое поле частиц, находящихся на расстояниях, больших по сравнению с $r_д$, очень мало вследствие экранировки флюктуации объемного заряда электронами и ионами плазмы. Таким образом, в использованном методе не нужно производить „обрезания“ в расходящихся интегралах, которые обычно появляются при вычислении величин $\overline{(\Delta v)^2}$ и $\overline{(\Delta v_\perp)^2}$ методом „парных столкновений“.

Величины (33) и (34) с точностью до множителя, стоящего под знаком логарифма, совпадают с известными выражениями, полученными Чандрасекаром [17].

Учтем теперь влияние флюктуаций объемного заряда, создаваемых ионами. Общие выражения для $\overline{(\Delta v)^2}$ и $\overline{(\Delta v_\perp)^2}$ громоздки, и мы не будем их приводить. В предельном случае $\Delta s\ll r_д$ имеем:

$$\overline{(\Delta v)^2}=\sum_{\alpha=e,\ i}\frac{8\pi Z_0^2e^2e_\alpha^2n_\alpha}{m_0^2v_0}\,\Phi(x_\alpha)\Delta t\left(\ln\frac{\Delta t}{\tau^\alpha_{\text{мин}}}-1\right);\tag{37}$$

$$\overline{(\Delta v_\perp)^2}=\sum_\alpha\frac{8\pi Z_0^2e^2e_\alpha^2n_\alpha}{m_0^2v_0}\left\{\left(1-\frac{1}{2x_\alpha^2}\right)\Phi(x_\alpha)+\frac{1}{\sqrt{\pi}x_\alpha}\,e^{-x_\alpha^2}\right\}\Delta t\left(\ln\frac{\Delta t}{\tau^\alpha_{\text{мин}}}-1\right),\tag{38}$$

где $x_\alpha=v_0/\sqrt{2}v_\alpha$. Если же $\Delta s\gg r_д$, то

$$\overline{(\Delta v)^2}=\sum_\alpha\frac{8\pi Z_0^2e^2e_\alpha^2n_\alpha}{m_0^2v_0}\left\{\Phi(x_\alpha)\ln\frac{1}{\gamma\tau^\alpha_{\text{мин}}\Omega_\alpha x_\alpha}+R(x_\alpha)\right\}\Delta t;\tag{39}$$

$$\overline{(\Delta v_\perp)^2}=\sum_\alpha\frac{8\pi Z_0^2e^2e_\alpha^2n_\alpha}{m_0^2v_0}\left\{\left[\left(1-\frac{1}{2x_\alpha^2}\right)\Phi(x_\alpha)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\sqrt{\pi}x_\alpha}\,e^{-x_\alpha^2}\right]\ln\frac{1}{\gamma\tau^\alpha_{\text{мин}}\Omega_\alpha x_\alpha}+R_\perp(x_\alpha)\right\}\Delta t.\tag{40}$$

Здесь $R(x_\alpha)$ и $R_\perp(x_\alpha)$ определяются формулами (35) и (36), в которых надо сделать замену $\zeta\to\zeta_\alpha$, $q\to q_\alpha$, $p\to p_\alpha$, где $\zeta_\alpha=z/x_\alpha$, а функции q_α и p_α определяются формулами (25) и (26).

Из выражений (37) и (40) следует, что при $x_e\gtrsim 1$ ($x_i\gg 1$) вклад в $\overline{(\Delta v)^2}$ и $\overline{(\Delta v_\perp)^2}$, определяемый флюктуациями электронов и ионов

одинаков по порядку величины. Если же $x_e \ll 1$, то достаточно учитывать только флюктуации ионов.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность А. И. Ахиезеру, В. И. Когану и В. П. Силину за обсуждение работы и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Леонтович, С. М. Рытов, ЖЭТФ, **23**, 246 (1952).
2. С. М. Рытов, ДАН СССР, **87**, 535 (1952).
3. С. М. Рытов, Теория электрических флюктуаций и теплового излучения, изд. АН СССР, М., 1957.
4. С. М. Рытов, ДАН СССР, **110**, 371 (1956).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М, 1957.
6. В. В. Толмачев, ДАН СССР, **112**, 842, **113**, 301 (1957).
7. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ, **34**, 173 (1958).
8. В. Д. Шафранов, Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, **4**, изд. АН СССР, М., 1958, стр. 419.
9. В. П. Силин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **2**, 198 (1959).
10. И. А. Ахиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ, **41**, 644 (1961).
11. E. E. Solpeter, Phys. Rev., **120**, 1528 (1960).
12. В. И. Пахомов, В. Ф. Алексин, К. Н. Степанов, ЖТФ, **31**, 1170 (1961).
13. А. А. Власов, ЖЭТФ, **8**, 291 (1938).
14. М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, **22**, 303 (1952).
15. J. B. Taylor, Phys. Fluids, **3**, 792 (1960).
16. В. И. Коган, ДАН СССР, **135**, 1374 (1960).
17. С. Чандрасекар, Принципы звездной динамики, ИЛ, М., 1948.
18. W. B. Thompson, J. Hubbard, Rev. Mod. Phys., **32**, 714 (1960).

Поступила в редакцию
29 апреля 1961 г.

TO THE THEORY OF ELECTROMAGNETIC FLUCTUATIONS IN PLASMA

V. F. Aleksin, K. N. Stepanov

The plasma electric and magnetic fields correlation functions were found in the presence of external magnetic field. The asymptotic behaviour of fields correlation functions at the small and large distances was investigated in the isotropic case. The charged particle motion under the action of fluctuation fields has been considered.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 РАДИОФИЗИКА 1962

К ГИПОТЕЗЕ ПЕРЕНОСА «ЗАМОРОЖЕННОЙ» ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ФЛЮКТУАЦИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. В. Мень

Найдены корреляционные функции, характеризующие флюктуации радиоволн, распространяющихся по различным трассам в неоднородной турбулентной среде. Показано, что измерение этих функций можно использовать для исследования эффекта переноса неоднородностей, а также других процессов, протекающих в турбулентной среде.

Основным методом нахождения автокорреляционных (спектральных) характеристик флюктуаций, возникающих при распространении радиоволн в неоднородной турбулентной среде, является их выражение через пространственные корреляционные функции путем использования гипотезы „замороженной" турбулентности [1-4]. Согласно этой гипотезе, впервые введенной Красильниковым [1], предполагается, что из всех процессов, протекающих в турбулентной среде, основное влияние на изменение флюктуаций во времени оказывает перенос неоднородностей среды ветром.

В этом случае, считая при переносе среду неизменной („замороженной"), коэффициент автокорреляции флюктуаций на трассе AB для неограниченной, изотропной и статистически „однородной" среды определяют в виде (рис. 1а)*:

$$K\left(\left|\frac{\tau}{\tau_0}\right|\right)=\frac{\overline{\alpha\,(y_1,\ t_1)\,\alpha\,(y_1,\ t_2)}}{\overline{\alpha^2}}=F_1\left(\left|\frac{a}{l}\right|\right), \tag{1}$$

пренебрегая при $v_t\,\tau_{\text{макс}} \ll L_0$** декорреляцией за счет продольного переноса трассы [3,5,6]. Здесь a—расстояние, на которое трасса „переносится" потоком в поперечном к ней направлении за время τ:

$$a=y_2-y_1=v_n\,\tau,\quad x_2-x_1=v_t\,\tau,\quad \tau=t_2-t_1,\quad \tau_0=\frac{l}{|v_n|},$$
$$L_0=0{,}5\,\frac{\pi\,l^2}{\lambda}, \tag{2}$$

$\alpha\,(y,\ t)$ — флюктуации амплитуды или фазы волны, $K_0\,(|\tau/\tau_0|)$ — коэффициент автокорреляции, $F_1\,(|a/l|)=\overline{\alpha\,(y_1)\,\alpha\,(y_2)}/\overline{\alpha^2}$—коэффициент „поперечной" пространственной корреляции, L—длина трассы, v_t и v_n—продольная и поперечная относительно трассы компоненты скорости переноса, τ_0—масштаб времени, l—пространственный масштаб неоднородностей, λ—длина волны.

Таким образом, учет эффекта переноса позволяет на основании

---

* Ось x направлена вдоль трассы, xy—в плоскости переноса.

** Отметим, что это условие выполняется при произвольном отношении v_t/v_n, лишь бы имело место неравенство $v_t/v_n \ll \sqrt{L/\lambda}$.

пространственных корреляционных функций для параллельных трасс (при $v_n = \text{const}$) определять временные, автокорреляционные характеристики флюктуаций при условии измерения независимым (например, метеорологическим) методом поперечной скорости перемещения среды v_n.

При теоретическом определении автокорреляционных функций рассматривается также случай пересекающихся трасс („вращающаяся" трасса), что соответствует тому гипотетическому случаю, когда скорость поперечного переноса линейно изменяется вдоль трассы $v_n \sim L$ [2].

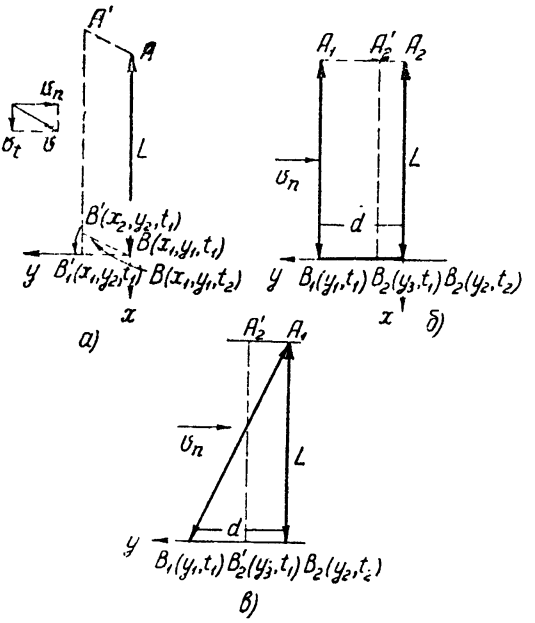


Рис. 1. Трассы измерения:
A, A_1, A_2—точки излучения, B, B_1, B_2—точки приема.

Отметим, однако, что справедливость используемого при этом предположения о неизменности свойств в среде при переносе в ряде случаев неочевидна (в частности, при распространении радиоволн в турбулентной среде в дальней зоне, где $L \gg L_0$). В этой связи представляет интерес исследовать возможность непосредственного определения эффекта переноса в тропосфере, а также оценить влияние на характеристики флюктуаций обычно не учитываемых процессов (турбулентных движений, диффузии, теплопроводности, конвекции). В данной работе обсуждается методика таких измерений, а также даются расчетные соотношения, позволяющие проводить сопоставление с экспериментом.

1. Можно показать, что измерения временных корреляционных функций не позволяют однозначно определить наличие эффекта переноса и его направление, так как вид автокорреляционных зависимостей в известной степени „нечувствителен" по отношению к процессам, обусловливающим флюктуации. Нахождение по этим измерениям флюктуаций, согласно (1) и (2), поперечной скорости переноса (эквивалентной):

$$|v_n|_{\text{экв}} = al/\tau \qquad (3)$$

(a—постоянная, определяемая видом корреляционной функции и уровнем отсчета) и сопоставление их с данными метеоизмерений соответствующей компоненты ветра также во многих случаях не может быть использовано в качестве критерия наличия переноса среды. Расхождение радио- и метеоданных, как будет показано, может быть обусловлено рядом причин, в частности, неадэкватностью методик этих измерений. То же относится к измерениям, преследующим цель установить корреляцию между временными характеристиками флюктуаций (например, радиусами автокорреляции) и величиной и направлением ветра, определенным из метеорологических наблюдений.

В этом случае представляется целесообразным определять более об-

щие характеристики флюктуаций, описывающие их декорреляцию во времени при измерениях в разнесенных точках пространства. Отметим, что аналогичная методика находит себе применение при исследовании движений неоднородностей в ионосфере [7–9]; однако в отличие от рассматриваемого случая при этом направление распространения радиоволн происходит практически перпендикулярно к плоскости переноса.

Рассмотрим определение пространственно-временных корреляционных функций для наиболее распространенных случаев измерений на параллельных и пересекающихся трассах (рис. 1б, в). Учитывая лишь эффект переноса „замороженной" среды в поперечном к радиотрассе направлении при $v_t\tau \ll L_0$ и $v_n = \text{const}$, определим эти функции как

$$\overline{\alpha_{A_1B_1}(t_1)\,\alpha_{A_2B_2}(t_2)} = \overline{\alpha_{A_1B_1}(t_1)\,\alpha_{A_2'B_2'}(t_1)} = \overline{\alpha(y_1, t_1)\,\alpha(y_3, t_1)};$$
$$y_3 - y_2 = v_n\tau = a. \tag{4}$$

При этом полагаем, что неоднородности среды, вызывающие флюктуации на трассе A_2B_2, измеренные в момент времени t_2, в исходный момент времени t_1 располагаются вдоль параллельной ей трассы $A_2'B_2'$. Нормируя выражение (4) на величину интенсивности (средний квадрат) флюктуаций, полагая их стационарными и однородными, получим в случае параллельных трасс:

$$K_0(d, \tau) = F_1(y_1, y_3) = F_1\left(\frac{d-a}{l}\right) \tag{4а}$$

и соответственно для пересекающихся трасс:

$$K_0(d, \tau) = F_2(y_1, y_3). \tag{4б}$$

Заметим, что

$$F_2(y_1, y_3) = \frac{a}{d} F_3\left(\frac{a}{l}\right) + \frac{d-a}{d} F_3\left(\frac{d-a}{l}\right). \tag{4в}$$

Здесь $K_0(d, \tau)$ — коэффициент взаимной корреляции флюктуаций амплитуд или фаз при измерении в точках, разнесенных на d, $d = y_1 - y_2$ — расстояние между точками измерения (база), $F_1(\xi/l)$ — коэффициент пространственной корреляции флюктуаций волн, распространяющихся на параллельных трассах A_1B_1 и $A_2'B_2'$, разнесенных на расстояние ξ (рис. 1б), $F_2(y_1, y_3)$ — коэффициент пространственной корреляции флюктуаций волн, распространяющихся на пересекающихся трассах A_1B_1 и $A_2'B_2'$, когда точка пересечения смещена вдоль оси y на расстояние $a = v_n\tau$ относительно исходного положения (рис. 1в), $F_3(\xi/l)$ — коэффициент пространственной корреляции для двух пересекающихся трасс, образующих треугольник с основанием ξ.

Выражения (4а)—(4в) позволяют определить декорреляцию флюктуаций во времени в разнесенных точках пространства $K_0(d, \tau)$ через пространственную корреляцию флюктуаций при их синхронном измерении, которая полностью определяется функцией корреляции пульсаций коэффициента преломления среды δn. Рассмотрим наиболее распространенный случай феноменологического описания неоднородной среды гауссовой функцией

$$\Phi_0(\Delta r) = \overline{\delta n_1 \delta n_2} = \overline{(\delta n)^2} \exp\left[-\left(\frac{\Delta r}{l}\right)^2\right], \tag{5}$$

где δn_1, δn_2—пульсации коэффициента преломления n в точках, разнесенных на Δr. Тогда выражение (4а) для флюктуаций амплитуд и фаз радиоволн, распространяющихся на параллельных трассах в „дальней" зоне*, приближенно может быть приведено к виду:

$$K_0(d, \tau) \simeq \exp\left[-\left(\frac{d}{l}-\frac{v_n\tau}{l}\right)^2\right]. \tag{6}$$

Соответственно для пересекающихся трасс

$$K_0(d, \tau) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{l}{d}\left(\operatorname{erf}\frac{v_n\tau}{l}+\operatorname{erf}\frac{d-v_n\tau}{l}\right), \tag{6а}$$

где

$$\operatorname{erf}\frac{\xi}{l}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi/l}\exp-(t^2)\,dt$$

—интеграл вероятности. Из соотношений (4а), (4в) и (6), (6а) следует, что при наличии эффекта переноса ($v_n \neq 0$) во всех случаях, кроме $d=0$, отмечается характерное только для эффекта переноса смещение во времени относительно $\tau=0$ максимальных значений пространственно-временных функций $K_0(d, \tau)$, причем для параллельных трасс

$$K_0(d, \tau)_{\text{макс}}=1, \quad \tau_{\text{макс}}=\frac{d}{v_n} \tag{7}$$

и соответственно для пересекающихся трасс

$$K_0(d, \tau)_{\text{макс}}=F_3\left(\frac{d}{2l}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\operatorname{erf}(d/2l)}{d/2l}, \quad \tau_{\text{макс}}=\frac{d}{2v_n}. \tag{7а}$$

Здесь $\tau_{\text{макс}}$ — временной сдвиг, соответствующий максимумам функций $K_0(d, \tau)$.

Соотношения (6)—(7а) иллюстрируются рис. 2а, 3а, где приведены результаты численных расчетов функций $K_0(d, \tau)$ для $v_n=1$ $м \cdot сек^{-1}$ и $l=5$ $м$ при различных значениях d и τ. Как следует из сказанного, в обоих рассматриваемых случаях корреляционные функции $K_0(d, \tau)$ симметричны относительно максимальных значений. Однако, если увеличение d приводит для параллельных трасс лишь к соответствующему переносу кривых вдоль временной шкалы, в случае пересекающихся трасс это сопряжено также с уменьшением величины корреляции, в частности, максимальных значений $K_0(d, \tau)$. Характерно, что в последнем случае значения корреляции при $a=0$ и $a=d$ (см. (4в) и (6а)) совпадают, что непосредственно следует из сопоставления геометрии трасс для этих случаев (рис. 1в).

Отметим, что в случае $a=v_n\tau \to 0$ выражения для пространственно-временных функций (4а), (4б) переходят в соответствующие формулы для пространственной корреляции флюктуаций на параллельных и пересекающихся трассах, а в случае $d \to 0$—в автокорреляционные зависимости**.

---

* А в случае фазовых флюктуаций— и в «ближней» зоне.

** При этом соотношение (4б) приводится к виду:

$$K_0(d \to 0, \tau) \to F_3\left(\frac{d-a}{l}\right)\Big|_{d\to 0}-a\frac{\partial}{\partial d}F_3\left(\frac{d-a}{l}\right)\Big|_{d\to 0};$$

с учетом (5) $K_0(d \to 0, \tau) \to \exp-(a/l)^2$, что совпадает со значением (6) при $d \to 0$.

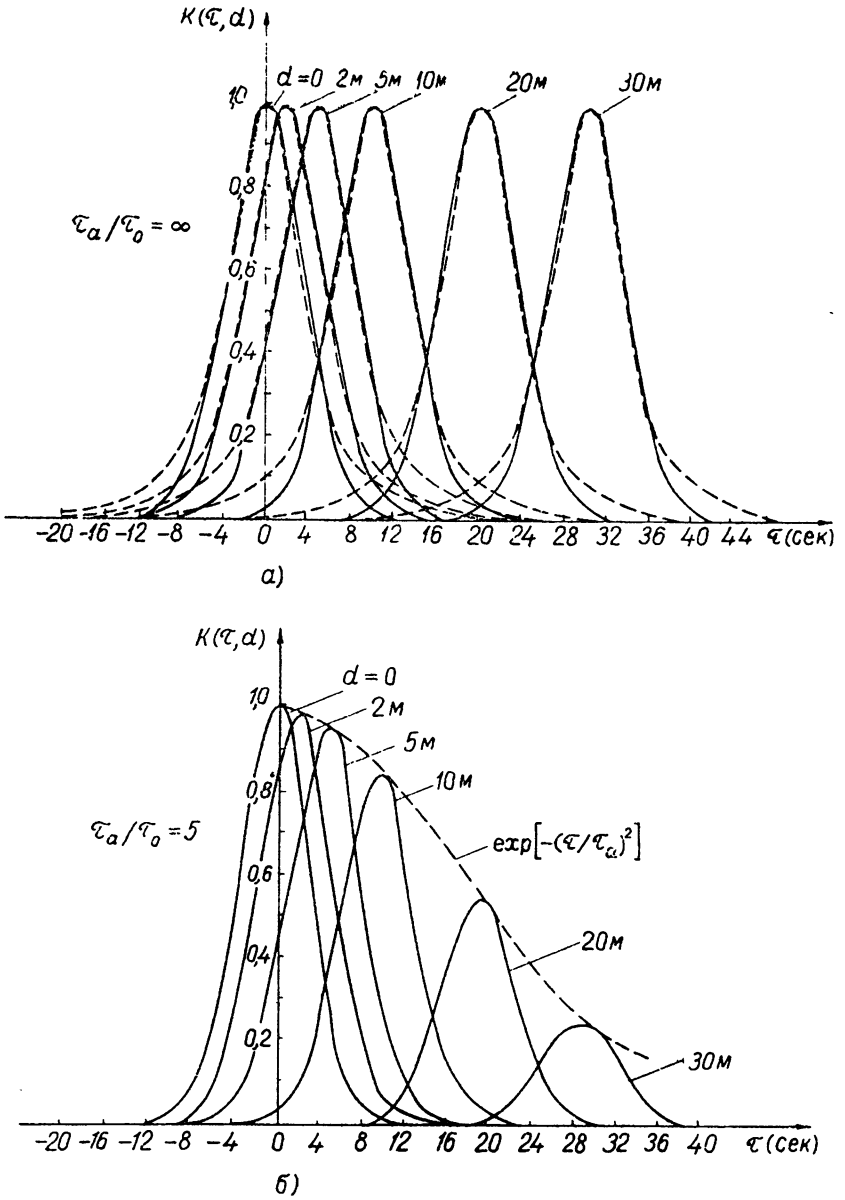


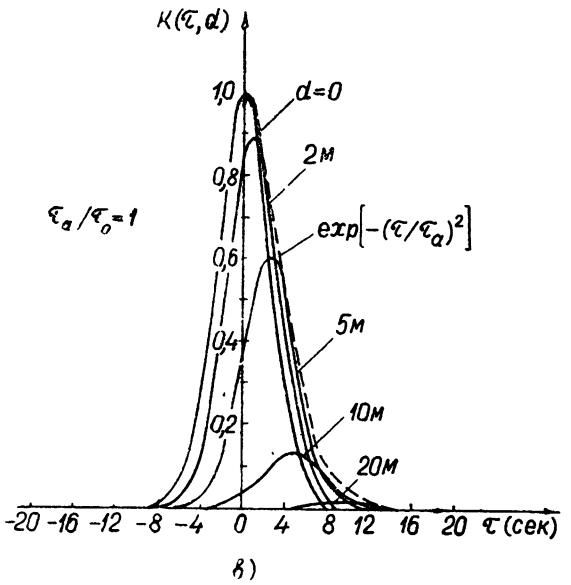
Рис. 2. а), б). Пространственно-временные коэффициенты корреляции флюктуаций при измерениях на параллельных трассах ($v_n = 1$ *м* · *сек*$^{-1}$, $l = 5$ *м*, $\tau_0 = 5$ *сек*, $0 < \tau_a < \infty$).

Таким образом, можно полагать, что экспериментальное измерение функций $K_0(d, \tau)$ в тропосфере позволит судить по смещению их максимумов о наличии эффекта переноса, а также в соответствии с (7), (7а) дает возможность определить его направление и скорость. Существенное отличие таких измерений от автокорреляционных (2), (3) заключается в возможности непосредственного определения радиометодом скорости переноса, не прибегая к измерениям пространственной корреляции (масштаба l). Отметим, что эти результаты, непосредственно следующие из (4а), (4в), не зависят от конкретного вида корреляционной функции $\Phi_0(\Delta r)$, описывающей среду, и могут быть полу-

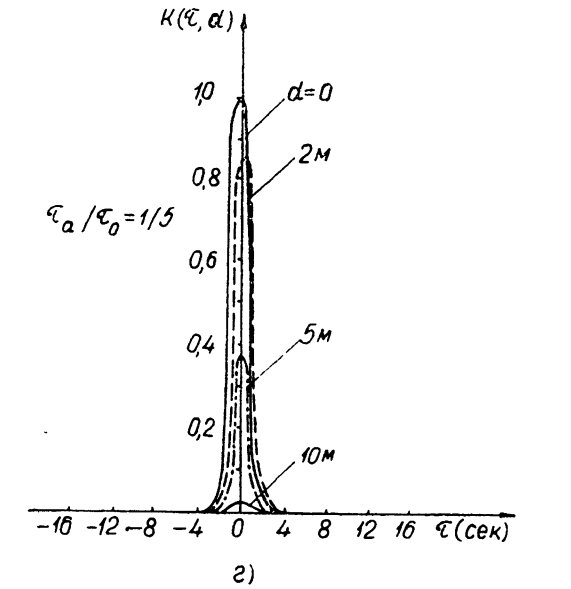
чены при любом произвольном виде этой функции, когда корреляция флюктуаций коэффициента преломления монотонно уменьшается с разносом.

Для сравнения на рис. 2а нанесены пунктиром значения $K_0(d, \tau)$ для параллельных трасс при отличном от (5) виде функции $\Phi_0(\Delta r)$ (форма Коши):

$$\Phi_0(\Delta r) = \overline{(\delta n)^2}\left[1 + \left(\frac{\Delta r}{l}\right)^2\right]^{-2}. \qquad (5а)$$



в)



г)

Рис. 2. в), г). Пространственно-временные коэффициенты корреляции флюктуаций при измерениях на параллельных трассах ($v_n = 1\ м \cdot сек^{-1}$, $l = 5\ м$, $\tau_0 = 5\ сек$, $0 < \tau_a < \infty$).

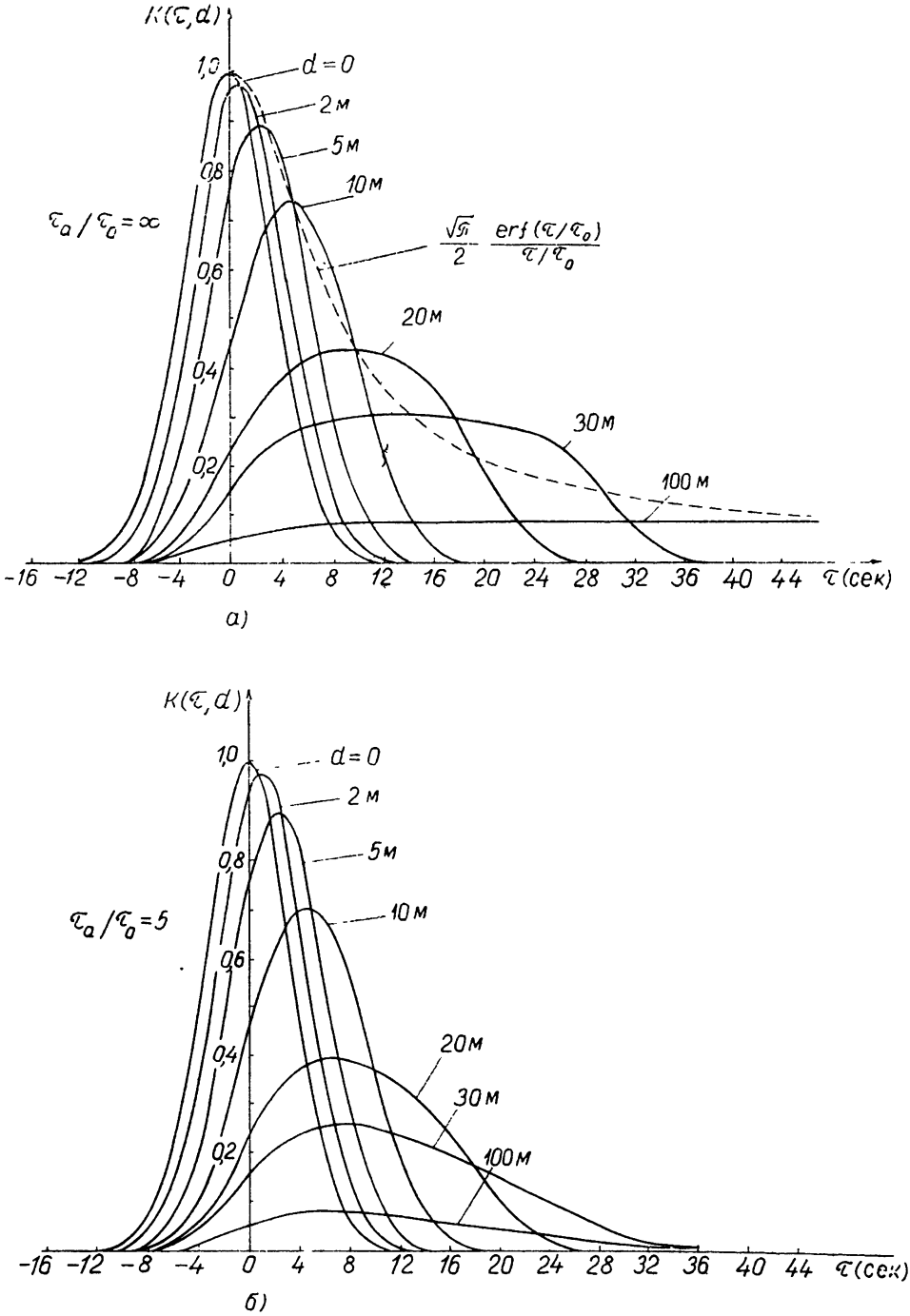


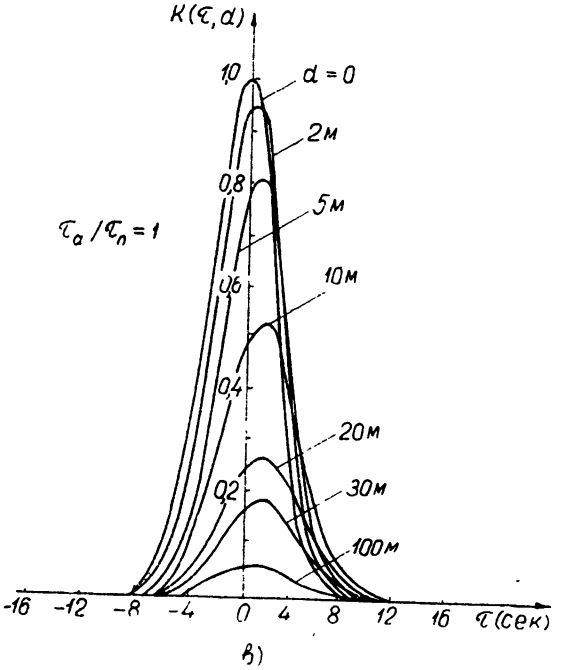
Рис. 3. а), б). Пространственно-временные коэффициенты корреляции флюктуаций при измерениях на пересекающихся трассах ($v_n = 1$ *м · сек*$^{-1}$, $l = 5$ *м*, $\tau_0 = 5$ *сек*, $0 < \tau_a < \infty$).

Можно показать, что при этом

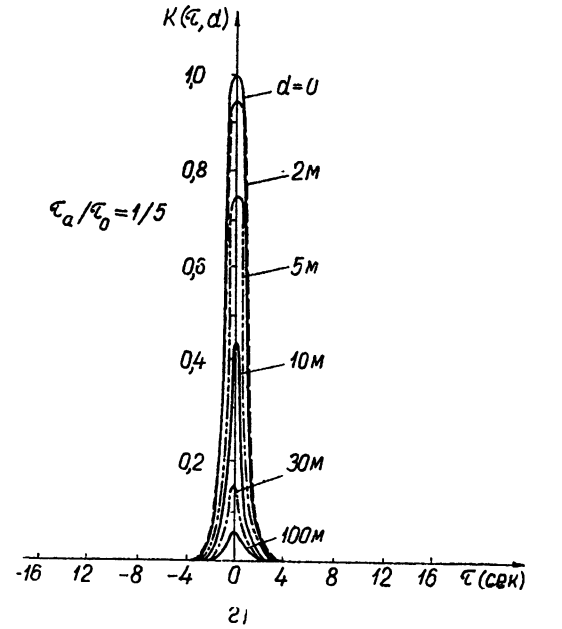
$$K_0(d, \tau) = \left[1 + \left(\frac{d}{l} - \frac{v_n \tau}{l}\right)^2\right]^{-3/2} \qquad (8)$$

для параллельных трасс и

$$K_0(d, \tau) = \left(1 - \frac{v_n \tau}{d}\right)\left[1 + \left(\frac{d}{l} - \frac{v_n \tau}{l}\right)^2\right]^{-1/2} + \frac{v_n \tau}{d}\left[1 + \left(\frac{v_n \tau}{l}\right)^2\right]^{-1/2} \quad (8а)$$



в)



г)

Рис. 3. в), г). Пространственно-временные коэффициенты корреляции флюктуаций при измерениях на пересекающихся трассах ($v_n = 1$ *м* · *сек*$^{-1}$, $l = 5$ *м*, $\tau_0 = 5$ *сек*, $0 < \tau_a < \infty$).

для пересекающихся трасс. Как следует из рис. 2а, отличие этого случая от (6) заключается лишь в форме „скатов" кривых.

2. Выражения (4)—(8а) соответствуют переносу в пространстве неизменной („замороженной") среды. Представляет интерес распространить их на более общий случай переноса „размороженной" турбулентности, когда наряду с переносом учитываются также происходящие в среде качественные изменения. Полагая, что в системе координат, движущейся совместно с потоком (что эквивалентно устранению эффекта переноса), функция корреляции пульсаций коэффициента преломления среды δn_1, δn_2 в разнесенных точках пространства при измерениях в разное t_1, t_2 время может быть представлена, согласно [10], в виде произведения функций, раздельно зависящих от координат и времени:

$$\Phi(\Delta r, \tau) = \overline{\delta n_1(t_1)\,\delta n_2(t_2)} = \Phi_0(\Delta r)\,\Phi_1(\tau), \qquad (5б)$$

можно показать, что в неподвижной системе отсчета пространственно-временные функции могут быть определены как*

$$K(d, \tau) = K_0(d, \tau)\,\Phi_1(\tau). \qquad (9)$$

Здесь функция $\Phi_0(\Delta r)$ характеризует только декорреляцию флюктуаций δn в пространстве (5), а $\Phi_1(\tau)$—во времени; $K_0(d, \tau)$—коэффициент пространственно-временной корреляции флюктуаций при учете лишь эффекта переноса (6), (6а) или (8), (8а).

Отметим, что при гауссовом виде функции $\Phi(\Delta r, \tau)$ выражение (5б) в системе координат, неподвижной относительно потока, соответствует обычной методике описания корреляционных функций, характеризующих стационарные и однородные флюктуации. Полагая, как обычно,

$$\Phi(\Delta r, \tau) = \overline{\delta n(x_1, y_1, z_1, t_1)\,\delta n(x_2, y_2, z_2, t_2)} = \Phi(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \tau) \qquad (10)$$

и учитывая, что $\Phi(\Delta r, \tau)$—четная функция, можно аргумент ее аппроксимировать полиномом четных степеней относительно всех переменных; при этом в определенной области Δx, Δy, Δz, τ вблизи максимума функции можно ограничиться лишь квадратичными членами:

$$\Phi(\Delta r, \tau) \simeq \Phi(\alpha_1\Delta x^2 + \alpha_2\Delta y^2 + \alpha_3\Delta z^2 + \beta_1\Delta x\Delta y + \beta_2\Delta x\Delta z + \beta_3\Delta y\Delta z + \gamma_1\Delta x\tau + \gamma_2\Delta y\tau + \gamma_3\Delta z\tau + \varkappa\tau^2), \qquad (10а)$$

где α_i, β_i, γ_i—постоянные коэффициенты. Переходя в систему координат x', y', z', повернутую относительно исходной и движущуюся со скоростью $v = \text{const}$, можно соответствующим выбором v привести (10а) к виду, когда в аргументе корреляционной функции устраняются члены типа $\Delta x\tau$, $\Delta y\tau$, $\Delta z\tau$, $\Delta x\Delta y$, $\Delta x\Delta z$ и $\Delta y\Delta z$**:

$$\Phi(\Delta r, \tau) = \Phi(\alpha_1'\Delta x'^2 + \alpha_2'\Delta y'^2 + \alpha_3'\Delta z'^2 + \varkappa'_{\text{мин}}\tau^2). \qquad (10б)$$

Отметим, что в системе координат, движущейся относительно исходной со скоростью v_x, v_y, v_z таким образом, что в аргументе функции $\Phi(\Delta r, \tau)$ устраняются перекрестные члены, представляющие собой произведение пространственных и временных переменных,

*Отметим, что в (5б) и (9) в соответствии с [3] используется одна и та же функция $\Phi_1(\tau)$, описывающая автокорреляцию флюктуаций в системе координат, движущейся с потоком.

** Заметим, что в изотропной среде $\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_3' = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 v_x + \beta_1 v_y + \beta_2 v_z &= -\gamma_1; \\ 2\alpha_2 v_y + \beta_1 v_x + \beta_3 v_z &= -\gamma_2; \\ 2\alpha_3 v_z + \beta_2 v_x + \beta_3 v_y &= -\gamma_3, \end{aligned} \tag{11}$$

коэффициент при τ^2, характеризующий зависимость функции корреляции от времени, имеет минимальное значение $(\varkappa' \to \varkappa_{\text{мин}})$.

Таким образом, именно в этой системе координат, соответствующей условию (11), должна быть минимальная зависимость флюктуаций коэффициента преломления от времени, что, как следует из физических соображений, должно иметь место в системе координат, неподвижной относительно потока. Последнее можно показать, определив, согласно [9], условие минимальной изменчивости пульсаций коэффициента преломления, оценивая ее средним квадратом производной $\frac{d}{d\tau}\delta n$. При этом

$$\overline{\left(\frac{d}{d\tau}\delta n\right)^2} = -2\Phi'(\Delta r \to 0, \tau \to 0)\,\varkappa' \tag{12}$$

и, следовательно, условие минимума (12) совпадает с минимумом величины $\varkappa'$ (11).

Из соотношения (10б) при гауссовом виде функции корреляции $\Phi(\Delta r, \tau)$ непосредственно следует (5б). Для иллюстрации полученных выражений на рис. 2б, в, г и 3б, в, г приведены результаты численных расчетов функций $K(d, \tau)$ для параллельных и пересекающихся трасс при гауссовом виде функций, входящих в соотношение (5б):

$$K(d,\tau) \simeq \exp -\left(\frac{d}{l} - \frac{\tau}{\tau_0}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^2\right] \tag{13}$$

(параллельные трассы);

$$K(d,\tau) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{l}{d}\left[\operatorname{erf}\frac{\tau}{\tau_0} + \operatorname{erf}\left(\frac{d}{l} - \frac{\tau}{\tau_0}\right)\right]\exp\left[-\left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^2\right] \tag{13а}$$

(пересекающиеся трассы). Здесь τ_0—постоянная, характеризующая скорость эффекта переноса, τ_a—постоянная, характеризующая автокорреляцию флюктуаций, обусловленных качественными изменениями, происходящими в среде наряду с переносом $\left(\tau_a^2 = \frac{1}{\varkappa'_{\text{мин}}}\right)$.

Из приведенного следует, что как при переносе „замороженной" турбулентности ($\tau_a = \infty$), так и для „размороженной" среды во всех случаях при $\tau_a/\tau_0 > 1$ не устраняется характерное для эффекта переноса смещение максимумов функций $K(d,\tau)$.

При этом, однако, как следует из рисунков, в отличие от ранее рассмотренного случая $\tau_a = \infty$, зависимости $K(d, \tau)$ для различных d, кроме $d = 0$ (автокорреляционной функции), существенно видоизменяются, в частности, становятся несимметричными относительно максимальных значений. Кроме того, с увеличением d (независимо от типа трассы) отмечается дополнительное падение величины корреляции сравнительно со случаем „чистого" переноса, определяемое отношением τ_a/τ_0, а также соответственно уменьшается величина временных сдвигов $\tau_{\text{макс}}$. Например, для параллельных трасс, согласно (13),

$$\tau_{макс} = \frac{d}{l\tau_0}\tau_k^2, \tag{14}$$

где

$$\tau_k^2 = \frac{\tau_a^2\tau_0^2}{\tau_a^2 + \tau_0^2}; \tag{14а}$$

при $\tau_a/\tau_0 \ll 1$ отмечается столь существенное уменьшение величины $\tau_{макс}$, которое практически исключает возможность определения эффекта переноса рассматриваемым методом. Определяя, как и ранее, по смещению максимумов функций эквивалентную скорость поперечного переноса:

$$v_{n_{экв}} = \frac{d}{\tau_{макс}} = \frac{l}{\tau_0}\left(1 + \frac{\tau_0^2}{\tau_a^2}\right) \geqslant v_{n_0}, \tag{15}$$

отметим, что получаемая из радиоизмерений величина $v_{n_{экв}}$ превышает значение истинной скорости переноса v_{n_0}, за исключением случая „чистого" переноса.

Аналогичные результаты имеют место и в случае пересекающихся трасс, что иллюстрируется, например, рис. 4а, б, где приводятся зависимости $\tau_{макс}(d)$, рассчитанные для трасс обоих типов при разных отношениях τ_a/τ_0. Следует заметить, что при учете „размороженности" среды сохранение линейности зависимости $\tau_{макс}$ от d, согласно (14) (рис. 4а), свойственно лишь гауссовой форме функции корреляции (5) при измерениях на параллельных трассах. В общем случае при любом другом виде этой функции, например, типа (5а), а также при измерениях на пересекающихся трассах качественное изменение картины неоднородностей при переносе приводит к нарушению линейности этой зависимости. При этом, как следует из условия экстремума (13а)

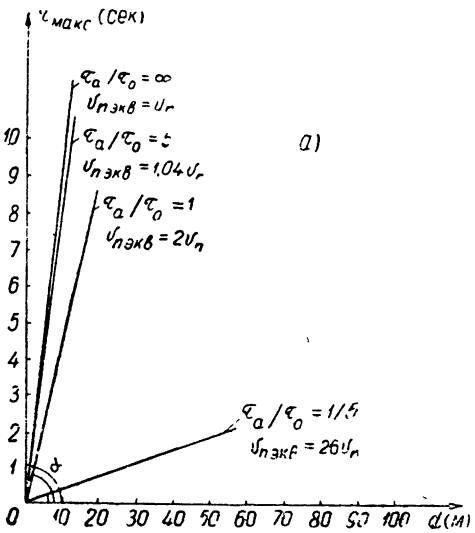


Рис. 4. Зависимость от базы временнбго сдвига, соответствующего максимумам $K(d, \tau)$ при гауссовой форме функции корреляции, описывающей неоднородную среду ($v_n = 1$ м · сек$^{-1}$, $l = 5$ м, $\tau_0 = 5$ сек):
а) измерения на параллельных трассах,

$$\exp\left[-\left(\frac{\tau_{макс}}{\tau_0}\right)^2\right] - \exp\left[-\left(\frac{\tau_{макс}}{\tau_0} - \frac{d}{l}\right)^2\right] - \sqrt{\pi}\,\tau_{макс} \times$$
$$\times \frac{\tau_0}{\tau_a^2}\left[\operatorname{erf}\frac{\tau_{макс}}{\tau_0} - \operatorname{erf}\left(\frac{\tau_{макс}}{\tau_0} - \frac{d}{l}\right)\right] = 0 \tag{16}$$

и рис. 4б, увеличение $\tau_{макс}$ с ростом d сначала замедляется, после чего наступает своеобразное „насыщение", когда $\tau_{макс}$ практически не зависит от d (при $d/l \gg 1$ и $\tau_a/\tau_0 < 1$ $\tau_{макс} \cong \tau_a^2/\sqrt{\pi}\,\tau_0$). В этом случае минимальные значения эквивалентной скорости переноса, наиболее близкие

к истинной скорости, соответствуют измерениям при минимальных значениях базы:

$$(v_{n_{\text{экв}}})_{\text{мин}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tau_{\text{макс}}}{\partial d}\right)^{-1}_{d\to 0} \geqslant v_{n_0}. \qquad (15a)$$

Поэтому в экспериментах на больших базах возрастает ошибка в определении v_n, что при пересекающихся трассах усугубляется еще существенным уменьшением величины корреляции.

Таким образом, качественный вид пространственно-временных корреляционных функций флюктуаций $K(d, \tau)$ позволяет во всех случаях, кроме $\tau_a/\tau_0 \ll 1$, установить наличие эффекта переноса среди других процессов, протекающих в среде, а также оценить влияние этих процессов на временные характеристики флюктуаций. Характерно, что такая возможность отсутствует лишь в частном случае $d=0$, когда зависимости $K(d, \tau)$ обращаются в автокорреляционную функцию. Например, при гауссовом виде (5) функции корреляции, описывающей неоднородную среду, независимо от типа трассы, согласно (13), (13а),

$$K(\tau) = \exp\left[-(\tau/\tau_k)^2\right], \qquad (17)$$

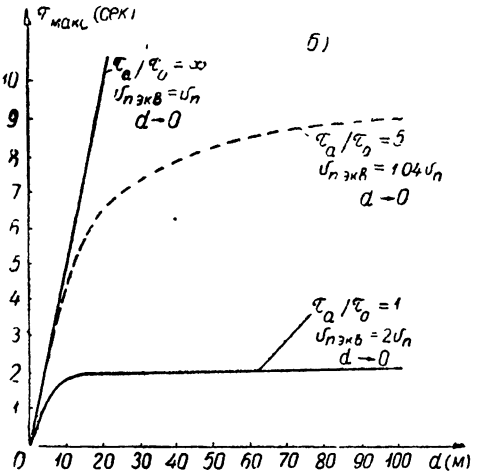


Рис. 4. Зависимость от базы временного сдвига, соответствующего максимумам $K(d, \tau)$ при гауссовой форме функции корреляции, описывающей неоднородную среду ($v_n = 1$ *м·сек*$^{-1}$, $l = 5$ *м*, $\tau_0 = 5$ *сек*):
б) измерения на пересекающихся трассах.

т. е. качественный вид этой функции сохраняется независимо от отношения τ_a/τ_0. Заметим, что из (17) и (14а) в согласии с физическими соображениями следует, что спектр флюктуаций определяется как переносом среды, так и эффектами размытия.

На основе автокорреляционных измерений может быть лишь формально определена величина, соответствующая скорости, которая имела бы место, если бы изменения флюктуаций во времени обусловливались исключительно эффектом переноса. Согласно (3), (17), при отсчете по нормированной автокорреляционной функции, например, на уровне $1/e$, где $\tau = \tau_k$,

$$|v'_{n_{\text{экв}}}| = \frac{l}{\tau_k} = \frac{l}{\tau_0}\left(1 + \frac{\tau_0^2}{\tau_a^2}\right)^{1/2}; \qquad (18)$$

при этом значения эквивалентной скорости, определенные по взаимнокорреляционным (15) и автокорреляционным функциям (18), совпадают лишь в случае „чистого" переноса*.

В заключение отметим, что, как следует из приведенного, определение функции $K(d, \tau)$ на параллельных трассах обладает некоторыми преимуществами по сравнению с измерениями на пересекающихся трассах, которым свойственны ограничения как в пространстве, так

* Заметим, что аналогичные (15) и (18) соотношения приведены в [7] при исследовании движений неоднородностей в ионосфере.

и во времени ($d < d_{макс}$ и $\tau < \tau_{макс}$). Однако проведение таких измерений на параллельных трассах представляет известные технические трудности, вследствие чего экспериментальные исследования флюктуаций в тропосфере обычно проводятся на пересекающихся трассах.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Ф. Г. Бассу за участие в обсуждении результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А Красильников, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., **13**, 33 (1949).
2. R. B. Muchmore, A. D. Wheelon, Proc. IRE, **43**, 1437 (1955).
3. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
4. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
5. В. Н. Каравайников, Акуст. ж., **3**, 192 (1957).
6. А. В. Мень, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 395 (1959).
7. B. H. Briggs, G. J. Phillips, D. H. Shinn, Proc. Phys. Soc., **B63**, 106 (1950).
8. G. J. Phillips, M. Spencer, Proc. Phys. Soc., **B68**, 481 (1955).
9. В. Д. Гусев, Вестник МГУ, сер. матем., механ., астрон., физ., хим., № 6, 87 (1959).
10. D. Mintzer, J. Acoust. Soc. America, **26**, 186 (1954).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
26 мая 1961 г.

TO THE HYPOTHESIS OF THE „FROZEN" TURBULENCE TRANSFER IN THE INVESTIGATION OF FLUCTUATIONS IN NONUNIFORM MEDIUM

A. V. Men

Gorrelation functions have been found which characterize fluctuations of radio wave propagation along different pathes in a nonuniform turbulent medium. It is shown that it is possible to use the measurement of these functions for investigation of inhomogeneities transfer effect as well as other processes ocurring in the turbulent medium.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

К ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОВЫХ ФЛЮКТУАЦИЙ В МАКРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Ф. В. Бункин

Феноменологическая теория тепловых равновесных флюктуаций в макроскопических системах, основанная на постулате Онзагера, связывает статистические характеристики флюктуаций в системе с ее линеаризованными макроскопическими (динамическими) уравнениями. В последнее время делаются попытки «обобщения» этой теории, которое должно учесть влияние нелинейности системы на тепловые флюктуации в ней. В статье (на примере электрических флюктуаций в системах с половинной степенью свободы) рассмотрены вопросы обоснования постулата Онзагера и показана полная несостоятельность подобного «обобщения» теории.

ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени полностью построена феноменологическая теория тепловых флюктуаций (броуновского движения) в термодинамически равновесных макроскопических системах. Содержание той части теории, которая изучает лишь спектральные (корреляционные) свойства флюктуаций, исчерпывается так называемой классической ($\hbar\omega \ll kT$) флюктуационно-диссипационной теоремой, доказанной Калленом и Грином [1] (обобщения этой теоремы на случай квантовых флюктуаций, для которых $\hbar\omega > kT$, а также флюктуаций поля см. в [2–9]). Феноменологический характер теории, изучающей кинетику флюктуаций в макросистеме, т. е., по существу, микропроцессы в ней, обусловлен добавлением к формализму статистической механики ряда общих предположений, основным из которых является постулат о затухании (регрессии) флюктуаций. Последний носит теперь имя Онзагера (после известных работ этого автора [10], см. также [11, 12]), хотя фактически этот постулат использовался еще в классических работах по теории броуновского движения [13]*. Постулат Онзагера, как известно, заключается в утверждении, что условные средние равновесных флюктуаций в макроскопической системе удовлетворяют линейным (а точнее, линеаризованным относительно точки равновесия) макроскопическим (динамическим) уравнениям данной системы (подробнее см. ниже). Этот постулат явно или неявно используется во всех вариантах феноменологической теории броуновского движения макроскопических систем и является именно тем звеном, которое связывает статистические (усредненные) характеристики микропроцессов в системе с макропроцессами в ней, т. е. с наблюдаемыми параметрами.

Выше мы специально подчеркнули, что постулат Онзагера, а следовательно, и вся строящаяся на его основе феноменологическая теория флюктуаций требует линейности соответствующих макроскопических (динамических) уравнений системы. Это обстоятельство послужило поводом к тому, что в последнее время появилось много теоретических работ [14–23], которые толкуют современную феноменологическую

* Так называемый метод стохастических уравнений Ланжевена в теории броуновского движения макросистем, по существу, использует постулат Онзагера (подробнее см. раздел 3).

теорию равновесных флюктуаций в макросистемах как приближенную теорию, справедливую лишь при достаточно малых флюктуациях, когда отклонения от равновесных значений физических величин не выходят из области линейности соответствующих макроскопических характеристик системы*. При этом делаются попытки построения „более общей" теории, справедливой при сколь угодно больших флюктуациях (в частности, при высоких температурах). Краткая критика такой точки зрения имеется в работе [21], где показано, что нелинейный характер макроскопических уравнений физической системы не имеет отношения к задаче о термодинамически равновесных флюктуациях в ней, а флюктуационно-диссипационная теорема строго применима для описания спектральной интенсивности равновесных флюктуаций в произвольных (в том числе и динамически нелинейных) пассивных системах. Вопрос о флюктуациях в нелинейных системах частично решается в работах [9, 25].

Настоящая статья посвящена более подробному обоснованию феноменологической теории тепловых флюктуаций в макросистемах. После краткого изложения традиционного построения теории, основанного на постулате Онзагера (раздел 1), рассматриваются вопросы обоснования этого постулата (раздел 2), а также приводится критика кинетической теории Ван-Кампена [23] равновесных флюктуаций в диоде, нагруженном на емкость (раздел 4).

1. ПОСТРОЕНИЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАВНОВЕСНЫХ ФЛЮКТУАЦИЙ, ОСНОВАННОЕ НА ПОСТУЛАТЕ ОНЗАГЕРА

Задача феноменологической теории флюктуаций в макросистемах состоит в том, чтобы по заданным динамическим уравнениям данной системы и внешним условиям, в которых эта система находится, установить статистические свойства флюктуаций в ней. Предположения, которые необходимо ввести в такую теорию наряду с общим формализмом статистической механики, определяются тем, что мы от этой теории требуем. Можно различать спектральную (корреляционную) и полную теории флюктуаций. Первая из них должна устанавливать только спектральные свойства флюктуаций $\xi_i(t)$** и поэтому оперирует только с их вторыми моментами. Полная же теория должна давать исчерпывающее (в смысле теории вероятностей) описание флюктуаций $\xi_i(t)$, т. е. давать любые N-мерные распределения вероятностей.

Обратимся сначала к спектральной теории. Предположим, что макроскопические (динамические) уравнения рассматриваемой физической системы имеют вид:

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.1}$$

где x_i — набор макроскопических величин, полностью описывающих состояние системы***. Поскольку мы рассматриваем только пассивные

* В цитированных работах (за исключением [21]) рассмотрение задачи проводится на простейшем примере электрической RC-ячейки с нелинейной вольтамперной характеристикой сопротивления. При этом авторы исходят из того, что когда среднеквадратичное значение тепловых флюктуаций напряжения на емкости $(\bar{U}^2)^{1/2} = (kT/C)^{1/2}$ становится настолько большим (например, в результате возрастания температуры T), что выходит из области линейности вольтамперной характеристики, обычная феноменологическая теория становится несправедливой.

** Здесь $\xi_i(t)$ — стационарные случайные функции, которые описывают флюктуирующие во времени макроскопические величины, относящиеся к данной системе.

*** Эти же физические величины с учетом их флюктуаций обозначаются через $\xi_i(t)$. Мы сейчас не обсуждаем вопроса о том, для каждой ли системы существует такой полный набор величин x_i и как его выбирать. Некоторые соображения на этот счет можно найти в [26].

системы, то с динамической точки зрения единственным устойчивым стационарным состоянием здесь может быть только состояние равновесия, определяемое из условия $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$. Очевидно, всегда можно считать, что это состояние соответствует точке $x_{01}=x_{02}=\ldots=x_{0n}=0$. Пусть линеаризованная относительно этой точки система уравнений (1.1) имеет вид:

$$\dot{x}_i = a_{ik}x_k, \qquad a_{ik} = (\partial F_i/\partial x_k)_{x=x_0}. \tag{1.2}$$

Как было сказано во введении, феноменологическая теория флюктуаций в макросистемах исходит из постулата Онзагера, который применительно к рассматриваемой системе состоит в следующем: средние значения $\langle \xi_i, t-t_0|\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0\rangle$ флюктуаций физических величин $\xi_i(t)$ в момент времени t при условии, что в момент t_0 были значения $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0$, суть решения уравнений (1.2) при начальных условиях $x_i(t_0)=\xi^0$, т. е.*

$$\langle \xi_i, t-t_0 \,|\, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots \xi_n^0 \rangle = (e^{A(t-t_0)})_{ik}\xi_k^0. \tag{1.3}$$

Здесь A—матрица с элементами a_{ik}. Корреляционные (а следовательно, согласно теореме Хинчина — Винера, и спектральные) свойства флюктуаций определяются матрицей $\Psi(\tau)$, элементами которой служат функции корреляции $\psi_{ik}(\tau)=\overline{\xi_i(t+\tau)\xi_k(t)}=\overline{\langle \xi_i, \tau|\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0\rangle}^{\xi^0}\xi_k^0$ (значок ξ^0 означает, что усреднение производится по начальным значениям $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0$). Соотношение (1.3) и статистическая механика, определяющая матрицу $\Psi(0)$**, дают возможность вычислить матрицу $\Psi(\tau)$ при $\tau>0$:

$$\Psi(\tau)=e^{A\tau}\Psi(0), \qquad \tau>0. \tag{1.4}$$

При отрицательных значениях τ матрица $\Psi(\tau)$ определяется на основании следующего очевидного свойства матриц корреляции, вытекающего из условия стационарности флюктуаций $\xi_i(t)$: $\Psi(-\tau)=\tilde{\Psi}(\tau)$, где $\tilde{\Psi}$— транспонированная матрица. Используя это свойство матрицы $\Psi(\tau)$, для матрицы спектральных интенсивностей $G(\omega)$ получаем (теорема Хинчина—Винера, см., например, [28]):

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\infty}[\Psi(\tau)+\tilde{\Psi}(\tau)]\cos\omega\tau\, d\tau+\right.$$
$$\left.+i\int_0^{\infty}[\Psi(\tau)-\tilde{\Psi}(\tau)]\sin\omega\tau\, d\tau\right\}. \tag{1.5}$$

Соотношения (1.4) и (1.5) полностью решают задачу спектральной теории классических ($\hbar\omega \ll kT$) флюктуаций в макросистемах. Такое решение, впервые в четкой форме полученное, по-видимому, в рабо-

---

* Условное среднее будет везде далее обозначаться скобками, а полное среднее— чертой сверху. Из того, что $x_{01}=x_{02}=\ldots=x_{0n}=0$, очевидно, следует, что $\overline{\xi_i}=0$. Тот факт, что условные средние зависят только от разности $(t-t_0)$, является следствием стационарности флюктуаций $\xi_i(t)$.

** Согласно теории термодинамических флюктуаций [12, 27], $\psi_{ik}(0)=\overline{\xi_i\xi_k}=kg_{ik}^{-1}$, где k—постоянная Больцмана,

$$g_{ik} = -(\partial^2\Delta S/\partial\xi_i\,\partial\xi_k)_{\xi=0},$$

а ΔS—отклонение энтропии системы от ее равновесного значения, характеризуемое отличными от нуля значениями параметров $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

те [29], еще не составляет, однако, флюктуационно-диссипационной теоремы, поскольку в нем не установлена в явном виде связь с диссипативными характеристиками системы (матрицей проводимости). Такая связь была получена в работах [1].

Полная теория флюктуаций в макросистемах требует дополнительного предположения о статистических свойствах случайных функций $\xi_i(t)$. Обычно в качестве такого предположения выбирается одно из двух (см., например, [28]): либо предполагается, что $\xi(t)=\{\xi_1(t),\xi_2(t), ..., \xi_n(t)\}$ — n-мерный гассов процесс, либо, что $\xi(t)$ — n-мерный непрерывный марковский процесс*. Основанием в пользу первого из этих предположений является, очевидно, центральная предельная теорема теории вероятностей (см., например, [31]). Предположение о том, что процесс $\xi(t)$ является марковским, также имеет глубокие физические основания, поскольку набор макроскопических величин $x_1, x_2, ..., x_n$ считается полным набором переменных, определяющим динамическое состояние системы [26].

Оба указанных предположения относительно статистических свойств $\xi(t)$ физически обоснованы и поэтому не должны противоречить друг другу в рамках рассматриваемой теории, т. е. одно из них должно следовать из другого. Можно строго показать, что это действительно так.

Этим исчерпывается построение феноменологической теории термодинамически равновесных классических флюктуаций в макроскопических системах. Мы видим, что единственным физически необоснованным постулатом, необходимым для такого построения, является постулат Онзагера. Как уже было отмечено во введении, этот постулат вызывает у многих авторов неудовлетворенность, проявляющуюся в некоторых случаях [14–23] в попытках „обобщения" изложенной выше теории.

2. К ОБОСНОВАНИЮ ПОСТУЛАТА ОНЗАГЕРА

Будем проводить все рассмотрение для одной флюктуирующей величины $\xi(t)$, предполагая, что динамическое уравнение изучаемой макросистемы есть уравнение первого порядка**

$$\dot{x} = F(x). \tag{2.1}$$

Переход к случаю n величин $\xi_i(t)$ не вызывает принципиальных затруднений, и все результаты, к которым мы придем, в равной степени относятся к общему случаю.

Мы будем исходить из общей концепции статистической физики, согласно которой макроскопические процессы, управляемые уравнением (2.1), суть средние статистические*** флюктуаций $\xi(t)$. При таком подходе задача обоснования постулата Онзагера сводится к статистическому (кинетическому) обоснованию следующих двух независимых утверждений: 1) условные средние $\langle \xi, t-t_0 \mid \xi^0 \rangle \equiv f(t-t_0, \xi^0)$ удовлетворяют не зависящим явно от времени дифференциальным уравнениям типа (2.1)****; 2) для спонтанно возникающих в состоянии термодинамического равновесия отклонений ξ^0 это уравнение есть линей-

---

* Под непрерывным марковским процессом понимается такой процесс, для которого плотность вероятности перехода $w(\xi, t-t_0|\xi^0)$ удовлетворяет уравнению Эйнштейна—Фоккера [28, 30].

** Примером такой системы может служить электрическая RC-ячейка.

*** Мы отвлекаемся при этом от эргодической проблемы.

**** Зависимость функции $f(t-t_0,\xi^0)$ лишь от разности $(t-t_0)$ является необходимым, но еще не достаточным условием того, что она есть решение уравнения типа (2.1)

ное, вне зависимости от величины средней интенсивности флюктуций $\overline{\xi^2}$. Мы покажем сейчас, что из первого утверждения следует линейность уравнения (2.1), если принять то же дополнительное предположение относительно статистических свойств флюктуаций, которое необходимо принять для построения полной теории флюктуаций (см. раздел 1).

Пусть условное среднее $f(t-t_0, \xi^0)$ удовлетворяет уравнению типа (2.1) при начальном условии $x(t_0)=\xi^0$ и пусть $\xi(t)$—гауссов случайный процесс. Тогда функция $f(t-t_0, \xi^0)$ имеет вид $\xi^0 R(t-t_0)$, где $R(\tau)$—коэффициент корреляции [31]. Подставляя такую функцию в уравнение (2.1), получаем равенство $\xi^0 \dot{R}(\tau) = F[\xi^0 R(\tau)]$, которое должно выполняться тождественно по ξ^0. Отсюда следует, что функция $F(x)$ должна быть однородной функцией первого порядка, т. е. $F(x)=ax$. Коэффициент корреляции $R(\tau)$ при этом равен $\exp(a|\tau|)$, что, согласно теореме Дуба [28, 33], указывает на марковские свойства флюктуаций $\xi(t)$. Предположим теперь, что $\xi(t)$—марковский случайный процесс. Условное среднее $f(t-t_0, \xi^0)$ для такого процесса удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(t, \xi^0) = \int f(t-t', \xi') w(\xi', t' | \xi^0)\, d\xi', \qquad (2.2)$$

где $w(\xi, t|\xi^0)$ — плотность вероятности перехода. С другой стороны, поскольку $f(t, \xi^0)$ по предположению есть решение уравнения (2.1), имеем:

$$f(t, \xi^0) = f[t-t', f(t', \xi^0)]. \qquad (2.3)$$

Соотношения (2.2) и (2.3) совместны только тогда, когда $f(t, \xi^0)=\xi^0 R(t)$ или $w(\xi, t|\xi^0) = \delta[\xi - f(t, \xi^0)]$. Вторая возможность, очевидно, соответствует динамическому процессу. Первая же, на основании (2.2), дает функциональное уравнение для функции $R(t)$

$$R(t) = R(t-t')\, R(t'),$$

решение которого есть $R(t) = \exp(at)$. Отсюда, во-первых, следует, что $F(x) = ax$ и, во-вторых, согласно теореме Дуба, что $\xi(t)$—гауссов процесс.

Из последнего результата, в частности, вытекает, что предположение о возможности в общем случае описать собственные (не обязательно равновесные) флюктуации в макросистеме при помощи уравнения Эйнштейна—Фоккера с нелинейными коэффициентами не совместимо с предположением о том, что условное среднее этих флюктуаций удовлетворяет какому-то дифференциальному уравнению, в том числе динамическому уравнению системы (2.1). Ошибочность работ [15–17, 19] состоит именно в том, что в них исходят из уравнения Эйнштейна—Фоккера, в которое в качестве коэффициента $A(\xi)$ [30] формально подставляется нелинейная функция $F(\xi)$ динамического уравнения (2.1).

Далее, основываясь на кинетической теории электропроводности (и проводя рассмотрение соответственно только на примере электрических флюктуаций), мы покажем, не предполагая при этом ни гауссовых, ни марковских свойств флюктуаций $\xi(t)$, во-первых, что при произвольных значениях ξ^0 условные средние действительно удовлетворяют уравнениям типа (2.1) и, во-вторых, что для термодинамически равновесных флюктуаций (т. е. для спонтанно возникающих значений ξ^0) эти уравнения суть линеаризованные динамические уравнения данной макросистемы.

Рассмотрим электрические флюктуации в RC-ячейке. Пусть

$q(t)$—флюктуационное значение заряда на емкости C ($\xi \equiv q$). Тогда на основании закона Кирхгофа имеем*:

$$q(t)/C + u_R(t) = 0, \tag{2.4}$$

где $u_R(t)$ — флюктуационное значение напряжения на сопротивлении. Соотношение (2.4), очевидно, не является еще уравнением, из которого могли бы быть определены статистические свойства флюктуаций $q(t)$. Оно переходит в такое уравнение (называемое стохастическим уравнением Ланжевена), если формально положить, например, $u_R(t) = v(\dot{q}) + \mathcal{E}(t)$, где $v(x)$ — известная детерминированная функция x, а $E(t)$—случайная функция t с заданными статистическими свойствами. При анализе равновесных флюктуаций обычно полагают $v(\dot{q}) = R\dot{q}$, где R—величина сопротивления на линейном участке его вольтамперной характеристики, и считают, что случайная функция $\mathcal{E}(t)$ обладает равномерной спектральной интенсивностью $(\mathcal{E}^2)_\omega$, определяемой формулой Найквиста: $(\mathcal{E}^2)_\omega = (2/\pi)RkT$. Известно, что при этом получаются те же результаты, что и при подходе, описанном в разделе 1 и основанном на постулате Онзагера. Постулирование линейной зависимости $v(\dot{q}) = \dot{R}q$ вызывает, однако, те же возражения, что и постулат Онзагера. Некоторыми авторами делались попытки использовать нелинейное стохастическое уравнение (т. е. уравнение с нелинейной зависимостью $v(\dot{q})$) для упомянутого во введении „обобщения" феноменологической теории равновесных флюктуаций**. Из дальнейшего будет, однако, следовать, что определенный смысл может быть вложен только в указанное линейное представление для $u_R(t)$.

Усредним равенство (2.4) по ансамблю идентичных систем при условии, что при $t = t_0$ для всех систем $q(t_0) = q^0$. Вводя обозначение $Q(t) \equiv \langle q,\ t-t_0 \mid q^0 \rangle = \int qw(q,\ t-t_0 \mid q^0)\, dq\, (Q(t_0)=q^0)$, имеем:

$$\frac{Q}{C} + \langle u_R(t) \rangle = 0. \tag{2.5}$$

Заметим, что мы не налагаем никакого ограничения на величину q^0; она может быть как порядка (или меньше) среднеквадратичного значения равновесных флюктуаций $\sqrt{\overline{q^2}}$, так и много больше этого значения. Покажем теперь, что без учета дисперсии в сопротивлении (в противном случае рассматриваемая система не была бы RC-ячейкой как таковой; количественный критерий безынерционности сопротивления см. ниже) при произвольном значении q^0 среднее $\langle u_R(t) \rangle$ зависит только от среднего значения тока $\dot{Q} \equiv dQ/dt$: $\langle u_R(t) \rangle = V(\dot{Q})$.

---

* Соотношение (2.4) может быть строго получено из лоренцовских уравнений электромагнитного поля путем соответствующего пространственного усреднения.

** Наиболее последовательно такая точка зрения проводится в работе [21], носящей формальный математический характер и сводящейся к нахождению по заданному нелинейному стохастическому уравнению дифференциального уравнения, вообще говоря, бесконечно высокого порядка для плотности вероятности перехода w флюктуаций $\xi(t)$ (в случае (2.4)—флюктуаций заряда $q(t)$). В частном случае линейного стохастического уравнения получаемое в этой работе уравнение для w переходит в уравнение Эйнштейна—Фоккера. Именно в этом факте усматривается обобщающий характер предлагаемой в [21] теории. Основной же вопрос феноменологической теории флюктуаций—как связаны статистические характеристики флюктуаций в системе с ее макроскопическими параметрами—при таком рассмотрении остается полностью открытым, поскольку связь нелинейной функции $v(x)$ с макроскопическими параметрами системы (например, с вольтамперной характеристикой сопротивления) установлена быть не может. Из дальнейшего будет ясно, что рассмотрение равновесных флюктуаций, исходящее из нелинейного стохастического уравнения, физически совершенно несостоятельно. На трудности, возникающие при таком подходе, указывал еще Бриллюэн [34].

Тем самым мы докажем, что условные средние действительно удовлетворяют дифференциальному уравнению типа (2.1). Более того, из нашего рассмотрения будет следовать, что функция $V = V(I)$ есть вольтамперная характеристика сопротивления, измеряемая на опыте. Это в совокупности с предыдущим означает, что соотношение (2.5) есть не что иное, как макроскопическое (динамическое) уравнение рассматриваемой RC-ячейки, а следовательно, условное среднее $Q(t) = \langle q, t - t_0 | q^0 \rangle$, как и должно быть в соответствии с общей концепцией статистической физики, есть то, что необходимо понимать под макроскопической величиной заряда.

Рассмотрим сначала такие RC-ячейки, в которых сопротивлением является однородный образец (объем) проводящего твердого тела (полупроводник, металл) или газа (электронная плазма). Такие типы сопротивлений практически почти никогда не используются; однако хорошо развитая кинетическая теория электропроводности в указанных средах позволяет для этого случая до конца выяснить физическую сторону дела. После этого могут быть сделаны однозначные выводы и относительно поведения систем, содержащих другие типы нелинейных сопротивлений (например, нелинейные контактные слои или вакуумные диоды).

Безынерционность (отсутствие дисперсии) сопротивления с кинетической точки зрения, очевидно, означает, что все времена релаксации $\tau_{\text{микро}}$ для микропроцессов, участвующих в электропроводности, малы по сравнению с временем релаксации $\tau_{\text{макро}}$ для макропроцессов в системе, т. е. в данном случае—с временем порядка RC (R—величина сопротивления в линейной области). В частности, должно выполняться условие

$$\tau_\varepsilon / RC \sim (\delta \nu_{\text{эфф}})^{-1} / RC \ll 1. \tag{2.6}$$

Здесь $\tau_\varepsilon \sim (\delta \nu_{\text{эфф}})^{-1}$—время релаксации энергии электронов проводимости, $\nu_{\text{эфф}} = \bar{v}/l_{\text{эфф}}$—эффективное число соударений электронов (для твердого тела—с фононами, для плазмы—с молекулами и ионами), $\delta = \Delta\varepsilon/\varepsilon$—относительная доля энергии ε, передаваемая электроном при каждом соударении с тяжелой частицей. Существенно, что величина $\delta \ll 1$ (для твердого тела $\delta \sim mv_s^2/kT$, для плазмы $\delta \sim m/M$, где v_s—скорость звука, m и M—массы соответственно электрона и тяжелой частицы). Это приводит к тому, что даже в сильных электрических полях скорость упорядоченного движения электронов мала по сравнению со средней скоростью хаотического движения.

Кинетическое уравнение для функции распределения $f(\boldsymbol{v})$ электронов проводимости по скоростям в процессе разряда конденсатора от произвольного начального заряда q^0, на основании условия (2.6), может быть записано в виде*:

$$\frac{e}{m} E(t)\, \partial f / \partial v_x + J = 0, \tag{2.7}$$

где J—интеграл соударений, а

$$E(t) = \langle u_R(t) \rangle / L \tag{2.8}$$

(L—геометрическая длина образца, вдоль которого направлена ось x). Важно подчеркнуть, что фигурирующее явно в уравнении (2.7) электрическое поле $E(t)$ представляет собою, согласно (2.8), среднее поле,

* Учет в кинетическом уравнении члена $\partial f/\partial t$ означал бы учет членов порядка $\tau_{\text{микро}}/RC$ (порядка $(RC\delta\nu_{\text{эфф}})^{-1}$ и $(RC\nu_{\text{эфф}})^{-1}$), т. е. учет дисперсии в сопротивлении. Поэтому для описания процессов в RC-ячейке отбрасывание этого члена не только возможно, но и необходимо.

действующее на электроны. Флюктуации этого поля, обусловленные тепловым движением частиц (т. е. собственные флюктуации, а не поданные от внешнего источника), как всегда в методе кинетического уравнения, учитываются эффективно посредством понятия соударений.

На основании лишь одного вида уравнения (2.7) легко заключить, что величина $\langle u_R(t) \rangle$ зависит только от среднего тока $\dot{Q}(t)$. Действительно, в общем случае решение уравнения (2.7) имеет вид: $f = f(\boldsymbol{v}, \langle u_R(t) \rangle)$. Откуда среднее значение тока равно*

$$\dot{Q}(t) = Se \int v_x f(\boldsymbol{v}, \langle u_R(t) \rangle)\, d\boldsymbol{v} \equiv I(\langle u_R(t) \rangle), \tag{2.9}$$

где S — площадь поперечного сечения образца. Кроме того, отсюда следует, что зависимость $\dot{Q} = I(\langle u_R(t) \rangle)$ или обратная ей $\langle u_R(t) \rangle = V(\dot{Q})$ является именно той зависимостью, которую измеряют на опыте и называют вольтамперной характеристикой сопротивления**.

Мы получили наш результат для произвольного начального значения заряда q^0; при этом зависимость $\langle u_R(t) \rangle = V(\dot{Q})$, вообще говоря, нелинейная, как и макроскопическое уравнение, описывающее релаксацию среднего заряда $Q(t)$. Для полного обоснования постулата Онзагера остается показать, что для тех значений q^0, которые могут возникать спонтанно в термодинамически равновесных состояниях системы при произвольной температуре T, зависимость $\langle u_R(t) \rangle = V(\dot{Q})$ принципиально всегда линейная: $\langle u_R(t) \rangle = V'(0)\dot{Q} \equiv R\dot{Q}$. Как это следует из сказанного ранее, для этого было бы достаточно предположить, что флюктуации $q(t)$ обладают либо гауссовыми, либо марковскими свойствами. Но мы не станем делать таких предположений, а дадим кинетическое обоснование этому важному утверждению.

Как показано в работах по кинетической теории электропроводности в полупроводниках, металлах и плазме [35–38], функция распределения $f(\boldsymbol{v})$ электронов по скоростям при наличии внешнего поля E (т. е. решение уравнения (2.7)) может быть представлена в виде

$$f(\boldsymbol{v}) = f_0(v) + \varphi(\boldsymbol{v}), \tag{2.10}$$

причем симметричная часть $f_0(v)$ в силу условия $\delta \ll 1$ даже в сильных полях E, когда отклонение от закона Ома существенно, значительно больше асимметричной части $\varphi(\boldsymbol{v})$ ($f_0(v) \gg |\varphi(\boldsymbol{v})|$). При $E=0$ функция $f_0(v)$ есть максвелловское (для полупроводников и плазмы) или фермиевское (для металлов) распределение, а $\varphi(\boldsymbol{v})=0$. Электропроводность образца, согласно (2.9), определяется лишь асимметричной функцией $\varphi(\boldsymbol{v})$. Влияние поля на распределение электронов $f(\boldsymbol{v})$, а следовательно, и на электропроводность образца определяется параметром

$$\eta = (el_{\text{эфф}} E/kT)^2/\delta, \tag{2.11}$$

где $l_{\text{эфф}} \sim \sqrt{\varepsilon/m}/\nu_{\text{эфф}}$ — эффективная длина свободного пробега электрона. В случае слабого поля, когда $\eta \ll 1$, с точностью до членов порядка η справедлив закон Ома ($\varphi(\boldsymbol{v}) \propto E$), а симметричная часть $f_0(v)$ не зависит от E и остается равновесным (максвелловским или фермиевским)

---

* Для полупроводника необходимо еще учесть возможную дырочную составляющую тока, но сейчас это для нас несущественно.

** Измерение вольтамперной характеристики сопротивления при наличии в нем собственных флюктуаций (т. е., в принципе, всегда) должно, очевидно, производиться следующим образом: сопротивление подключается к генератору фиксированного (т. е. нефлюктуирующего) напряжения V и измеряется средний ток I в цепи. Если генератор напряжения будет обладать флюктуациями ($V + \delta V(t)$), то средний ток, вообще говоря, уже не будет однозначной функцией V.

распределением, соответствующим температуре T решетки (тяжелых частиц). Весь эффект поля при этом сводится к медленному (по сравнению со средней скоростью хаотического движения) дрейфу электронов, распределение которых по скоростям остается равновесным.

Основным результатом излагаемой кинетической теории [35–38] для обсуждаемого вопроса является то, что отклонение от закона Ома, наступающее при $\eta \gtrsim 1$, всегда сопровождается существенным отклонением функции $f_0(v)$ от равновесной (она начинает зависеть от E). Таким образом, в области нелинейности вольтамперной характеристики проводящего элемента распределение носителей электричества в нем существенно неравновесное*. Уже отсюда ясно, что нелинейность вольтамперных характеристик, а следовательно, и нелинейность самих уравнений (1.1) и (2.1), описывающих макроскопические процессы в системе, не имеет отношения к задаче о равновесных флюктуациях в ней. Поскольку при любой величине равновесных флюктуаций (т. е. для нашего случая при любой величине возможных спонтанно возникающих значений q^0) функция $f_0(v)$ остается (по определению) равновесной функцией распределения, зависимость (2.9) $\dot{Q} = I(\langle u_R \rangle)$ или обратное ей соотношение $\langle u_R \rangle = V(\dot{Q})$ должны быть всегда линейными. Иными словами, получается так, что при повышении температуры системы (т. е. при увеличении возможных спонтанных отклонений q^0) происходит автоматическая „самолинеаризация" системы (соответствующее расширение области линейности вольтамперной характеристики $V(I)$).

Сделанный вывод подтверждается также следующими дополнительными соображениями. Оценим величину параметра η для тех значений q^0, которые соответствуют равновесному состоянию системы при температуре T. Для этого положим $q^0 \leqslant \alpha \sqrt{\overline{q^2}} = \alpha \sqrt{kTC}$, где α—некоторое число, большее единицы; более точное значение этому числу будет предписано ниже. Тогда, подставляя в правую часть (2.11) $E = q^0/CL \leqslant (\alpha/L)\sqrt{kT/C}$ и учитывая, что величина сопротивления $R = L^2/\sigma V$, где V—объем образца, а проводимость $\sigma \sim e^2 n l_{\text{эфф}}/\sqrt{mkT}$ (n—электронная плотность), получаем:

$$\eta \leqslant \frac{\alpha^2}{N} \tau_\varepsilon / RC. \tag{2.12}$$

Здесь τ_ε — время релаксации энергии электронов, определяемое соотношением (2.6), а N—полное число электронов проводимости в образце. То обстоятельство, что правая часть (2.12) зависит от отношения α^2/N, где α пока еще остается не вполне определенным числом, является следствием, по существу, вероятностной постановки вопроса при той оценке параметра η, которую мы только что провели. При каждом фиксированном значении α оценка (2.12) справедлива лишь с некоторой вероятностью $p(\alpha)$, причем $p(\alpha) \to 1$ при $\alpha \to \infty$. Если предположить (для оценки это вполне допустимо), что одномерное распределение вероятностей для флюктуаций q является гауссовым**, то $p(\alpha) = \Phi(\alpha)$ ($\Phi(x)$—интеграл вероятности) и можно определить значение

---

* В некоторых случаях (например, в металлах или в сильно ионизированной плазме, когда частота междуэлектронных соударений $\nu_e \ll \delta\nu$, где ν—частота соударений с тяжелыми частицами) даже в сильных полях ($\eta \gtrsim 1$) функция $f_0(v)$ имеет вид равновесного распределения, но соответствующего некоторой электронной температуре T_e, большей температуры термостата (решетки) T. По отношению к термостату это распределение, разумеется, неравновесно

** Это, очевидно, еще не означает, что случайный процесс $q(t)$ является гауссовым.

числа α, соответствующее заданной вероятности p. Так, при $p=0{,}999$ $\alpha=3{,}30$; при $p=1-10^{-7}$ $\alpha=5{,}327$. Как и для всякого макроскопического тела, число N чрезвычайно велико; поэтому, если положить $\alpha=N^{1/2}$ и воспользоваться асимптотическим представлением для интеграла вероятности, то $p(N^{1/2}) \simeq \left[1-\sqrt{2/\pi}\,N\exp(-N/2)\right]$, т. е. с той достоверностью, с какой справедливы вообще все выводы статистической физики, для состояний термодинамического равновесия во всяком случае справедлива оценка $\eta \leqslant \tau_\varepsilon / RC$. Это означает, что в таких состояниях параметр η автоматически пренебрежимо мал для всех температур T, при которых, разумеется, сопротивление еще может считаться безынерционным*. Именно в этом и проявляется эффект „самолинеаризации" системы по отношению к собственным флюктуациям.

Мы дали кинетическое обоснование постулата Онзагера для частного вида макросистемы. Полученная при этом физическая картина, касающаяся соотношения между макроскопической нелинейностью системы и равновесными флюктуациями в ней, представляется, однако, весьма общей. Она может быть, например, без труда установлена (подобно тому, как это сделано выше) применительно к электрическим флюктуациям в произвольно сложных квазистационарных цепях. Строгое, но формальное доказательство нашего утверждения об отсутствии влияния нелинейности системы на спектральную интенсивность равновесных флюктуаций в ней применительно к флюктуациям произвольной физической природы дано в [24].

В следующем разделе мы рассмотрим другую систему частного вида—RC-ячейку, в которой в качестве сопротивления включен нелинейный контактный слой или вакуумный диод. Такое рассмотрение необходимо нам для того, чтобы показать несостоятельность кинетического исследования [23].

3. СИСТЕМЫ, СОДЕРЖАЩИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОНТАКТЫ И ВАКУУМНЫЕ ДИОДЫ

Вольтамперная характеристика $I=I(V)$ нелинейного контактного слоя или вакуумного диода имеет, как известно, вид:

$$I = I_0[\exp(eV/kT)-1]. \tag{3.1}$$

Величина I_0 имеет порядок величины тока, текущего через элемент в одном направлении в состоянии теплового равновесия (при $V=0$), т. е. $I_0 \sim eN/\tau_{\text{пр}}$, где N—полное число электронов в слое (между электродами диода), а $\tau_{\text{пр}}$—среднее время пролета электрона через слой. С другой стороны, очевидно, что $I_0 = kT/eR$, где R—величина сопротивления на линейном участке. Отсюда имеем:

$$R \sim kT\tau_{\text{пр}}/e^2N. \tag{3.2}$$

Нелинейные эффекты в рассматриваемых элементах определяются величиной параметра $\eta' = (eV/kT)^2 = (eL'E/kT)^2$, где L'— ширина контактного слоя (расстояние между электродами). Заметим, что выражение для η' получается из выражения (2.11), если в последнем положить $l_{\text{эфф}}=L'$ и $\delta=1$. Полагая опять для теплового равновесия $q^0 \leqslant \sigma\sqrt{kTC}$ и учитывая (3.2), получаем для η' оценку

* Можно указать среды (например, полностью ионизированная плазма), для которых с ростом температуры время τ_ε растет быстрее, чем сопротивление R и поэтому отношение τ_ε/RC может стать значительным. Это, однако, не будет означать, что при этом начинают играть какую-то роль нелинейные эффекты, а будет лишь свидетельствовать о том, что система перестала быть RC-ячейкой (в ней появились лишние «макроскопические» степени свободы).

$$\eta' \leqslant \frac{\alpha^2}{N}\tau_{\text{пр}}/RC, \tag{3.3}$$

совпадающую, по существу, с оценкой (2.12). Дальнейшие рассуждения аналогичны следующим после формулы (2.12).

В работе [23] на основе кинетического рассмотрения получено разложение по степеням параметра $\mu \equiv e^2/kTC$ спектральной интенсивности флюктуаций тока в RC-ячейке, в которой в качестве сопротивления включен диод. Нулевой член ($\mu=0$) этого разложения полностью соответствует теореме Найквиста, т. е. определяется сопротивлением диода R в линейной области; более высокие члены разложения трактуются автором как влияние нелинейности системы на тепловые флюктуации в ней. Отсюда делается вывод об ограниченной применимости флюктуационно-диссипационной теоремы.

Легко показать, что указанный результат не только не опровергает, но, наоборот, полностью подтверждает выводы настоящей статьи. Дело в том, что одной из исходных предпосылок развиваемой в [23] теории является пренебрежение временем пролета $\tau_{\text{пр}}$ электронов в диоде (т. е. с самого начала постулируется безынерционность диода). С другой стороны, легко видеть, воспользовавшись соотношением (3.2), что параметр разложения μ имеет порядок $(\tau_{\text{пр}}/RC)N^{-1}$, где N — полное число электронов в диоде, которое фигурирует в оценке (3.3). Это означает, что в рамках развиваемой в [23] теории все члены разложения выше нулевого (соответствующего теореме Найквиста) бессодержательны, поскольку они получены противоречивым образом. Корректный учет членов порядка μ и выше потребовал бы, очевидно, с самого начала учета дисперсионных свойств диода, т. е. рассмотрения не RC-ячейки как таковой, а более сложной системы, описываемой параллельным соединением двухполюсника с импедансом $Z(\omega)$ (диод) и емкости C. Тепловые флюктуации в такой сложной системе снова определяются посредством теоремы Найквиста.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. B. Callen, R. F. Green, Phys. Rev., **86**, 702 (1952); **88**, 1387 (1952).
2. H. B. Callen, T. A. Welton, Phys. Rev., **83**, 34 (1951).
3. H. B. Callen, M. L. Barasch, J. L. Jackson, Phys. Rev., **88**, 1382 (1952).
4. С. М. Рытов, Теория электрических флюктуаций и теплового излучения, изд. АН СССР, М., 1953; ДАН СССР, **110**, 371 (1956).
5. Ф. В. Бункин, Диссертация, ФИАН, М., 1955; ЖЭТФ, **32**, 811 (1957).
6. R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan, **12**, 570 (1957).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИФМЛ, М., 1959.
8. В. П. Силин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 198 (1959).
9. W. Bernard, H. B. Callen, Rev. Mod. Phys., **31**, 1017 (1959).
10. L. Onsager, Phys. Rev., **37**, 405 (1931); **38**, 2265 (1931).
11. H. B. G. Casimir, Rev. Mod. Phys., **17**, 343 (1945).
12. С. Р. де Гроот, Термодинамика необратимых процессов, ГИТТЛ, М., 1956.
13. Сб. Брауновское движение, Л., 1936.
14. D. K. C. MacDonald, Phil. Mag., **45**, 63 (1954).
15. D. Polder, Phil. Mag., **45**, 69 (1954).
16. D. K. C. MacDonald, Phys. Rev., **108**, 541 (1957).
17. N. G. Van Kampen, Phys. Rev., **110**, 319 (1958).
18. C. T. J. Alkemade, Physica, **24**, 1029 (1958).
19. R. O. Davies, Physica, **24**, 1055 (1958).
20. A. Marek, Czech. J. Phys., **9**, 260 (1959); Physica, **25**, 1358 (1959).
21. В. Б Магалинский, ЖЭТФ, **36**, 1423 (1959); Диссертация, МГУ, 1960.
22. M. Lax, Rev. Mod. Phys., **32**, 25 (1960).
23. N. G. Van Kampen, Physica, **26**, 585 (1960).
24. Ф. В. Бункин, Радиотехника и электроника, **6**, 3 (1961).

25. Р. Л. Стратонович, Вестник МГУ, сер. III, физ., астрон., 4, 99 (1960).
26. M. S. Green, J. Chem. Phys., 20, 1281 (1952).
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, ГИТТЛ, М., 1951.
28. M. C. Wang, G. E. Uhlenbeck, Rev. Mod. Phys., 17, 323 (1945).
29. М. А. Леонтович, J. Phys. USSR, 4, 499 (1941).
30. М. А. Леонтович, Статистическая физика, ГИТТЛ, М.—Л., 1944.
31. Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, М., 1948.
32. Я. П. Терлецкий, Динамические и статистические законы физики, изд. МГУ, 1950.
33. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.
34. L. Brillouin, Phys. Rev., 78, 627 (1950); Наука и теория информации, ИЛ, М., 1960.
35. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ, 7, 1069 (1937).
36. В. П. Шабанский, ЖЭТФ, 27, 147 (1954).
37. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН, 70, 201 (1960).
38. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, ГИФМЛ, М., 1960.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию
14 июня 1961 г.

TO THE PHENOMENOLOGICAL THEORY OF THERMAL FLUCTUATIONS IN MACROSYSTEMS

F. V. Bunkin

Phenomenological theory of equilibrium thermal fluctuations in macrosystems based on Onzager's postulate, connects the statistical characteristics of fluctuations in system with its linearized macro (dynamic) equations. The attempts are made recently and now of this theory „generalization", aiming an account of influence of system nonlinearity on its thermal fluctuations. The article is devoted to the discussion of Onzager's postulate validity and it is shown (in the case of electrical fluctuations in systems with a half degree of freedom) the full inconsistency of such „generalization" of the theory

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 РАДИОФИЗИКА 1962

ИСКАЖЕНИЯ ФОРМЫ ЛИНИЙ ЯДЕРНОГО КВАДРУПОЛЬНОГО РЕЗОНАНСА ЗА СЧЕТ АППАРАТУРНЫХ ФАКТОРОВ

В. С. Гречишкин, И. А. Кюнцель

На основании простых численных расчетов интенсивности и формы сигнала линий поглощения, описываемых функциями Гаусса и Лоренца, показано, что при амплитуде частотной модуляции порядка половины ширины линии имеет смысл делать запись третьей гармоники сигнала. Произведены записи различных производных линии поглощения. Показано, что постоянная времени фазового детектора влияет на положение центра линии при записи разных производных.

Исследование формы линий ядерного квадрупольного резонанса представляет интерес при изучении структуры и динамики кристаллических решеток. Поэтому учет влияния аппаратурных факторов на воспроизведение формы линий имеет практическое значение. Ряд авторов [1–5] ранее обсуждал этот вопрос для случая ядерного магнитного и ядерного квадрупольного резонанса. Целью настоящей работы является последовательный учет аппаратурных факторов при записи различных производных сигнала поглощения, что представляет специфический интерес для ядерного квадрупольного резонанса.

Явление ядерного квадрупольного резонанса может наблюдаться в условиях, когда высокая частота, соответствующая переходам между уровнями квадрупольной энергии, модулируется низкой частотой порядка нескольких десятков герц.

Если частота генератора изменяется по закону

$$\nu = \nu_1 + \nu_m \sin(\omega_m t), \tag{1}$$

то, как было показано в работах [1–3], при записи 1-ой, 2-ой и 3-ей производных линии поглощения поправка ко второму моменту равна соответственно $\nu_m^2/4$, $\nu_m^2/6$ и $\nu_m^2/8$, где ν_m—амплитуда частотной модуляции. Таким образом, влияние конечной амплитуды модуляции на воспроизведение формы линий при выделении 2-ой и 3-ей гармоник сигнала (при этом записываются соответственно 2-я и 3-я производные линии поглощения) сказывается меньше, чем при выделении 1-ой. Если же производится выделение высших гармоник сигнала, то при этом легко подавить паразитную амплитудную модуляцию, возникающую наряду с модуляцией частоты, путем запирания выхода детектора по первой гармонике.

В настоящей работе выясняется вопрос об оптимальных условиях записи тех или иных производных сигнала поглощения. Проводится также учет влияния постоянной времени фазового детектора на запись различных производных.

1. ОПТИМАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ЗАПИСИ РАЗЛИЧНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СИГНАЛА ПОГЛОЩЕНИЯ

Оценка поведения коэффициентов при различных гармониках в сигнале ядерного квадрупольного резонанса показывает, что эти коэффициенты должны возрастать с увеличением ν_m. Соответствующий рас-

чет для различных форм линий выполнен ниже. Используя разложение форм-фактора в ряд Тейлора

$$g(\nu) = g(\nu_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_m^k \sin^k(\omega_m t)}{k!} \left(\frac{d^k g}{d\nu^k}\right), \tag{2}$$

получим коэффициенты при первых трех гармониках, равные соответственно

$$A_1 = \nu_m \frac{dg}{d\nu} + \frac{\nu_m^3}{8}\frac{d^3 g}{d\nu^3} + \frac{\nu_m^5}{192}\frac{d^5 g}{d\nu^5} + \cdots;$$

$$A_2 = \frac{\nu_m^2}{4}\frac{d^2 g}{d\nu^2} + \frac{\nu_m^4}{48}\frac{d^4 g}{d\nu^4} + \frac{\nu_m^6}{1536}\frac{d^6 g}{d\nu^6} + \cdots; \tag{3}$$

$$A_3 = \frac{\nu_m^3}{24}\frac{d^3 g}{d\nu^3} + \frac{\nu_m^5}{384}\frac{d^5 g}{d\nu^5} + \cdots.$$

Будем считать, что истинный второй момент линии поглощения равен $0{,}3 \cdot 10^6$ *гц*^{2}, а время поперечной релаксации $T_2^* = 2 \cdot 10^{-3}$ *сек*. Тогда для расчета можно использовать данные, представленные в таблице 1.

Таблица 1

Поправка (%)	Амплитуда модуляции ν_m (*гц*)		
	1 гармоника	2 гармоника	3 гармоника
3,5	205	250	290
20	490	600	693
40	693	850	980

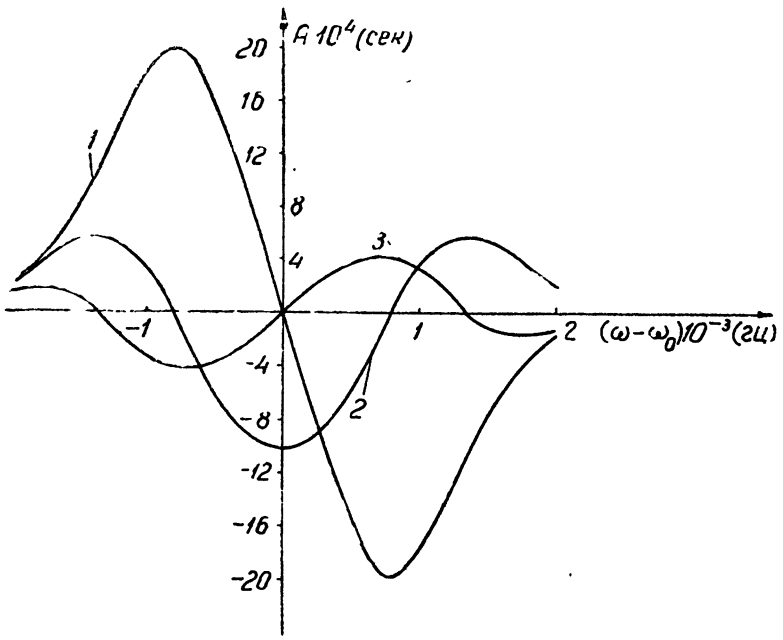


Рис. 1. Зависимость интенсивности первых трех гармоник сигнала поглощения от амплитуды частотной модуляции для гауссовой формы линии. Поправка ко второму моменту 40%.

Результаты расчета представлены на рис. 1 и 2. Если линия поглощения имеет гауссову форму:

$$g(\nu) = 2T_2^* e^{-T_2^{*2}(\nu'-\nu_0)^2/\pi}, \qquad (4)$$

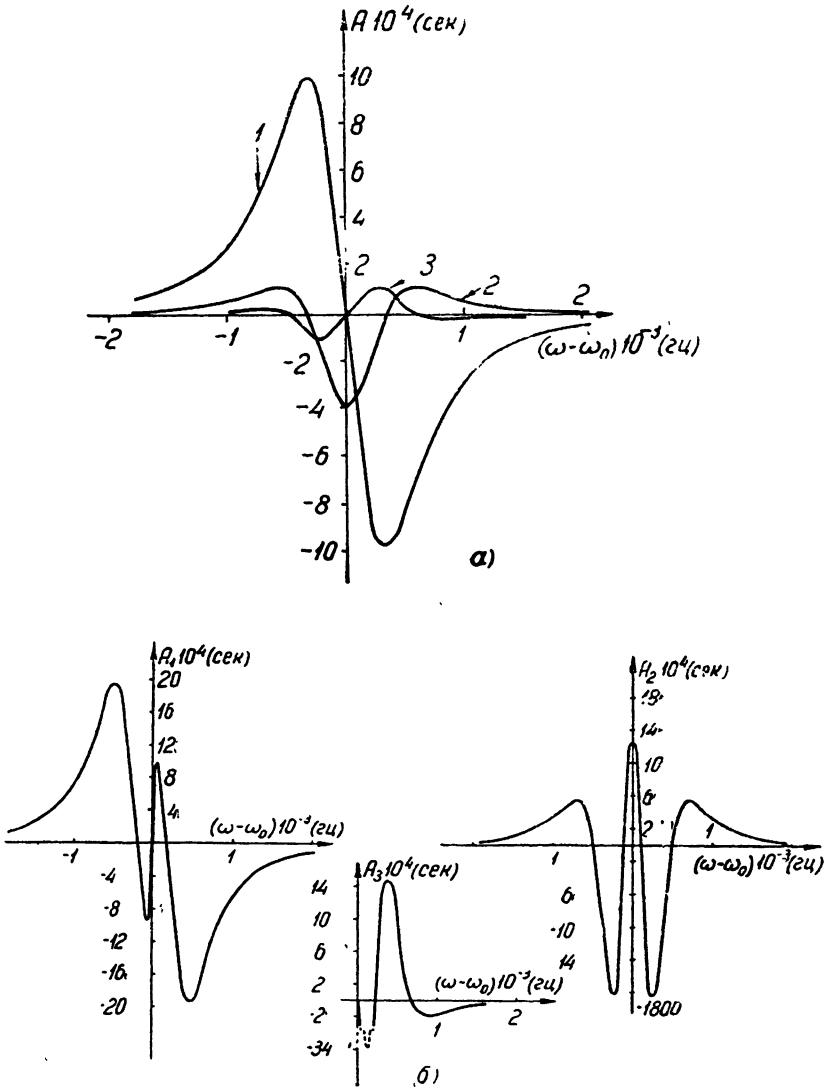


Рис. 2. Зависимость интенсивности различных гармоник сигнала поглощения от амплитуды частотной модуляции для лоренцевой формы линии:
а) поправка ко второму моменту (взят второй момент для гауссовой кривой с теми же параметрами) 3,5 %; б) поправка 20 %.

вторые члены разложения вблизи нуля сравнимы с первыми; поскольку члены в разложениях (3) знакопеременны, это замедляет возрастание кривых при увеличении ν_m. Интенсивности второй и третьей гармоник растут, хотя и не так сильно, как это происходит в первом приближении, причем их возрастание с увеличением амплитуды модуляции гораздо значительнее, чем рост интенсивности первой гармоники. Первая гармоника при поправке в 40% увеличивается менее,

чем в три раза, вторая гармоника—примерно в 4,7 раза при 20% поправке и в 7 раз при 40% поправке по сравнению с 3,5% поправкой; третья гармоника растет еще сильнее, увеличиваясь в 7 раз при 20% поправке и в 13 раз при 40% поправке. Поэтому при больших амплитудах модуляции представляет интерес запись высших производных сигнала.

Для лоренцевой формы линии, когда

$$g(\nu) = \frac{2T_2^*}{1 + T_2^{*2}(\nu' - \nu_0)^2}, \qquad (5)$$

влияние последующих членов в разложениях (3) сказывается сильнее, чем для гауссовой формы. Этим объясняется быстрое изменение интенсивностей кривых около нуля (рис. 2). При больших поправках

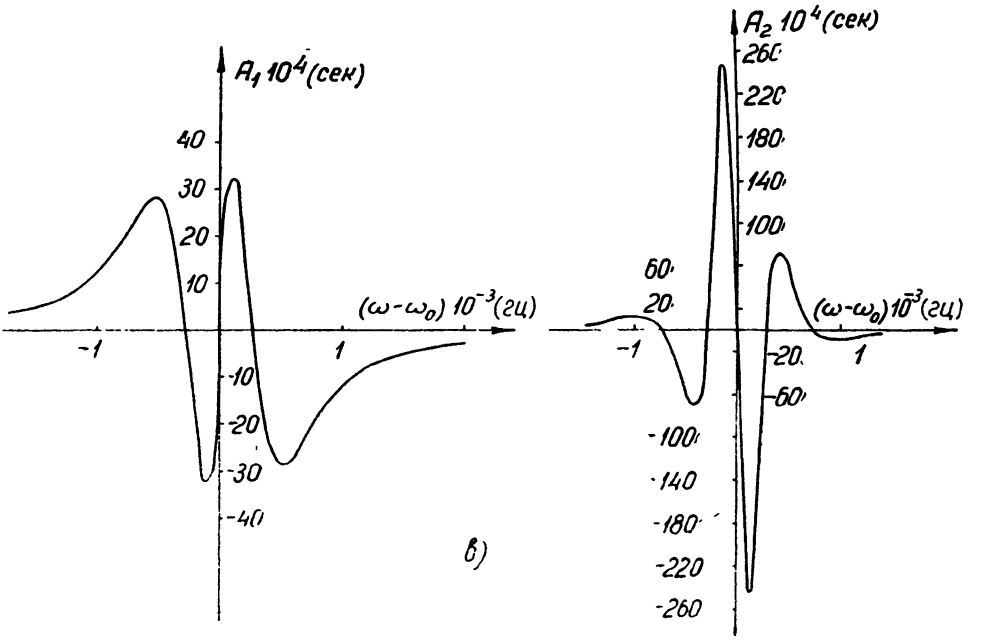


Рис. 2. Зависимость интенсивности различных гармоник сигнала поглощения от амплитуды частотной модуляции для лоренцевой формы линии:
в) поправка 40% (приведены первая и третья гармоники).

начинают расти центральные пики, „хвосты" же спадают медленнее, чем в случае формы Гаусса. Получается характерное „удвоение" линии, которое и обусловливает форму, наблюдаемую на практике. Отметим, что точность вычисления амплитуд гармоник при 20% поправке ко второму моменту—порядка 1%; погрешность достигает 13% лишь при 40% поправке.

В связи с этим интересно отметить, что в p—$C_6H_4Cl_2$ при образовании β-модификации из α-модификации при +47,8°С мы наблюдали постепенный переход от лоренцевой формы линии к форме, промежуточной между лоренцевой и гауссовой.

Как видно из рис. 2, интенсивность третьей производной* растет довольно сильно по мере увеличения глубины модуляции. Это может быть использовано для повышения отношения сигнал/шум.

* Следует заметить, что при большой амплитуде модуляции существенен вклад высших производных в наблюдаемую на практике форму линии.

Схема блока третьей производной в спектрометре представлена на рис. 3. В остальном спектрометр не отличался от описанного ранее [6, 7]. В качестве генератора-детектора использовался регенератор. Избирательный усилитель выделял 3-ю гармонику сигнала. Частота модуляции была выбрана равной 90 *гц*. Утроитель частоты, состоящий из ограничителя и избирательного усилителя, давал опорное напряжение для фазового детектора.

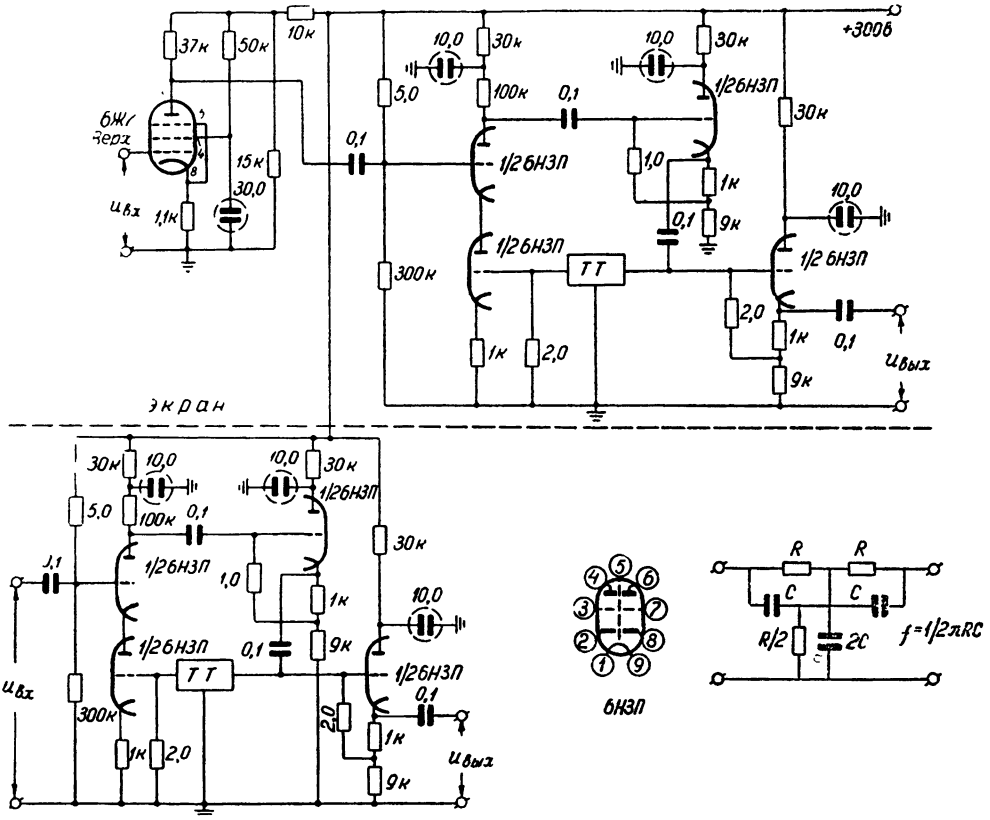


Рис. 3. Схема блока третьей производной.

На рис. 4 представлены записи линии поглощения, полученные при выделении 2-ой и 3-ей гармоник сигнала, в p—$C_6H_4Cl_2$ при 30% поправке ко второму моменту*. Из рисунка видно, что выделение 3-ей гармоники позволило получить лучшее отношение сигнал/шум. Следует отметить, что при глубине модуляции, значительно большей ширины линии, может происходить уменьшение интенсивности сигналов и их сильное искажение. Это явление наблюдалось экспериментально.

Спектрометр, позволяющий записывать 1-ю, 2-ю и 3-ю производные линии поглощения (что существенно для определения характера формы линии), был использован при попытке отыскать новый резонанс в $C_{10}Cl_8$ (октахлорнафталин, $\nu_{ср}$=38,721 *мгц* при 90°К).

В дальнейшем мы предполагаем производить одновременную запись первых трех производных сигнала на трех самописцах, что позволит быстро устанавливать характер изменения формы линии ядерного квадрупольного резонанса при плавном подходе к точкам структурных переходов в кристаллах.

* Ранее в литературе записей 3-ей производной не приводилось.

При записи сигналов ядерного квадрупольного резонанса Cl^{35} в дихлорацетамиде, когда при комнатной температуре наблюдалось две линии поглощения на частотах $\nu_1 = 35{,}744$ *мгц* и $\nu_2 = 35{,}234$ *мгц*, оптимальные условия записи соответствовали амплитудам частотной модуляции, представленным в таблице 1 для 40% поправки. В этом случае удавалось получить наилучшее отношение сигнал/шум. При наблюдении сигналов в том же соединении при 90°К (частоты поглощения 37,694 *мгц* и 37,155 *мгц*) наилучшие результаты имели место при меньших амплитудах (20% поправка).

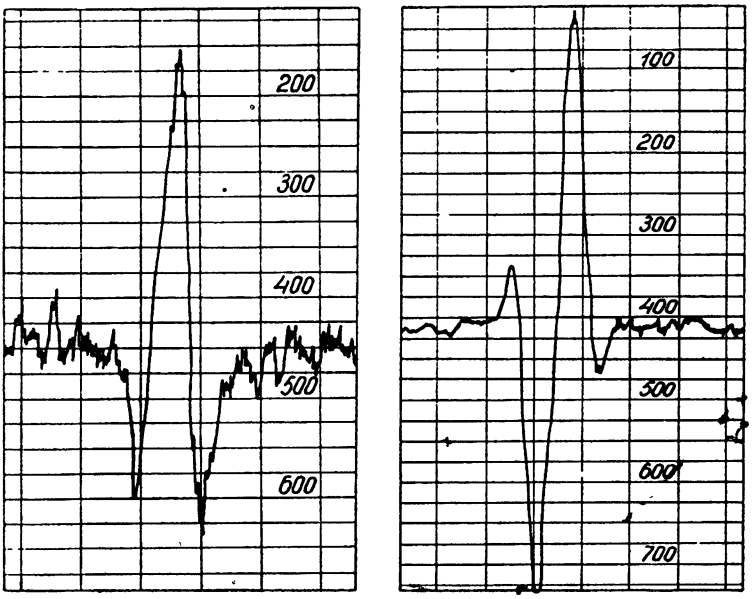


Рис. 4. Записи второй и третьей гармоник при поправке 30% в парадихлорбензоле (на регенераторе).

Таким образом, для получения оптимального отношения сигнал/шум в каждом случае следует экспериментально выбирать глубину модуляции.

2. ВЛИЯНИЕ ПОСТОЯННОЙ ВРЕМЕНИ ФАЗОВОГО ДЕТЕКТОРА НА СМЕЩЕНИЕ ЦЕНТРА ЛИНИИ

Обычно на выходе фазового детектора в спектрометре включаются интегрирующие *RC*-цепи. При записи сигналов ядерного квадрупольного резонанса на самописце требуется выбор определенной скорости прохождения по спектру при заданной постоянной времени фазового детектора. Если эта скорость слишком велика, изменение напряжения на выходе схемы не будет успевать за изменением входного сигнала. Однако выбор больших постоянных времени позволяет увеличить отношение сигнал/шум за счет уменьшения полосы приемного устройства. Поэтому необходимо выбирать оптимальное соотношение между величиной постоянной времени фазового детектора и скоростью прохождения по спектру.

Учтем искажения, определяемые постоянной времени фазового детектора, в случае, когда выделяется вторая гармоника сигнала (аналогичные результаты получаются и для других гармоник). Реакция интегрирующей *RC*-цепи на единичный скачок напряжения имеет вид:

$$h(t) = 1 - e^{-t/\tau}, \qquad (6)$$

где τ—постоянная времени фазового детектора. Реакцию этой цепи на сигнал ядерного квадрупольного резонанса определим по формуле Дюамеля:

$$U_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \int_0^t g''(x)\, e^{x/\tau}\, dx, \tag{7}$$

откуда

$$U_{\text{вых}}(t) = g''(t) - \tau\, dU_{\text{вых}}(t)/dt. \tag{8}$$

Выражение для экспериментального второго момента линии, учитывающее смещение центра, можно записать в виде:

$$S_2 = \frac{1}{6} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^4\, U_{\text{вых}}(t)\, dt}{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2\, U_{\text{вых}}(t)\, dt}, \tag{9}$$

где t_0—смещение центра линии.

Используя формулы (8), (9) и условие $g''(t) = g''(-t)$, а также принимая во внимание, что $U_{\text{вых}}$ стремится к нулю при $t \to \pm\infty$ быстрее, чем $1/t^4$, получим:

$$S_2 = S_2^0 + (t_0 - \tau)^2 + \tau^2 \tag{10}$$

или, переходя к единицам частоты,

$$S_2 = S_2^0 + v^2 (t_0 - \tau)^2 + v^2 \tau^2, \tag{11}$$

где S_2^0 — истинный второй момент линии.

При наблюдении самой линии поглощения, описываемой функцией Гаусса, напряжение на входе фазового детектора будет равно

$$U_{\text{вх}}(t) = U_0 \exp\left[-\left(\frac{t - t_0}{\Delta t} \right)^2 \right], \tag{12}$$

где U_0—пиковое напряжение на входе, t_0—время прохождения через U_0, Δt—время, необходимое для прохождения полуширины линии. Тогда напряжение на выходе фазового детектора

$$U_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left[-\frac{\Delta t}{\tau}\left(\frac{t - t_0}{\Delta t}\right) \right] U_0 \int_0^t \exp\left[\frac{\Delta t}{\tau}\left(\frac{x - t_0}{\Delta t}\right) - \left(\frac{x - t_0}{\Delta t}\right)^2 \right] dx. \tag{13}$$

Производя замену переменных

$$\frac{x - t_0}{\Delta t} = t',$$

получим:

$$U_{\text{вых}}(b) = a e^{-ab} U_0 \int_{-\infty}^{b} e^{at' - t'^2}\, dt', \tag{14}$$

где

$$a = \frac{\Delta t}{\tau}, \quad b = \frac{t - t_0}{\Delta t}.$$

Если сделать еще одну замену $t' - a/2 = y$, то выражение (14) можно переписать в виде:

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_0} = ae^{-ab + a^2/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\Phi(\infty) + \Phi(b - a/2)\right],$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}\,dy$—интеграл вероятности.

На рис. 5. представлены результаты численного расчета положения центра линии гауссовой формы от постоянной времени фазового детектора. Легко заметить, что для малых скоростей прохождения центр линии сдвинут приблизительно на величину τ. На рис. 6 представлены результаты аналогичного расчета для 1-ой производной, а на рис. 7—для 2-ой производной линии поглощения. Смещение центра во всех случаях получается одно и то же, но асимметрия сказывается поразному.

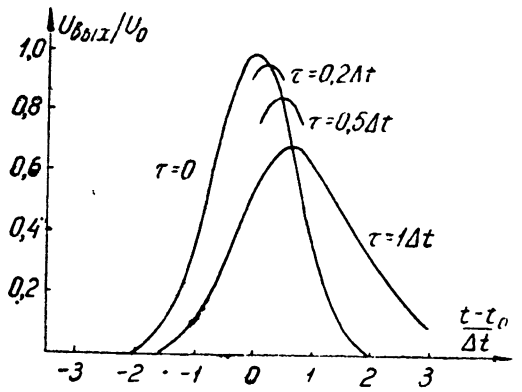


Рис. 5. Зависимость положения центра линии гауссовой формы от постоянной времени фазового детектора.

Таким образом, для пренебрежения искажениями, связанными с τ, необходимо, чтобы время прохождения линии было в 30÷40 раз больше постоянной времени фазового детектора.

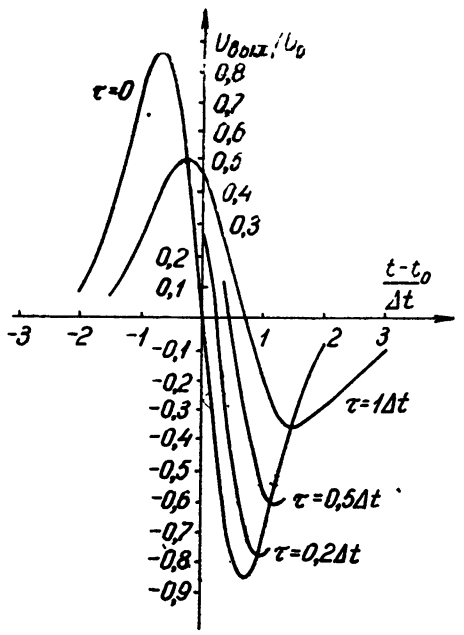


Рис. 6.

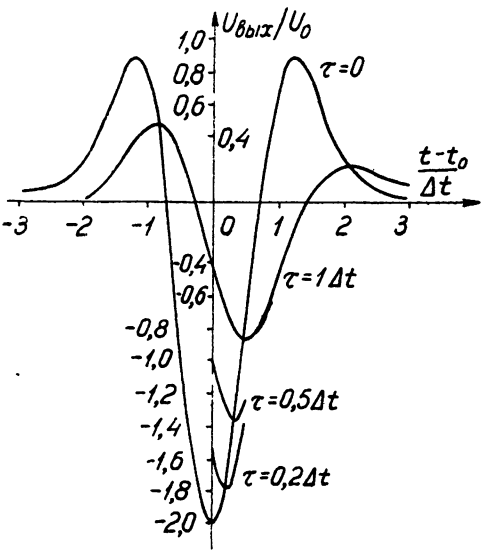


Рис. 7.

Рис. 6. Влияние постоянной времени фазового детектора на первую производную сигнала поглощения.

Рис. 7. Влияние постоянной времени фазового детектора на форму второй производной сигнала поглощения.

Проделанные расчеты были использованы для внесения поправок в экспериментально наблюдаемые формы линий при записи 1-ой, 2-ой и 3-ей производных линии поглощения.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. R. Andrew, Phys. Rev., **91**, 425 (1953).
2. В. С. Гречишкин, Вестник ЛГУ, **10**, 14 (1959).
3. В. С. Гречишкин, Диссертация, ЛГУ, 1959.
4. В. С. Гречишкин, Ф. И. Скрипов, Сб. Парамагнитный резонанс, изд. Казанского ун-та, 1960, стр. 160.
5. М. Стренберг, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1956, стр. 103.
6. В. С. Гречишкин, ПТЭ, **2**, 31 (1959).
7. T. Wang, Phys. Rev., **99**, 566 (1955).

Пермский государственный университет

Поступила в редакцию
22 мая 1961 г.

LINE FORM DISTORTIONS OF THE NUCLEAR QUADRIPOLE RESONANCE CAUSED BY APPARATUS FACTORS

V. S. Gretchiskin, I. A. Kyuntsel

The numerical calculations of the intensity and form of the absorption line have been carried out for the Gauss and Lorentz'es functions. It was shown, that at the frequency modulation with a deviation compared with a half-width of line it is essential to record the third derivative of signal. The records are made of different derivatives of the absorption line. It was shown, that the time constant of the phase detector has influence on the line zentrum location at the records of different derivatives.

Примечание при корректуре. Если записывается вторая или третья производная от формы линии, то вопрос об ее искажении может быть решен путем интегрирования с помощью интегрирующих усилителей. Удовлетворительные результаты были получены при работе со второй производной, когда после интегрирующего усилителя записывалась первая производная линии поглощения.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

РЕАКЦИЯ ПРИЕМНОГО КОНТУРА В ОПЫТАХ ПО СВОБОДНОЙ ЯДЕРНОЙ ИНДУКЦИИ В СЛАБЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Ф. И. Скрипов, *Э. Л. Альтман*

Исследовано влияние реакции приемного контура на огибающую и на частоту сигнала свободной ядерной индукции в слабом магнитном поле. Для случая одинаковых продольного (T_1) и поперечного (T_2) времен релаксации получены точные аналитические выражения, а общий случай исследован численными методами с использованием электронной счетной машины. Оказалось, что аналитические выражения приближенно применимы и при $T_1 \neq T_2$. Рассмотрен также вопрос о реакции приемного контура при наличии мультиплетной структуры ядерно-резонансного сигнала.

ВВЕДЕНИЕ

В 1953 г. Паккард и Вариан [1] предложили новый метод наблюдения сигналов свободной ядерной индукции в слабых магнитных полях, характерной особенностью которого является предварительная поляризация ядер в образце вспомогательным сильным полем H^*, ориентированным перпендикулярно слабому полю H_0. Свободная прецессия вектора ядерного намагничения M вокруг направления H_0 возникает в результате достаточно быстрого (неадиабатического в смысле Эренфеста) выключения поля H^* и наводит сигнал соответствующей частоты в приемной катушке. Метод [1] широко используется для геомагнитных измерений; кроме того, с его помощью успешно решаются некоторые задачи радиоспектроскопии высокой разрешающей силы. Поэтому разработка различных вопросов теории указанного метода представляет определенный интерес. Одним из таких вопросов является учет реакции приемного контура*, т. е. обратного воздействия электромагнитных колебаний, наведенных в приемной катушке, на прецессию вектора ядерного намагничения. Реакция приемного контура увеличивает затухание прецессии и в определенных условиях может несколько повлиять на ее частоту. В большинстве случаев эти эффекты выражены очень слабо; однако при постановке особо точных магнитных измерений методом свободной ядерной индукции их все же следует учитывать, чтобы избежать возможных погрешностей (см., например, [2]).

На явление реакции приемного контура впервые указал Сурьян [3]. Бломберген и Паунд [4] опубликовали общую теорию радиационного затухания в опытах по магнитному резонансу, а также кратко обсудили характер этого явления в важнейших частных случаях (свободная индукция, спиновое эхо, стационарные методы наблюдения и т. д)**.

---

* Это явление можно рассматривать как передачу энергии прецессирующих ядер приемному контуру, в связи с чем нередко используется термин «радиационное затухание». Однако его применение в данном случае вряд ли можно считать вполне удачным. Частота прецессии очень низка, и взаимодействие вектора M с контуром на сосредоточенных постоянных можно называть «радиацией» лишь условно.

** Как было указано рядом авторов, статья [4] содержит принципиальную ошибку. Однако эта ошибка касается лишь влияния реакции приемного контура в стационарных методах наблюдения, тогда как нас будет интересовать только случай свободной ядерной индукции.

В вводной части статьи [4] рассмотрен предельный случай бесконечно больших времен релаксации T_1 и T_2, в котором единственной причиной затухания прецессии вектора ядерного намагничения $\boldsymbol{M}$ является отдача энергии приемному контуру. Величина намагничения остается при этом неизменной, а угол θ между $\boldsymbol{M}$ и направлением внешнего магнитного поля постепенно уменьшается. Этот процесс описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\sin\theta}{\tau_R}, \tag{1}$$

где τ_R — постоянная времени, характеризующая скорость радиационного затухания.

Согласно [4],

$$\tau_R = (2\pi\eta M Q\gamma)^{-1}, \tag{2}$$

где η — фактор заполнения, Q — добротность приемного контура, γ — гиромагнитное отношение. Решение уравнения (1) может быть записано следующим образом:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_R}\right), \tag{3}$$

где t_0 — момент времени, соответствующий $\theta = \pi/2$.

Если обозначить поперечную компоненту вектора ядерного намагничения $M\sin\theta$ через A, то из (3) имеем:

$$A = M\operatorname{sech}\frac{t-t_0}{\tau_R}. \tag{4}$$

Таким образом, затухание сигнала свободной ядерной индукции не имеет экспоненциального характера, а описывается более сложной функцией. Исключение составляет лишь случай малых углов θ, когда вместо (1) можно написать:

$$dA/dt = -A/\tau_R,$$

т. е.

$$A = A(0)\,e^{-t/\tau_R}. \tag{5}$$

Отметим, что приведенные выше формулы пригодны для описания реакции приемного контура и в случае конечных времен релаксации, если выполнено неравенство $T_1, T_2 \gg \tau_R$.

Общая теория явлений радиационного затухания строится в [4] на основе анализа дифференциальных уравнений, которые описывают процессы в связанной системе, состоящей из образца с прецессирующим намагничением и колебательных контуров (в общем случае двух контуров). Токи в контурах подчиняются обычным уравнениям (с добавлением членов, описывающих наводимую образцом ЭДС), а движение вектора $\boldsymbol{M}$ — уравнениям Блоха. При этом поперечные компоненты действующего на $\boldsymbol{M}$ магнитного поля зависят от токов в контурах, т. е., в конечном счете, также и от движения вектора $\boldsymbol{M}$; в результате уравнения получаются нелинейными и их общее решение найти не удается*. Авторы ограничиваются кратким анализом частного слу-

* Отметим, что уже в рассмотренном выше простейшем случае реакция контура описывалась нелинейным уравнением (1). Однако (1), в отличие от уравнений общего вида, решается легко.

чая малых θ, когда M_z можно считать постоянным и уравнения становятся линейными.

Из числа более поздних работ, касающихся явления реакции приемного контура [5–12], мы остановимся лишь на тех, которые имеют непосредственное отношение к методу свободной ядерной индукции. Владимирский [7] рассмотрел явление радиационной неустойчивости вектора ядерного намагничения, направленного антипараллельно внешнему полю и взаимодействующего с колебательным контуром достаточно высокой добротности. Самовозбуждение прецессии вектора $\boldsymbol{M}$ имеет место в тех случаях, когда $\tau_R \ll T_2$. Блум [8] провел расчеты реакции контура для частного случая $T_1 = \infty$ (T_2 конечно); полученное в [8] выражение для зависимости A от времени может быть записано в следующем виде:

$$A(t) = M(0) \sin\theta(0) \operatorname{ch} \frac{t_m}{\tau} \operatorname{sech} \frac{t - t_m}{\tau}, \tag{6}$$

где

$$t_m = \frac{\tau}{2} \ln \frac{1 - \tau/T_2 - (\tau/\tau_\infty)\cos\theta(0)}{1 + \tau/T_2 + (\tau/\tau_\infty)\cos\theta(0)} \tag{7}$$

и

$$\tau = \frac{\tau_\infty}{\sqrt{(\tau_\infty/T_2)^2 + 2(\tau_\infty/T_2)\cos\theta(0) + 1}}. \tag{8}$$

В этих выражениях $M(0)$ и $\theta(0)$ относятся к моменту времени $t = 0$; τ_∞ вычисляется по формуле (2) с заменой M на $M(0)$. При $T_2 = \infty$ получается решение (4), причем t_m в этом случае совпадает с t_0 в формулах (3) и (4).

Экспериментальное наблюдение эффектов радиационного затухания в сильном магнитном поле высокой однородности было осуществлено в [9]. Измеренное на опыте значение τ_R равно 0,36 *сек*. Огибающая сигнала при различных $\theta(0)$ находится в удовлетворительном согласии с теорией Блума; требовать точного согласия нельзя, поскольку теория построена для случая $T_1 = \infty$.

Из приведенного выше обзора, в частности, следует, что наиболее важный для метода свободной ядерной индукции в слабых полях частный случай $T_1 \simeq T_2$ остается до сих пор не рассмотренным. Кроме того, отсутствуют оценки влияния реакции контура на частоту прецессии, хотя указания на возможность такого влияния в литературе имеются [2].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

При постановке задачи мы в основных чертах будем следовать статье Бломбергена и Паунда [4], но примем, что образец взаимодействует лишь с одним колебательным контуром, причем постоянная времени последнего $T_k \ll T_1$, T_2, τ_∞. В этом случае ток в контуре описывается соотношениями, справедливыми для установившегося процесса*.

Пусть поле $\boldsymbol{H}_0$ и ось приемной катушки направлены соответственно вдоль осей $0z$ и $0x$ прямоугольной системы координат. Тогда

* В типичных случаях $T_2/T_k \simeq$ 200 и более, так что сделанное выше предположение выполняется весьма точно (конечно, за исключением короткого промежутка времени непосредственно после выключения H^*, когда колебания в контуре возрастают от нуля до установившегося значения).

$$M_x = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)];$$
$$M_y = -A(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)], \tag{9}$$

где $\omega_0 = \gamma H_0$ — резонансная частота, а $\varphi(t)$ описывает возможный уход фазы прецессии в результате реакции приемного контура. Выбранные знаки соответствуют частному случаю $\gamma > 0$.

Магнитное поле, создаваемое индуцированным в контуре током,

$$H'_x = 2\frac{B}{\gamma}A(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t) - \delta], \tag{10}$$

где

$$B = \frac{2\pi\eta\gamma Q}{\sqrt{1 + Q^2(\omega_0/\omega_k - \omega_k/\omega_0)^2}}\left(\frac{\omega_0}{\omega_k}\right) \simeq 2\pi\eta\gamma Q, \tag{11}$$

$$\delta = \operatorname{arc\,tg}\left[Q\left(\frac{\omega_0}{\omega_k} - \frac{\omega_k}{\omega_0}\right)\right] \simeq 2Q\frac{\omega_0 - \omega_k}{\omega_k} \tag{12}$$

и ω_k обозначает резонансную частоту приемного контура. Приближенные выражения справедливы при небольших расстройках $\omega_0 - \omega_k$. Строго говоря, в (11) и (12) вместо ω_0 следовало бы писать $\omega_0 + d\varphi/dt$; однако приведенные ниже оценки показывают, что $\frac{d\varphi}{dt}$ всегда несравненно меньше ширины полосы приемного контура, так что влиянием этой величины на B и δ вполне можно пренебречь.

Переходя от линейно поляризованного поля (10) к вращающемуся, имеем

$$H_x = \frac{B}{\gamma}A\sin(\omega_0 t + \varphi - \delta);$$
$$H_y = \frac{B}{\gamma}A\cos(\omega_0 t + \varphi - \delta). \tag{13}$$

Подстановка (9) и (13) в уравнения Блоха после ряда преобразований приводит к следующим уравнениям для медленно меняющихся величин:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{T_2} + B\cos\delta\, AM_z = 0; \tag{14}$$

$$\frac{dM_z}{dt} + \frac{M_z}{T_1} - B\cos\delta\, A^2 = \frac{M_0}{T_1}; \tag{15}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} - B\sin\delta\, M_z = 0. \tag{16}$$

В большинстве случаев в этих выражениях можно положить $\cos\delta \simeq 1$ и $\sin\delta \simeq \delta$. В дальнейшем мы будем пренебрегать членом M_0/T_1 в (15), поскольку M_0 определяется слабым полем H_0 и имеет величину, на $2 \div 3$ порядка меньшую, чем $M(0)$.

2. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $T_1 = T_2$

Уравнения (14) и (15) не содержат переменной φ и могут рассматриваться отдельно. В частном случае $T_1 = T_2 = T$ эта система допускает решение в аналитическом виде, которое легче всего получить, перейдя к переменным M и θ. Уравнение для M при этом оказывается линейным и сразу же интегрируется, после чего в уравнении для θ разделяются переменные. Наконец, возвращаясь к величинам A и M_z, можно использовать выражение для второй из них в (16). Не оста-

навливаясь на промежуточных выкладках, мы сразу приведем окончательные результаты*:

$$A = M(0)\, e^{-\frac{t}{T}} \frac{2\varkappa e^{-\xi}}{1+\varkappa^2 e^{-2\xi}}; \tag{17}$$

$$M_z = M(0)\, e^{-\frac{t}{T}} \frac{1-\varkappa^2 e^{-2\xi}}{1+\varkappa^2 e^{-2\xi}}; \tag{18}$$

$$\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\delta} = \xi + \ln\frac{1+\varkappa^2 e^{-2\xi}}{1+\varkappa^2}. \tag{19}$$

Здесь

$$\xi = \frac{T}{\tau_\infty}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right];$$

$$\varkappa = \operatorname{tg}\frac{\theta(0)}{2} = \sqrt{1+\frac{M_z^2(0)}{A^2(0)}} - \frac{M_z(0)}{A(0)}, \tag{20}$$

$\tau_\infty = [M(0)\, B\cos\delta]^{-1}$ имеет тот же смысл, что и в равенствах (7) и (8). Если в начальный момент времени вектор ядерного намагничения перпендикулярен к $\boldsymbol{H}_0$, параметр $\varkappa$ обращается в единицу. При $\delta = 0$ и $T \to \infty$ τ_∞ совпадает с τ_R и (17) переходит в решение (4).

Величина T/τ_∞ является основной характеристикой, определяющей влияние реакции приемного контура на движение вектора $\boldsymbol{M}$. В обычных условиях опыта ηQH* не превышает $2\cdot 10^4$ *гс*, что для обескислороженного бензола ($T = 16$ *сек*) дает

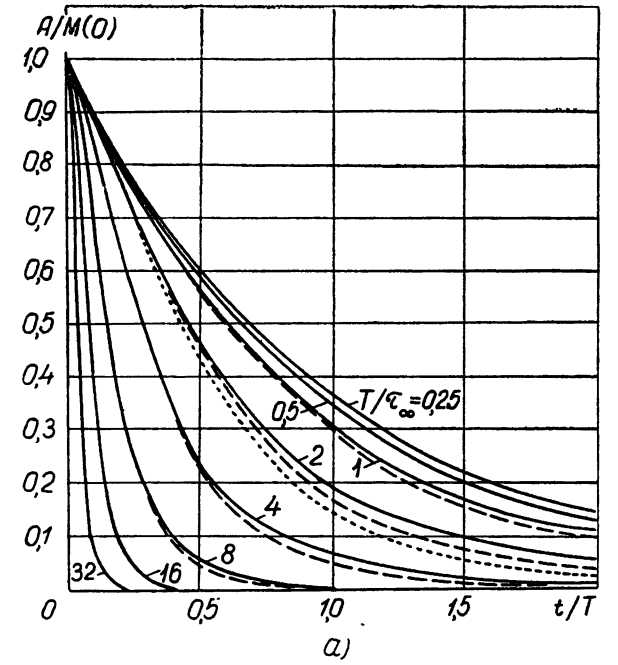
$$T/\tau_\infty \leqslant 10P.$$

Здесь P — безразмерный коэффициент, равный отношению фактической амплитуды сигнала свободной ядерной индукции к ее расчетному значению (в оптимальных случаях он приближается к единице, хотя нередко имеет и значительно меньшую величину). Если же используется регенерированный контур с добротностью порядка нескольких сотен, возможны и значительно большие значения T/τ_∞. Поэтому численные расчеты $A(t)$ и $M_z(t)$ были выполнены для восьми значений T/τ_∞, образующих геометрическую прогрессию 0,25; 0,5;...; 32 (сплошные линии на рис. 1а и 1б). При расчетах для определенности предполагалось, что $\theta(0) = \pi/2$.

Рис. 1а дает представление о быстроте затухания сигнала ядерной индукции при различных реакциях приемного контура; верхняя кривая практически не отличается от простой экспоненты $e^{-t/T}$. Интересно отметить, что при малых значениях T/τ_∞ реакция контура влияет на огибающую сигнала значительно меньше, чем это можно было бы ожидать на основании простого соотношения

$$\frac{1}{T_{2\,\text{эфф}}} \simeq \frac{1}{T} + \frac{1}{\tau_\infty}. \tag{21}$$

* Поправки к частоте удобно считать непосредственно по (16) с подстановкой M_z из (18). Однако $\frac{d\varphi}{dt}$ оказывается переменной величиной, а для вычисления средней поправки необходимо иметь выражение для φ.



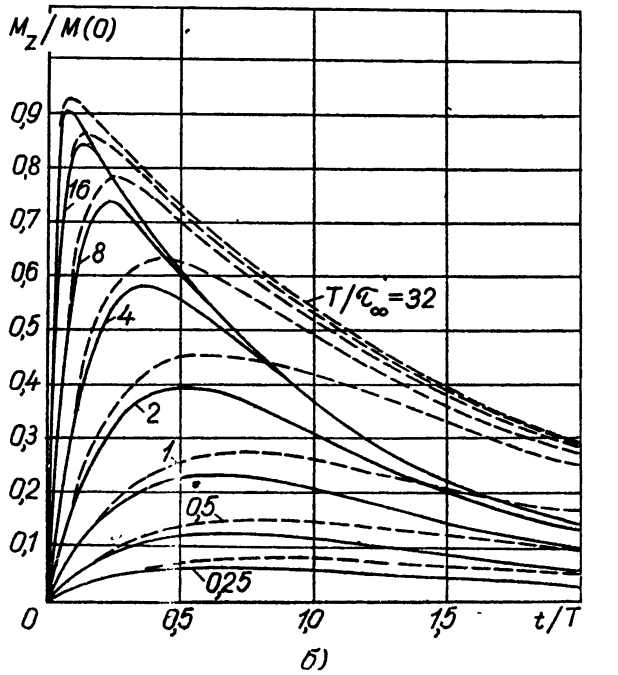


Рис. 1. Зависимость A и M_z от времени при различных реакциях приемного контура. Сплошные линии относятся к случаю $T_1 = T_2 \equiv T$, а штриховые — к случаю $0{,}6\,T_1 = T_2 \equiv T$. На рис. 1а для $\frac{T}{\tau_\infty} = 2$ нанесена также кривая для $T_2 = T$, $T_1 = \infty$, построенная по формулам [8].

Действительно, разложение (17) при $T/\tau_\infty \ll 1$ и $t/T < 0{,}5$* приводит не к (21), а к следующей формуле:

$$\frac{1}{T_{2\,эфф}} \simeq \frac{1}{T} + \frac{1-\varkappa^2}{1+\varkappa^2}\frac{1}{\tau_\infty}, \qquad (22)$$

которая переходит в (21) только при $\varkappa^2 \ll 1$, т. е. при малых $\theta(0)$. В случае же $\theta(0) = \pi/2$ $\varkappa^2 = 1$ и влияние на огибающую сигнала имеет место лишь в следующем приближении. Причину указанного явления понять нетрудно: слабая реакция контура лишь немного изменяет угол θ, что при $\theta \simeq \pi/2$ почти не влияет на $\sin\theta$, а значит, и на A.

В соответствии с (19) отличные от нуля значения $\varphi(t)$ (и, следовательно, поправки к частоте прецессии) имеют место лишь при $\delta \neq 0$, т. е. при наличии расстройки приемного контура. Численные расчеты производились для частного случая $\operatorname{tg}\delta = 1$, соответствующего такой расстройке, при которой амплитуда сигнала уменьшается до 0,707 от максимальной величины (рис. 2). При оценке результатов, полученных для больших реакций контура, следует иметь в виду, что фактическая длительность наблюдаемого сигнала много меньше $2T$ (рис. 1а).

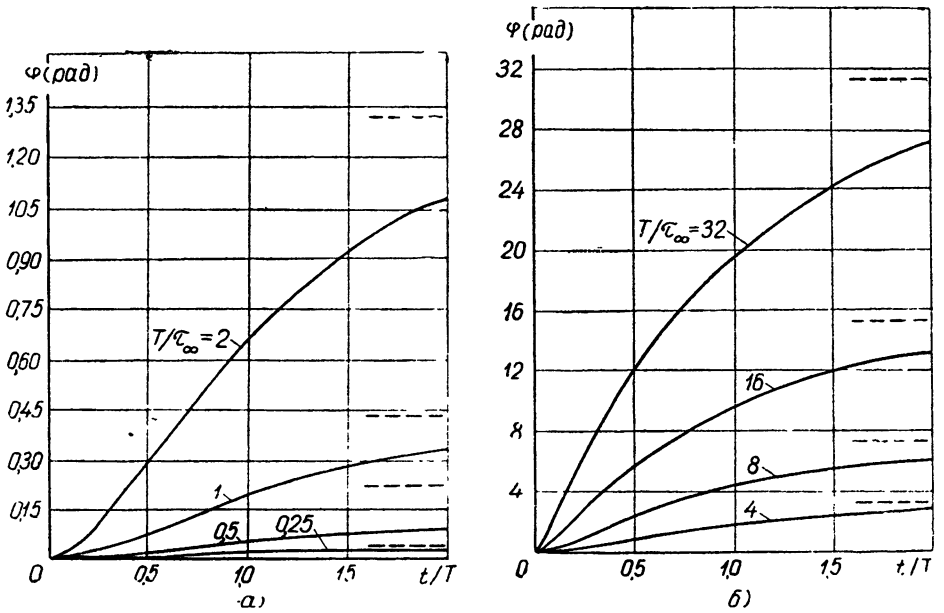


Рис. 2. Уход фазы φ ядерной прецессии в результате влияния реакции приемного контура (при различных T/τ_∞). Графики относятся к частному случаю $\operatorname{tg}\delta = 1$. Штриховыми линиями показаны асимптоты соответствующих кривых.

Рассмотрим один конкретный пример. Пусть $\omega_0/2\pi = 2\cdot 10^3$ *гц*, $T = 3$ *сек*, $\varkappa = 1$ и $\operatorname{tg}\delta = 1/4$ (расстройку такого порядка, практически не влияющую на амплитуду сигнала, исключить затруднительно). Будем считать также, что измерение частоты производится за интервал времени от $t = 0$ до $t = T$ с относительной погрешностью, не превышающей $2\cdot 10^{-7}$; при сравнительных измерениях такая точность определения частоты ядерной прецессии уже достигнута в современной лабораторной практике [2,13]. Если принять, что погрешность

* Если взять весь интервал изменения t, функция $A(t)$ существенно отклоняется от экспоненты, что затрудняет сравнение.

за счет реакции контура может иметь такую же величину (при сравнительных измерениях она частично исключается), то необходимо выполнение неравенства $T/\tau_\infty \leqslant 0{,}4$, т. е. $\tau_\infty \geqslant 7{,}5$ *сек*. При $P=1$ и ядерной магнитной восприимчивости $\varkappa=3\cdot10^{-10}$ это означает, что $\eta Q H^* \leqslant 2{,}7\cdot10^3$ *гс*. Рассмотренный пример показывает, что, хотя для измерений высокой точности желательно улучшение отношения сигнала к шуму путем увеличения H^* и Q, в этом вопросе нужно соблюдать осторожность.

3. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ($T_1 \neq T_2$)

Если продольное и поперечное времена релаксации не равны друг другу, задача содержит еще один параметр $K = T_2/T_1$. При $K \neq 1$ система (14), (15), по-видимому, не может быть решена аналитически. Поэтому было предпринято численное исследование реакции контура для случая $\theta(0) = \pi/2$ при прежнем наборе значений T/τ_∞ и при $K=0{,}8$ и 0,6. Расчеты производились на электронной счетной машине „Урал“ по методу Рунге-Кутта четвертого порядка. Точность расчетов обеспечивала четыре верных знака после запятой.

Чтобы не загромождать рисунков, здесь мы приводим результаты расчетов лишь для $K = 0{,}6$ (штриховые линии на рис. 1). Нетрудно видеть, что увеличение T_1 при фиксированном T_2 очень слабо влияет на огибающую сигнала $A(t)$. При $T/\tau_\infty = 2$ для сравнения нанесена также кривая для $T_1 = \infty$, вычисленная с помощью соотношений Блума (6)—(8). Даже в этом предельном случае отклонение от кривой для $T_1 = T_2$ невелико. Таким образом, соотношение (17) может приближенно использоваться и при $T_1 \neq T_2$, если под T понимать T_2.

Вычисления $\varphi(t)$ для $T_1 \neq T_2$ не производились; однако (16) связывает φ с M_z, а из рис. 1б видно, что возрастание T_1 в основном привело к соответствующему изменению масштаба кривых по оси абсцисс. Таким образом, соотношения (18) и (19) также могут приближенно использоваться при $T_1 \neq T_2$, если под T понимать T_1. Погрешность любой из трех упомянутых формул является максимальной при средних реакциях контура и не превышает 15÷20 %. Нетрудно видеть, что в данном случае (17) дает несколько завышенные, а (18) и (19) — несколько заниженные значения соответствующих величин.

4. УЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПРИЕМНОМ КОНТУРЕ

Вряд ли можно сомневаться в том, что уточнение рассмотренной выше теории с учетом нестационарных процессов в приемном контуре может дать лишь незначительные и совершенно несущественные для практики изменения зависимостей $A(t)$ и $M_z(t)$. Было бы, однако, интересно выяснить, сохраняется ли в уточненной теории сделанный выше вывод о том, что при точной настройке контура на резонанс поправки к частоте отсутствуют.

Будем считать, что к моменту времени $t = 0$ все нестационарные процессы, связанные с выключением поля H^* и нарастанием сигнала свободной индукции в приемном контуре, затухли. Тогда уточненное решение дифференциального уравнения для тока в контуре с учетом членов порядка dA/dt приведет лишь к появлению в (12) дополнительного фазового сдвига, равного $(1/\gamma H_0 A)dA/dt$, и к несущественному изменению амплитуды. Указанный фазовый сдвиг в соответствии с (16) вызовет некоторую поправку к частоте

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{BM_z}{\omega_0 A}\frac{dA}{dt} = \frac{1}{\omega_0\tau_\infty}\frac{M_z}{M(0)}\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}. \qquad (23)$$

Однако эта поправка практически во всех случаях пренебрежимо мала. Например, при $T_1 = T_2 = \tau_\infty = 3$ *сек*, $\varkappa = 1$ и $\omega_0/2\pi = 2\cdot 10^3$ *гц* она равна $-2\cdot 10^{-6}$ *рад·сек*$^{-1}$, т. е. $\omega_0^{-1}\, d\varphi/dt = -1{,}6\cdot 10^{-10}$.

Для сравнения был исследован несколько иным методом частный случай $\theta(0) \ll 1$, $M_z \simeq M(0) = \text{const}$ (если угол θ мал, второе условие осуществляется или при $T_1 \gg T_2$ или для свободной ядерной индукции в сильном магнитном поле, когда M_z определяется величиной H_0). Как было указано в уже цитированной статье Бломбергена и Паунда [4], в этом случае дифференциальные уравнения задачи становятся линейными, и комплексные собственные частоты $\omega_{1,2}$ системы, состоящей из резонансного контура и прецессирующего намагничения, могут быть определены из соответствующего векового уравнения. Последнее является уравнением третьей степени, но приближенно может быть сведено к квадратному (одновременно теряется корень $\omega_3 \simeq -\omega_0$, не имеющий физического смысла). В процессе расчетов выяснилось, что не нумерованная формула для $\Delta\omega$, приведенная в [4] на стр. 10, содержит две ошибки и в действительности должна быть записана следующим образом:

$$\Delta\omega = -\frac{j}{2}\left(\frac{\omega_0}{2Q}+\frac{1}{T_2}\right) \pm \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega_0}{2Q}+\frac{1}{T_2}\right)^2 + \frac{\omega_0}{2Q}\left(\frac{2}{\tau_R}+\frac{1}{T_2}\right)\right]^{1/2}. \qquad (24)$$

В приближении (24) вещественная поправка к частоте еще отсутствует, в связи с чем было предпринято дальнейшее уточнение решения. При расчетах Q^{-1} рассматривалась как величина первого порядка малости, а $(\omega_0\tau_R)^{-1}$ и $(\omega_0 T_2)^{-1}$ как величины третьего порядка. Разложение в ряд корня ω_1, дающего комплексную частоту прецессии ядерного намагничения, при сохранении членов до шестого порядка включительно, имеет следующий вид:

$$\omega_1 = \omega_0 - j\left(1+\frac{4Q}{\omega_0\tau_R}\right)\left(\frac{2}{\tau_R}+\frac{1}{T_2}\right) - \frac{2}{\omega_0\tau_R}\left(\frac{2}{\tau_R}+\frac{1}{T_2}\right). \qquad (25)$$

Для сравнения с нашими результатами τ_R в (25) следует заменить на $2\tau_R$ (в [4] рассматривается взаимодействие ядерного намагничения с двумя идентичными колебательными контурами, что уменьшает величину τ_R вдвое).

Вещественная поправка к частоте прецессии описывается последним членом (25), который с учетом сделанного выше замечания равен

$$-\frac{1}{\omega_0\tau_R}\left(\frac{1}{T_2}+\frac{1}{\tau_R}\right).$$

Если учесть, что при $\theta \ll 1$ и $M_z \simeq M(0) = \text{const}$ τ_∞ совпадает с τ_R, $M_z/M(0) = 1$ и, как следует из (22),

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = -\left(\frac{1}{T_2}+\frac{1}{\tau_R}\right),$$

то точное согласие этого результата с (23) становится очевидным.

В обсуждаемом случае поправки к частоте прецессии являются наибольшими, поскольку M_z максимально; кроме того, в соответствии с (22) при $\theta \ll 1$ реакция приемного контура сильнее всего влияет на dA/dt. Однако и в этом случае поправка порядка $2\cdot 10^{-7}$ имеет место лишь при $\tau_R \simeq 0{,}2$ *сек*. Таким образом, основной причиной воз-

можных небольших изменений частоты прецессии остается рассмотренное выше влияние расстройки приемного контура.

5. РЕАКЦИЯ ПРИЕМНОГО КОНТУРА В СЛУЧАЕ МУЛЬТИПЛЕТНОЙ СТРУКТУРЫ ЯДЕРНО-РЕЗОНАНСНОГО СИГНАЛА

Как известно, метод свободной ядерной индукции в магнитном поле земли иногда используется для исследования мультиплетной структуры ядерно-резонансных сигналов (например, обусловленной косвенными спин-спиновыми взаимодействиями ядер в молекуле [13–15]). Сложный характер линии поглощения вызывает модуляцию огибающей сигнала свободной индукции, возникающую в результате биений между отдельными компонентами мультиплета. В таких случаях образец характеризуется несколькими векторами $\boldsymbol{M}_i$, прецессирующими со слегка различными угловыми скоростями, и явление реакции приемного контура усложняется; кроме обратного воздействия каждой компоненты на себя, возникают перекрестные влияния, при которых частота воздействующего сигнала несколько отличается от частоты прецессии.

Представляется желательным выяснить, не вызывают ли упомянутые перекрестные влияния каких-либо явлений, которые искажали бы наблюдаемую огибающую сигнала и вычисленный из нее путем преобразования Фурье мультиплетный спектр. В связи с этим было предпринято теоретическое исследование простейшего частного случая двух компонент одинаковой интенсивности. Будем считать, что ω_k совпадает с центром дублета ω_0 (если не вводить этого условия, выражения несколько усложняются, но их анализ приводит, по существу, к тем же результатам). Тогда величины A и M_z для одной компоненты во все моменты времени остаются равными соответствующим величинам для другой, а фазовые сдвиги φ имеют противоположные знаки. Вместо (9) теперь имеем:

$$\begin{aligned} M_x &= A\cos(\omega_0 t + \Omega t + \varphi) + A\cos(\omega_0 t - \Omega t - \varphi); \\ M_y &= -A\sin(\omega_0 t + \Omega t + \varphi) - A\sin(\omega_0 t - \Omega t - \varphi), \end{aligned} \tag{26}$$

где Ω — половина расстояния между компонентами дублета, выраженная в шкале круговых частот. Очевидное обобщение описанного выше вывода соотношений (14)—(16) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений для A, M_z и φ:

$$dA/dt + A/T_2 + BAM_z\cos\left(2Q\frac{\Omega}{\omega_0}\right) + BAM_z\cos\left[2\left(\Omega t + \varphi - Q\frac{\Omega}{\omega_0}\right)\right] = 0; \tag{27}$$

$$dM_z/dt + M_z/T_1 - BA^2\cos\left(2Q\frac{\Omega}{\omega_0}\right) - BA^2\cos\left[2\left(\Omega t + \varphi - Q\frac{\Omega}{\omega_0}\right)\right] = 0; \tag{28}$$

$$d\varphi/dt - BM_z\sin\left(2Q\frac{\Omega}{\omega_0}\right) - BM_z\sin\left[2\left(\Omega t + \varphi - Q\frac{\Omega}{\omega_0}\right)\right] = 0. \tag{29}$$

При выводе предполагалось, что Ω много меньше ширины полосы пропускания приемного контура, так что для каждой компоненты дублета справедливы приближенные выражения в (11) и (12). Предпоследние члены в (27)—(29) описывают воздействие каждой компоненты на себя, а последние — перекрестные влияния. Нетрудно видеть, что перекрестные влияния существенны лишь при малых Ω, так как в противном случае соответствующие члены быстро осциллируют и их среднее воздействие близко к нулю.

Мы ограничимся здесь лишь анализом уравнения для $d\varphi/dt$ и рассмотрим два численных примера, сильно отличающихся по величине Ω. Предположим сначала, что $\Omega/2\pi = 0{,}5$ *гц*. Тогда вторым членом в (29) можно пренебречь, а третий приближенно равен $-BM_z \sin(2\Omega t)$. Примем для простоты, что $M_z = \text{const}$ (случай $\theta(0) \ll 1$ и больших T_1) и $\tau_\infty = (BM_z)^{-1} = 3$ *сек*. Если Ω определяется по положению первого минимума на кривой биений, то $2\Omega t$ за время измерения изменяется от 0 до π и средняя поправка к круговой частоте

$$\left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \doteq \frac{2}{\pi\tau_\infty} = 0{,}21 \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1}$$

(полученный результат соответствует кажущемуся увеличению расстояния между компонентами дублета с 1,00 *гц* до 1,07 *гц*). Если же на кривой биений удалось зафиксировать последующие минимумы, то определение Ω удобнее производить по расстоянию между ними. При этом $2\Omega t$ меняется за время измерения от π до $(2k+1)\pi$ и поправка к частоте отсутствует (отметим, что при $M_z \neq \text{const}$ этот вывод справедлив лишь в первом приближении).

В качестве второго примера рассмотрим сравнение частот свободной прецессии ядер H^1 и F^{19}, взаимодействующих с одним и тем же колебательным контуром [15]. При наблюдении в земном поле ($\omega_0/2\pi = 2150$ *гц*) частота биений равняется примерно 130 *гц*, так что перекрестными влияниями вполне можно пренебречь. С другой стороны, предпоследний член в (29) в этом случае велик. При $Q = 20$ предположение о том, что Ω много меньше ширины полосы контура, не выполняется, и вместо приближенного выражения $2Q\Omega/\omega_0$ для фазового сдвига в (29) следует взять

$$\operatorname{arc\,tg} Q\left(\frac{\omega_0+\Omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0+\Omega}\right) = 0{,}88 \text{ рад}.$$

Отсюда

$$\left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle = \langle BM_z \rangle \sin 0{,}88 = 0{,}77 \langle BM_z \rangle .$$

Если принять, что $\langle BM_z \rangle = 0{,}12$ *сек*$^{-1}$*, то реакция приемного контура может объяснить различие между данными для сильного и слабого поля, отмеченное в [15]. Это различие в отношениях резонансных частот, равное $1{,}4 \cdot 10^{-5}$, лежит в пределах указанных авторами погрешностей. Однако оно хорошо воспроизводилось в различных сериях измерений и поэтому, возможно, не является случайным.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. E. Packard, R. Varian, Phys. Rev., **93**, 941 (1954).
2. R. L. Driscoll, P. L. Bender, Phys. Rev. Letters, **1**, 413 (1958); IRE Transactions on Instrumentation, **1—7**, 176 (1958).
3. G. Suryan, Current Sci., **18**, 203 (1949).
4. N. Bloembergen, R. V. Pound, Phys. Rev., **95**, 8 (1954).
5. C. R. Bruce, R. E. Norberg, G. E. Pake, Phys. Rev., **104**, 419 (1956).
6. H. Pfeifer, Ann. Phys., **15**, 311 (1955).
7. К. В. Владимирский, ЖЭТФ, **33**, 532 (1957).
8. S. Bloom, J. Appl. Phys., **28**, 800 (1957).
9. A. Szöke, S. Meiboom, Phys. Rev., **113**, 582 (1959).

* Имеется в виду среднее за время наблюдения значение BM_z для той и другой компоненты резонанса в отдельности.

10. H. Benoit, J. Phys. Rad., **21**, 212 (1960).
11. В. М. Файн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 167 (1959).
12. Г. В. Скроцкий, А. А. Кокин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 650 (1960).
13. А. В. Мельников, А. А. Морозов, Ф. И. Скрипов, Доклады на конференции, Казань, 1960, стр. 146.
14. D. F. Elliot, R. T. Schumacher, J. Chem. Phys., **26**, 1350 (1957).
15. А. А. Морозов, А. В. Мельников, Ф. И. Скрипов, Изв. АН СССР, сер. физ., **22**, 1141 (1958).

Научно-исследовательский физический институт
при Ленинградском университете

Поступила в редакцию
28 апреля 1961 г.

RECEIVINC CIRCUIT REACTION IN EXPERIMENTS ON FREE NUCLEAR INDUCTION IN WEAK MAGNETIC FIELDS

F. I. Skripov, *E. L. Al'tman*

The receiving circuit reaction influence on an envelope and on a signal frequency of the free nuclear induction in a weak magnetic field. The exact analytical values have been obtained for the case when the longitudinal (T_1) and transverse (T_2) relaxation time are equal. A general case has been investigated by numerical methods using an electronic computer. It was found that analytical expressions can be approximately fitted when $T_1 \neq T_2$. The problem of a receiving circuit reaction has been considered in the presence of multiple structure of nuclear resonance signal.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

ФОРМИРОВАНИЕ УДАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ДВУМЯ РАЗРЫВАМИ

А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев

Экспериментально исследуется образование разрывов на фронте и спаде электромагнитных волн при распространении их в нелинейной искусственной линии передачи Рассматриваются условия образования и устойчивости разрывов.

Ударным электромагнитным волнам, образующимся при распространении электромагнитных волн в нелинейных средах, волноводах и длинных линиях, посвящены работы [1–3]. В этих работах исследуется процесс образования разрывов, структура фронта стационарных ударных волн, влияние диссипации энергии на форму стационарных волн и некоторые другие вопросы. Все исследования, выполненные для ударных волн, имеющих один разрыв, справедливы в основном и для волн с несколькими разрывами. На возможность существования таких волн и, в частности, ударных волн с разрывами на фронте и спаде волны указывалось в [1,4].

В данной работе рассматриваются особенности образования разрывов на фронте и спаде электромагнитной волны (видеоимпульса) при распространении ее в нелинейной *LC*-линии. Находятся амплитуды установившихся разрывов. Экспериментально ударные волны с разрывами на фронте и спаде наблюдались в искусственной линии передачи с нелинейными элементами в виде индуктивных катушек с ферритовым заполнением. Результаты теории находятся в хорошем качественном соответствии с экспериментом.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ РАЗРЫВОВ НА ФРОНТЕ И СПАДЕ ВОЛНЫ 1. ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ.

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в нелинейной искусственной линии передачи (рис. 1). Предполагая изменение магнитного поля достаточно медленным, индукцию B можно считать функцией

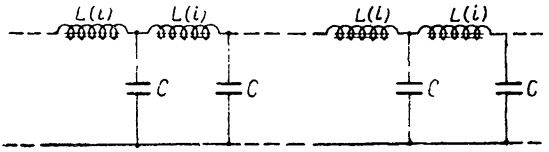


Рис. 1.

магнитного поля H, а искусственную линию рассматривать как линию с распределенными параметрами. При сделанных предположениях напряженность магнитного поля H и напряжение U в линии описываются телеграфными уравнениями:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{4\pi n}{c} C_1 \frac{\partial U}{\partial t};$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{L_1}{4\pi c n} \mu(H) \frac{\partial H}{\partial t}, \qquad (1)$$

где C_1, L_1—погонные емкость и индуктивность линии без феррита, c—скорость света, n—число витков на единицу длины индуктивной катушки, $\mu(H) = dB/dH$—дифференциальная магнитная проницаемость.

Частное решение системы нелинейных уравнений (1) имеет вид простых волн [1,3]:

$$z = \pm \frac{v_0 t}{\sqrt{\mu(H)}} + f(H), \qquad v_0 = \frac{c}{\sqrt{C_1 L_1}}$$

или

$$H = f_1\left(z \mp \frac{v_0 t}{\sqrt{\mu(H)}}\right), \qquad U = \pm \frac{1}{4\pi n} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \int \sqrt{\mu(H)}\, dH. \qquad (2)$$

Как уже отмечалось в статье [1], решение (2)[1] описывает бегущие электромагнитные волны, каждая точка профиля которых перемещается со скоростью, зависящей от напряженности магнитного поля в этой точке $\left(v = v_0/\sqrt{\mu(H)}\right)$. Если $\mu(H)$ —немонотонная (однозначная или неоднозначная) функция магнитного поля, то скорость распространения различных точек профиля волны зависит от состояния феррита в предыдущие моменты времени. Другими словами, характер деформации профиля электромагнитной волны будет в значительной степени зависеть от выбора начальной рабочей точки на кривой намагничивания (рис. 2)**.

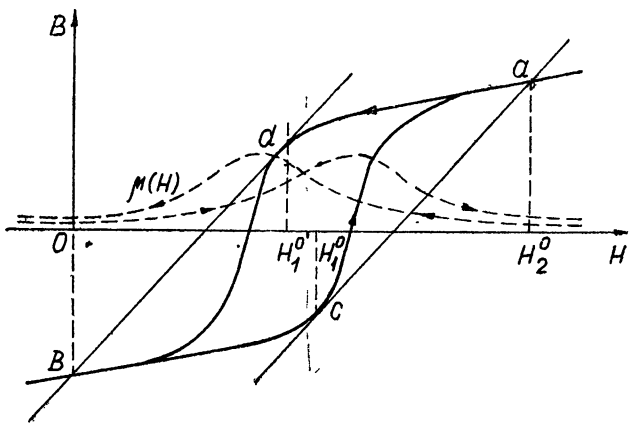


Рис. 2.

В дальнейшем будем различать и называть части волны с $\partial H/\partial t|_{z=\text{const}} > 0$—фронтом, а с $\partial H/\partial t|_{z=\text{const}} < 0$—спадом волны. Согласно (2), та часть фронта волны, где $d\mu/dH > 0$, должна по мере распространения волны рас-

* В уравнениях (1) диссипация энергии при перемагничивании феррита не учитывается. Однако, если потери малы (узкая петля гистерезиса), электромагнитные волны в линии с ферритом приближенно могут быть описаны решением (2)

** Все дальнейшее рассмотрение будет вестись для $\mu(H)$ и $B(H)$, качественно соответствующих приведенным на рис. 2 Начало отсчета магнитного поля смещено относительно центра петли гистерезиса на величину постоянного поля подмагничивания.

тягиваться, так как точки профиля волны с $H_i > H_j$ имеют скорости $v(H_i) < v(H_j)$. Часть фронта волны, где $d\mu/dH < 0$ и соответственно при $H_i > H_j$ $v(H_i) > v(H_j)$, станет укорачиваться. При этом крутизна $\partial H/\partial t$ (или $\partial H/\partial z$) будет возрастать до тех пор, пока не возникнет разрыв непрерывности векторов поля ($\partial H/\partial t \to \infty$ или $\partial H/\partial z \to \infty$), который в дальнейшем может расти (развиваться).

Из граничных условий на поверхности разрыва нетрудно найти скорость распространения разрыва v_1 [1]:

$$\frac{v_1^2}{v_0^2} = \frac{H_2 - H_1}{B(H_2) - B(H_1)}, \tag{3}$$

где H_1 и H_2—напряженности магнитного поля до и после разрыва, $H_2 - H_1$—амплитуда разрыва.

Очевидно, что разрыв будет развиваться до некоторой амплитуды, которую мы будем называть амплитудой установившегося разрыва. Последняя, как нетрудно видеть, будет равна $H_2^0 - H_1^0$, где H_2^0—амплитуда электромагнитной волны, а H_1^0 определяется условием устойчивости разрыва на фронте волны:

$$v_1(H_2^0 - H_1^0) = v(H_1^0) = v_0 \Big/ \sqrt{\mu(H_1^0)}. \tag{4}$$

При достаточно больших амплитудах волны H_2^0 амплитуда разрыва на фронте волны будет равна амплитуде волны H_2^0, если выполняется условие

$$\frac{B(H_2^0) - B(0)}{H_2^0} < \left.\frac{dB}{dH}\right|_{0<H<H_2^0}. \tag{5}$$

Та часть спада волны, где $d\mu/dH < 0$, при распространении волны растягивается, тогда как крутизна на участке с $d\mu/dH > 0$ будет расти. В этой части спада волны образуется разрыв, движущийся со скоростью v_2:

$$\frac{v_2^2}{v_0^2} = \frac{H_1' - H_2'}{B(H_1') - B(H_2')}. \tag{6}$$

В (6) H_1' и H_2' — напряженность магнитного поля до и после разрыва. При дальнейшем распространении волны разрыв на спаде волны растет и достигает установившейся величины, которая определяется условием устойчивости на спаде волны:

$$v_2(H_1^{0\prime}) = v(H_1^{0\prime}) = v_0 \Big/ \sqrt{\mu(H_1^{0\prime})}. \tag{7}$$

Условия (4) и (7) имеют простую геометрическую интерпретацию: скорость разрыва с установившейся амплитудой равна скорости волны в линии без феррита, умноженной на корень квадратный из котангенса угла наклона прямой к оси H, касательной к кривой намагничивания и проходящей через точку на кривой намагничивания, соответствующую амплитуде электромагнитной волны для разрыва на фронте волны или начальному полю (полю подмагничивания) для разрыва на спаде волны. На рис. 2 проекция отрезка касательной ac на ось H соответствует амплитуде установившегося разрыва на фронте, а проекция отрезка bd—амплитуде установившегося разрыва на спаде волны. Точка a соответствует амплитуде волны, b — начальной рабочей точке.

Таким образом, зная параметры кривой гистерезиса, начальную рабочую точку и амплитуду электромагнитной волны, нетрудно опре-

делить амплитуды и скорости движения установившихся разрывов. Заметим, что если индуктивные элементы линии содержат феррит с прямоугольной петлей гистерезиса, то $H_1^0 - H_1^{0'} \simeq 2H_c$, где H_c—коэрцитивная сила. Если же ферритовые сердечники (или другие ферромагнитные материалы) имеют пологую кривую намагничивания, то при соответствующем выборе начальной рабочей точки (поля подмагничивания) можно получить приблизительно равные амплитуды установившихся разрывов на фронте и спаде волны.

С другой стороны, исследуя разрывные или ударные волны, можно, вообще говоря, определять параметры кривых намагничивания.

2. ЭКСПЕРИМЕНТ

Экспериментальное исследование образования импульсов с двумя разрывами проводилось в искусственной линии передачи. Индуктивные элементы линии были выполнены в виде равномерно намотанных тороидальных катушек с сердечниками из феррита марки Ф-600.

Блок-схема экспериментальной установки приведена на рис. 3. Здесь

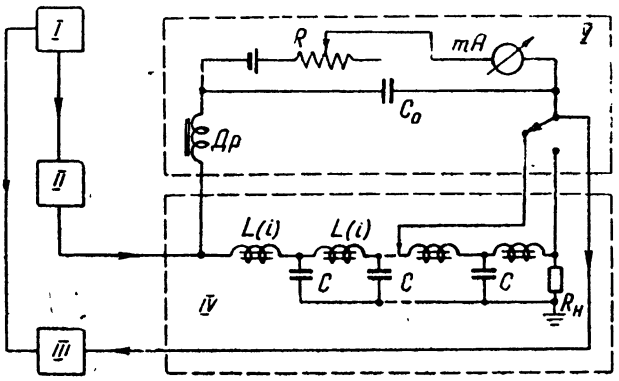


Рис. 3.

I—генератор синхронизирующих импульсов, который служит для запуска блока генератора импульсов тока и для запуска развертки осциллографа; II—генератор импульсов тока на тиратроне (вырабатывает импульсы тока, фронт которых растягивается с помощью RC-цепи, после чего импульсы поступают на вход нелинейной линии); III—осциллограф для наблюдения и регистрации исследуемого процесса; IV—нелинейная искусственная линия; V—блок подмагничивания, состоящий из источника постоянного тока и развязывающих цепей. Импульсы подавались на вход отклоняющих пластин осциллографа с высокоомного делителя, подключение которого проводилось как в конце линии, так и по всей ее длине.

Результаты эксперимента представлены в осциллограммах на рис. 4, 5. Эти осциллограммы иллюстрируют образование разрывов на фронте и спаде исследуемого импульса (волны) в зависимости от выбора рабочей точки на кривой намагничивания (величины постоянного подмагничивающего поля). На рис. 4а приведена осциллограмма напряжения фронта импульса на входе нелинейной линии (калибровочные метки следуют через 10 *мксек*). Амплитуда импульса тока на входе линии* равнялась 3,5*а*, что соответствовало полю в феррите $H = 200$ *эр-*

* Вход и выход нелинейной линии согласовывались на фиксированном токе с линейной линией и нагрузкой. Общие отражения в линии не превышали 5% от амплитуды импульса на входе.

стед. На рис. 4б, в, г, д приведены осциллограммы импульсов на выходе нелинейной линии (калибровочные метки через 100 *мксек*) для полей подмагничивания, равных соответственно 0, —20, —60 и —120 *эрстед**. Как и следовало ожидать, при зависимости μ (H) от H в исследуемом феррите, приведенной на рис. 2, с увеличением абсолютной

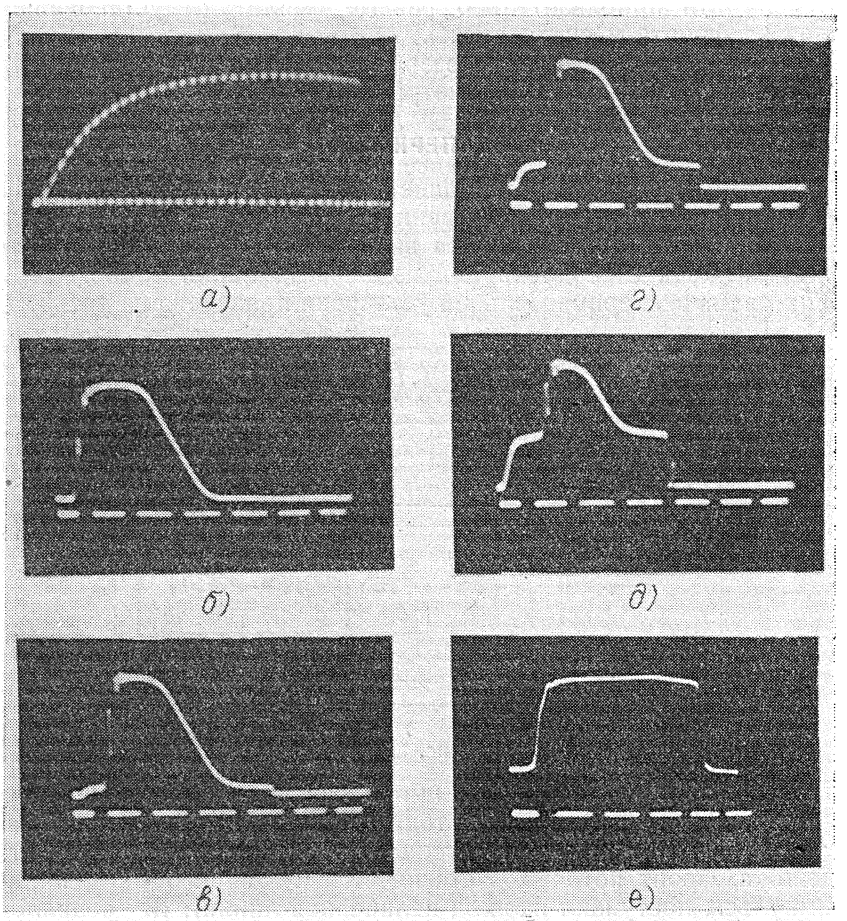


Рис. 4.

величины отрицательного поля подмагничивания разрыв на фронте волны убывает, а на спаде растет; разность $H_1^0 - H_1^{0'}$ имеет порядок коэрцитивной силы. Все это качественно согласуется с выводами, вытекающими из уравнений (4) и (7).

Так как при полях подмагничивания порядка $-H_2^0$ разрыв формируется преимущественно на спаде волны, а при полях подмагничивания, близких к нулю,—на фронте волны, то это обстоятельство, как

* Из-за пространственной дисперсии линии с сосредоточенными постоянными (искусственной линии) на фронте и вершине импульса появляются осцилляции. Для большей наглядности картины образования двух разрывов осцилляции на вершине импульсы были устранены путем включения в последние ячейки линии последовательно с емкостью сопротивления $R \sim 1$ *ком*.

нетрудно видеть, может быть использовано для получения прямоугольных видеоимпульсов. На рис. 4е приведена осциллограмма такого импульса, сформированного в линии, первая половина которой находится в сильном, а вторая—в очень слабом постоянном подмагничивающем поле.

Авторы весьма признательны А. В. Гапонову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1 А В Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, **36**, 957 (1959); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 79 (1960).
2. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 276 (1960).
3. И. Г Катаев, Вопросы радиоэлектроники, сер. 6, № 2, 61 (1959); № 3, 3 (1960).
4. Ю. К Богатырев, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, **4**, 680 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 14 июня 1961 г.

FORMING SHOCK ELECTROMAGNETIC WAVES WITH TWO DISCONTINUITIES

A. M. Belyantsev, Yu. K. Bogatyryov

The discontinuities forming in the front and trailing edges, of the electromagnetic waves at their propagation along an artificial nonlinear transmission line has been experimentally investigated. The conditions of discontinuities forming and stability have been considered.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

О РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯДА В ВОЛНОВОДЕ, ЗАПОЛНЕННОМ АНИЗОТРОПНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

Ю. С. Коробков, В. Я. Эйдман

Рассмотрена реакция излучения заряда, движущегося в прямоугольном волноводе, заполненном анизотропным диэлектриком. Показано, что благодаря реакции излучения в этом случае может происходить раскачка колебаний частицы.

Известно, что влияние излучения электромагнитных волн на характер движения частиц в среде представляет значительный интерес для ряда областей физики и астрофизики (например, при движении электронов в солнечной короне). Как показано в [1] (см. также [2-4]), возможность излучения аномальных допплеровских частот в среде приводит к уменьшению сопротивления, испытываемого частицей при ее колебаниях. В некоторых случаях может наступить даже раскачка колебаний частицы.

Однако, насколько нам известно, до сих пор рассматривалась реакция излучения при движении частицы в неограниченной среде. Между тем в лабораторных условиях, как правило, имеют дело с движением частиц в закрытых системах и, в первую очередь, в волноводах. В связи с этим представляет интерес рассмотреть характер реакции излучения при движении частиц в волноводах. Чтобы выяснить могущие возникнуть здесь особенности, в настоящей статье рассматривается задача о радиационной силе при движении заряда в прямоугольном волноводе, заполненном анизотропным диэлектриком.

1. Для решения поставленной задачи будем исходить из уравнений поля для анизотропной среды*, считая, что магнитная проницаемость $\mu = 1$ [1]:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} e\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_e) + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi e\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_e); \tag{1}$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{e}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} \boldsymbol{E}_\beta;$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\varphi; \quad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}; \quad \boldsymbol{A} = \tilde{\boldsymbol{A}} + \tilde{\boldsymbol{A}}^*,$$

где $\boldsymbol{r}_e$ — радиус-вектор заряда, $\boldsymbol{e}_\alpha$ — орт координатной оси x_α; по дважды встречающимся индексам производится суммирование. При условии

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial \tilde{A}_\alpha}{\partial x_\beta} + \text{к. с.} = 0 \tag{2}$$

* Заметим, что ниже, как обычно, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ является оператором, определяемым соотношением $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} e^{i\omega t} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega) e^{i\omega t}$. Ради простоты письма знак $\wedge$ над $\varepsilon_{\alpha\beta}$ будем опускать.

имеем уравнения для потенциалов в виде:

$$\Delta\tilde{A}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\tilde{A}-\frac{1}{c^2}e_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\tilde{A}_\beta}{\partial t^2}-\frac{1}{c}e_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial t\partial x_\beta}+\text{к. с.}=-\frac{4\pi}{c}ev\delta(r-r_e);$$
$$\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+\text{к. с.}=-4\pi e\delta(r-r_e). \tag{3}$$

Будем предполагать, что заряд движется вдоль оси волновода, совпадающей с координатной осью $0z$, причем

$$r_e\{0,\ 0,\ v_0t+R_0\sin(\Omega t)\};$$
$$v\{0,\ 0,\ v_0+v_\sim\cos(\Omega t)\}, \tag{4}$$

где $v_\sim=R_0\Omega$, т. е. колебания частицы параллельны ее поступательной скорости v_0. Если $2a$, $2b$—соответственно размеры сторон сечения волновода, то δ-функцию в (3) удобно записать в виде!

$$\delta(r-r_e)=\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-z_e)=\frac{e}{4\pi v_0ab}\sum_{m,n=0}^{\infty}\cos(\varkappa_1x)\cos(\varkappa_2y)\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\nu_1(z-z_e)}\,d\omega=$$
$$=\frac{e}{4\pi v_0ab}\sum_{s,\,m,\,n}\cos(\varkappa_1x)\cos(\varkappa_2y)\int_{-\infty}^{\infty}e^{i[\varkappa_3z-t(\omega+s\Omega)]}J_s(k)\,d\omega, \tag{5}$$

где $\varkappa_1=(2m+1)\pi/2a$, $\varkappa_2=(2n+1)\pi/2b$, $\varkappa_3=\omega/v_0$ ($m,\ n=0,1,2,\ldots$; $s=0;\ \pm1;\ \pm2,\ldots$), $k=\omega R_0/v_0$, J_s—функция Бесселя. Для получения формулы (5) необходимо воспользоваться соотношением

$$e^{-ik\sin(\Omega t)}=\sum_{s=-\infty}^{\infty}J_s(k)\,e^{-is\Omega t}. \tag{6}$$

Используя (5), легко получить вынужденные решения уравнений (3). При этом следует различать два случая: ось кристалла параллельна оси волновода

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0\\0&\varepsilon_1&0\\0&0&\varepsilon_2\end{pmatrix}; \tag{7}$$

ось кристалла перпендикулярна оси волновода

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}\varepsilon_2&0&0\\0&\varepsilon_1&0\\0&0&\varepsilon_1\end{pmatrix}. \tag{8}$$

2. Рассмотрим сначала случай, когда движение частицы совершается вдоль оси одноосного кристалла, характеризуемого (7). Тогда из (3), (5) будем иметь для существенных здесь полей A_z, φ следующие выражения:

$$\tilde{A}_z=\sum_{m,n,s}\int_{-\infty}^{\infty}A_{mns}\cos(\varkappa_1x)\cos(\varkappa_2y)\,e^{i\{\varkappa_3z-t(\omega+s\Omega)\}}\,d\omega; \tag{9}$$

$$\tilde{\varphi} = \sum_{m,n,s} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{mns} \cos(\varkappa_1 x) \cos(\varkappa_2 y)\, e^{i\{\varkappa_3 z - t(\omega + s\Omega)\}}\, d\omega,$$

где

$$A_{mns} = -eJ_s(k)(\omega + s\Omega)\varepsilon_1 (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)/2cv_0 ab\varkappa_3\zeta \left[\frac{\varepsilon_2}{c^2}(\omega + s\Omega)^2 - \frac{\zeta}{\varepsilon_1}\right];$$

$$\varphi_{mns} = eJ_s(k)/2v_0 ab\zeta; \quad \zeta = \varepsilon_1(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) + \varepsilon_2\varkappa_3^2.$$

Определим теперь величину работы W, совершаемой полем излучения над движущейся частицей. В рассматриваемом случае

$$W = e\int_0^T \boldsymbol{v}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_e)\, dt = e\int_0^T E_z(\boldsymbol{r}_e)(v_0 + v_\sim \cos(\Omega t))\, dt = W_\parallel + W_\sim; \tag{10}$$

$$W_\parallel = e\int_0^T E_z(\boldsymbol{r}_e)\, v_0\, dt; \quad T = 2\pi/\Omega.$$

Воспользовавшись (1), (6), (9) и выполняя интегрирование по t, получим:

$$W_\parallel = Tv_0 ei \sum_{m,n,s} \int_{-\infty}^{\infty} J_s(k)\left\{\frac{A_{mns}(\omega + s\Omega)}{c} - \varkappa_3\varphi_{mns}\right\} d\omega + \text{к. с.};$$

$$W_\sim = Tv_\sim ei \sum_{m,n,s} \int_{-\infty}^{\infty} J_s(k)\left\{\frac{A_{mns}(\omega + s\Omega)}{c} - \varkappa_3\varphi_{mns}\right\} \frac{s}{k}\, d\omega + \text{к. с.}. \tag{11}$$

Понимая под интегралами в (11), как обычно, предельное их значение при исчезающе малом затухании электромагнитных волн (см., например, [5]), будем иметь*:

$$W_\parallel = -\frac{\pi e^2 Tv_0}{c^2 ab} \sum_{m,n,s} J_s^2(k) \left|\frac{(\omega + s\Omega)\varepsilon_1(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)}{\omega\zeta\, d\lambda/d\omega}\right| (\omega + s\Omega); \tag{12}$$

$$W_\sim = -\frac{\pi e^2 Tv_0}{c^2 ab} \sum_{m,n,s} J_s^2(k) \left|\frac{(\omega + s\Omega)\varepsilon_1(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)}{\omega\zeta\, d\lambda/d\omega}\right| \frac{(\omega + s\Omega)s\Omega}{\omega}, \tag{12a}$$

где $\lambda = (\varepsilon_2/c^2)(\omega + s\Omega)^2 - \zeta/\varepsilon_1$, а ω определяется как положительный корень уравнения

$$\lambda(\omega) \equiv \frac{\varepsilon_2}{c^2}(\omega + s\Omega)^2 - \varkappa_1^2 - \varkappa_2^2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\varkappa_3^2 = 0. \tag{13}$$

При $v_\sim = 0$, $R_0 = 0$ $(s = 0)$ формула (12) переходит в следующее выражение:

$$W_\parallel = -\frac{\pi e^2 Tv_0}{2ab} \sum_{m,n} \omega\left(\beta_0^2\varepsilon_1 - 1\right)\varepsilon_1^{-1} \left|\frac{d}{d\omega}\frac{\omega^2\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\left(\varepsilon_1\beta_0^2 - 1\right)\right|^{-1}, \tag{14}$$

* Полученные формулы легко переписать для случая заполнения волновода изотропной средой. Для этого достаточно положить во всех формулах $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ (см. также [6]).

которое совпадает с выражением для черенковских потерь частицы, движущейся вдоль оптической оси кристалла в волноводе (см. [7]).

Легко видеть, что слагаемые суммы (12а), удовлетворяющие условию

$$(\omega + s\Omega)\, s > 0, \tag{15}$$

отвечают трению при колебаниях частицы (нормальный допплер-эффект), в то время как члены с

$$(\omega + s\Omega)\, s < 0 \tag{16}$$

отвечают раскачке колебаний частицы (аномальный допплер-эффект).

Для величины $W_{\parallel}$ (см. (12)) имеет место следующая ситуация: члены с $(\omega + s\Omega) < 0$ соответствуют ускорению, а слагаемые с $(\omega + s\Omega) > 0$—торможению частицы*. Этот результат физически очевиден и означает, что волна, испущенная электроном в направлении, противоположном его поступательной скорости, ускоряет заряд. Аналогичное положение, конечно, имеет место при излучении электромагнитных волн и в свободном пространстве.

Чтобы выяснить особенности сверхсветового движения частиц в волноводе, рассмотрим следующий конкретный случай, характеризуемый условиями**

$$\varepsilon_2 < 0; \quad \varepsilon_1 > 0; \quad \varepsilon_1 \beta_0^2 - 1 > 0, \tag{17}$$

причем дисперсией будем пренебрегать. Если пренебречь дисперсией, то уравнение (13) легко решается ($\omega > 0$):

$$\omega = \left\{ -\varepsilon_2 \Omega s \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\beta_0^2 \varepsilon_1}\left[\varepsilon_2 (s\Omega)^2 + \varkappa^2 c^2 \left(\varepsilon_1 \beta_0^2 - 1\right)\right]} \right\} \frac{\beta_0^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 \left(\varepsilon_1 \beta_0^2 - 1\right)}, \tag{18}$$

где

$$\beta_0 = v_0/c; \qquad \varkappa^2 = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2.$$

При соблюдении условий (17), $\omega > 0$ только для членов $s < 0$. Это значит, что волна, распространяющаяся в положительном направлении оси $0z$, увеличивает колебательную энергию, а волна, бегущая в противоположном направлении, уменьшает колебательную энергию частицы.

Для того, чтобы наступила раскачка колебаний заряда, достаточно, например, чтобы вообще не могли генерироваться волны с направлением распространения, противоположным поступательной скорости частицы. Такая ситуация реализуется в том случае, когда не существует корней $\omega > 0$ (см. (18)), удовлетворяющих условию (15). Если предположить, что движение имеет осцилляторный характер***, т. е. $k = \omega R_0/v_0 \ll 1$ ($s = \pm 1$) (черенковский член с $s = 0$ не дает вклада

---

* Из (9) следует, что если $(\omega + s\Omega) > 0$ ($\omega > 0$), то волна распространяется в положительном направлении оси $0z$, т. е. в направлении поступательной скорости заряда. Наоборот, при $(\omega + s\Omega) < 0$ ($\omega > 0$) волна распространяется в противоположном направлении.

** При движении заряда в безграничном кристалле в этом случае имеет место раскачка колебаний частицы (см. [1, 2]).

*** Заметим, что выражения (12), а также все полученные ниже формулы для величин $W_{\parallel}$, $W_{\sim}$ легко переписать для случая $k \ll 1$; достаточно лишь в указанные формулы подставить значение , например, для $s > 0$ $J_s(k) = k^s/2^s s!$ ($k \ll 1$) и соответствующее значение для $s < 0$. В этом случае основной вклад в выражения, определяющие $W_{\parallel}$, $W_{\sim}$, вносят слагаемые с $s = 0; \pm 1$.

в (12а)), то, используя (17), (18), легко получить условие, при котором отсутствуют положительные корни (18), удовлетворяющие (15):

$$\frac{|\varepsilon_2|\,\Omega^2}{v_0^2\,\varepsilon_1} < \varkappa^2_{\text{мин}} = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right). \tag{19}$$

Таким образом, если условия (17), (19) выполнены, то возбуждаются лишь волны, распространяющиеся в направлении, совпадающем с направлением поступательной скорости частицы, т. е. может наступить раскачка колебаний частицы.

3. В заключение рассмотрим случай движения частицы вдоль оси волновода перпендикулярно оптической оси кристалла (см. (8)). Используя (4), (6) и (8), легко найти и здесь выражения для потенциалов. В результате таким же образом, как и в предыдущем случае, получим:

$$\tilde{\varphi} = \sum_{m,n,s}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n,ns}\cos(\varkappa_1 x)\cos(\varkappa_2 y)\,e^{i\{\varkappa_3 z - t(\omega + s\Omega)\}}\,d\omega;$$

$$\tilde{A}_x = \sum_{m,n,s}\int_{-\infty}^{\infty} A_{xmns}\sin(\varkappa_1 x)\cos(\varkappa_2 y)\,e^{i\{\varkappa_3 z - t(\omega + s\Omega)\}}\,d\omega; \tag{20}$$

$$\tilde{A}_z = \sum_{m,n,s}\int_{-\infty}^{\infty} A_{zmns}\cos(\varkappa_1 x)\cos(\varkappa_2 y)\,e^{i\{\varkappa_3 z - t(\omega + s\Omega)\}}\,d\omega,$$

где

$$\varphi_{mns} = eJ_s(k)/2v_0 ab\zeta_1; \qquad A_{xmns} = [i\varepsilon_2\varkappa_1(\omega + s\Omega)/c\sigma_2]\,\varphi_{mns};$$

$$A_{zmns} = \frac{eJ_s(k)\,(\omega + s\Omega)}{2abc\,\sigma_1}\left\{-\frac{1}{\omega}+\frac{\omega}{v_0^2\zeta_1}\left[\varepsilon_1 - \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1\,\alpha_2}\,\varkappa_1^2\right]\right\};$$

$$\zeta_1 = \varepsilon_2\varkappa_1^2 + \varepsilon_1\left(\varkappa_2^2+\varkappa_3^2\right); \quad \alpha_1 = \frac{\varepsilon_1}{c^2}(\omega + s\Omega)^2 - \varkappa_1^2 - \varkappa_2^2 - \varkappa_3^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{\varepsilon_2}{c^2}(\omega + s\Omega)^2 - \varkappa_2^2 - \varkappa_3^2 - \varepsilon_2\varkappa_1^2/\varepsilon_1.$$

При помощи (20) легко найти (аналогично предыдущему случаю) величину излучаемой энергии и реакцию излучения. Так, для работы поля над частицей получаются следующие выражения:

$$W_{\parallel} = W_{\parallel}^{(1)} + W_{\parallel}^{(2)}; \quad W_{\sim} = W_{\sim}^{(1)} + W_{\sim}^{(2)}, \tag{21}$$

где

$$W_{\parallel}^{(1)} = -\frac{\pi e^2 v_0 T}{abc^2}\sum_{m,n,s}\frac{J_s^2(k)\,\varkappa_2^2}{\left(\varkappa_2^2+\varkappa_3^2\right)}\left|\frac{\omega_1 + s\Omega}{\omega_1 d\alpha_1/d\omega}\right|(\omega_1 + s\Omega); \tag{22}$$

$$W_{\sim}^{(1)} = -\frac{\pi e^2 v_0 T}{abc^2}\sum_{m,n,s}\frac{J_s^2(k)\,\varkappa_2^2}{\omega_1\left(\varkappa_2^2+\varkappa_3^2\right)}\left|\frac{\omega_1 + s\Omega}{d\alpha_1/d\omega}\right|(\omega_1 + s\Omega)\frac{s\Omega}{\omega_1}, \tag{22а}$$

а ω_1—положительный корень уравнения

$$\alpha_1(\omega_1) \equiv \frac{\varepsilon_1}{c^2}(\omega_1 + \Omega s)^2 - \varkappa_1^2 - \varkappa_2^2 - \omega_1^2/v_0^2 = 0; \tag{23}$$

$$W_{\parallel}^{(2)} = -\frac{\pi e^2 T}{abv_0}\sum_{m,n,s}\frac{J_s^2(k)\,\omega_2\,\varkappa_1^2}{\varepsilon_1^2\left(\varkappa_2^2+\varkappa_3^2\right)}\left|\frac{\varepsilon_2}{(\omega_2 + s\Omega)\,d\sigma_2/d\omega}\right|(\omega_2 + s\Omega); \tag{24}$$

$$W_{\sim}^{(2)} = -\frac{\pi e^2 T}{abv_0} \sum_{m,n,s} \frac{J_s^2(k)\,\varkappa_1^2}{\varepsilon_1^2(\varkappa_2^2+\varkappa_3^2)} \left| \frac{\varepsilon_2}{(\omega_2 + s\Omega)\, d\sigma_2/d\omega} \right| (\omega_2 + s\Omega)\, s\Omega, \qquad (24a)$$

причем ω_2 есть положительный корень уравнения

$$\alpha_2(\omega_2) \equiv \frac{\varepsilon_2}{c^2}(\omega_2 + s\Omega)^2 - \varkappa_2^2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\varkappa_1^2 - \frac{\omega_2^2}{v_0^2} = 0. \qquad (25)$$

Частоты ω_1, ω_2 отвечают двум нормальным волнам, распространяющимся в волноводе. Как было показано, при движении частицы вдоль оси кристалла возбуждается лишь одна волна, определяемая (13).

В формулах (22), (24) слагаемые с $s = 0$ соответствуют торможению частицы черенковским излучением ((23), (25) при этом совпадают с выражениями, определяющими частоту черенковского излучения). При $R_0 = 0$, $v_\sim = 0$ из (22), (24) получаем формулы для черенковских потерь частицы, движущейся перпендикулярно оптической оси кристалла (см. [7]). Легко видеть (см. (22а), (24а)), что частотам, удовлетворяющим условию (15), и здесь отвечает составляющая реакции излучения, тормозящая колебания частицы, а частотам, удовлетворяющим (16),—составляющая реакции излучения, увеличивающая колебательную энергию частицы. Что касается (22), (24), то очевидно, что слагаемые с $(\omega + s\Omega) < 0$ ускоряют частицу, а слагаемые с $(\omega + s\Omega) > 0$ тормозят ее. Как уже указывалось, это есть просто следствие закона сохранения импульса. Таким образом, в этом отношении ситуация здесь такая же, как при движении частицы вдоль оптической оси кристалла.

Авторы признательны В. К. Юлпатову за дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, **36**, 1823 (1959).
2. В Л. Гинзбург, В Я Эйдман, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **2**, 331 (1959).
3. В. Л. Гинзбург, УФН, **69**, 537 (1959).
4. В. Я. Эйдман, Изв высш. уч. зав —Радиофизика, **3**, 192 (1960).
5. М. И. Каганов, ЖТФ, **23**, 505 (1953).
6. H. Motz and Nakamura, Ann. of Phys., **7**, 84 (1959); **7**, 504 (1959).
7. Л. С. Богданкевич, ЖТФ, **28**, 1505 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 9 июня 1961 г.

ON REACTION OF RADIATION OF A MOVING CHARGE IN THE WAVEGUIDE FILLED WITH AN ANISOTROPIC DIELECTRIC

Yu. S. Korobkov, V. Ya. Eidman

The radiation reaction of a charge moving in the rectangular waveguide filled with an anisotropic dielectric has been considered. It was shown that due to the radiation reaction the growth of particle oscillations may take place.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

ТЕОРИЯ ПЛОСКОГО ДИОДА С ОДНОРОДНЫМ КАТОДОМ, РАБОТАЮЩИМ В РЕЖИМЕ НАСЫЩЕНИЯ*

В. А. Малышев

Проводится анализ влияния объемного заряда на ход вольтамперной характеристики плоского диода в области насыщения для случая катода, лишенного пятен и шероховатостей.

Известно [1, 2], что вольтамперная характеристика плоского диода в области насыщения определяется законом Шоттки:

$$j = j_0 e^{\varepsilon \sqrt{\varepsilon E}/kT}; \qquad j_0 = AT^2 e^{-\varepsilon\varphi/kT} = 2{,}33 \cdot 10^{-6} \frac{U_0^{3/2}}{D^2} = g \frac{U_0^{3/2}}{D^2}, \qquad (1)$$

где j_0 — плотность тока эмиссии катода (в $a \cdot см^{-2}$), U_0 — напряжение (в вольтах), при котором весь ток эмиссии поступает на анод и при котором перестает выполняться закон „степени трех вторых", а распределение потенциала между катодом и анодом имеет минимум на катоде, D — расстояние между катодом и анодом (в *см*), ε — заряд электрона, $\varepsilon\varphi$—работа выхода, k—постоянная Больцмана, T—температура (в °К), E—напряженность поля вблизи катода. Так как поле сил электрического изображения спадает практически до нуля на расстояниях от катода порядка 10^{-6} *см* [1], можно считать, что величина E соответствует напряженности внешнего поля на катоде.

Если E вычислять по обычным формулам электростатики, то закономерность (1) реализуется лишь при очень больших напряженностях поля в случае достаточно гладкого катода. При меньших полях имеются существенные отклонения от закона Шоттки. Эти отклонения объясняются неоднородностью работы выхода по поверхности катода (поля пятен) и действием объемного заряда [1, 2]. В данной работе анализируется влияние последнего на ход вольтамперной характеристики плоского диода, имеющего катод, лишенный пятен и неровностей.

Обычно считают, что в случае плоского диода

$$E = U/D, \qquad (2)$$

где U—анодное напряжение. Однако из-за действия объемного заряда при использовании формулы (2) получаются значительные погрешности, которые растут с ростом плотности тока. Поэтому более правильно считать, что

$$E = (U/D)\gamma, \qquad (3)$$

где коэффициент $\gamma \leqslant 1$ может быть найден на основе работ [3, 4], рассматривающих прохождение тока через бесконечно-протяженный по ширине плоский диод при отсутствии у электронов начальных скоростей. Из [3, 4] имеем:

---

* Доклад на конференции МВ и ССО СССР по радиоэлектронике, Харьков, 1961 и на VII научно-технической конференции Таганрогского радиотехнического института.

$$\frac{y}{x^{3/2}} = \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right)\sqrt{3\gamma+1}\right]; \tag{4}$$

$$y = \frac{j}{j_0}; \qquad x = \frac{U}{U_0}. \tag{5}$$

С учетом выражений (3) и (5) соотношение (1) можно привести к виду

$$\ln y = C\sqrt{\gamma}\sqrt{x}, \tag{6}$$

где безразмерный параметр C имеет значение:

$$C = \frac{\varepsilon^{3/2}}{kT}\sqrt{\frac{U_0}{D}} = \frac{\varepsilon^{3/2}}{kT^{1/3}}\left(\frac{A}{g}\right)^{1/3} D^{1/6} e^{-\varepsilon\varphi/3kT} = \frac{4{,}39}{T}\sqrt{\frac{U_0}{D}} = \frac{331 D^{1/6}}{T} j_0^{1/3}. \tag{7}$$

Так как кривая $\ln y = f(\sqrt{x})$ в области насыщения начинается от точки $\sqrt{x} = 1$, в которой $\gamma = 0$, то параметр C численно равен тангенсу угла наклона идеализированной прямой Шоттки, построенной в координатах $\ln y = f(\sqrt{x})$ (рис. 1а).

Из соотношений (4) и (6) легко составить уравнение

$$2e^{C\sqrt{\gamma x}} = x^{3/2}\left[1 + \left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right)\sqrt{3\gamma+1}\right], \tag{8}$$

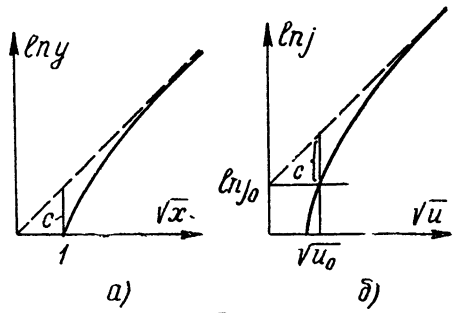


Рис. 1.

определяющее зависимость коэффициента γ от относительного потенциала x на аноде. На рис. 2 представлены зависимости $\sqrt{\gamma} = f(\sqrt{x})$, построенные путем графического решения уравнения (8) для различных значений параметра C. Так как при малых C ($C = 0 \div 0{,}1$) для случая небольших x можно полагать

$$e^{C\sqrt{\gamma x}} \simeq 1, \tag{9}$$

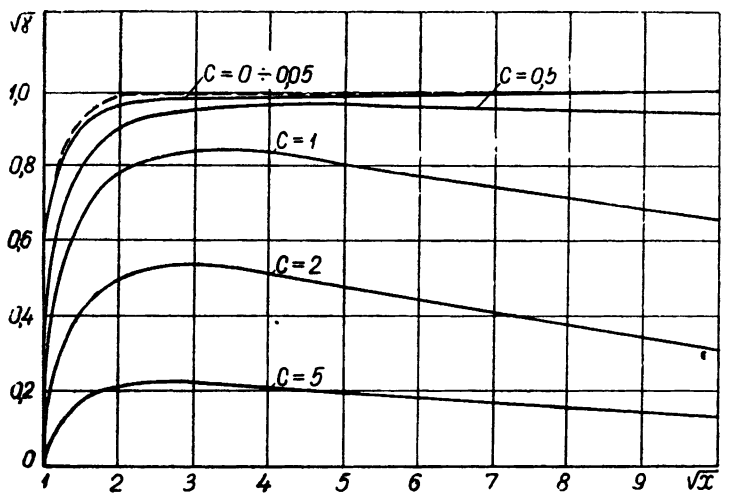


Рис 2.

то при малых C уравнение (8) в приближении (9) сводится к кубическому уравнению относительно γ:

$$\frac{1}{\gamma^3} - \frac{27x^3}{16(x^{3/2}-1)}\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) = 0. \qquad (10)$$

Последнее имеет решение [5]

$$\gamma = 2\alpha/3\cos\left[\frac{\arccos(-2\alpha)}{3}\right], \quad \alpha = \frac{\sqrt{x^{3/2}-1}}{x^{3/2}}, \qquad (11)$$

справедливое при монотонном возрастании функции $\arccos(-2\alpha)=f(x)$.

Легко убедиться, что в этом случае из трех действительных решений уравнения (10) только решение (11) отвечает физическому смыслу задачи. Действительно, при $x=1$, когда $\alpha=0$ и $\arccos(-2\alpha)=\pi/2$, получаем $\gamma=0$, а при $x \simeq \infty$, когда $\alpha \simeq x^{-3/4}$ и $\delta=\arccos(-2\alpha)$ близко к $3\pi/2$, можно полагать:

$$-2\alpha = \cos\delta = -\sin(3\pi/2-\delta) \simeq \delta - 3\pi/2; \quad \delta = 3\pi/2 - 2\alpha, \qquad (12)$$

так что

$$\cos\left[\frac{\arccos(-2\alpha)}{3}\right] = \cos\frac{\delta}{3} = \sin\frac{2\alpha}{3} \simeq \frac{2\alpha}{3} = \frac{2}{3}x^{-3/4}; \quad \gamma=1. \qquad (13)$$

Таким образом, при малых C вольтамперная характеристика плоского диода в области насыщения определяется формулой:

$$\ln y = C\left\{2\sqrt{x^{3/2}-1}/3\sqrt{x}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{2\sqrt{x^{3/2}-1}}{x^{3/2}}\right)\right]\right\}^{1/2}; \qquad (14)$$

$$y = \frac{j}{j_0}; \quad x = \frac{U}{U_0},$$

причем при расчетах по этой формуле аргумент косинуса, стоящий в квадратных скобках, следует считать монотонно возрастающей функцией x, начинающейся при $x=1$ от $\pi/2$.

Верхняя кривая на рис. 2 строилась по формулам (11). Следует заметить, что эта кривая удовлетворительно аппроксимируется более простым выражением

$$\gamma = \sqrt{1 - e^{1-x}}, \qquad (15)$$

с помощью которого построена пунктирная линия на рис. 2.

Из рис. 2 и формулы (14) следует, что даже при малых C из-за действия объемного заряда всегда наблюдается значительное отступление от закона Шоттки в области небольших x (до $x \simeq 10$). Так как $U=xU_0$, то в координатах $\ln y = f(\sqrt{U})$ это отступление будет продолжаться до тем больших значений $\sqrt{U}$, чем больше $\sqrt{U_0}$, т. е. чем больше ток эмиссии. Из рис. 2 также следует, что коэффициент γ вначале растет с ростом x, а затем начинает уменьшаться. (Изменение с ростом C максимального значения $\gamma=\gamma_m$ и значения $x=x_m$, при котором наблюдается этот максимум, показано на рис. 3.)

Эта закономерность проявляется наиболее заметно для случая высокоэмиссионных однородных катодов, у которых параметр C велик, и может быть легко объяснена. Действительно, величина коэффициента γ, характеризующего неоднородность поля в промежутке между электродами диода, определяется двумя конкурирующими процессами: γ растет с ростом ускорения электронов, задаваемого анодным напряже-

нием, и уменьшается за счет увеличения плотности тока, которое сопровождает увеличение анодного напряжения. При малых плотностях тока эмиссии первый из этих процессов превалирует над вторым и функция $\gamma=f(x)$ монотонно возрастает. Однако в случае высокоэмиссионных катодов второй процесс при достижении определенных анодных напряжений оказывается более эффективным и γ начинает уменьшаться с ростом x.

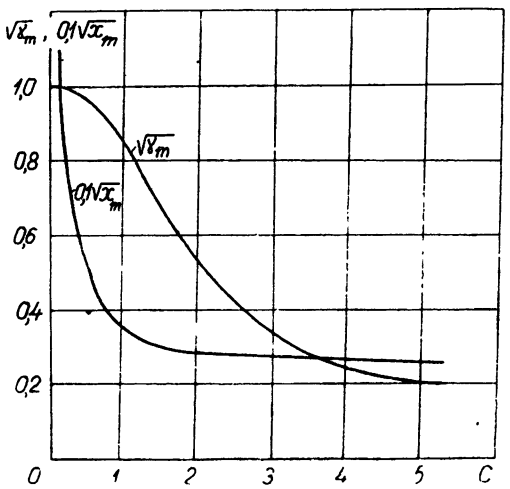


Рис. 3.

Из рассмотрения, проведенного выше, следует, что влияние объемного заряда на относительную вольтамперную характеристику диода $y=f(x)$ однозначно определяется параметром C. В таблице 1 приведены значения параметра C, вычисленные при $D=0{,}1$ *см* для вольфрамового, танталового и оксидного катодов (значения величин j_0 и T брались из книги [6]; для оксидного катода эти величины взяты из данных, приведенных в [1]).

Таблица 1

Тип катода	j_0 ($a\cdot см^{-2}$)	T (°K)	C	U_0 (*в*)	$10\,U_0$ (*в*)
Вольфрам	0,7	2650	0,077	210	2100
Тантал	0,65	2400	0,082	200	2000
Оксидный (непрерывный режим)	19	1150	0,52	1880	18800
Оксидный (импульсный режим)	140	1150	1,02	6650	66500

Из таблицы 1 видно, что для обычных металлических катодов в предположении их однородности и отсутствия неровностей параметр $C<0{,}1$ и вольтамперная характеристика плоского диода в области насыщения с хорошим приближением будет описываться формулой (14). Для однородных высокоэмиссионных катодов параметр C имеет большую величину. (Так, в импульсном режиме оксидного катода, в предположении, что катод однороден и лишен шероховатостей, $C=1{,}02$.)

Так как теория, изложенная выше, применима лишь к идеализированному катоду, которому лучше всего соответствует достаточно гладкий монокристалл, то имеет смысл определить параметр C для различных граней монокристалла. Результаты вычислений C, проведенных на основе данных [7, 8] для случая различных монокристаллических поверхностей вольфрама при двух значениях температуры катода и при $D=0{,}1$ *см*, помещены в таблице 2.

Так как $C\sim D^{1/6}$, то расстояние D между катодом и анодом лишь незначительно влияет на величину параметра C.

В таблицах также приведены величины напряжений U_0 и $10\,U_0$ вычисленные для случая $D=0{,}1$ *см*. Величина $10\,U_0$ характеризует значения анодных напряжений, при которых в случае малых C ($C<0{,}3$)

можно без большой погрешности пренебречь влиянием объемного заряда на эффект Шоттки. Для $D=1$ *см* приведенные в таблицах значения напряжений U_0 и $10\,U_0$ увеличатся в 21,5 раза. Поэтому легко придти к выводу, что в большинстве встречающихся на практике случаев работы катодов при номинальных накалах и анодных напряжениях объемный заряд оказывает существенное влияние на ход вольтамперной характеристики диода в области насыщения, так что напряжения, при которых это влияние отсутствует, достигаются сравнительно редко.

Таблица 2

Индекс грани	φ (*в*)	A ($a \cdot см^{-2}\,град^{-2}$)	T (°К)	j_0 ($a \cdot см^{-2}$)	C	U_0 (*в*)	$10\,U_0$ (*в*)
(110)	4,72	9,7	2500 3000	0,0192 1,07	0,0242 0,077	18,9 277	189 2770
(112)	4,65	125	2500 3000	0,333 17,6	0,0625 0,195	126 1780	1260 17800
(100)	4,52	105	2500 3000	0,329 25,4	0,0622 0,221	125 2280	1250 22800
(111)	4,38	54	2500 3000	0,498 21,7	0,0715 0,21	166 2050	1660 20500
(116)	4,29	40	2500 3000	0,572 23,3	0,075 0,215	182 2150	1820 21500

Это обстоятельство должно всегда учитываться при определении эмиссионной способности катода и постоянных A и φ эмиссии. Так, если определять ток эмиссии по вольтамперным характеристикам, снятым до небольших значений анодного напряжения, экстраполируя тем или иным способом значения тока, найденные из вольтамперной характеристики, к нулевым величинам напряженности поля, то всегда будут получаться заниженные значения плотности тока эмиссии. Если при этом для определения постоянных A и φ пользоваться методом прямых Ричардсона, то в результате будут получаться заниженные значения обеих постоянных. При изучении высокоэмиссионных катодов экспериментаторы зачастую допускают в той или иной степени подобную погрешность (это связано либо с отсутствием достаточно мощных источников питания, либо с трудностями рассеяния на аноде большой мощности).

Поэтому возникает вопрос о таком методе постановки эксперимента, при котором будет обеспечен учет влияния объемного заряда. Поскольку в зависимости от величины C кривая $\sqrt{\gamma}=f(\sqrt{x})$ будет монотонно возрастать или проходить через максимум, и так как ход этой кривой должен оказывать существенное влияние на метод определения j_0, то в процессе эксперимента должен быть установлен характер кривой $\sqrt{\gamma}=f(\sqrt{x})$. Из выражения (6) следует, что вид кривой $\sqrt{\gamma}=f(\sqrt{x})$ будет подобен виду кривой $\ln j/\sqrt{U}=f(\sqrt{U})$. Поэтому для однородных катодов метод определения j_0 должен состоять в следующем. Снимается зависимость $j=f(U)$ до значений $x=U/U_0>100$. (Величина U_0, необходимая для оценки x, определяется приближенно по перегибу вольтамперной характеристики.) Затем эта зависимость строится в координатах $\ln j/\sqrt{U}=f(\sqrt{U})$; если полученная при этом кривая не имеет максимума в пределах $1<\sqrt{x}<10$, то в исследуе-

мом случае $C < 0{,}15$ и определение j_0 можно осуществлять обычным способом: строится зависимость $\ln j = f(\sqrt{U})$, которая в области больших x ($x > 60$), когда $\gamma \simeq 1$, дает прямую линию:

$$\ln j = \ln j_0 + \frac{C\sqrt{\gamma}}{\sqrt{U_0}}\sqrt{U}. \tag{16}$$

Продолжив последнюю к значению $\sqrt{U} = 0$, можно определить $\ln j_0$. Если же кривая $\ln j/\sqrt{U} = f(\sqrt{U})$ имеет максимум при $\sqrt{x} < 10$, то следует определить значение $\sqrt{U}$, при котором имеет место этот максимум. Затем, построив линию $\ln j = f(\sqrt{U})$, нужно провести касательную к этой линии в точке, соответствующей максимуму кривой $\ln j/\sqrt{U} = f(\sqrt{U})$. Так как в области максимума γ практически не зависит от $\sqrt{U}$, то проведенная касательная будет представлять собой прямую линию, определяемую уравнением (16) и отсекающую от оси $\ln j$ отрезок, равный $\ln j_0$.

Изложенный метод определения плотности тока эмиссии однородного катода пригоден не только для случая плоского диода, но и для любого другого типа диода, имеющего однородный катод, так как зависимости $\sqrt{\gamma} = f(\sqrt{x})$ в любом случае должны иметь вид, аналогичный кривым рис. 2.

Отклонение от закона Шоттки, вызванное в случае однородного катода действием объемного заряда, приводит к тому, что наклон кривой $\ln y = f(\sqrt{x})$ отличается от наклона прямой Шоттки. При этом определяемая в области действия объемного заряда по наклону линии $\ln y = f(\sqrt{x})$ температура Шоттки $T_{\text{ш}}$ будет отличаться от истинной температуры катода T. Из соотношения (6) следует, что наклон линии $\ln y = f(\sqrt{x})$ определяется выражением:

$$\frac{d(\ln y)}{d(\sqrt{x})} = C\left[\sqrt{\gamma} + \sqrt{x}\,\frac{\partial(\sqrt{\gamma})}{\partial(\sqrt{x})}\right] = C\,\frac{T}{T_{\text{ш}}}. \tag{17}$$

Из уравнения (8) легко найти, что

$$\frac{d(\ln y)}{d(\sqrt{x})} = C\,\frac{3 + \sqrt{\gamma}f(\gamma)}{C\sqrt{x} + f(\gamma)}; \quad f(\gamma) = \frac{27\gamma^{3/2}}{2\sqrt{3\gamma+1}\left[1 + \left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right)\sqrt{3\gamma+1}\right]}. \tag{18}$$

Так как $f(\gamma)$ монотонно растет от нуля до бесконечности при изменении γ от нуля до 1, то наклон $d(\ln y)/d(\sqrt{x})$ меняется от 3 (при $x=1$) до значений, близких к C (при $\gamma=1$). Следует заметить, что в области выполнения закона „степени трех вторых" соблюдается равенство $d(\ln y)/d(\sqrt{x}) = 3$; поэтому экспериментально точку $x=1$ (т. е. $U=U_0$) можно найти по месту нарушения этого равенства или эквивалентного ему условия $\sqrt{U}\,d(\ln j)/d(\sqrt{U}) = 3$.

Из выражений (17) и (18) видно, что условие $T_{\text{ш}} < T$ соблюдается при

$$3 - (1 - \sqrt{\gamma})f(\gamma) > C\sqrt{x}. \tag{19}$$

Так как

$$\lim_{\gamma \to 1} \frac{1 - \sqrt{\gamma}}{\left[1 + (1 - 3\gamma/2)\sqrt{3\gamma + 1}\right]} = \frac{4}{27}, \tag{20}$$

то левая часть неравенства (19) уменьшается от 3 до 2 с ростом γ.

Поэтому $T_{ш} < T$ при условии $\sqrt{x} < 2/C$. Так как оценка параметра C, проведенная выше, показывает, что обычно для однородных катодов $C < 0{,}2$, то условие $\sqrt{x} < 2/C$ выполняется при всех используемых на практике значениях x. Это свидетельствует о том, что измеренная на опыте по наклону зависимости $\ln j = f(\sqrt{U})$ температура однородного катода $T_{ш}$ должна быть меньше истинной температуры катода T из-за влияния объемного заряда. Однако в действительности отличие температур $T_{ш}$ и T при γ, близких к 1, будет незначительно, потому что функция $f(\gamma)$ быстро возрастает при приближении γ к 1 и

$$\frac{T_{ш}}{T} = \frac{f(\gamma) + C\sqrt{x}}{\sqrt{\gamma} f(\gamma) + 3} \to 1. \qquad (21)$$

Имеет смысл поставить вопрос о таком методе определения истинной температуры гладкого однородного катода по наклону характеристики $\ln j = f(\sqrt{U})$, который учитывал бы влияние объемного заряда. Этот метод должен строиться по тому же плану, что и метод определения плотности тока эмиссии. Вначале снимается зависимость $j = f(U)$; если кривая $\ln j/\sqrt{U} = f(\sqrt{U})$ не обнаруживает максимума, то по наклону прямой $\ln j = f(\sqrt{U})$, получающейся в области больших значений U, когда $\sqrt{x} \geqslant 5$ и $\gamma \simeq 1$, можно правильно определить температуру катода $T = T_{ш}$. Если же кривая $\ln j/\sqrt{U} = f(\sqrt{U})$ дает максимум при $\sqrt{x} < 10$, то следует сначала определить плотность тока эмиссии j_0, пользуясь методом, изложенным выше; затем по формуле (1) необходимо определить U_0 и таким образом найти $x = x_m$, соответствующее максимуму кривой $\ln j/\sqrt{U} = f(\sqrt{U})$. Если при этом определить температуру Шоттки $T_{шк}$ по наклону касательной, проведенной к кривой $\ln j = f(\sqrt{U})$ в точке, соответствующей упомянутому максимуму (где $\partial(\sqrt{\gamma})/\partial(\sqrt{x}) = 0$), то, как следует из выражения (17), истинная температура катода $T = T_{шк}\sqrt{\gamma_m}$, где величина γ_m может быть найдена из графиков рис. 3 по известной величине x_m.

Теория, изложенная выше, применима для однородных гладких катодов; поэтому она позволяет указать два критерия однородности катода и отсутствия шероховатостей его поверхности.

1) Значение параметра C, рассчитанное по формуле (7), должно совпадать со значением этого параметра, найденным из экспериментальной кривой $\ln j = f(\sqrt{U})$, если восстановить перпендикуляр из точки с координатами $(\ln j_0, \sqrt{U_0})$ до пересечения с идеализированной прямой Шоттки (рис. 1б).

2) Наклон характеристики $\ln j = f(\sqrt{U})$ в точке, соответствующей $\ln j = \ln j_0$, должен быть равен $3/\sqrt{U_0}$. Этот критерий по сути дела является условием соблюдения закона „степени трех вторых“ в точке перехода к области $\ln j > \ln j_0$.

Нарушение этих критериев может в определенной степени характеризовать пятнистость и неровности поверхности катода.

В заключение следует заметить, что количественные закономерности, полученные выше для случая бесконечно протяженного диода, будут давать определенную погрешность в применении к диодам, имеющим конечные размеры. Эта погрешность будет расти с уменьшением размеров и с ростом плотности тока.

ЛИТЕРАТУРА

1 В. И. Гапонов, Электроника, **1**, Физматгиз, М., 1960.
2. А. Л. Рейман, Термоионная эмиссия, ГИТТЛ, Л., 1940.
3. W. M. Brubaker, Phys. Rev., **83**, 268 (1951).
4. С. Д. Гвоздовер, Теория электронных приборов сверхвысоких частот, ГИТТЛ, М., 1956, стр. 101.
5. Л. Я. Окунев, Высшая алгебра, Госучпедиздат, М., 1958, стр. 212.
6. В. Ф. Власов, Электронные и ионные приборы, Связьиздат, М., 1960, стр. 55.
7. G. Smith, Phys. Rev., **94**, 295 (1954).
8. Г. Н. Шуппе, Электронная эмиссия металлических кристаллов, изд. САГУ, Ташкент, 1959, стр. 54.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступила в редакцию
15 апреля 1961 г.

THE THEORY OF PLATE DIODE WITH UNIFORM CATHODE UNDER SATURATION REGIME

V. A. Malyshev

The analysis of space charge influence on current voltage characteristic of the plate diode is carried out in the saturation region for the cathode without spots and roughnesses.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА РАСПЫЛЕНИЯ МЕДИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ МИШЕНИ, ПЛОТНОСТИ ТОКА И УГЛА ПАДЕНИЯ ИОНОВ АРГОНА С ЭНЕРГИЕЙ 10÷30 *кэв*

Н. В. Плешивцев

При помощи ионной пушки исследовалась зависимость коэффициента распыления S от температуры мишени, плотности тока ионов и угла падения ионов. Оказалось, что в интервале температур 100÷680°С и плотностей тока 0,1÷3,2 $ма \cdot см^{-2}$ S не зависит от указанных параметров распыления. В пределах углов падения $\alpha=0\div70°$ $S_\alpha = S_0 \sec\alpha$, где S_0 — коэффициент распыления при нормальном падении ионов на образец.

При исследовании катодного распыления в условиях тлеющего разряда было замечено [1–4], что скорость распыления (*г/а—час*) проволочных катодов значительно выше, чем плоских катодов. Кроме того, оказалось, что уменьшение диаметра проволочного катода приводит к увеличению скорости распыления. Эти экспериментальные факты некоторые авторы (см. [2]) объясняли уменьшением обратной диффузии распыленных атомов на проволочные катоды. Фетц [3] указал на другую причину. Он считал, что увеличение угла падения ионов на поверхность проволочного катода приводит к увеличению скорости распыления. Однако еще никому не удалось определить величину наиболее вероятного угла падения ионов на поверхность проволочных катодов в условиях разряда.

В связи с этим первые количественные измерения влияния угла падения ионов на величину коэффициента распыления (число атомов, выбиваемых одним ионом) были сделаны только в 1958 г. при помощи ионных пучков [5,6]. Рол, Флюйт и Кистемакер [5] исследовали распыление меди пучком ионов аргона с энергией 20 *кэв* в пределах углов падения $\alpha=0\div50°$. Недостаток этих опытов заключается в большом угле расхождения пучка ионов—до 15°. В работе [6] изучалось распыление меди неанализированным пучком ионов водорода в диапазоне энергий 14÷54 *кэв* при углах падения 0° и 60°. Венер [7] распылял металлические шарики несфокусированным пучком ртути с энергией 125÷800 *эв*. Косвенным путем определялась зависимость $S(\alpha)$. Наконец, недавно Молчанов и Тельковский [8] тщательно изучили распыление меди ионами аргона с энергией 27 *кэв* в интервале углов падения 0÷84°. Однако следует отметить, что они не исследовали зависимость коэффициента распыления от плотности тока ионов и температуры мишени. Между тем, эти факторы могут при малых плотностях тока (больших углах падения, $\alpha > 80°$) снизить величину коэффициента распыления вследствие образования пленок на поверхности мишени [9]. Этим отчасти объясняется резкое уменьшение S при $\alpha \geqslant 80°$.

Зависимость $S(T, j)$ имеет большое значение как для теории катодного распыления, так и для практических целей, но известные данные о зависимости распыления от температуры противоречивы. Влияние плотности тока при энергиях 10÷30 *кэв* исследовалось только

в одной работе [9]. Поэтому представляет интерес исследовать эти вопросы при энергиях ионов 10÷30 *кэв*.

1. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Пучок ионов аргона создавался ионной пушкой с дуаплазмотронным источником ионов типа Арденне-Демирханова, усовершенствованной Поповым, Орфановым и др. [10,11]. Угол расхождения пучка не превышал 5°. Ионы направлялись на мишень, изготовленную из медной фольги толщиной 0,2 *мм* (см. рис. 1). Мишень (2) вырезалась из фольги таким образом, чтобы получался эллипс с 3—4 полосками (3) длиной до 80 *мм* и шириной 5÷20 *мм*. При помощи этих полосок производилась установка мишени под определенным углом к направлению падения пучка ионов. Концы полосок прижимались кольцом (5) к донышку цилиндра Фарадея, который охлаждался водой. Вся система обладала хорошей жесткостью. Полоски использовались для измерения количества ионов, приходящих на мишень, а также для изменения температуры мишени, которая нагревалась самим пучком ионов. Регулирование температуры осуществлялось путем использования различных мишеней с соответствующим изменением длины и ширины полосок.

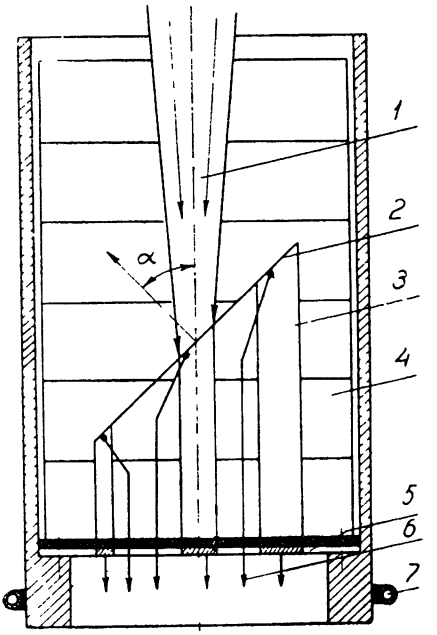


Рис. 1. Схема эксперимента:
1—пучок ионов, 2—мишень, 3 — полоски для установки мишени, 4—коллекторные пояски, 5—прижимное кольцо, 6—термопары, 7—охлаждение цилиндра Фарадея.

В ряде опытов по изучению распыления было показано, что чистота поверхности мишени зависит от плотности тока ионов, температуры мишени и давления остаточных газов. При изменении угла падения ионов на мишень значительно меняется плотность тока, поэтому измерению зависимости $S(\alpha)$ должно предшествовать изучение влияния плотности тока и температуры мишени на величину коэффициента распыления. Таких данных для данной комбинации металл-ион еще нет.

Температура поверхности мишени контролировалась при помощи трех или четырех термопар медь-копель. Они крепились на периферии мишени у основания полосок. Действительная температура участка мишени, находящегося под пучком, превышала измеряемую температуру примерно в $(1+r/l)$ раз (здесь r—расстояние от термопары до центра пучка, l—длина медной полоски). Отношение r/l составляло 0,1÷0,3, что соответствовало поправке к измеряемой температуре, равной 10÷30%. Указанное соотношение между размерами мишени и длиной полосок фольги не приводило к существенным изменениям температуры распыляемого участка мишени при изменении плотности тока ионов.

Для учета излучения тепла мишенью при температурах 300÷700°С проводилась градуировка мишени с помощью специального подогре-

вателя. При этом снималась зависимость между подводимой мощностью и температурой мишени. Относительная равномерность нагрева поверхности мишени пучком ионов обеспечивалась путем несложных расчетов по выбору ширины длинных и коротких полосок.

На рис. 2 показана хронограмма одного из типичных опытов. В этом опыте мишень крепилась на трех полосках и температура

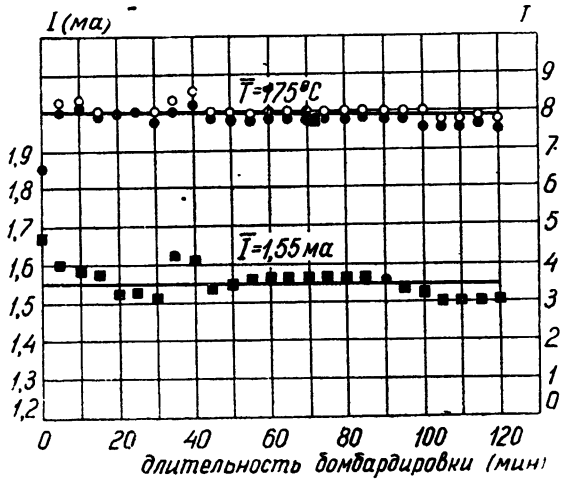


Рис. 2. Хронограмма одного из опытов:
определение температуры T поверхности мишени и тока I ионов Ar^+ электрическим методом. Темные точки—температура двух термопар, светлые точки—температура третьей термопары. Температура T—в *мв* (1 *мв*=22°C).

определялась в трех точках. Показания двух термопар в течение всего опыта совпадали, а температура в третьей точке всего на 3÷5% превышала температуру в указанных двух точках. Температура холодных концов полосок сохранялась постоянной (22°C). Определив среднюю разность температур за опыт $\overline{T}$, по закону теплопроводности, либо при помощи градуировочной кривой (построенной с подогревателем), рассчитывался поток тепла через полоски. Разделив его на энергию ионов, которая измерялась электростатическим киловольтметром с точностью 1,5%, получали среднюю силу тока ионов за опыт. Таким путем устранялось влияние вторичных электронов, выбиваемых ионами, ток которых складывается с током ионов при измерении электрическими приборами. Для дополнительного контроля за током ионов проводились обычные электрические измерения с запирающим потенциалом (100 *в*) на цилиндре Фарадея либо без потенциала (для измерения коэффициента вторичной электронной эмиссии; см. рис. 2).

Сила тока ионов аргона обычно составляла 0,5 *ма*, иногда 0,8 *ма*. Длительность бомбардировки поддерживалась постоянной—120 *мин* и только в некоторых опытах она уменьшалась до 50 ÷ 70 *мин*. Плотность тока изменялась в пределах от 0,1 до 3,2 $ма \cdot см^{-2}$. Общее количество ионов, упавших на мишень за опыт, поддерживалось постоянным (3,5÷4 кулона). При абсолютных измерениях коэффициента распыления наиболее надежным способом измерения количества распыленных атомов является взвешивание мишеней. В настоящих опытах использовался этот метод. Для контроля определялся также вес распыленной меди, конденсировавшейся на коллекторах. Коллекторами (4) служили пояски из фосфористой бронзы, которые плотно приле-

гали к внутренней поверхности цилиндра Фарадея. Они позволяли определить объемное распределение атомов меди*.

Вес атомов меди, ушедших из мишени, составлял 17÷47 *мг* за опыт. На коллекторах осаждалось 15÷40 *мг*, а остальная часть распыленных атомов выходила из цилиндра. Точность взвешивания мишени и коллекторов была 0,2 *мг*.

Коэффициент распыления рассчитывался по формуле:

$$S = \frac{N_{\text{атомов}}}{N_{\text{ионов}}} = \frac{6{,}023 \cdot 10^{23}\, m\, Ze}{AIt} \simeq 1{,}5 \cdot 10^{3}\, \frac{m}{It}, \qquad (1)$$

m—вес распыленного вещества в *г*, где $6{,}023 \cdot 10^{23}$ — число Авогадро, Ze--заряд иона в кулонах, A—атомный вес распыляемого вещества, I—ток ионов в *а*, t—длительность бомбардировки в *сек*. На практике обычно пользуются понятием „скорость распыления" G(*г*/*а*—*час*), которая связана с S простым соотношением:

$$G = 3{,}7 \cdot 10^{-2} AS. \qquad (2)$$

Точность измерения коэффициента распыления оценивается в 5÷10%, а относительная ошибка измерений—в 4%. Вакуум в установке создавался паромасляным диффузионным насосом со скоростью откачки 1000 $л \cdot сек^{-1}$ и во время работы составлял $(2 \div 4)\ 10^{-5}$ *мм* рт. ст. по воздуху.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ОПЫТОВ

Зависимость коэффициента распыления меди ионами аргона от температуры мишени представлена на рис. 3. При энергии ионов 10 *кэв*, плотности тока 1,8 $ма \cdot см^{-2}$ и угле $\alpha = 0°$ в области температур 100÷680°С коэффициент постоянен и равен 7,9±0,3 атомов/ион.

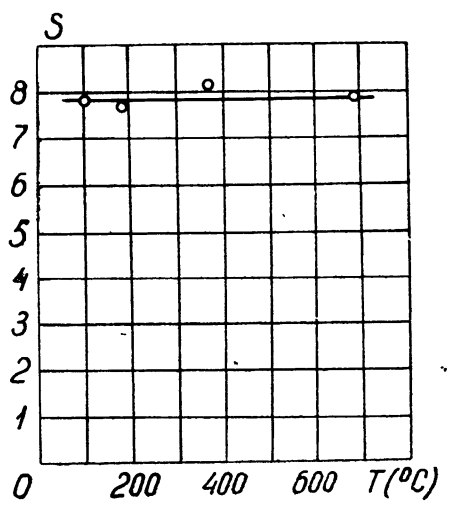


Рис. 3. Зависимость коэффициента распыления меди S (числа атомов Cu на ион Ar^+) от температуры T поверхности мишени (энергия Ar^+ 10 *кэв*, плотность тока 1,8 $ма \cdot см^{-2}$, угол $\alpha = 0°$).

При расчетах коэффициента распыления учитывалась поправка на вес ионов аргона, которые внедряются в мишень. Поправка увеличивала убыль веса мишени примерно на 8%.

Значение S, полученное по измерениям веса атомов, осажденных на коллекторы, примерно, на 20% меньше: 6,1 ± 0,5 атомов/ион. Это

* Обсуждение этого вопроса явится предметом отдельного сообщения.

объясняется тем, что коллекторы не охватывали всю сферу объемного распределения распыленных атомов.

На рис. 4 показано влияние плотности тока j на величину коэффициента распыления S. При энергии ионов аргона 30 *кэв*, $\alpha=0°$, тем-

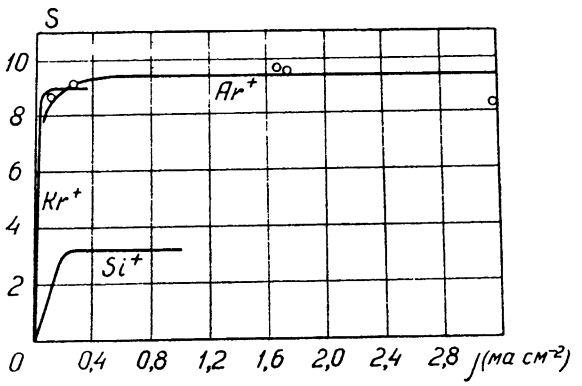


Рис. 4. Зависимость коэффициента распыления S от плотности тока j ионов аргона Ar^+ (энергия 30 *кэв*, температура 600°С, $\alpha=0°$). Данные для ионов Kr^+ и Si^+ с энергией 20 *кэв* взяты из работы [9].

пературе поверхности меди 600°С в области плотностей тока $0{,}1 \div 3{,}2$ *ма·см*$^{-2}$ коэффициент распыления постоянен и равен $9{,}4 \pm 0{,}2$ атома/ион (по данным напыления на коллекторы $7{,}2 \pm 0{,}4$ атомов/ион). Необходимо отметить, что ионная пушка, использованная в опытах, создает пучок ионов, распределение плотности в котором описывается гауссовой кривой [11, 12]. Это приводит к тому, что на поверхности мишени отчетливо наблюдается пятно от пучка ионов и различная степень ионного травления, пропорциональная плотности тока ионов.

В данных опытах определялась минимальная и максимальная плотность ионов на мишени и принималось среднее значение этих ве-

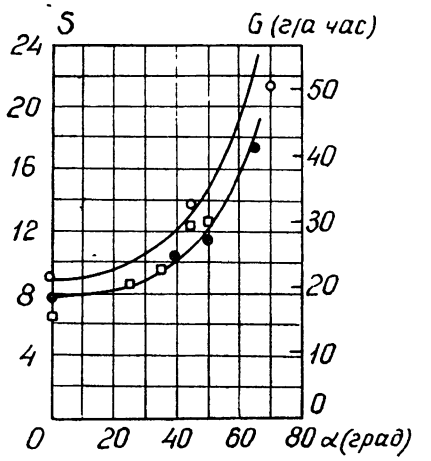


Рис. 5. Зависимость коэффициента и скорости распыления меди от угла падения ионов аргона α (отсчет от нормали к поверхности):

○—энергия ионов 30 *кэв*, ●—энергия ионов 10 *кэв*, □—энергия ионов 20 *кэв*—данные работы [9].

личин. Диафрагмирование пучка ионов с целью получения однородного пучка ионов, как известно [6,9], в опытах по распылению недо-

пустимо. Поэтому относительная однородность плотности тока ионов в пучке достигалась изменением потенциала на среднем электроде одиночной электростатической линзы [11].

Результаты измерения зависимости коэффициента распыления от угла падения ионов изображены на рис. 5. При энергии ионов аргона 10 *кэв* температура мишени была 300÷400°С, плотность тока изменялась в пределах 0,8—2,0 *ма·см*$^{-2}$. При энергии ионов 30 *кэв* температура и плотность тока изменялись соответственно в пределах 475—600°С и 1,7—3,2 *ма·см*$^{-2}$. Экспериментальные точки располагаются довольно близко к кривым

$$S_\alpha = S_0 \sec \alpha, \tag{3}$$

где S_0—коэффициент распыления при перпендикулярном падении ионов на поверхность, S_α —коэффициент распыления в диапазоне углов падения ионов $\alpha=0\div70°$. Аналогичные зависимости получены и по данным напыления меди на коллекторах. Однако, как и в предыдущих измерениях, величины S_α оказались меньше, примерно, на 20% по сравнению с измерениями, основанными на взвешивании мишеней.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Зависимость коэффициента распыления от температуры образца исследовалась многими авторами. При этом были получены довольно противоречивые сведения. В одних работах (см., например, [3,13]) наблюдалось увеличение распыления с увеличением температуры. В других работах [14] не было обнаружено влияние нагрева образца на распыление.

Среди многих причин, могущих оказать влияние на распыление при нагреве образца (поверхностная миграция атомов, диффузия загрязнений из глубины металла на поверхность, отжиг дефектов, созданных ионами в решетке, изменение упругих свойств металла), пожалуй, наибольшее воздействие оказывает процесс образования на поверхности мишени загрязнений в виде прочных полимерных пленок, состоящих из окисей и других химических соединений. Устранение этих пленок возможно путем уменьшения давления остаточных газов до значений порядка 10^{-10} *мм* рт. ст. или путем снятия этих пленок распылением. Получение указанного вакуума при токе ионов порядка нескольких миллиампер, необходимом для абсолютных измерений S, требует насосов со скоростями откачки, исчисляемыми миллионами литров в секунду. Поэтому практически используется второй способ.

Условие, при котором процесс очистки поверхности за счет катодного распыления будет значительно превосходить процесс образования пленок при температуре остаточных газов 20°С, имеет вид:

$$6{,}25\cdot10^{18} jS \gg 3{,}5\cdot10^{20} pk, \tag{4}$$

где j—плотность тока ионов ($a\cdot см^{-2}$), S—коэффициент распыления (атомов/ион), p — парциальное давление молекул остаточных газов (*мм* рт. ст.), k—коэффициент „прилипания" (активации) молекул к поверхности под воздействием ионов. Коэффициент прилипания зависит от многих факторов, в том числе от температуры мишени и природы ионов. Для определения значения этого коэффициента и его исследования можно воспользоваться зависимостью между коэффициентом распыления и плотностью тока ионов на мишени. Из рис. 4 видно, что по мере увеличения плотности тока ионов при определенном зна-

чении $j_{кр}$ наступает момент, когда скорость удаления пленки распылением значительно превышает скорость ее образования (кривые переходят в насыщение). По значениям $j_{кр}$ можно определить k. Так, из данных Гусевой [9] и наших результатов следует, что для ионов кремния, аргона и криптона плотность тока, приводящая к очистке поверхности от загрязнений, равна соответственно 170, 100 и 35 *мка·см*$^{-2}$ для указанных условий опыта (энергия ионов, температура мишени, давление газов). Коэффициент прилипания для этих ионов и условий равен 0,5; 0,4 и 0,3 соответственно. Это означает, что каждая вторая или третья молекула из остаточных газов вступает в химическое взаимодействие с поверхностью образца, а остальные отражаются от нее.

Зависимость $S \sim \sec\alpha$ получена в теории Гольдмана и Симона [15], разработанной для ионов с энергией выше 50 *кэв*. Авторы получили ее в результате определения плотности тока ионов в плоскости мишени через плотность в поперечном сечении пучка. Другими словами, авторы считают ответственным за увеличение коэффициента распыления увеличение поверхности, с которой взаимодействуют ионы. При этом должна наблюдаться зависимость от плотности тока ионов. Однако на эксперименте эта зависимость не наблюдается; если же она появляется в определенном диапазоне плотностей тока, то это связано с процессом очистки поверхности от загрязнений. Полученная на опыте зависимость $S(\alpha)$, вероятно, связана с изменением вероятности выхода смещенных в междоузлия атомов из металла по мере изменения направления первоначального импульса иона, а также с уменьшением глубины, с которой смещенные атомы диффундируют и эжектируются в вакуум.

Необходимо отметить, что автору статьи не известны значения удельного максимального насыщения ионами аргона поверхности меди. Судя по незначительному внедрению ионов аргона в никель [16], поправкой на вес ионов можно, вероятно, пренебречь. Если это подтвердится и для меди, то приведенные на графиках значения коэффициента распыления надо уменьшить на 8%.

В заключение автор благодарит Б. К. Шембеля, В. А. Теплякова и И. В. Орфанова за предоставление ионной пушки для выполнения экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Kohlschutter, Z. Elektrochemic und angew, Phys. Chemie, **15**, 316 (1909)
2. A. Güntherschulze, Z. Phys., **38**, 575 (1926).
3. H. Fetz, Z. Phys, **119**, 590 (1942).
4. G. K. Wehner, J. Appl. Phys., **25**, 270 (1954).
5. P. K Rol, J. M. Fluit., J. Kistemaker, Proc. Intern. Symposium Isotope Separation, Amsterdam, 1957; North—Holland Publ. Comp, 1958, стр 631.
6. Н. В. Плешивцев, ЖЭТФ, **37**, 1233 (1959).
7. G. Wehner, J. Appl. Phys., **30**, 1762 (1959).
8. В. А. Молчанов, В. Г. Тельковский, ДАН СССР, **36**, 801 (1961).
9. М. И. Гусева, Ж. физики твердого тела, 1. 1540 (1959).
10. И. В. Орфанов, В. А. Тепляков, ПТЭ, № 2, 150 (1960).
11. С. Н. Попов, ЖТФ, **31**, 217 (1961).
12. Н. В. Плешивцев, ПТЭ, № 1, 163 (1961).
13. Л. В. Зырина, М. Д. Ягудаев, Труды Среднеазиатского ун-та им, Ленина, № 65, 33 (1955).
14. Н. Д. Моргулис, М. П. Бернадинер, А. М. Патиоха, Phys. Zeit. Sowietunion, **9**, 302 (1936).
15. D. T. Goldman, A. Simon, Bull, Amer. Phys. Soc., ser. 2, **3**, 40 (1958); Phys. Rev., **111**, 383 (1958).
16. Г. А. Ковальский, А. М. Родин, ПТЭ, № 6, 84 (1960).

Поступила в редакцию
5 мая 1961 г.

DEPENDENCE OF THE COPPER SPUTTERTNG UIELD ON THE TARGET TEMPERATURE, CURRENT DENSITY, AND INCIDENCE ANCLE OF THE ARGON IONS WITH THE ENERGY OF 10÷30 *KEV*

N. V. Pleschivtsev

The dependence of sputtering yield S on the target temperature, ion current density and incidence angle has been investigated by means of an ion gun. It was found that S does not depend on the temperature and current densities interval of 100–680° C and 0,1–3,2 ($ma \cdot cm^{-2}$) respectively. In the incidence angle range of $\alpha=0\div70°$, S_α equals to $S_0 \sec \alpha$, where S_0 is the sputtering yield for normal incidence of ions at the specimen.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

ДВУХКОНТУРНЫЙ ГЕНЕРАТОР С НЕЛИНЕЙНОЙ ЕМКОСТЬЮ

С. А. Ахманов, Ю. А. Кравцов

Исследованы характеристики двухконтурного параметрического генератора, в котором в качестве управляемого реактивного элемента использовалась нелинейная емкость. В предположении, что ограничение стационарной амплитуды происходит за счет нелинейности емкости, вычислены кривые параметрического резонанса, форма областей неустойчивости и амплитудные характеристики. Особое внимание уделено факторам, определяющим нестабильности генерируемых частот, и, в частности, нелинейным поправкам к частоте. Отмечены режимы, в которых наличие нелинейных поправок мало влияет на стабильность частоты, и обсуждается вопрос о стабильности фаз генерируемых колебаний. Приводятся экспериментальные данные, хорошо согласующиеся с проведенным расчетом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Двухконтурные параметрические генераторы, исследование которых было начато в последнее время*, привлекают к себе внимание вследствие ряда их ценных свойств. Среди них в первую очередь должны быть названы повышенная стабильность частоты [2,3,6], возможность деления частоты с большой кратностью, возможность создания эффективного ограничителя амплитуды [4] и т. д. В связи со сказанным значительный интерес приобретает детальное теоретическое и экспериментальное исследование рабочих характеристик и различных режимов работы двухконтурных генераторов. Теоретически двухконтурные генераторы с внешним генератором накачки** исследовались в [2], где в квазилинейном приближении рассматривались факторы, определяющие стабильности генерируемых частот, и в [6], где рассматривались вопросы о стабильности частоты и о захватывании двухконтурного генератора.

Важно подчеркнуть, что результаты, полученные в [2] и [6], являются точными лишь в том случае, когда ограничение амплитуды стационарных колебаний происходит за счет конечной мощности колебаний, развиваемых генератором накачки. Такой режим практически реализуется, однако, далеко не всегда; помимо этого режима в реальных двухконтурных генераторах ограничение стационарной амплитуды может происходить за счет нелинейной реактивности (емкости или индуктивности), нелинейной проводимости, а также их комбинации. Так, при использовании в качестве управляемого реактивного элемента емкости $p-n$-перехода (этот случай представляет, как известно, наибольший практический интерес) основную роль в процессе ограничения стационарной амплитуды играют нелинейная емкость и нелинейная проводимость полупроводникового диода. Вид нелинейно-

---

* Отметим, что двухконтурная схема, в которой контур с переменной емкостью подключается к пассивному контуру, исследовалась еще в 40-х годах Лазаревым [1]; в настоящей работе под двухконтурным параметрическим генератором подразумевается система двух контуров, связанных нелинейной реактивностью.

** Интересным вариантом двухконтурного параметрического генератора является генератор с параметрической обратной связью, в котором напряжение накачки синтезируется из параметрически возбуждаемых колебаний. Исследование специфических особенностей такого генератора было проведено одним из авторов ранее [5].

сти, как известно, сильно влияет на форму области параметрического резонанса, вид амплитудных кривых и т. п. Если двухконтурный параметрический генератор используется в качестве стабильного диапазонного генератора, особый интерес представляет вопрос о нелинейных поправках к частоте, без вычисления которых не может быть решен вопрос о предельной стабильности частоты. Отметим, что в [6] этот важный вопрос вообще не затрагивается.

Предметом настоящей работы является исследование нелинейных свойств двухконтурного параметрического генератора, выполненное, в основном, для целей диапазонной стабилизации частоты. Эксперимент показывает (см. также [7]), что наиболее типичным режимом ограничения амплитуды колебаний в параметрических генераторах, использующих управляемую емкость p—n-перехода, является режим ограничения за счет нелинейной емкости. Следует отметить также, что если существенным является уровень шумовой амплитудной и фазовой модуляции двухконтурного генератора (как это имеет место, например, в задаче диапазонной стабилизации частоты), режим ограничения амплитуды за счет нелинейной емкости более предпочтителен, нежели режим ограничения за счет нелинейной проводимости, поскольку появление токов через p—n-переход связано с резким увеличением уровня шумов. Поэтому основное внимание в настоящей работе уделено режиму ограничения за счет нелинейной емкости; результаты расчетов сопоставляются с экспериментом.

1. ТЕОРИЯ ДВУХКОНТУРНОГО ГЕНЕРАТОРА С НЕЛИНЕЙНОЙ ЕМКОСТЬЮ

Основные уравнения. Рассмотрим схему, представленную на рис. 1. Здесь два колебательных контура с параметрами L_n, C_n, r_n связаны нелинейной емкостью C, имеющей характеристику:

$$C = C_0 + \sigma u + \gamma u^2. \tag{1}$$

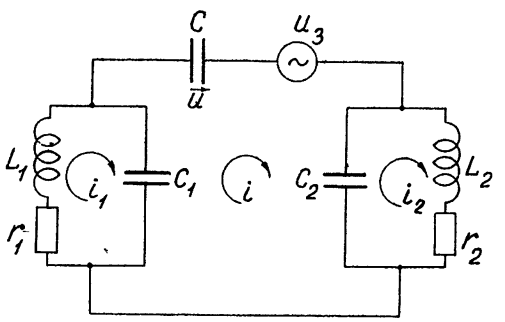


Рис. 1. Эквивалентная схема двухконтурного генератора с нелинейной емкостью.

В схему включен генератор накачки, развивающий напряжение

$$u_3 = A_3 \cos(\omega_3 t).$$

Если $C/C_1 \sim C/C_2 \ll 1$ и добротности контуров достаточно велики, уравнения Кирхгофа для напряжений $u_1 = \frac{1}{C_1}\int i_1\,dt$, $u_2 = \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt$ и тока i через нелинейную емкость имеют вид:

$$L_1 C_1 \frac{d^2u_1}{dt^2} + r_1 C_1 \frac{du_1}{dt} + u_1 - \frac{1}{C_i}\int i\,dt = 0; \tag{2}$$

$$L_2C_2\frac{d^2u_2}{dt^2}+r_2C_2\frac{du_2}{dt}+u_2-\frac{1}{C_2}\int i\,dt=0; \tag{3}$$

$$i=\frac{d}{dt}[Cu]; \tag{4}$$

$$u=u_1+u_2+u_3. \tag{5}$$

Решения уравнений (2)—(5) будем искать в виде

$$u_1=A_1(t)\cos[\omega_1 t+\varphi_1(t)],\quad u_2=A_2(t)\cos[\omega_2 t+\varphi_2(t)],$$

где $A_1(t)$, $A_2(t)$, $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$—медленно меняющиеся во времени амплитуды и фазы, а частоты ω_1 и ω_2 близки к собственным частотам двухконтурной системы. Предполагая, что гармоники и комбинационные частоты напряжений u_1 и u_2 не влияют на процессы, протекающие в двухконтурном генераторе *, а потери малы, можно получить, используя обычную процедуру, укороченные уравнения для медленно меняющихся амплитуд и фаз:

$$\frac{dA_1}{dt}+\frac{1}{2}\omega_1\vartheta_1A_1+\frac{1}{2}\omega_1A_2A_3\frac{\sigma}{C_1}\sin\psi=0; \tag{6}$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt}+\Delta\omega_1+\omega_1\frac{C_{н1}}{2C_1}+\frac{1}{2}\omega_1\frac{A_2}{A_1}A_3\frac{\sigma}{C_1}\cos\psi=0; \tag{7}$$

$$\frac{dA_2}{dt}+\frac{1}{2}\omega_2\vartheta_2A_2+\frac{1}{2}\omega_2A_1A_3\frac{\sigma}{C_2}\sin\psi=0; \tag{8}$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt}+\Delta\omega_2+\omega_2\frac{C_{н2}}{2C_2}+\frac{1}{2}\omega_2\frac{A_1}{A_2}A_3\frac{\sigma}{C_2}\cos\psi=0. \tag{9}$$

Здесь

$$\psi=\varphi_1+\varphi_2;\quad C_{н1}=\frac{3}{2}\gamma\left[\frac{1}{2}A_1^2+A_2^2+A_3^2\right];$$

$$C_{н2}=\frac{3}{2}\gamma\left[\frac{1}{2}A_2^2+A_1^2+A_3^2\right];\quad \vartheta_n=\frac{r_n}{\omega_nL_n}\quad(n=1,2),$$

расстройки $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$ равны соответственно $\omega_1-\Omega_1$ и $\omega_2-\Omega_2$, где, в свою очередь, $\Omega_n=1/\sqrt{L_n(C_n+C_0)}$ $(n=1,2)$—собственные частоты системы связанных контуров в случае малой статической связи ($C_0\ll C_{1,2}$; см. также [8]).

Нетрудно видеть, что фазовые уравнения (7), (9) сводятся к одному уравнению для суммарной фазы:

$$\frac{d\psi}{dt}+\Delta\Omega+\omega_1\frac{C_{н1}}{C_1}+\omega_2\frac{C_{н2}}{C_2}+\frac{1}{2}\left[\omega_1\frac{A_2}{A_1}A_3\frac{\sigma}{C_1}+\omega_2\frac{A_1}{A_2}A_3\frac{\sigma}{C_2}\right]\cos\psi=0, \tag{10}$$

* Указанное предположение заведомо не выполняется при отношении собственных частот, близком к целому числу; этот случай, представляющий специальный интерес, должен быть рассмотрен отдельно.

где

$$\Delta\Omega=\Delta\omega_1+\Delta\omega_2=\omega_1+\omega_2-\Omega_1-\Omega_2=\omega_3-\Omega_1-\Omega_2$$

—расстройка частоты накачки относительно суммы собственных частот двухконтурной системы.

Таким образом, в автономном двухконтурном генераторе фазы φ_1 и φ_2 произвольны; фиксирована лишь их сумма ψ. В рассматриваемом случае генератора с нелинейной емкостью уравнения для амплитуд и фаз не разделяются и должны решаться совместно. Ограничение амплитуды связано с членом $\Delta\Omega_{\text{пл}}=\omega_1 C_{\text{н}1}/C_1+\omega_2 C_{\text{н}2}/C_2$, который может быть назван „нелинейной расстройкой". Возрастание $\Delta\Omega_{\text{нл}}$ с ростом амплитуд A_1, A_2 приводит к уменьшению энергии, передаваемой накачкой параметрически возбужденным колебаниям, и, следовательно, ограничению амплитуды; указанный механизм совершенно аналогичен механизму ограничения амплитуды в одноконтурном параметрическом генераторе с нелинейной индуктивностью, исследованному еще Мандельштамом и Папалекси [9]. Следует подчеркнуть, однако, что в отличие от изученного в [9] случая гетеропараметрического воздействия на колебательный контур рассматриваемый в данной работе случай значительно ближе к автопараметрическому воздействию, поскольку амплитуда накачки A_3 определяет здесь не только глубину модуляции реактивного параметра, но и его среднее значение (через нелинейную расстройку $\Delta\Omega_{\text{нл}}$). Связанные с этим особенности генератора будут рассмотрены ниже.

Условия параметрического возбуждения двухконтурной системы. Обратимся прежде всего к исследованию устойчивости состояния равновесия, соответствующего $A_1=A_2=0$. Вычисляя по известным правилам коэффициенты характеристического уравнения и пользуясь критерием Раута-Гурвица, получим условие возбуждения двухконтурной системы в виде:

$$(\xi+bA_3^2)^2<A_3^2m^2-1. \qquad (11)$$

Здесь $\xi=2\Delta\Omega/(h_1+h_2)$—безразмерная расстройка, $h_n=\omega_n\vartheta_n$ $(n=1,2)$,

$$b=\frac{3\gamma/2}{h_1+h_2}\left(\frac{h_2}{C_2\vartheta_2}+\frac{h_1}{C_1\vartheta_1}\right); \qquad m^2=\frac{\sigma^2}{C_1C_2\vartheta_1\vartheta_2}.$$

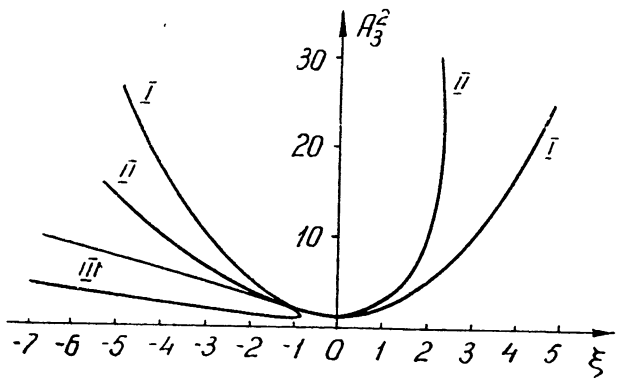


Рис. 2. Области неустойчивости двухконтурной системы:
I—$\gamma=0$ ($b=0$); II, III—$\gamma>0$. II—$\gamma>0$; $b=0{,}1$. III—$\gamma>0$; $b=1$ (всюду $m^2=1$).

Легко видеть, что параметрическое возбуждение в принципе возможно лишь для $m^2A_3^2\geqslant 1$.

На рис. 2 изображены области неустойчивости двухконтурной

параметрической системы в координатах ξ, A_3^2 для $\gamma>0$. Для сравнения на этом же рисунке приведена область неустойчивости для $\gamma=0$, соответствующая линейной системе с периодически изменяющейся емкостью.

Полагая в (11) $\gamma=0$, приходим к обычному условию самовозбуждения двухконтурного параметрического усилителя:

$$A_3^2 m^2 = \frac{A_3^2\sigma^2}{C_1C_2}\frac{1}{\vartheta_1\vartheta_2} = \left(\frac{\Delta C}{\sqrt{C_1C_2}}\right)^2 \frac{1}{\vartheta_1\vartheta_2} > \xi^2+1,$$

где $\Delta C=\sigma A_3$—амплитуда изменения емкости.

Из приведенных графиков видно, что если в линейной системе амплитуда накачки, достаточная для возбуждения, минимальна при $\xi=0$ и монотонно нарастает с ростом $|\xi|$, то в системе с нелинейной емкостью этот минимум достигается при $|\xi|=bm^{-2}$, причем знак этой оптимальной расстройки зависит от знака γ. Область неустойчивости теперь уже несимметрична относительно оси $\xi=0$; с ростом γ несимметрия возрастает.

Исследование стационарного режима. Полагая в (6) ÷(10) производные равными нулю, получим выражение для стационарных амплитуд, частот и фаз. Отметим, прежде всего, что, как видно из (6) и (8), для отношения амплитуд генерируемых колебаний имеет место простое соотношение:

$$A_2^2/A_1^2=\vartheta_1C_1/\vartheta_2C_2\,. \tag{12}$$

Из (7) и (9), пользуясь (12), можно вычислить стационарные расстройки; для $\Delta\omega_1$, например, имеем:

$$\Delta\omega_1 = \Delta\Omega\,\frac{h_1}{h_1+h_2} + \frac{h_1h_2}{h_1+h_2}\,\frac{3}{4}\,\gamma\left(\frac{1}{\vartheta_2C_2}-\frac{1}{\vartheta_1C_1}\right)\times \\ \times\left\{\frac{A_1^2}{2}\left(\frac{\vartheta_1C_1}{\vartheta_2C_2}+1\right)+A_3^2\right\}. \tag{13}$$

С помощью (6), (7), (12), (13) нетрудно вычислить и стационарные амплитуды параметрически возбужденных колебаний. Выражение для амплитуды A_1 имеет следующий вид:

$$aA_1^2=\pm\sqrt{A_3^2m^2-1}\;-\xi-bA_3^2, \tag{14}$$

где

$$a=\frac{3\gamma/2}{h_1+h_2}\left\{\frac{h_2}{C_2\vartheta_2}\left(1+\frac{\vartheta_1C_1}{2\vartheta_2C_2}\right)+\frac{h_1}{C_1\vartheta_1}\left(\frac{1}{2}+\frac{\vartheta_1C_1}{\vartheta_2C_2}\right)\right\}.$$

С помощью (14) могут быть проанализированы как случай $\gamma>0$, так и $\gamma<0$; при этом в последнем случае следует лишь изменить знак при ξ. Выражение (14) для амплитуды параметрически возбужденных колебаний в значительной мере аналогично выражению для амплитуды одноконтурного параметрического генератора с нелинейной индуктивностью, приведенному, например, в работе [9]. Это относится в первую очередь к зависимости амплитуды от расстройки ξ; нетрудно видеть, что форма области параметрического резонанса двухконтурного генератора с нелинейной емкостью совершенно аналогична таковой для одноконтурного генератора, в котором ограничение амплитуды происходит также за счет нелинейной реактивности. Нарастание амплитуды с ростом отрицательной (при $\gamma>0$) и положительной (при

$\gamma<0$) расстройки носит линейный характер; при этом на одном из краев области параметрического резонанса имеет место жесткий режим и гистерезис; для детального расчета явлений в этой области необходим учет нелинейных членов более высокого порядка. Обсуждение указанного вопроса см., например, в [9,10].

Новые обстоятельства выявляются при анализе зависимости амплитуды A_1 от амплитуды накачки A_3. Поскольку последняя входит в (14) дважды, нетрудно видеть, что в двухконтурном генераторе с нелинейной емкостью имеется не только „порог", но и „потолок" по мощности накачки, аналогично тому, как это имеет место в случае резонанса 2-го рода в ламповой схеме * (см., например, [11]).

Характер зависимости величины aA_1^2 от A_3^2 для $\gamma>0$ проиллюстрирован на графиках рис. 3; параметром кривых является относительная

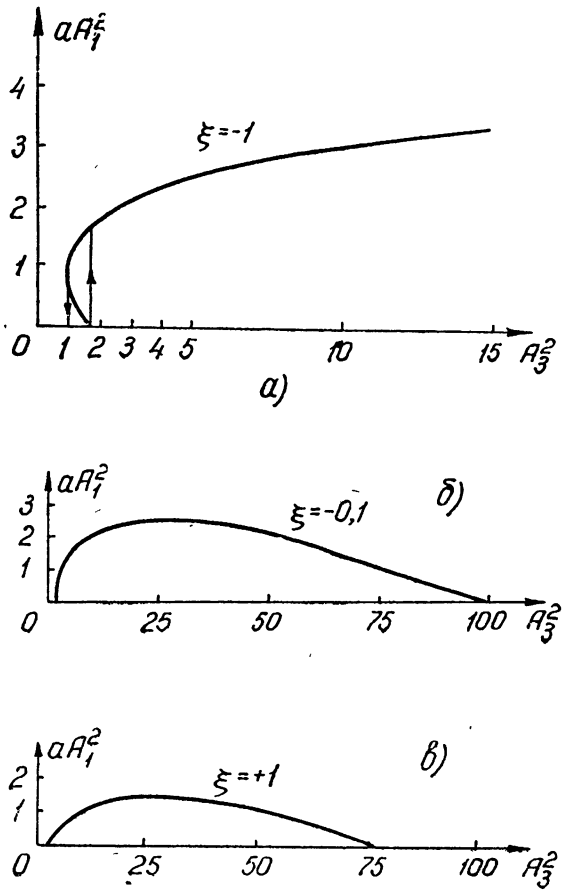


Рис. 3. Графики зависимости величин aA_1^2 от A_3^2 для различных расстроек ξ ($\gamma>0$):

а) $\xi<-b/m^2$ (на графике приведена лишь гистерезисная часть кривой); б) $\xi=-b/m^2$; в) $\xi>-b/m^2$. Для всех трех кривых $m^2=1$; $b=0{,}1$.

* Аналогичные явления должны иметь место, разумеется, и в одноконтурном генераторе с нелинейной емкостью, характеристика которой содержит квадратичный член (см. [7]).

расстройка ξ. В области отрицательных расстроек характер кривых зависит от соотношения между ξ и величиной bm^{-2}. При $\xi < -bm^{-2}$ имеет место петля гистерезиса вблизи $A_3^2 = m^{-2}$ (см. в связи с этим также (11)); для $\xi > -bm^{-2}$ амплитуда A_1 однозначно связана с A_3^2. При дальнейшем увеличении ξ в область положительных расстроек максимальная амплитуда генерируемых колебаний уменьшается и при $\xi > \xi_0 = -b/m^2 + m^2/4b$ единственным возможным значением амплитуды A_1 будет нулевое (см. графики рис. 2).

2. СТАБИЛЬНОСТЬ ЧАСТОТЫ ДВУХКОНТУРНОГО ГЕНЕРАТОРА

Нестабильности частот, генерируемых двухконтурным параметрическим генератором, определяются: 1) нестабильностями параметров колебательных контуров и нелинейной емкости; 2) нестабильностью амплитуды и частоты накачки; 3) тепловыми шумами в схеме. Уширение спектральной линии, связанное с 1) и 2), представляется целесообразным называть „технической“ шириной спектральной линии двухконтурного генератора, а уширение, связанное с 3) — „естественной“ шириной *.

Известно, что ширина спектральной линии определяется в первую очередь величиной спектральной плотности флюктуации частоты вблизи нулевых частот. Поэтому оценку факторов, определяющих техническую ширину, можно сделать на основании квазистатических расчетов. Воспользуемся для этой цели выражением для стационарной расстройки (см. (13)). Формулу, определяющую частоту ω_1, удобно записать в виде

$$\omega_1 = \omega_л + \Delta_{нл}(A_1, A_3). \tag{15}$$

В (15) выделены „линейная частота“, определяемая только линейными параметрами и частотой накачки

$$\omega_л = \Omega_1 + \Delta\Omega \frac{h_1}{h_1 + h_2}, \tag{16}$$

и нелинейная поправка $\Delta_{нл}$ (второе слагаемое в формуле (13)), характеризующая зависимость частоты генерируемых колебаний от амплитуд A_1, A_3. Выражение (16) для $\omega_л$ в точности совпадает с соответствующими выражениями, полученными на основании квазилинейного рассмотрения в [2, 3, 6]. Наиболее примечательным свойством (16), подробно обсуждаемом в цитированных работах, оказывается возможность значительной компенсации влияния односторонних, коррелированных уходов параметров контуров на генерируемые частоты.

Вклад флюктуаций величины $\omega_л$ в техническую ширину определяется стабильностью частоты накачки, уровнем флюктуаций собственных частот двухконтурной системы и затуханий колебательных контуров и степенью приближения к оптимальному условию компенсации (см. [2, 3, 6]); представляется возможной реализация режимов, в которых спектральная плотность флюктуаций генерируемых частот вблизи нулевых частот

$$F_{\omega_n}(0) \approx 10^{-2} \div 10^{-1} F_{\Omega}(0) \qquad (n=1, 2),$$

где $F_{\Omega}(0)$ — соответствующая спектральная плотность флюктуаций собственных частот двухконтурной системы. Величина $F_{\omega_n}(0)$, связан-

* Принятая здесь терминология аналогична введенной Малаховым и Файном [12] для трехуровневого квантово-механического генератора

ная с флюктуациями частоты накачки, как нетрудно показать, имеет порядок $F_{\omega_3}(0)$, т. е. уширение линии, связанное с флюктуациями частоты накачки, имеет порядок ширины линии генератора накачки *. Влияние флюктуаций амплитуды накачки на генерируемые частоты определяется нелинейной поправкой к частоте.

Отметим, прежде всего, что отношение $\Delta_{\text{пл}}/\omega_{\text{л}} \ll 1$. Из (13) видно, что влияние флюктуаций амплитуды накачки совершенно исключается при выполнении условия

$$\vartheta_1 C_1 = \vartheta_2 C_2, \tag{17}$$

которое может быть названо „нелинейным" условием компенсации, в отличие от „линейного" условия компенсации влияния односторонних уходов собственных частот $\Delta\Omega_{1,2}$ на величину $\omega_{\text{л}}$ (см., например, [3]):

$$\frac{\Delta\Omega_1}{\Omega_1} = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\frac{\Delta\Omega_2}{\Omega_2}. \tag{18}$$

Если по тем или иным причинам одновременно удовлетворить соотношениям (17) и (18) затруднительно, нелинейная поправка $\Delta_{\text{нл}}$ и, следовательно, зависимость генерируемых частот от амплитуды накачки в общем случае будет иметь место. Нетрудно видеть, однако, что эта зависимость носит немонотонный характер; можно подобрать такое значение амплитуды накачки, при которой $d\Delta_{\text{нл}}/dA_3^2 \simeq 0$.

Действительно, из (13) видно, что зависимость $\Delta_{\text{нл}}$ от A_3^2 определяется не только членом, содержащим A_3^2 в явном виде, но и членом с A_1^2 (см. (14) и графики рис. 3). Поэтому, если параметры генератора выбраны таким образом, что $A_1^2 \sim A_3^2$, с ростом величины A_3^2 частота ω_1 при $C_1\vartheta_1 > C_2\vartheta_2$ сначала быстро нарастает (убывает, если $C_1\vartheta_1 < C_2\vartheta_2$) и затем приближается к пологому максимуму (соответственно минимуму для $C_1\vartheta_1 < C_2\vartheta_2$). Конкретные оценки уширения спектральной линии двухконтурного генератора за счет флюктуаций амплитуды накачки могут быть сделаны с помощью (15), если известна спектральная плотность флюктуаций амплитуды A_3, $F_{A_3}(\omega)$.

Исследование естественных флюктуаций амплитуды и фазы двухконтурного генератора может быть выполнено с помощью уравнений (6)÷(10), в правые части которых должны быть введены случайные силы. Детальному рассмотрению этой задачи будет посвящена отдельная работа; здесь отметим только, что хотя в двухконтурном генераторе флюктуации суммы фаз $\psi = \varphi_1 + \varphi_2$ являются стационарным случайным процессом **, фазы φ_1 и φ_2 в отдельности могут „диффундировать", что приводит к уширению линии. Для фазовой стабилизации колебаний двухконтурного параметрического генератора может быть использовано явление захватывания его внешней силой.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве управляемых емкостей в экспериментально исследовавшихся двухконтурных генераторах использовались емкости германиевых полупроводниковых диодов с $p-n$-переходом. Измерения

* При выполнении некоторых специальных требований в принципе представляется возможным получение ширины линии двухконтурного генератора, меньшей ширины линии генератора накачки; однако при этом, как правило, ухудшаются условия компенсации односторонних уходов параметров контуров

** В предположении, что фаза накачки стационарна, а случайная сила достаточно мала, так что перескоками ψ на целое число π можно пренебречь.

проводились в радиодиапазоне при частотах накачки от 12 до 30 *мгц*. В зависимости от выбора режима работы генератора и схемы смещения ограничение стационарной амплитуды в генераторе на диоде с p—n-переходом может осуществляться либо за счет нелинейной проводимости, либо за счет нелинейной емкости диода. Последний режим может быть осуществлен, если величина принудительного отрицательного смещения на диоде превышает амплитуду накачки; преобладающую роль нелинейная емкость играет также и в режиме автосмещения (при этом $\gamma < 0$).

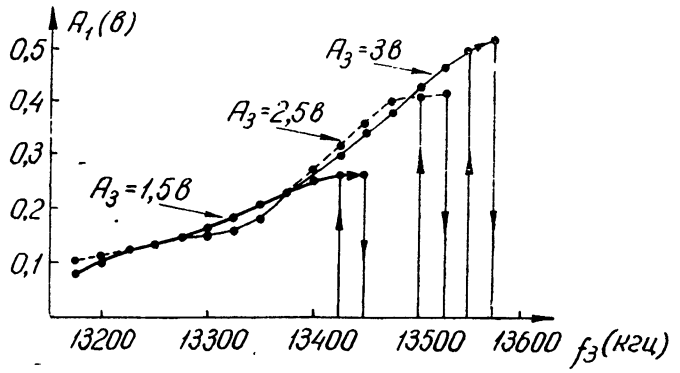


Рис. 4. Экспериментальные резонансные кривые двухконтурного генератора с нелинейной емкостью p—n-перехода:
A_1 — амплитуда генерации в одном из контуров; по оси абсцисс — частота накачки f_3.

На рис. 4 приведены типичные графики резонансных кривых для двухконтурного параметрического генератора с частотой накачки вблизи 13 *мгц*; диод работал в режиме автосмещения. Отклонения от линейности, по-видимому, должны быть отнесены за счет членов более высокого порядка в нелинейной характеристике емкости.

На рис. 5 приведены графики зависимости амплитуд, генерируемых двухконтурным генератором, от амплитуды накачки при различ-

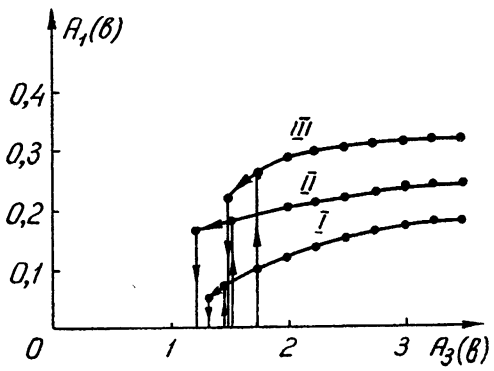


Рис. 5. Экспериментальные амплитудные кривые двухконтурного генератора, измеренные при различных расстройках $\Delta\Omega$ и несколько отличающихся смещениях на диоде (приведены лишь гистерезисные части кривых).

ных расстройках $\Delta\Omega$ (от кривой I к кривой III $|\Delta\Omega|$ возрастает). Величины смещения на диоде для разных кривых несколько различаются.

Наконец, на рис. 6 приведены графики зависимости величины нелинейной поправки к частоте от амплитуды накачки; кривые I, II, III измерены при различных значениях расстройки $\Delta\Omega$.

Среди явлений, наблюдавшихся экспериментально и не исследованных в теоретической части настоящей работы, должны быть в первую очередь отмечены явления, наступающие при $\Omega_1 \simeq n\Omega_2$, где n — целое число. Как показывает эксперимент, в этих областях вплоть до весьма больших n (в наших опытах до 10÷12) происходит устойчивая

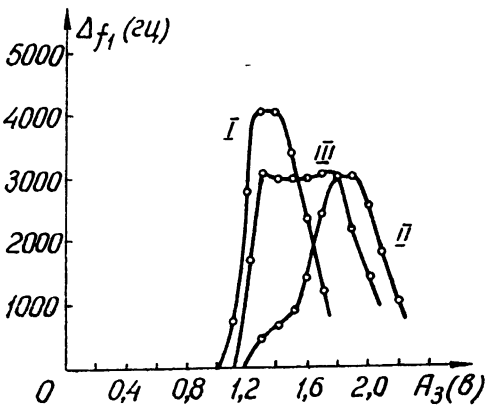


Рис. 6. Экспериментальные графики зависимости нелинейной поправки к частоте (отсчитываемой от частоты, соответствующей порогу возбуждения) от амплитуды накачки, измеренные при различных значениях расстройки $\Delta\Omega$.

взаимная синхронизация колебаний двухконтурного генератора. Здесь уже перестройка колебательных контуров в некоторых пределах вообще не влияет на генерируемые частоты.

Сопоставление результатов проведенного расчета и эксперимента показывает, что теория, изложенная в первом разделе настоящей статьи, хорошо согласуется* с опытными данными для режимов, в которых собственные частоты двухконтурной системы не находятся в отношениях, близких к кратным. В связи с этим довольно громоздкий анализ устойчивости стационарных режимов здесь не приводится. Следует отметить, что ряд отмеченных выше особенностей двухконтурного генератора с нелинейной емкостью (гистерезис на амплитудных кривых рис. 3 и 6, несимметрия областей неустойчивости) присущ, разумеется, и одноконтурному параметрическому генератору с нелинейной емкостью. Детальные исследования характеристик одноконтурных параметрических генераторов на полупроводниковых диодах с p—n-переходом, проведенные в связи с использованием их в цифровых устройствах (см., например, [13] и обзор [14]) показали, что характерным режимом ограничения амплитуды для них является режим ограничения нелинейной емкостью.

В заключение авторы приносят благодарность С. Д. Гвоздоверу, С. М. Рытову и Ю. Е. Дьякову за ценные замечания и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1 В А Лазарев, ЖТФ, **10**, 918 (1940).
2. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А К. Романюк, М. М. Струков, Диапазонная стабилизация частоты с помощью двухконтурного параметрического генератора, Доклад на конференции МВ и ССО СССР по радиоэлектронике, Харьков, 1960 (тезисы).

* Ниспадающие участки кривых рис. 6 следует, по-видимому, отнести либо за счет немалой статической связи между контурами, либо за счет членов высшего порядка в (1).

3. С. А. Ахманов, А. К. Романюк, М. М. Струков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 179 (1961).
4. A. Sutherland, D. Countiss, Proc. IRE, 48, 938 (1960).
5. Ю. А. Кравцов, Радиотехника и электроника 7, 113, (1962).
6 Г. М. Уткин, Радиотехника и электроника, 5, 1866 (1960).
7. И. Л. Берштейн, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, 3, 995 (1960).
8 H. Heffner, G. Wade, J. Appl. Phys., 29, 1321 (1958).
9. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, ЖТФ, 3, 5 (1934).
10. И. М. Капчинский, Методы теории колебаний в радиотехнике, Госэнергоиздат, М., 1954.
11. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, ЖТФ, 2, 775 (1932).
12. А. Н. Малахов, В. М. Файн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 5—6, 66 (1958).
13. L. S. Onyshkevich, W. Kosonocky, A. Lo, IRE Trans. El. Comput., 8, 277 (1959).
14. С. А. Ахманов, А. С. Рошаль, Изв. высш уч. зав —Радиофизика, 4, 203 (1961).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
7 июля 1961 г.

TWO-CIRCUIT GENERATOR WITH A NONLINEAR CAPACITY

S. A. Akhmanov, Yu. A. Kravtsov

The characteristics of two-circuit parametric oscillator containing nonlinear capacity as a control reactance have been investigated. The parametric resonance curves as well as instability regions form and amplitude characteristics were calculated under the assumtion that the limitation of a stationary amplitude is caused by the nonlinear capacity. The special attention was paid to the factors determining the oscillating frequency instabilities, in particular to nonlinear correction to the frequency. The regimes with a weak influence of the nonlinear corrections on the frequency stability are pointed out. The phases stability of output oscillations are discussed. The given experimental data are in well agreement with the calculation.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ СПОСОБОВ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

З. Фридрих

Предлагается применять ε-энтропию и энтропию отсчетов в качестве меры эффективности способов дискретизации и цифрового представления непрерывных сигналов.

Любой физически осуществимый непрерывный сигнал $x(t)$ имеет конечную длительность и конечный диапазон изменения по амплитуде. Это означает, что такие сигналы определены на ограниченной непрерывной плоскости (D_X, D_T), где D_X — диапазон изменения сигнала по амплитуде, D_T — диапазон изменения сигнала по времени. В пределах этих диапазонов величины x и t могут принимать произвольные значения (ввиду непрерывности сигнала $x(t)$), что означает существование в плоскости (D_X, D_T) бесконечного числа различных сигналов.

Дискретизация непрерывного сигнала $x(t)$ представляет собой переведение непрерывной плоскости (D_X, D_T) в дискретную плоскость (N_X, N_T), где N_T — общее количество интервалов дискретизации, на которые разбит весь диапазон D_T, N_X — приведенная размерность всех отсчетов, передаваемых на продолжении одного интервала дискретизации. Под интервалом дискретизации подразумеваются соприкасающиеся отрезки τ_i $(i = 1,2,..., N_T)$, в которых сигнал $x(t)$ заменяется приближающими функциями $\bar{x}_i(t)$ [1].

Рассматривая информационное содержание функции на дискретной плоскости (N_X, N_T), Хартли предложил логарифмическое определение количества информации. Это определение соответствует двум основным требованиям, которые могут быть выдвинуты к мере количества информации: 1) требованию адитивности и 2) условию, согласно которому количество информации должно измеряться числом возможных альтернатив по отношению к данной функции, а не ее длиной или числом возможных значений в некоторый момент.

Применение числа возможных альтернатив, т. е. меры неопределенности, в качестве меры информации послужило, по аналогии с термодинамикой, поводом для названия Шенноном величины $H(N_X, N_T)$ энтропией запаса возможных функций, содержащихся в плоскости (N_X, N_T).

Поскольку для дискретной плоскости (N_X, N_T) можно составить всего $N_X^{N_T}$ различных функций $\bar{x}(t) \in (N_X, N_T)$, энтропия этого множества равна *

$$H(N_X, N_T) = \log N_X^{N_T} = N_T \log N_X \quad \text{дв. ед.} \tag{1}$$

Смысл величины H с точки зрения числового представления одной функции $\bar{x}(t) \in (N_X, N_T)$ состоит в том, что она показывает, из скольких (двоичных) разрядов должна состоять наиболее экономная последовательность чисел, определяющих любую функцию $\bar{x}(t)$.

---

* Здесь и ниже под выражением $\log a$ будет пониматься двоичный логарифм.

Как уже говорилось выше, на непрерывной плоскости (D_X, D_T) существует бесконечное число разных сигналов $x(t) \in (D_X, D_T)$; поэтому

$$H(D_X, D_T) = \log(+\infty) = +\infty$$

и никаким конечным числом двоичных разрядов сигнал $x(t) \in (D_X, D_T)$ точно записать нельзя. Для того, чтобы разумным образом определить понятие энтропии и для бесконечных множеств, необходимо объединить достаточно близкие по свойству элементы в одну группу так, чтобы количество получившихся групп оказалось конечным. Подчеркивая зависимость количества полученных групп от их величины (от расстояния между элементами ε-сети), Колмогоров ввел понятие ε-энтропии [2], которую можно определить следующим образом [4]. Обозначим через S_ε минимальное количество групп, полученных после объединения функций $x(t) \in (D_X, D_T)$. Параметр величины групп равен ε. Тогда ε-энтропия пространства (D_X, D_T) будет равна

$$H_\varepsilon(D_X, D_T) = \log S_\varepsilon . \qquad (2)$$

Число S_ε и соответственно ε-энтропия $H_\varepsilon(D_X, D_T)$ зависят как от величины ε, так и от способа, при помощи которого производится объединение функции $x(t)$. Поэтому так определенную ε-энтропию называют ε-энтропией относительно способа объединения, или кратко — относительной ε-энтропией. Вместе с ней вводят еще понятие абсолютной ε-энтропии:

$$H_\varepsilon(D_X, D_T)_a = inf\, H_\varepsilon(D_X, D_T), \qquad (3)$$

т. е. абсолютная ε-энтропия совпадает с нижней гранью относительных ε-энтропий пространства (D_X, D_T) при всевозможных способах объединения элементов из (D_X, D_T) в соответствующие группы величиной ε. Развитию вопроса об ε-энтропии метрических пространств и получению соответствующих оценок посвящено в настоящее время много работ советских математиков (см., например, [3,4]).

Процесс объединения элементов метрического пространства (D_X, D_T) соответствует процессу дискретизации непрерывных сигналов $x(t) \times \times \in (D_X, D_T)$ и приближенного представления их функциями $x(t) \times \times \in (N_X, N_T)$ с точностью до величины ε относительно выбранного критерия верности (принятой меры пространства). Поэтому величина ε-энтропии может быть применена в качестве меры сравнения эффективности способов дискретизации и способов цифрового представления непрерывных сигналов.

1. СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ СПОСОБОВ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Общий принцип сравнения способов дискретизации состоит в сопоставлении абсолютной ε-энтропии пространства (D_X, D_T) с относительной ε-энтропией того же пространства, вычисленной для сравниваемого способа дискретизации. Привлекая для этого сопоставления коэффициент избыточности, получим:

$$R = \frac{H_\varepsilon(D_X, D_I) - H_\varepsilon(D_X, D_T)_a}{H_\varepsilon(D_X, D_T)} = 1 - \frac{H_\varepsilon(D_X, D_T)_a}{H_\varepsilon(D_X, D_I)}, \qquad (4)$$

где $H_\varepsilon(D_X, D_T)_a$ — абсолютная ε-энтропия пространства (D_X, D_T),

$H_\varepsilon(D_X, D_T)$ — относительная ε-энтропия того же пространства, вычисленная для данного способа дискретизации. Ввиду того, что всегда (ср. определение (3))

$$H_\varepsilon(D_X, D_T)_a \leqslant H_\varepsilon(D_X, D_T), \tag{5}$$

коэффициент избыточности R будет лежать в пределах $0 \leqslant R \leqslant 1$.

Абсолютную ε-энтропию $H_\varepsilon(D_X, D_T)_a$ при условии равномерного деления аргумента диапазона D_T (равноотстоящая дискретизация) можно в некоторых случаях вычислить аналитически на основе свойств пространства (D_X, D_T). Некоторые такого рода оценки можно найти в литературе [3,4]. В общем случае в качестве абсолютной ε-энтропии, согласно определению (3), следует взять минимально возможную относительную ε-энтропию.

Относительная ε-энтропия $H_\varepsilon(D_X, D_T)$ определена выражением (2). Число S_ε с точки зрения дискретизации непрерывных сигналов представляет собой общее количество приближающихся функций $\bar{x}(t) \times \times \in (H_X, H_T)$, которые можно построить в этом пространстве, соблюдая ограничения, накладываемые способом дискретизации на ход функции $\bar{x}(t)$. Эти ограничения, проявляющиеся в запрете некоторых переходов функции $\bar{x}(t)$, приводят к тому, что

$$S_\varepsilon < N_X^{N_T}, \tag{6}$$

т. е. количество допустимых функций $\bar{x}(t)$ всегда (при $N_T > 1$) меньше числа максимально возможных функций в пространстве (N_X, N_T). Таким ограничением является, например, тот факт, что при прохождении через один интервал дискретизации дискретизируемый сигнал $x(t)$ не может измениться больше, чем на величину некоторого приращения $|\Delta_X| < D_X$, или, как это встречается в некоторых способах адаптационной дискретизации, на двух смежных интервалах дискретизации τ_i и τ_{i+1} не может быть $\bar{x}_i(t) = \bar{x}_{i+1}(t)$. Общая формула для подсчета количества S_ε функции $\bar{x}(t) \in (N_X, N_T)$ для случая, когда степень приближающих многочленов $\bar{x}_i(t)$ равна нулю, приведена в Приложении.

2. СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЦИФРОВОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИГНАЛА

В процессе дискретизации непрерывный сигнал представляется последовательностью чисел-отсчетов. Их общее количество не больше $N_T(n+1)$ [1], где n — степень применяемого приближающего многочлена $\bar{x}_i(t)$. В предыдущем разделе было проведено сравнение способов дискретизации; при этом полученная оценка не зависит от того, что собственно представляют собой передаваемые отсчеты. Таким образом, оно дает односторонее понятие об эффективности дискретизации. Для создания полной картины эффективности дискретизации необходимо учесть также способ технического представления полученных отсчетов.

Что применять в качестве отсчетов, или вообще какую принять систему отсчетов (способ цифрового представления сигнала) — зависит от двух требований: во-первых, от эффективности цифрового представления сигнала, во-вторых, от сложности и надежности применяемых устройств передачи и переработки информации. Эти требования противоречивы.

Возможные способы цифрового представления сигнала можно разделить на три основные группы. Отсчеты могут представлять собой

1) мгновенное значение измеряемой величины в момент проведения отсчета (передача ординаты),

2) величину приращения измеряемой величины за время, прошедшее от момента предыдущего отсчета (передача приращений),

3) „каталоговый" номер сигнала, рассматриваемого на всем интервале его существования.

Для количественного сравнения этих способов введем понятие энтропии системы отсчетов. Эта величина представляет собой общее количество двоичных разрядов, необходимых для представления дискретизируемого сигнала при данной системе отсчетов. В качестве энтропии системы отсчетов, представляющих собой ординаты измеряемой величины, можно принять следующее выражение *:

$$H(N_X, N_1) = N_T([\log N_X + 1] + 1), \tag{7}$$

где N_T — общее количество интервалов дискретизации, $[\log N_X + 1] + 1$ — количество разрядов, необходимых для записи значения всех отсчетов, проведенных на продолжении одного интервала дискретизации. Единица, стоящая в этом выражении, добавляется только в случае, когда $\log N_X + 1 > [\log N_X + 1]$.

При использовании метода приращений энтропию можно выразить формулой:

$$H(\Delta N_X, N_1) = [\log N_X + 1] + (N_T - 1)([\log \Delta N_X] + 1) + 1. \tag{8}$$

Здесь $[\log N_X + 1] + 1$ представляет количество разрядов, необходимых для представления значения дискретизируемого сигнала в начальный момент дискретизации (измерение ординаты сигнала при $t = 0$), $[\log \Delta N_X] + 1$ — количество разрядов для представления приращения сигнала на каждом интервале дискретизации. Эта величина умножается на $(N_T - 1)$ — уменьшенное на единицу число интервалов дискретизации, так как на первом интервале значение сигнала представлено отсчетом $[\log N_X + 1] + 1$.

Энтропию каталогового способа записи сигнала можно определить формулой:

$$H_\varepsilon(N_X, N_T) = [H_\varepsilon(D_X, D_T)] + 1 = [\log S_\varepsilon] + 1. \tag{9}$$

Она представляет собой количество двоичных разрядов, необходимых для записи общего числа допустимых функций $\bar{x}(t)$ при учете ограничений, вводимых примененным способом дискретизации.

Между приведенными выражениями имеет место следующая зависимость:

$$H_\varepsilon(N_X, N_T) \leqslant H(\Delta N_X, N_1) \leqslant H(N_X, N_T). \tag{10}$$

В качестве меры использования информационной содержательности принятой системы отсчетов естественно принять выражение

$$r = \frac{H_\varepsilon(D_X, D_T)}{H}, \tag{11}$$

где H — символ соответствующей энтропии системы отсчетов. В этом выражении энтропия отсчетов сопоставляется с относительной ε-энтропией $H_\varepsilon(D_X, D_T)$ принятого способа дискретизации.

Очевидно, что самым эффективным способом цифрового представления сигнала является каталоговый способ записи. Однако обычно он неприменим, так как в этом случае „номер" сигнала можно определить

* Квадратные скобки представляют здесь целую часть числа, заключенного в них

лишь после истечения сигнала, и, тем самым, эту информацию можно использовать с задержкой, равной всей длительности сигнала.

Среди двух первых способов произведения отсчетов более эффективным с точки зрения использования информационной содержательности передаваемых разрядов является метод приращений. Коэффициент избыточности передаваемых разрядов при первом способе (передачи ординат) относительно второго (передачи приращений) выражается соотношением:

$$K = 1 - \frac{H(\Delta N_X,\ N_T)}{H(N_X,\ N_T)} = \left(1 - \frac{[\log \Delta N_X] + 1}{[\log N_X + 1] + 1}\right)\left(1 - \frac{1}{N_T}\right). \qquad (12)$$

Выражение (12) показывает, что эффективность метода ординат убывает с ростом количества интервалов дискретизации и при $N_T \to \infty$ избыточность стремится к величине $1 - \frac{[\log \Delta N_X] + 1}{[\log N_X + 1] + 1}$. В крайнем случае, когда приращение измеряемой величины на продолжении одного интервала дискретизации может быть равно лишь $+1$ или -1 (т. е. приращение на олин квант, как например, при Δ-модуляции, дискретизации с передачей приращений [5] или для способа, описанного в [1]), имеем $\Delta N_X = 2$; тогда предел избыточности равен $1 - \frac{1}{[\log N_X + 1] + 1}$.

В общем случае выбор системы отсчетов должен зависеть от допустимой сложности и объема 1) дискретизирующего устройства, 2) устройства памяти и пропускной способности канала связи, 3) воспроизводящей аппаратуры. Способ передачи приращений в качестве отсчетов уменьшает объем требуемой для хранения памяти и на меньшее время занимает канал связи. Дискретизирующие устройства, однако, при этом способе имеют более сложную структуру. Дело в том, что для избежания накопления погрешности необходимо применять устройство самопроверки [6], т. е. дублировать процесс воспроизведения дискретизируемого сигнала и сообразовывать передаваемые сигналы с результатом этого процесса.

С точки зрения воспроизводящего устройства выбор системы отсчетов зависит от характера процесса восстановления непрерывной функции $x(t)$. Отсчеты в виде ординат и приращений связаны между собой зависимостью:

$$\underline{x(t_i)} = x(0) + \sum_{j=1}^{i} \underline{\Delta x(t_j)}, \qquad (13)$$

где $\underline{x(t_i)}$ — мгновенное значение измеряемой величины в i-ый момент измерения (отсчет по ординате), $\underline{x(0)}$ — отсчет, определяющий значение измеряемой величины в начальный момент дискретизации, $\underline{\Delta x(t_j)}$ — приращение измеряемой величины между моментами t_{j-1}, t_j, передаваемое в момент t_j (отсчет по методу приращений). Поэтому, если приемное устройство воспроизводит всю функцию, начиная с момента $t = 0$, преимущество имеет способ приращений. Однако если требуется воспроизводить функцию только „кусками", т. е. от некоторого момента $t' > 0$, то при использовании отсчетов-приращений до начала воспроизведения нужно просуммировать все отсчеты от $t = 0$ до $t = t'$ для образования абсолютного значения функции в момент t', необходимого

для начала восстановления. Очевидно, при таком режиме восстановления более удобным является передача отсчетов-ординат, позволяющих без предварительных вычислений воспроизвести значение непрерывной функции на любом отрезке времени.

3. ПРИМЕР

В качестве примера применения приведенных выше выражений произведем дискретизацию отрезка некоторого сигнала $x(t)$. На рис. 1 дискретизация этого сигнала выполнена

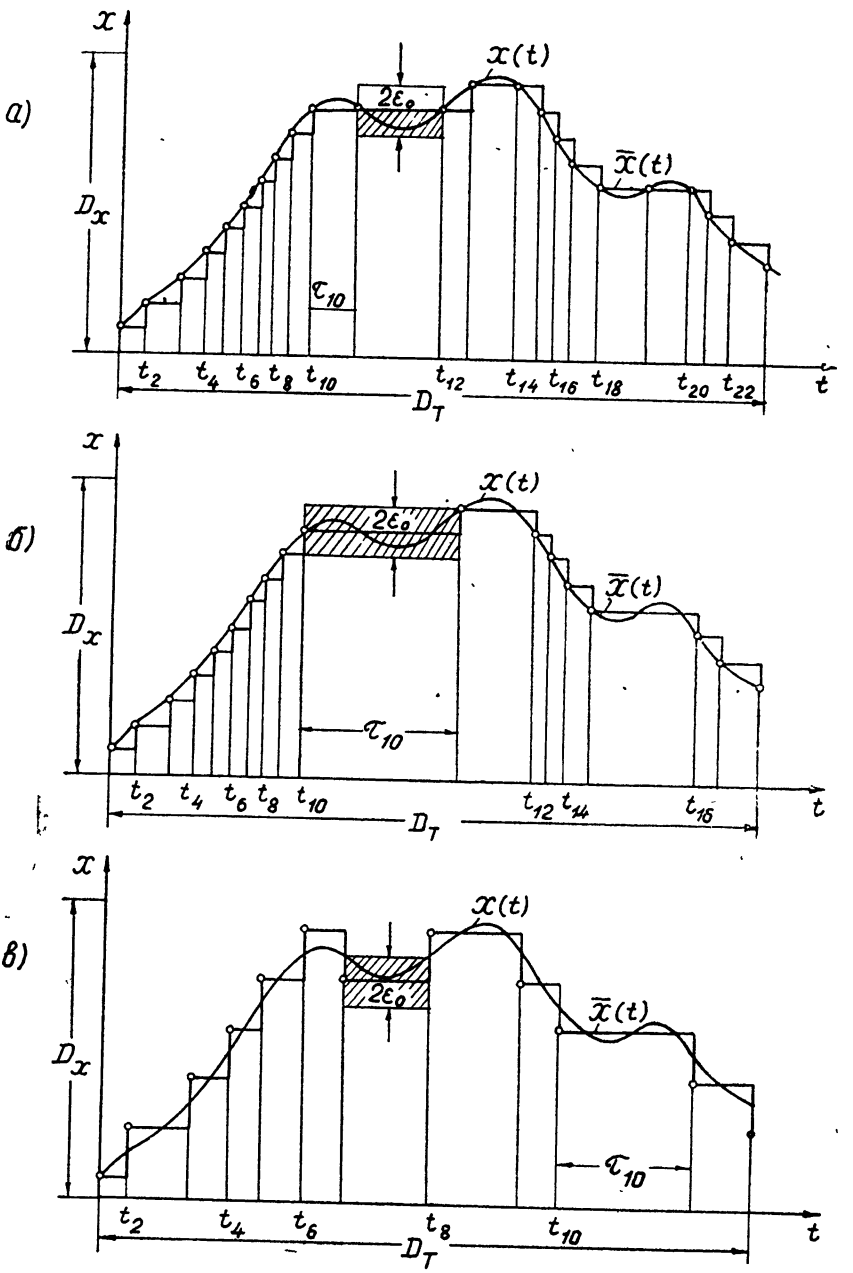


Рис. 1.

а) с применением квантования по уровню, в котором отсчет производится каждый раз, когда сигнал пересекает любую из линий квантования;

б) с применением квантования по уровню, причем отсчет делается только в моменты, когда сигнал пересекает линию квантования, отстоящую от предыдущего отсчета на $\pm\varepsilon_0$;

в) методом приращений с проведением отсчетов по приближающей функции $\bar{x}(t)$ [1].

В итоге дискретизации сигнал разбивается на количество интервалов N_T, соответственно равное

$$N_T^{(а)} = 22, \quad N_T^{(б)} = 17, \quad N_T^{(в)} = 11.$$

Если применить к этому сигналу равноотстоящую дискретизацию, например, по методу Δ-модуляции [4], то количество интервалов будет равно $N_T^{(pab)} = 46$.

Относительная ε-энтропия дискретизации для способа а) вычисляется по выражению (2), для которого величина

$$S_\varepsilon^{(а)} = N_X 2^{N_T}. \tag{14}$$

Подставляя численные значения $N_X = D_X / \varepsilon_0 = 12$, $N_T^{(а)} = 22$, получим $H_\varepsilon^{(а)}(D_X, D_T) = 25{,}59$ дв. ед.. Для способов б) и в) величину S_ε можно вычислить по выражению (П.1).

Для способа б) $m=2$, $q=1$, $N_X = D_X / \varepsilon_0 = 12$, $N_T = 17$; тогда $S_\varepsilon^{(б)} = 473642$ и $H_\varepsilon^{(б)}(D_X, D_T) = 18{,}86$ дв. ед. Для способа в) $m = 2$, $q = 1$, $N_X = D_X / 2\varepsilon_0 = 6$, $N_T^{(в)} = 11$; тогда $S_\varepsilon^{(в)} = 3036$ и $H_\varepsilon^{(в)}(D_X, D_T) = 11{,}57$ дв. ед.

Для передачи полученной последовательности отсчетов методом приращений необходимое количество двоичных разрядов согласно (8) равно

$$H^{(а)}(\Delta N_X, N_T) = 46 \text{ дв. ед.}; \quad H^{(б)}(\Delta N_X, N_T) = 20 \text{ дв. ед.};$$

$$H^{(в)}(\Delta N_X, N_T) = 13 \text{ дв. ед.}$$

Для передачи последовательности отсчетов при равноотстоящей дискретизации это количество равно [4]

$$H^{(pab)}(\Delta N_X, N_T) = 50 \text{ дв. ед.}$$

При передаче этих последовательностей методом ординат необходимое количество разрядов получаем по формуле (7):

$$H^{(а)}(N_X, N_T) = 88 \text{ дв. ед.}; \quad H^{(б)}(N_X, N_T) = 68 \text{ дв. ед.};$$

$$H^{(в)}(N_X, N_T) = 33 \text{ дв. ед.}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ.
ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ε-ЭНТРОПИИ

Как указывалось ранее, ε-энтропия непрерывного пространства (D_X, D_T) относительно некоторого способа дискретизации определена выражением (2):

$$H_\varepsilon(D_X, D_T) = \log S_\varepsilon.$$

Число S_ε представляет общее количество приближающих функций

$\bar{x}(t) \in (N_X, N_T)$, где (N_X, N_T) — минимальное пространство, получаемое в результате дискретизации исследуемым способом непрерывных сигналов $x(t) \in (D_X, D_T)$. Количество функции $\bar{x}(t)$ зависит от ограничений, накладываемых способом дискретизации на строение этих функций. Примеры подобных ограничений показаны на рис. 2. Эти ограничения сводятся к тому, что функции $\bar{x}(t)$ не могут выходить из области (N_X, N_T) и приращение их на одном интервале не может быть больше величины $|q\sigma|$, где σ — величина кванта измерения, q — целое число. Кроме того, некоторые способы дискретизации не разрешают горизонтальных переходов (рис. 2б), т. е. невозможны повторяющиеся отсчеты.

Если через m обозначить общее количество путей, выходящих из любой точки области (N_X, N_T), то число S_ε выражается формулой:

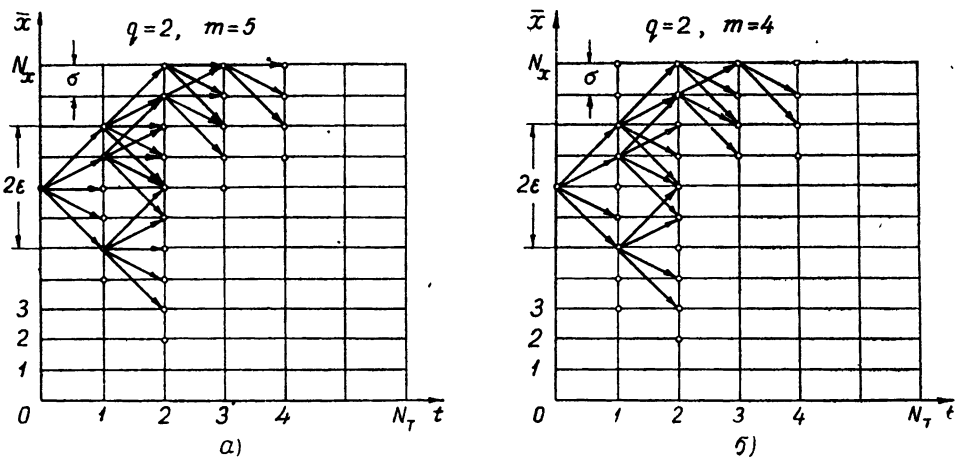


Рис. 2.

$$S_\varepsilon = m^{N_T}(N_X+1) - m^{N_T-1}\sum_{k=0}^{N_X}\{[q-k]+[q+k-N_X]\} -$$

$$- m^{N_T-2}\sum_{k=0}^{N_X}\sum_{k_1}\{[q-k_1]+[q+k_1-N_X]\} - \ldots - \qquad (\text{П.1})$$

$$- \sum_{k=0}^{N_X}\sum_{k_1}\sum_{k_2}\ldots\sum_{k_{N_T-1}}\{[q-k_{N_T-1}]+[q+k_{N_T-1}-N_X]\},$$

где квадратные скобки обозначают следующее:

$$[A] = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad A \leqslant 0; \\ A & \text{при} \quad A > 0. \end{cases}$$

Число m и предел суммирования зависят от того, допускаются горизонтальные переходы или нет. В первом случае $m = 2q+1$ и суммирование ведется от $k_i = [k_{i-1} - q]$ до $k_i = [k_{i-1} + q] \leqslant N_X$, во втором случае $m = 2q$ и пределы суммирования равны $k_i = [k_{i-1} - q]$ и $k_i = [k_{i-1} + q] \leqslant N_X$ с исключением $k_i = k_{i-1}$. Число q определяется

допустимой погрешностью дискретизации и чувствительностью измерительного устройства. Например, при равномерном приближении, т. е. при критерии верности приближения, равном $\max|x(t)-\bar{x}(t)|\leqslant\varepsilon_0$, имеем: $q=\varepsilon_0/\sigma$, где σ — квант измерения.

Формулу (П.1) можно получить следующим образом. Число S_ε — количество путей, ни разу не выходящих из области (N_X, N_T), — равно $S_\varepsilon=\sum_{k=0}^{N_X} s_k^{(N_T)}$, где $s_k^{(N_T)}$ — частная сумма путей, проходящих через k-ю точку на N_T-ом шаге. Она, в свою очередь, равна сумме допустимых $s_{k_i}^{(N_T-1)}$, т. е. частных сумм путей, проходящих через точки с индексами от $k_i=[k-q]$ до $k_i=[k+q]$, как показано на рис. 3. Очевидно, что $s_k^{(0)}=1$; поэтому

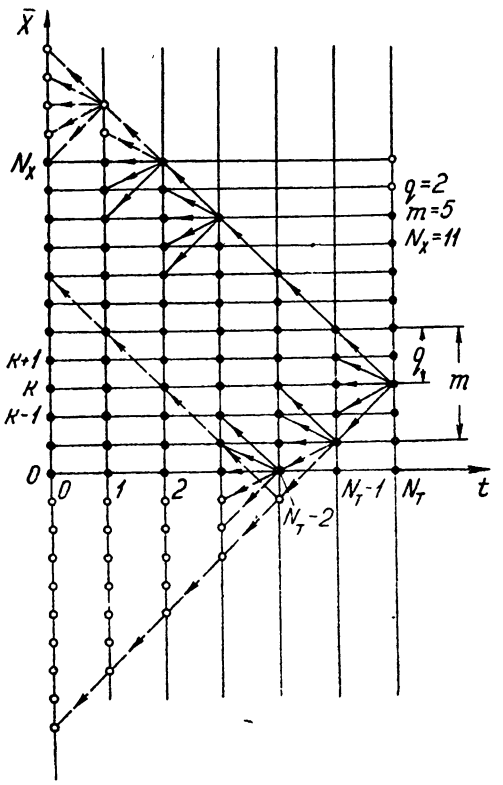


Рис. 3.

$$s_k^{(1)}=\sum_{k_1} s_{k_1}^{(0)}=m-\{[q-k]+[q+k-N_X]\};$$

$$s_k^{(2)}=\sum_{k_1} s_{k_1}^{(1)}=m^2-m\{[q-k]+[q+k-N_X]\}-$$

$$-\sum_{k_1}\{[q-k_1]+[q+k_1+N_X]\};$$

. . . . . .

$$s_k^{(N_T)} = m^{N_T} - m^{N_T-1}\{[q-k] + [q+k-N_X]\} -$$
$$- m^{N_T-2}\sum_{k_1}\{[q-k_1] + [q+k-N_X]\} -$$
$$- \ldots - \sum_{k_1}\sum_{k_2}\ldots\sum_{k_{N_T-1}}\{[q-k_{N_T-1}] + [q+k_{N_T-1}-N_X]\}.$$

Таким образом, частная сумма $s_k^{(N_T)}$ равна числу путей в треугольнике с вершиной в k-ой точке и высотой в N_T, уменьшенному на число путей в треугольниках с вершинами в N_T-1, $N_T-2, \ldots, 1$, лежащими внутри основного треугольника для k-ой точки и вне пределов $0 \div N_X$ (на рис. 3 отмеченных кружками).

ЛИТЕРАТУРА

1. З. Фридрих, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 316 (1960).
2. А. Н. Колмогоров, Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства 15—20 октября 1956 г, 1, изд. АН СССР, М., 1957.
3. А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров, УМН, 14, вып. 2 (86), 3 (1959).
4. А. Г. Витушкин, Оценки сложности задачи табулирования, Физматгиз, М., 1959.
5. Масс, Материалы национальной конференци по телеизмерению, состоявшейся в Чикаго в 1955 г., Сб. статей, Управление и измерение на расстоянии, 2, ИЛ, М., 1959.
6. А. А. Харкевич, Очерки общей теории связи, Гостехиздат, М, 1955.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
14 июля 1960 г.,
после переработки
1 июля 1961 г

QUANTITATIVE ESTIMATIONS OF DISCRETIZATION METHODS

Z. Fridrikh

It is suggested to apply the ε-entropy and accounts entropy as a criterion of efficiency of discretization methods and numerical presentation of continuous signals.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

СИСТЕМА КОММУТАЦИИ ГОЛОВОК МАГНИТНОГО БАРАБАНА НА ПОЛУПРОВОДНИКАХ

А. М. Гончаров, А. С. Тарантович

Предлагается схема коммутации головок магнитного барабана при записи и чтении, использующая полупроводниковые триоды П16Б для управления записью и диоды Д9В в клапанах чтения. В схеме записи используется принцип сложения и компенсации магнитных потоков в оксиферовых сердечниках Ф 2000. Приводятся результаты эксперимента, показывающие высокую надежность работы схемы.

В отечественной и зарубежной литературе опубликован ряд статей, посвященных запоминающим устройствам на магнитном барабане [1–5]. В некоторых из них [1–3] рассмотрены ламповые схемы, в других [4,5] —частично или полностью транзисторные.

Как правило, запоминающее устройство на магнитном барабане является промежуточной памятью в машине и обычно использует последовательный способ записи информации. В настоящее время еще не существует установившегося критерия оценки запоминающих устройств, хотя и известно, что при оценке следует учитывать емкость запоминающего устройства, время поиска, время выборки, количество оборудования на один разряд запоминаемой информации, коэффициент загрузки оборудования в режиме непрерывного обращения к памяти, надежность работы, простоту схем, потребляемую мощность, габариты и т. д. Это усложняет сравнение схем и создает трудности в выборе той или иной из них. Определенно сейчас можно утверждать лишь то, что транзисторные схемы являются более перспективными с точки зрения многих из вышеуказанных характеристик.

При рассмотрении запоминающего устройства последовательного действия на магнитном барабане возникает три основных задачи: получение в выбранной головке требуемой величины тока записи, использование одного читающего усилителя и устранение помех в цепях чтения от записи. Как правило, наибольшую трудность вызывает решение первой задачи, особенно при транзисторной реализации схем. Применение схем диодно-трансформаторных матриц или матриц из магнитных ключей [2–4] с использованием полупроводников становится затруднительным, если необходимо коммутировать головки с рабочим током порядка 0,5 *А* на частотах повторения до 100 *кгц*. Однако возможно построение схем с многократной прошивкой магнитных сердечников, обеспечивающих совместную работу нескольких генераторов на общую нагрузку.

В настоящей статье рассматривается последовательная схема управления чтением и записью сигналов с магнитного барабана, использующая принцип сложения и компенсации магнитных потоков в сердечниках. Существует несколько способов прошивки сердечников, обеспечивающих частичную или полную компенсацию магнитных потоков в невыбранных сердечниках. В предлагаемой схеме применена

прошивка, обеспечивающая полную компенсацию магнитных потоков в невыбранных сердечниках. Эту схему называют также „схемой с раздельной нагрузкой“ [6].

На рис. 1а приведена схема прошивки четырех сердечников для случая четырех генераторов, вырабатывающих двухполярные импульсы

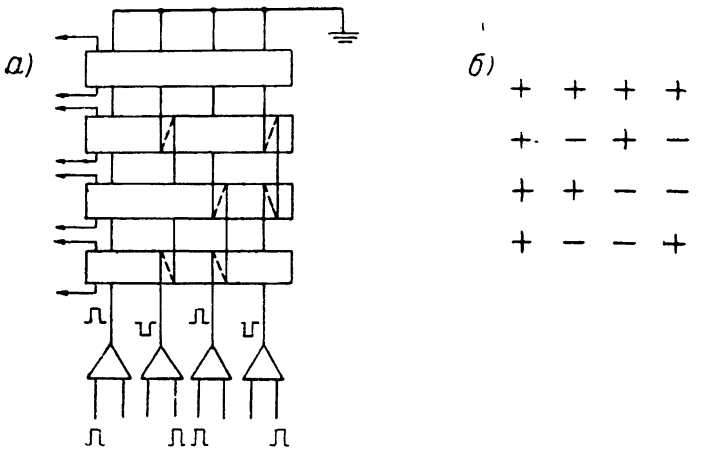


Рис. 1.

тока. В общем случае, имея $2n$ однополярных или n генераторов двухполярных импульсов тока, можно получить сложение магнитных потоков в одном из n сердечников при полной компенсации потоков в остальных $n-1$ сердечниках, задавая определенный закон прошивки и включения генераторов. Закон прошивки для четырех торов приведен на рис. 1б; здесь знак плюс означает, что направление обмотки, прошивающей данный сердечник, совпадает с направлением выходной обмотки, а знак минус означает, что направление не совпадает. Каж-

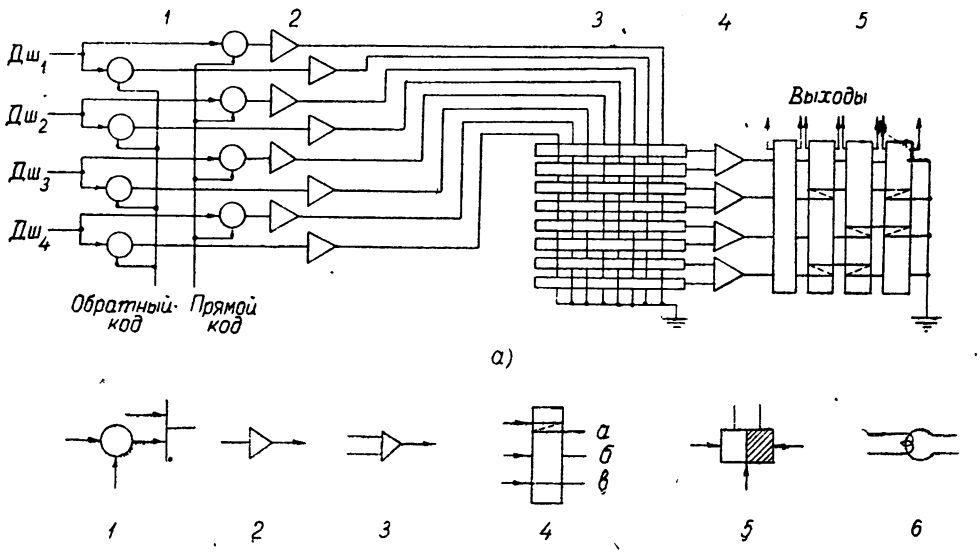


Рис. 2.

дый генератор тока имеет два входа; возбуждение того или иного входа определяет полярность выходного сигнала. Нагрузкой для этих сердечников, называемых в дальнейшем магнитным дешифратором, могут служить магнитные головки. Для возбуждения генераторов тока необходимо получить требуемый набор импульсов для питания n из общего числа $2n$ входов генераторов.

Из приведенного закона прошивки сердечников (рис. 1а) видно, что для выбора, например, второго сверху сердечника необходимо обратиться ко второй сверху строке таблицы, где знаки плюс и минус укажут на полярность сигналов, которые необходимо получить на выходах соответствующих генераторов. Нетрудно заметить, что если разбить эту таблицу на четыре квадранта, то в каждом из первых трех прошивка одинаковая, а в четвертом—инверсная. То же самое справедливо и для отдельного квадранта. Аналогично строится матрица на любое число выходов, кратное степеням двойки.

Схема коммутации головок при записи приведена на рис. 2а. Для упрощения рисунка показан случай коммутации четырех головок. Схема содержит следующие узлы: 1—диодно-трансформаторные клапаны, 2—усилители, 3—магнитный коммутатор, 4—генераторы тока, 5—магнитный дешифратор на четыре выхода.

Схема связи магнитных головок и цепей чтения через сердечники магнитного дешифратора приведена на рис. 3.

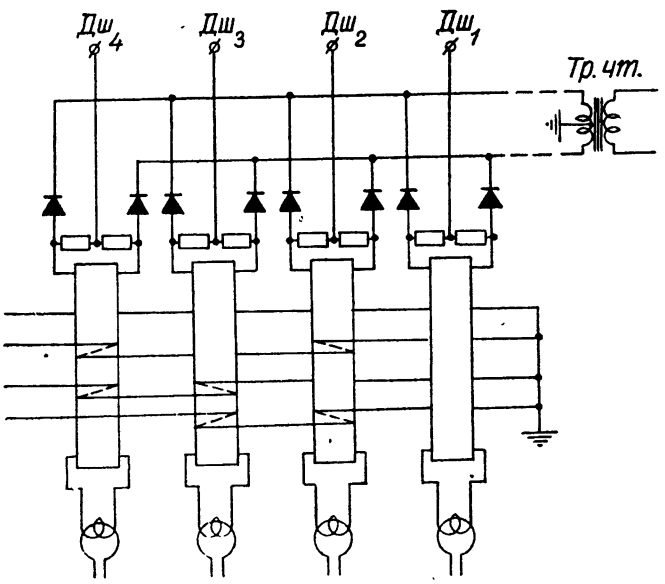


Рис. 3.

На рис. 2б указаны обозначения, принятые в схемах: 1—диодно-трансформаторный клапан с разделительной цепью на выходе, 2—импульсный усилитель с трансформаторным выходом, 3 — генератор тока с двумя входами и общим трансформаторным выходом, обеспечивающим получение двухполярных импульсов тока, 4—магнитный сердечник (оксифер Ф—2000) с обмотками (*а*—провод, входящий внутрь кольца справа, *б*—провод, входящий внутрь кольца слева, *в*—провод, проходящий мимо сердечника), 5—триггер, 6—магнитная головка.

При установке искомого адреса дорожки на триггерах регистра поиска возбуждается один из выходов дешифратора, управляющий клапанами записи единиц и нулей (рис. 2а) и клапаном чтения (рис. 3). В случае, если осуществляется операция чтения, то код с кодовой шины в цепи записи не поступает, а информация с расшифрованной дорожки через клапан чтения поступает на общий трансформатор (тр. чт.) и с него на вход усилителя чтения, который стробируется сигналом „разрешение чтения". При осуществлении записи сигнал с кодовой шины поступает на вход преобразователя кодов и на входы усилителей записи единиц и нулей, входные клапаны которых возбуждаются от дешифратора. С приходом первой единицы возбуждается усилитель записи единиц и с сердечников магнитного коммутатора код, соответствующий выбираемому сердечнику, поступает на входы генераторов тока. Сложение сигналов от генераторов тока осуществляется в сердечнике, адрес которого установлен на регистре поиска.

В системе применен метод записи „невозврат к нулю". При этом необходим канал записи нулей, обеспечивающий получение импульсов противоположной полярности на выходе магнитного дешифратора.

Как видно из схемы (рис. 2а), магнитный коммутатор представляет собой постоянное запоминающее устройство с числом разрядов, равным числу входов генераторов тока. При прошивке колец магнитного коммутатора можно пользоваться таблицей, приведенной на рис. 1б. Знак плюс означает, что прошивающий провод прямого кода проходит через кольцо, связанное с тем входом генератора тока, который обеспечивает положительный импульс тока на выходе, а знак минус означает, что этот провод проходит через кольцо, связанное со входом генератора, который обеспечивает появление отрицательного импульса тока на выходе. Соответствующий прошивающий провод обратного кода проходит через оставшиеся кольца. Магнитный коммутатор можно было бы заменить диодной сеткой, но большое число диодов значительно снизит надежность работы схемы.

При построении схем с большим числом выходов соответственно должно возрасти число выходов магнитного дешифратора и магнитного коммутатора. Если идти по пути простого увеличения числа прошивающих проводов в каждом сердечнике, то уже в схеме на 32 выхода возникнут большие трудности монтажа и возрастут потери в схеме. Однако возможен и другой путь построения схем с большим числом выходов, когда за основу берется схема коммутации, аналогичная изображенной на рис. 2а, в качестве первой ступени и магнитный дешифратор (рис. 3) с необходимым числом выходов в качестве второй ступени. Этот метод построения схем приводит к удвоению числа сердечников магнитных дешифраторов, но позволяет упростить монтаж и уменьшить потери в проводах и сердечниках.

Число выходов в каждой ступени может меняться (2, 4, 8, 16) в зависимости от необходимого числа выходов. Например, монтаж по четверкам в первой и четверкам во второй ступенях дает 16 выходов; по восьмеркам в первой и четверкам во второй — 32 выхода и т. д.

Для примера на рис. 4 приведена схема коммутации 16 магнитных головок при записи и чтении. Здесь $Тр_1 \div Тр_4$ — триггеры регистра поиска, I — диодный дешифратор на четыре выхода, II — (1, 2, 3, 4) схемы коммутации на четыре выхода (рис. 2а), III — (1, 2, 3, 4) — магнитный дешифратор на четыре выхода с клапанами чтения (рис. 3).

Для упрощения рисунка связь между выходами первой ступени и входами второй показана цифрами. При выборе произвольной головки возбуждаются по одному идентичному выходу каждого магнитного дешифратора на четыре выхода первой ступени, что обеспечивает возбуждение всех четырех входов, одного из магнитных

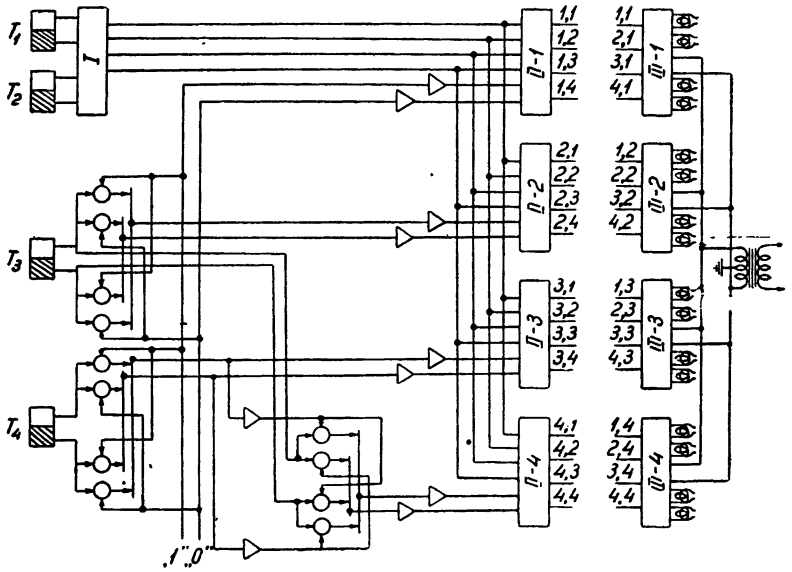


Рис. 4.

дешифраторов второй ступени. Полярность сигнала на выходе дешифратора первой ступени, а следовательно, и номер выбираемого кольца дешифратора второй ступени, определяется схемой коммутации цепей прямого и обратного кодов, управляемых старшими триггерами $Тр_3$ и $Тр_4$ регистра поиска. Так для выбора третьей сверху головки в магнитном дешифраторе III—2 необходимо иметь положительные сигналы на входах 1.2 и 2.2 и отрицательные на входах 3.2 и 4.2 согласно таблицы рис. 1б. Это требует возбуждения второго выхода диодного дешифратора I, управляемого триггерами $Тр_1$ и $Тр_2$; возбуждения усилителей записи канала прямого кода (канала записи „I") в II—1 и II—2, что вызывает появление сигналов + — + — на выходах генераторов тока; и возбуждения усилителей обратного кода (канала записи „0") в II—3 и II—4, что вызывает появление сигналов — + — + на выходах генераторов тока.

Коммутация каналов записи „I" и „0" осуществляется триггерами $Тр_3$ и $Тр_4$ при установке искомого адреса в регистре.

Экспериментально испытывалась схема на 32 выхода, нагруженная на головки, ток записи которых находится в интервале $350 \div 400$ *ма* при импульсном сопротивлении $100 \div 120$ *ом* ($\tau_{имп} = 2$ *мксек*, $\tau_{ср} = 0{,}5$ *мксек*). Необходимая для записи пиковая мощность $\simeq 16$ *вт*. Отдача головки $\simeq 80$ *мв*. На рис. 5 приведен график зависимости амплитуды выходного сигнала $e_{чт}$ от тока записи для головки при зазорах $(30 \div 60$ *мк*). Головки установлены на магнитном барабане диаметром 267 *мм*, длиной 205 *мм*, вращающемся со скоростью 3000 *об·мин*$^{-1}$. Зазор между головками и барабаном 30 *мк*. Электронная часть схемы выполнена полностью на транзисторах типа П16Б с применением диодов Д9В и оксиферовых колец Ф2000 (10×

×6×5 *мм*). Схема рассчитана на работу с частотами следования импульсов не более 100 *кгц*.

Магнитный коммутатор собран на кольцах Ф 1000(10×6×5 *мм*). Каждый сердечник имеет пять обмоток (четыре входных и одну вы-

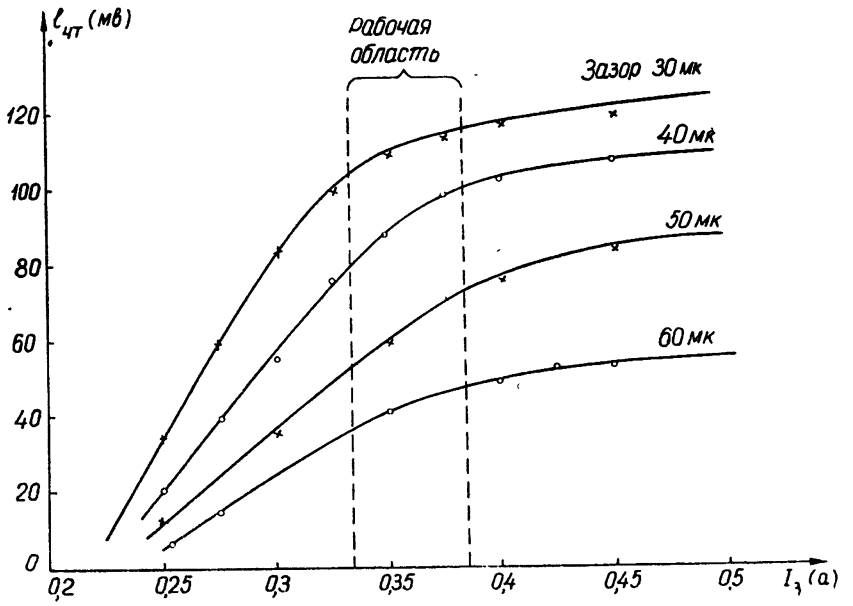


Рис. 5.

ходную). В магнитном дешифраторе используются кольца Ф 2000(10××6×5 *мм*) с числом обмоток соответственно 5 и 6 в первой и второй ступенях. Шестая обмотка во второй ступени служит для чтения. Схемы усилителя и генератора тока требуют соответственно два и четыре транзистора П16Б и здесь не приводятся.

Управление клапанами чтения можно осуществить от диодного дешифратора на 16 выходов, либо от общего дешифратора на 4 выхода с дополнительной коммутацией четырех усилителей чтения. Эксперименты по записи на магнитный барабан одиночных импульсов и серии импульсов показали, что схема обеспечивает отсутствие помех в невыбранных головках, получение требуемой амплитуды импульсов тока записи и обладает повышенной надежностью работы, так как при выходе из строя одного-двух генераторов тока ток записи не падает ниже номинальной величины, а помехи в других каналах недостаточны для обеспечения сколько-нибудь заметной записи. Другим достоинством схемы является равномерная загрузка оборудования в режиме непрерывного обращения к памяти, что приводит к одновременному старению всех активных элементов устройства. Схема позволяет легко увеличивать емкость памяти без существенных переделок электронной части путем количественного увеличения оборудования.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Гончаров, А. С. Тарантович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 156 (1958).
2. K. J. Turner, J. E. Thompson, Electronic Eng., **32**, № 383 (1960).
3. D. D. Majumder, Electronic Eng., **30**, 702 (1958).

4. S. D. Brian, Electronic and Radio Eng., 36, 82 (1959).
5. JBM J. of Research and Development, 2, № 1 (1958).
6. Ct. Tr. Constantine, JBM J. of Research and Development, 2, № 3 (1958).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 мая 1961 г.

COMMUTATION SEMICONDUCTOR SYSTEM OF A MAGNETIC DRUM HEADS

A. M. Gontcharov, A. S. Tarantovitch

The commutation circuit of magnetic drum heads has been proposed for recording and reading. The П16Б type transistors for recording control and the Д9В type diodes for reading volves are used. The principle of composition and compensation of magnetic fluxes in the ferrocart cores (Ф200) is used in the recording circuit. The given results of experiment show the high reliability of circuit operation.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

О ПРОИСХОЖДЕНИИ КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ И КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ*

Г. Г. Гетманцев

Современные представления о природе первичных космических лучей тесно связаны с проблемой происхождения космического радиоизлучения, а данные радиоастрономии являются основой для теории происхождения космических лучей. В этой связи необходимо, как нам кажется, учитывать появившиеся в последние годы новые данные о спектре нетеплового радиоизлучения.

1. Спектр нетеплового космического радиоизлучения I_ν характеризуется, как известно, функцией $I_\nu \sim \nu^{-\alpha}$, причем спектральный индекс α связан с показателем степени γ в энергетическом спектре космических электронов, порождающих радиоизлучение, простым соотношением $2\alpha=\gamma-1$. По данным Уитфилда [1] для дискретных источников—сверхновых, концентрирующихся в плоскости Галактики, $\alpha_0=0{,}74$ (по его же более поздним данным $\alpha_0=0{,}6$ [2]). Вместе с тем, непосредственные и, по-видимому, надежные измерения Костейна дают для спектра гало $\alpha=0{,}37$ [3]. Расхождение между частотными спектрами радиоизлучения дискретных источников и гало фактически еще более значительно, если учесть, что вследствие потерь на синхротронное излучение энергетический спектр релятивистских электронов в гало со временем становится круче ($\gamma=\gamma_0+1$). Таким образом, если $\gamma_0=(2\alpha_0+1)\geqslant 2{,}2$, то в гало $\gamma=\gamma_0+1\geqslant 3{,}2$ и, следовательно, α должно быть порядка 1,1 вместо $\alpha=0{,}37$, полученного из прямых измерений. Отмеченное расхождение между спектрами радиоизлучения источников космических лучей и гало свидетельствует о том, что космические лучи в гало генетически не связаны с современными в космологическом смысле дискретными источниками—сверхновыми.

2. Наблюдающееся нетепловое космическое радиоизлучение, как известно, разделяется на плоскую и сферическую составляющие. Непосредственное измерение спектра радиоизлучения плоской составляющей связано с значительными трудностями, так как ее угловая ширина не превышает нескольких градусов. Тем не менее, опубликованные в последнее время радиоизофоты космического радиоизлучения, полученные с помощью больших радиотелескопов, обладающих одинаковыми и весьма узкими диаграммами направленности ($\sim 50'$), позволяют произвести сравнение спектров радиоизлучения плоской подсистемы и гало. Такое сравнение было произведено Разиным [4]. Оказалось, что спектр радиоизлучения плоской подсистемы несколько более пологий, чем у гало, несмотря на то, что для сравнения были взяты участки гало, примыкающие к плоской подсистеме. При этом разность соответствующих спектральных индексов колеблется в некоторых пределах и в среднем $\Delta\alpha \simeq 0{,}2 \div 0{,}3$. Это обстоятельство, как уже отмечалось в [4], само по себе свидетельствует о затрудненности обмена космическими лучами между плоской подсистемой и гало и, следовательно, является независимым свидетельством отсутствия прямой связи между современными в космологическом смысле дискретными источниками—сверхновыми и радиоизлучением гало.

3. Заключение об изолированности плоской подсистемы от гало в смысле обмена космическими лучами, вообще говоря, не согласуется с имевшимися до сих пор представлениями о движении космических лучей в межзвездных магнитных полях [5]. Дело в том, что при движении частиц в хаотических межзвездных полях с размерами квазиоднородных участков магнитного поля $l_2 \simeq 10^{20}$ *см*, имеющем характер трехмерной диффузии, должен иметь место свободный обмен частицами между плоской подсистемой и гало. При этом космические лучи должны проходить расстояние $L \simeq 5 \cdot 10^{22}$ *см* (порядка радиуса гало) за время $t \simeq 5 \cdot 10^{15}$ *сек*, которое еще значительно меньше „времени жизни" космических лучей в гало ($\simeq 10^{17}$ *сек*). По всей вероятности, однако,

---

* Доклад на советско-американском симпозиуме по радиоастрономии, Грим-Бэнк, США, 1961.

такая схема движения космических лучей в Галактике не точна. Во всяком случае она заведомо не объясняет одну из основных особенностей, свойственных первичным космическим лучам—высокую степень изотропии. Действительно, при беспрепятственном движении космических лучей вдоль силовых линий межзвездного магнитного поля из плоскости на периферию Галактики в пределах каждого квазиоднородного участка магнитного поля анизотропия космических лучей должна быть весьма значительной, а изотропия должна иметь место лишь в среднем для больших объемов, содержащих значительное количество неоднородностей магнитного поля. Изотропия такого рода, конечно, не имеет прямого отношения к результатам измерения первичных космических лучей на Земле.

Положение коренным образом меняется, если допустить, что движение космических частиц вдоль выделенной трубки магнитных силовых линий само по себе имеет диффузионный характер, т. е. в определенных точках силовых линий частицы могут „отражаться" от локальных неоднородностей магнитного поля и двигаться затем назад вдоль тех же самых силовых линий. Такими неоднородностями, в частности, могут быть газомагнитные разрывы в космических магнитных полях, возникающие при движении газовых облаков межзвездной среды со сверхзвуковыми скоростями, соответствующими космическим условиям. Простой расчет показывает, что если соответствующая „длина свободного пробега" частиц между двумя газомагнитными разрывами l_1 не превышает 10^{21} *см*, то степень анизотропии космических лучей, определяемая разностью потоков частиц вдоль силовых линий в двух противоположных направлениях, не должна превышать 10^{-3}.

В обсуждаемой здесь схеме космические лучи одновременно участвуют в двух диффузионных процессах, совершая одномерную диффузию вдоль силовых линий магнитного поля и трехмерную диффузию благодаря хаотическому изменению направления силовых линий в пространстве. Плотность вероятности смещения частицы за время t на расстояние R была найдена нами для предельного случая $[R^2/(Dt)^{1/2}l_2]^{1/3} \gg 1$ и выражается функцией $a/R \exp\frac{9}{4}(-R^4/3Dt\,l_2^2)^{1/3}$, где $a = \text{const}$, $D = \frac{1}{2} vl_1$ — коэффициент одномерной диффузии, а $v \simeq c/3$ — скорость движения частиц вдоль силовых линий межзвездного магнитного поля.

Как видно из приведенного выражения, за время t частицы в среднем смещаются на расстояние $R \simeq (Dt\,l_2^2)^{1/4}$*. При $l_2 \simeq 3 \cdot 10^{20}$ *см* и $l_1 \simeq 10^{21}$ *см* ($D \simeq 5 \cdot 10^{30}$) за период порядка времени существования Галактики $t \simeq 10^{17}$ *сек* смещение космических лучей $R \simeq 10^{22}$ *см*, т. е. частицы смещаются из плоскости на периферию Галактики на расстояния в несколько раз меньше радиуса гало. При меньших значениях l_1 и l_2 R может быть доведено до нескольких сот *парсек*, соответствующих толщине плоской подсистемы источников нетеплового радиоизлучения. Поскольку l_1 и l_2 не известны с достаточной надежностью, сейчас, по-видимому, нельзя определенно утверждать, ответственны ли сверхновые за космические лучи только в плоской подсистеме или же они поставляют их как в плоскую подсистему, так и в гало. Несомненно лишь, что в рамках рассмотренного выше процесса диффузии космических лучей в силу медленности диффузии за космические лучи в гало могут быть ответственными лишь источники в плоской подсистеме, действовавшие на самой ранней стадии развития Галактики.

4. В разделе 3 мы совершенно не принимали во внимание наличие в межзвездной среде упорядоченных и хаотических движений намагниченных газовых масс. Такие движения могут оказать определенное влияние на изотропию космических лучей и должны быть рассмотрены особо. Вместе с тем, как нам представляется, учет макроскопических движений межзвездной среды не должен существенно повлиять на выводы раздела 3, касающиеся скорости переноса космических лучей из плоскости на периферию Галактики.

Приведенные выше соображения, связанные с частотными спектрами космического радиоизлучения и дискретных источников, носят, разумеется, предварительный характер и должны быть подтверждены и уточнены последующими измерениями. Можно надеяться, что в ближайшие годы при наличии соответствующих данных о спектрах радиоизлучения, его поляризации и т. д., полученных с помощью больших радиотелескопов, в теории происхождения нетеплового космического радиоизлучения и космических лучей будет наблюдаться значительный прогресс.

---

* Выражение для R может быть без труда получено также и из элементарных соображений, если подставить в средний квадрат смещения в результате трехмерной диффузии в качестве полного пути, проходимого частицей, диффузионный путь, определяемый одномерной диффузией.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. R. Whitfield, Mont. Not. Roy. Astr. Soc., **117**, 680 (1957).
2. Дж. Р. Уитфилд, Радиоастрономия, Парижский симпозиум 1958, ИЛ, М., 1961, стр. 291.
3. C. H. Costain, Mont. Not. Roy. Astr. Soc., **120**, 248 (1960).
4. В. А. Разин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 921 (1960).
5. Г. Г. Гетманцев, Астрон. ж., **35**, 721 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
7 октября 1961 г.

ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ ЧАСТИЦЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ НАД ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина

При движении частицы над идеально проводящей неровной поверхностью наряду с потерями обычного типа (черенковское излучение и поляризационные потери) возникают потери, вызванные тем, что наведенный частицей заряд движется неравномерно вдоль неровной поверхности.

Потери энергии на единицу длины частицей, движущейся вдоль оси x_1, определяются равенством [1]

$$\frac{dW}{dx_1} = q\mathcal{E}_1. \tag{1}$$

В случае статистически неровной границы раздела электромагнитное поле над ней состоит из средней и флюктуационной части, обусловленной статистическими неровностями, так что

$$\mathcal{E} = E + \xi, \tag{2}$$

где E—среднее значение электрического поля, ξ—его флюктуационная часть. При этом средние потери энергии определяются средним электрическим полем:

$$\frac{d\overline{W}}{dx_1} = qE_1. \tag{3}$$

Черта над W означает статистическое усреднение.

Определение среднего поля над статистически неровной поверхностью можно свести к нахождению поля над гладкой границей раздела с определенными граничными условиями [2].

Предположим, что частица с зарядом q равномерно движется со скоростью v в вакууме вдоль оси x_1 на расстоянии a от идеально проводящей среды. Уравнения для поля E и граничные условия имеют вид:

$$(\Delta+k^2)\,E^\omega = -\frac{4\pi i}{\omega}\,(\operatorname{grad}\operatorname{div} j^\omega + k^2 j)^\omega;$$

$$j \equiv qv\delta(x_1 - vt)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3 - a);$$

$$E^\omega_{1,2} = \frac{\overline{\zeta^2}}{2\pi}\int ds'\left\{\frac{e^{ik\rho}}{\rho}\left[\Delta\rho\frac{\partial K(\rho)}{\partial\rho_{1,2}}E^\omega_3 - \nabla_\rho\frac{\partial K(\rho)}{\partial\rho_{1,2}}\nabla_{r'}E^\omega_3 + \frac{\partial K(\rho)}{\partial\rho_{1,2}}\nabla_{r'}\frac{\partial E^\omega_\perp}{\partial x_3} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial E^\omega_\perp}{\partial x_3}\nabla_\rho\frac{\partial K(\rho)}{\partial\rho_{1,2}}\right] + V''_{x_3}\left[\frac{\partial K(\rho)}{\partial\rho_{1,2}}E^\omega_3 - K(\rho)\frac{\partial E^\omega_{1,2}}{\partial x_3}\right]\right\}, \tag{4}$$

где $E^\omega_\perp$ — вектор с компонентами E^ω_1, E^ω_2, $\zeta(x_1, x_2)$—отклонение случайной поверхности от плоскости $x_3 = 0$; $K(\rho) = \overline{\zeta(r)\,\zeta(r')}/\zeta^2$—коэффициент корреляции;

$$\rho = r - r';$$

$$V''_{x_3} = \lim_{x_3 \to 0} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2 + x_3^2}}}{\sqrt{\rho^2 + x_3^2}},$$

j^ω и E^ω — преобразование Фурье по времени от соответствующих величин.

Для статистически однородной и изотропной среды коэффициент корреляции является функцией

$$\rho = |r - r'|.$$

Тогда поле E ищется в виде:

$$E_i^\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\varkappa_2 A_i\left(\frac{\omega}{v}, \varkappa_2\right) \exp\left[i\left(\frac{\omega}{v}x_1 + \varkappa_2 x_2 + \lambda x_3\right)\right] - \tag{5}$$

$$- \frac{iq}{2\pi v}(1 - \beta^2\delta_{1i}) \int_{-\infty}^{\infty} d\varkappa_2 \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_i} \exp\left[i\left(\frac{\omega}{v}x_1 + \varkappa_2 x_2 \pm \lambda x_3\right)\right];$$

$$\lambda^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} - \varkappa_2^2.$$

Подставляя (5) в (4) и воспользовавшись уравнением $\operatorname{div} E = 0$, получим систему уравнений для определения A_i. Потери энергии частицы равны

$$\frac{d\overline{W}}{dx_1} = 2q \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, d\varkappa_2\, A_1(\omega, \varkappa_2)\, e^{-|\lambda| a}. \tag{6}$$

Ограничимся областью частот, для которых выполняется условие $a\omega/v \gg 1$. В этом предположении интеграл (6) по $\varkappa_2$ легко вычисляется и

$$\frac{d\overline{W}}{dx_1} = \int_0^{\infty} \Phi(\omega)\, d\omega, \tag{7}$$

где $\Phi(\omega)$ — спектральная плотность потерь на единичный частотный интервал, определяется следующей формулой:

$$\Phi(\omega) = \operatorname{Re} i \frac{2q^2 \overline{\zeta^2}\, \omega^{1/2} (1 - \beta^2)^{1/4}}{\sqrt{\pi a}\, v^{3/2}} \exp\left[-2a\frac{\omega}{v}\sqrt{1 - \beta^2}\right] \int_0^{\infty} d\rho_1 \times$$

$$\times \left\{ e^{ik\rho} \left\{ J_1\left(\frac{\omega}{v}\rho\right) \frac{\partial^3 K(\rho)}{\partial \rho^3} + \frac{\partial^2 K(\rho)}{\partial \rho^2} \left[-\frac{1}{\rho}(1 - \beta^2) J_1\left(\frac{\omega}{v}\rho\right) + \frac{\omega}{v}(2 - \beta^2) J_0\left(\frac{\omega}{v}\rho\right) \right] + \right.\right. \tag{8}$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial K(\rho)}{\partial \rho} (1 - \beta^2)\left(1 - \rho^2 \frac{\omega^2}{v^2}\right) J_1\left(\frac{\omega}{v}\rho\right) \right\} + \rho V''_{x_3} \left[(1 - \beta^2) \frac{\omega}{v} K(\rho) J_0\left(\frac{\omega}{v}\rho\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial K(\rho)}{\partial \rho} J_1\left(\frac{\omega}{v}\rho\right) \right] \right\},$$

$J_0\left(\frac{\omega}{v}\rho\right)$, $J_1\left(\frac{\omega}{v}\rho\right)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно.

Выражение для $\Phi(\omega)$ упрощается при $(\omega/c)\, l \ll 1$ и $(\omega/v)\, l \gg 1$ (l — радиус корреляции неровностей, $K(\rho) = K(\rho/l)$). Если $(\omega/c)\, l \ll 1$, то

$$\Phi(\omega) = -\frac{4Bq^2 \omega^{9/2} l^2 \overline{\zeta^2} (1 - \beta^2)^{1/4} (1 + \beta^2)}{3\sqrt{\pi a}\, v^{5/2} c^3} \exp\left[-2a\frac{\omega}{v}\sqrt{1 - \beta^2}\right], \tag{9}$$

где $B = \int_0^{\infty} x K(x)\, dx$ — число порядка единицы. При $(\omega/v)\, l \gg 1$ выражение для $\Phi(\omega)$

существенно зависит от явного вида коэффициента корреляции. Если, например, коэффициент корреляции определяется выражением

$$K(\rho) = \begin{cases} 1 & \rho \leqslant l \\ 0 & \rho > l \end{cases};$$

$$\Phi(\omega) = -\frac{2\sqrt{2}\, q^2 (1-\beta^2)^{1/4} \beta \omega^2 \zeta^2}{\pi \sqrt{a}\, v^2 c\, l^{1/2}} \exp\left[-2a\frac{\omega}{v}\sqrt{1-\beta^2}\right] \times$$
$$\times \left\{\beta \cos\left(\frac{\omega}{c} l\right) \cos\left(\frac{\omega}{v} l - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\omega}{c} l\right) \sin\left(\frac{\omega}{v} l - \frac{\pi}{4}\right)\right\}. \qquad (10)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М Болотовский, УФН, 62, 201 (1957).
2. Ф. Г. Басс, Изв высш. уч. зав —Радиофизика, 3, 73 (1960).

Харьковский институт радиофизики и электроники АН УССР

Поступила в редакцию 15 июля 1961 г.

Примечание при корректуре. Формула (7) описывает потери энергии точечным зарядом. Нетрудно определить потери энергии диполем и заряженной нитью. Для этого достаточно выражение (8) умножить для диполя на $\frac{\omega^2}{q^2 v^2}\left[(1-\beta^2) p_z^2 + p_x^2\right]$, где p_z и p_x — проекции дипольного момента $\boldsymbol{p}$ на оси z и x; для заряженной нити — на $2\frac{\tau^2}{q^2}\sqrt{\frac{\pi a v}{\omega(1-\beta^2)^{1/2}}}$, где τ — заряд на единицу длины нити. Выражение для потерь энергии заряженной нитью верно при любых значениях a.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕННОМ СТЕРЖНЕ И ИХ ИЗЛУЧЕНИЕ

В. П. Шестопалов, И. П. Якименко, В. Д. Филь

1. Симметричные электромагнитные волны в плазменном стержне, помещенном в продольное постоянное магнитное поле, исследованы достаточно подробно (см. [1,2]). Волны любой симметрии были рассмотрены в статье [3]. Однако в [3] рассмотрен лишь один частный случай распространения электромагнитных волн в плазменном стержне—волны пространственного заряда. В настоящей работе исследуется распространение несимметричных волн в плазменном стержне с продольным магнитным полем при наиболее общих предположениях относительно скоростей распространения этих волн. Дисперсионное уравнение для исследуемой системы получается тем же способом, что и в работе [4], и имеет следующий вид:

$$(m^2 + \eta - \varepsilon)\left[(\tau_n\alpha)^2 - \frac{\tau_n\alpha\delta^2}{g_0} n(1+m^2)\right] + (g_1 a\sigma_{n1} + g_2 a\sigma_{n2})\left\{z^2\left(\tau_n\alpha - \frac{\delta n m^2}{g_0^2}\right) - \right.$$
$$- \frac{n m^2 \eta \delta^2}{g_0^2} - \frac{1}{2}(\eta^2 + z^{2\varepsilon})\left(\tau_n\alpha - \frac{\delta^2 n}{g_0^2}\right)\Big\} - \frac{g_1 a\sigma_{n1} - g_2 a\sigma_{n2}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left\{m\left[\frac{\delta^2}{g_0^2}\left(\frac{\eta^2 + z^{2\varepsilon}}{\varepsilon_z} + z^2\right) n + \right.\right. \qquad (1)$$
$$+ \frac{\eta}{\varepsilon_z}\left(\tau_n\alpha - \frac{\delta^2 n m^2}{g_0^2}\right) + \eta\left(\tau_n\alpha - \frac{\delta^2 n}{g_0^2}\right)\Big] + \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2}\left[(z^{2\varepsilon} + k^2\eta^2)\left(\tau_n\alpha - \frac{\delta^2 n}{g_0^2}\right) - \right.$$
$$\left.\left. - z^2\left(\tau_n\alpha - \frac{\delta^2 n m^2}{g_0^2}\right)\right]\right\} + (g_1 a)(g_2 a)\sigma_{n1}\sigma_{n2}\left[m^2 - 1 + \frac{l^2}{x(1+x)}\right] = 0,$$

где

$$z^2 = m^2 - \varepsilon; \quad \delta^2 = \frac{(ka)^2 l^2}{x(1+x)}; \quad g_0^2 = (ka)^2 (m^2 - 1); \quad \alpha = g_0\left(1 + \frac{\delta^2}{g_0^2}\right); \quad l = \frac{\omega_0}{\omega_H}; \quad x = \frac{\omega}{\omega_H};$$

$$m = \frac{\beta_n}{k}; \quad \tau_n = \frac{K_{n-1}(g_0 a)}{K_n(g_0 a)}; \quad \sigma_{n1,2} = \frac{I_{n-1}(g_{1,2} a)}{I_n(g_{1,2} a)};$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{x^2}{x^2 - l^2}\left(\frac{1-m^2}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{1-m^2}{2m}\right)^2 + (x^2 - l^2)}\right);$$

$$g_{1,2} = -\frac{k^2 \varepsilon_z}{\varepsilon}(\varepsilon - m^2 - m\tau\lambda_{1,2}); \quad k = \frac{\omega}{c} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

β_n — продольное волновое число. Если положить $\eta = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_z$, то (1) переходит в уравнение для диэлектрического стержня, а при $n = 0$ оно переходит в уравнение, приведенное в [1, 2].

В связи с тем, что $g_{1,2}^2$ зависит от параметров плазмы и частоты, интересно выяснить области существования различных решений (1). Эти области представлены на рис. 1. В областях I существуют медленные волны с $g_{1,2}^2 > 0$, в областях II—медленные волны с $g_1^2 > 0$, но $g_2^2 < 0$, или наоборот, в областях III—„объемные" волны с $g_{1,2}^2 < 0$. В заштрихованной области решения дисперсионного уравнения отсутст-

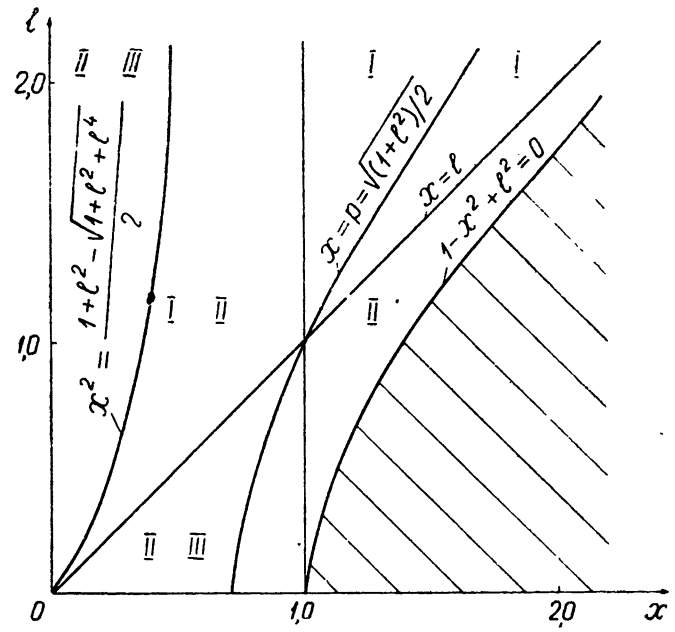


Рис. 1.

вуют. Кривая $x = l$ соответствует $\varepsilon_z = 0$, кривая $1 - x^2 + l^2 = 0$ соответствует $\varepsilon = 0$ кривая $x = \sqrt{(1 + l^2)/2}$ — кривая, соответствующая граничной частоте, получаемой из дисперсионного уравнения при $m \to \infty$.

Заметим, что граничная частота для волн всех типов одинакова, но для волн с $n \leqslant 0$ она является верхней частотой отсечки, а для волн с $n > 0$—нижней частотой отсечки. Волны с мнимыми радиальными волновыми числами (например, $g_1^2 < 0$) имеют критические частоты, определяемые, как обычно, из условия $\beta_n = k$. Так, при $n \leqslant 1$

$$x_{кр} = \sqrt{l^2 + \left[\frac{\alpha_{nm}^2}{(\omega_0 a)^2 + \alpha_{nm}^2}\right]},$$

где α_{nm} — m-й корень функции $J_n(g_1 a)$.

Дисперсионные кривые в различных областях, рассчитанные по уравнению (1) графо-аналитическим способом, приведены на рис. 2 (1—волны с $g^2_{1,2} > 0$; 2—волны с $g^2_1 > 0$, но $g^2_2 < 0$; 3—волны с $g^2_{1,2} < 0$). Из этих кривых видно, что фазовая скорость волн различных типов сильно зависит как от частоты, так и от параметров среды (плотности плазмы) и магнитного поля, приложенного вдоль оси стержня. Необходимо отметить, что в исследуемой системе имеет место нормальная и аномальная дисперсии.

2. Поскольку фазовая скорость несимметричных волн в плазменном стержне сильно зависит от внешнего магнитного поля и плотности плазмы, следует ожидать, что диаграммой направленности плазменного стержня можно управлять электрическим способом. Приближенный расчет диаграммы направленности в работе проведен при помощи принципа Гюйгенса-Кирхгофа с использованием полей на поверхности стержня в виде, полученном из решения задачи о распространении электромагнитных волн вдоль бесконечного плазменного стержня. Компоненты поля в дальней зоне имеют вид:

$$E_\Theta = \frac{k}{2r}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[i J_n(x)\left(H^0_\psi \sin\Theta + H^0_z \cos\Theta \frac{n}{x}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right) E^0_z \right] \frac{\sin u}{u} (-i)^n e^{i\xi} e^{in\psi};$$

$$E_\varphi = \frac{k}{2r}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[-\frac{i}{2}\left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right) H^0_z - \right.$$

$$\left. - J_n(x)\left(E^0_\psi \sin\Theta + E^0_z \cos\Theta \frac{n}{x}\right)\right] \frac{\sin u}{u} (-i)^{n+1} e^{i\xi} e^{in\psi},$$

где $E_r = 0,$

$$x = ka\sin\Theta, \quad u = \frac{kL}{2}(m - \cos\Theta), \quad \xi = kr - \omega t,$$

L—длина стержня, E^0_ψ, E^0_z — поля на поверхности антенны, ψ—угол в цилиндрической системе координат. Аналогичным образом записываются компоненты H.

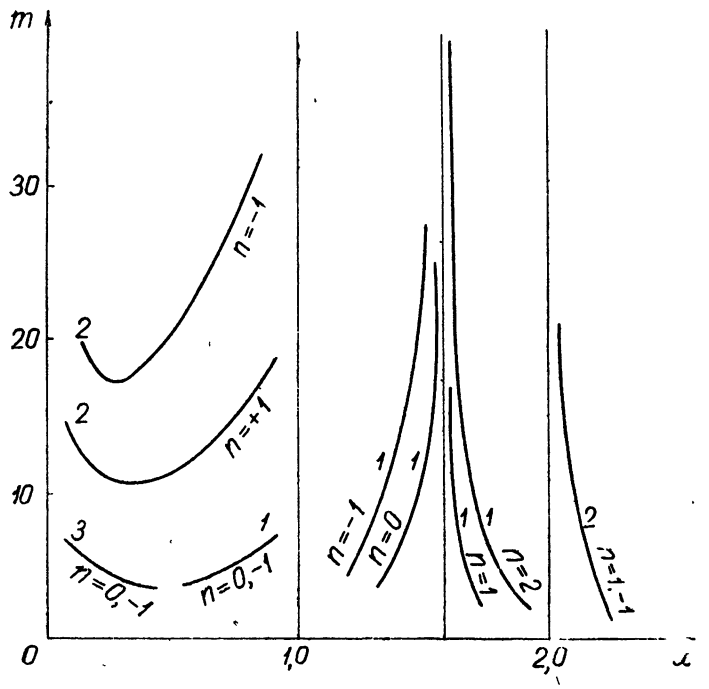


Рис. 2.

Из внешнего вида формул (3) можно заключить, что диаграммы направленности плазменного стержня симметричны относительно оси. Кроме того, в направлении $\Theta = 0$ излученная сферическая волна поляризована по кругу и направление вращения вектора E совпадает с направлением вращения этого вектора в плазме. Численные расчеты были произведены для волны с индексом $n = 1$ в области II (рис. 1) при $\omega_H a/c = 0{,}3185$, $l = 2$ в зависимости от частоты. Из рис. 3 видно, что диаграмма направленности сильно зависит от частоты. Точно таким же образом диаграмма зависит и от внешнего магнитного поля. Поскольку диаграмма симметрична относительно оси, то при изменении магнитного поля происходит сдвиг максимума излучения относительно оси. При этом для существенного сдвига максимума ($\sim 60°$) достаточно небольшое изменение поля (~ 100 *эрстед*).

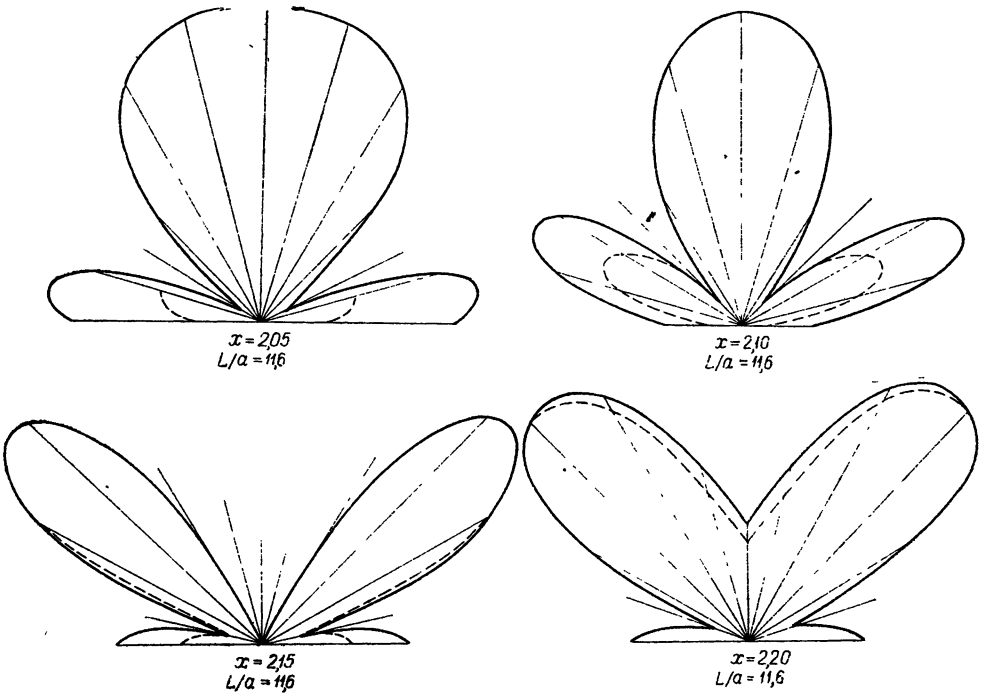


Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Файнберг, М. Ф. Горбатенко, ЖТФ, **29**, 5 (1959).
2. В. П. Шестопалов, И. П. Якименко, Радиотехника и электроника, **6**, 4 (1961).
3. A. W. Trivelpiece and R. W. Gould, J. Appl. Phys., **30**, 1482 (1959).
4. Б. М. Булгаков, В. П. Шестопалов, Л. А. Шишкин, И. П. Якименко, ЖТФ, **30**, 7 (1960).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
17 июня 1961 г.

НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СПИРАЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ С ПРОДОЛЬНО НАМАГНИЧЕННЫМ ФЕРРИТОМ

В. П. Шестопалов, И. П. Якименко, В. В. Плохой

1. В работах [1,2] рассмотрено распространение симметричных электромагнитных волн в спиральном волноводе, заполненном ферритовой средой с продольным подмагничиванием. В этих работах установлено наличие необратимости при распространении

симметричных волн в противоположных направлениях при продольном подмагничивании феррита. Большой интерес представляет также изучение распространения несимметричных волн, используемых, например, в антенной технике для создания диаграмм направленности с осевым излучением. Исследование этого вопроса до сих пор не проводилось даже для поперечного подмагничивания феррита; в работе [3] отмечается только, что спектр типов несимметричных волн значительно усложняется по сравнению с симметричными.

2. Дисперсионное уравнение для несимметричных волн может быть установлено таким же образом, как и в работе [1]. Это уравнение имеет следующий вид:

$$x\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{tg}\,\vartheta\left(n+p_n\frac{K_{n-1}}{K_n}\right)(\lambda_1\Delta_1+\lambda_2\Delta_2+\mathrm{tg}\,\vartheta)+$$

$$+x\sqrt{\varepsilon}\,(\lambda_2-\lambda_1)\left(n+p_n\frac{K_{n-1}}{K_n}\right)\left[\left(\Delta_1-\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\Delta_4-\left(\Delta_2+\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\Delta_3\right]+ \qquad (1)$$

$$+(\lambda_1\Delta_3+\lambda_2\Delta_4)\left[\left(n+p_n\frac{K_{n-1}}{K_n}\right)^2\frac{x^2}{p_n^2}-\left(p_n\,\mathrm{tg}\,\vartheta-\frac{ny_n}{v_n}\right)^2\right]=0,$$

где I_n, K_n—модифицированные функции Бесселя,

$$\Delta_1=(\gamma_1 a)\,M_3\frac{I^1_{n-1}}{I^1_n}+n\,(M_1-M_3);\quad \Delta_2=(\gamma_2 a)\,M_4\frac{I^2_{n-1}}{I^2_n}+n\,(M_2-M_4)$$

$$\Delta_3=(\gamma_1 a)\,L_3\frac{I^1_{n-1}}{I^1_n}-n\,(L_1+L_3);\quad \Delta_4=(\gamma_2 a)\,L_4\frac{I^2_{n-1}}{I^2_n}-n\,(L_2+L_4);$$

$$x=\frac{\omega a}{c};\quad y_n=\beta_n a;\quad p_n=\sqrt{\beta_n^2-k^2a};\quad \gamma_{1,2}=\frac{|\beta_n|}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\left(1-\frac{\varepsilon\mu}{m^2}\right)-\frac{x\delta f_0}{2}(1\mp f_1)};$$

$$f_0=1-\frac{\varepsilon}{m^2}\left(\frac{\varkappa}{\sigma}+\mu\right);\quad f_1=\sqrt{1+\frac{4\varepsilon}{m^2\sigma^2 f_0^2}};\quad \lambda_{1,2}=\frac{\beta_n\sigma}{k\sqrt{\varepsilon}}f_0(1\pm f_1);$$

$$L_1=-\frac{\beta_n}{k\sqrt{\varepsilon}}M_3;\quad L_2=-\frac{\beta_n}{k\sqrt{\varepsilon}}M_4;\quad L_3=-\lambda_1 M_3;\quad L_4=-\lambda_2 M;$$

$$M_1=-\frac{\left(\varkappa+\frac{\beta_n\lambda_1}{k\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\mu}M_3;\quad M_2=-\frac{\left(\varkappa+\frac{\beta_n\lambda_2}{k\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\mu}M_4;$$

$$M_3=\frac{(ka)\sqrt{\varepsilon}\,\lambda_2}{(\gamma_1 a)^2(\lambda_2-\lambda_1)};\quad M_4=-\frac{(ka)\sqrt{\varepsilon}\,\lambda_1}{(\gamma_2 a)^2(\lambda_2-\lambda_1)};$$

$$m=\frac{\beta_n}{k};\quad \sigma=\frac{\omega_H}{\omega};\quad k=\frac{\omega}{c};\quad I^{1,2}_n=I_n(\gamma_{1,2}a);\quad K_n=K_n(p_n),$$

ε—диэлектрическая проницаемость феррита, ω_H—гирочастота, β_n—продольное волновое число, a—радиус спирали.

Тензор магнитной проницаемости феррита имеет вид

$$\mu=\begin{pmatrix}\mu & i\varkappa & 0\\ -i\varkappa & \mu & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Уравнение (1) справедливо при условии n-го пространственного резонанса, которое в случае рассматриваемой системы приближенно имеет вид:

$$n-\frac{1}{2}\leqslant ka\sqrt{\frac{(\varepsilon+1)\sqrt{\mu}}{1+\sqrt{\mu}}+\frac{2\varepsilon\varkappa\,\mathrm{sgn}\,\beta_n}{\left(1+\sqrt{\mu}\right)^2\operatorname{ctg}\vartheta}}\leqslant n+\frac{1}{2};\quad \mathrm{sgn}\,\beta_n=\begin{cases}+1 & \beta_n>0\\ -1 & \beta_n<0\end{cases}.$$

3. Характер спектра волн, распространяющихся в системе в соответствии с уравнением (1), показан на рис. 1 для двух значений u. На этом рисунке для удобства используются безразмерные параметры $x=\omega a/c$ и $u=\omega_H a/c$ (случай $x=u$ соответствует гиромагнитному резонансу). В области 1 распространяются медленные волны, для которых $\gamma_1^2>0$ и $\gamma_2^2>0$. В области 2 распространяются медленные волны с $\gamma_2^2>0$,

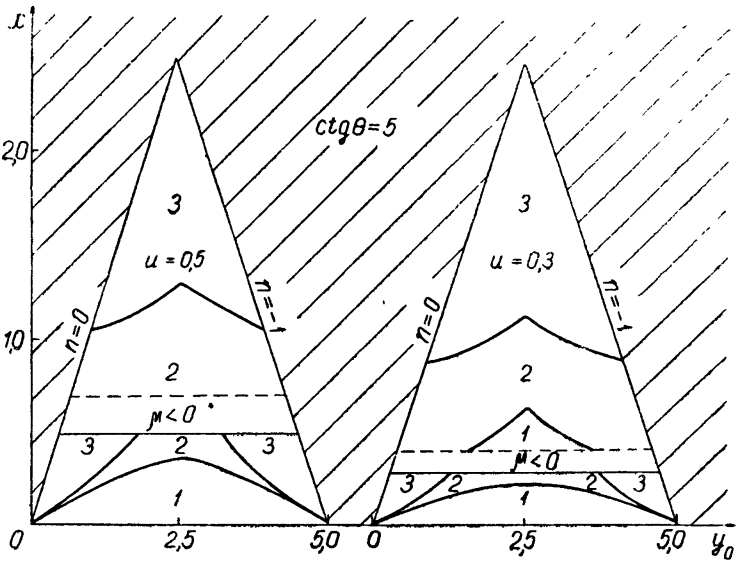


Рис. 1.

$\gamma_1^2<0$. Эти волны, следовательно, отличаются от волн в первой области распределением поля внутри спирали. В области 3 распространяются „быстрые" волны $\left(\gamma_1^2<0,\ \gamma_2^2<0,\ p_n^2>0\right)$. Заштрихованные области представляют запрещенные зоны, где волны вообще не распространяются в подобных системах $\left(p_n^2<0\right)$. При изменении магнитного поля (величины u) вид этих областей несколько изменяется, например, появляется область медленных волн после резонанса.

4. Дисперсионные кривые до и после резонанса показаны на рис. 2 и 3. Сплошные кривые рассчитаны по дисперсионному уравнению (1) графо-аналитическим методом. Кривые 1 соответствуют направлению магнитного поля, совпадающему с направлением распространения волны, кривые 2—противоположному направлению магнитного поля. Пунктирные кривые приближенно определяются условиями $\gamma_1^2\simeq 0$ (кривая 1) и $\gamma_2^2\simeq 0$ (кривая 2). Чтобы их построить точно, необходимо решать рассматриваемую задачу с учетом периодичности спирали.

Из приведенных рисунков видно, что переключение направления магнитного поля влияет на фазовую скорость волны в системе, что можно использовать, например, для управления диаграммой направленности спиральной антенной с ферритом. Кроме того, фазовая скорость изменяется также и при плавном изменении магнитного поля.

5. В связи с наличием столь большого разнообразия волн в рассматриваемой системе интересно оценить распределение потоков мощности для различных типов волн. Это распределение было рассчитано, исходя из обычных выражений для потоков мощности монохроматических волн вдоль оси z. Однако здесь необходимо отметить, что поскольку рассматриваемая среда является сильно диспергирующей, то эти результаты только качественно могут характеризовать распределение энергии в системе. Для бо-

лее точного решения этой задачи надо пользоваться квазимонохроматическим приближением (подробно этот вопрос изложен в работе Гинзбурга [4]).

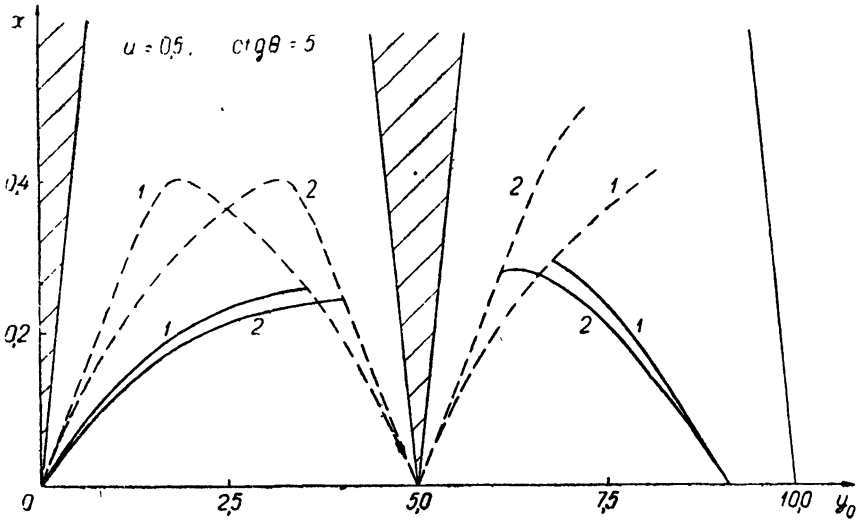


Рис. 2.

Произведенные расчеты по обычным формулам для монохроматических волн показали, что для волн, показанных на рис. 2 и 3 пунктиром, почти вся мощность распространяется внутри спирали (в феррите). Это хорошо согласуется с тем фактом, что фазовая скорость этих волн очень слабо зависит от ctg ϑ и определяется, в основ-

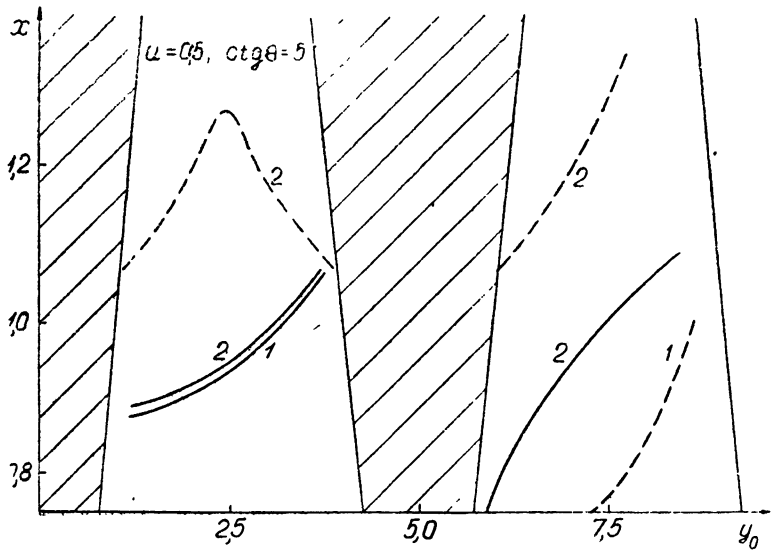


Рис. 3.

ном, характеристиками феррита. Наоборот, для обычных медленных волн большая часть мощности распространяется вне спирали. По мере приближения к области первого пространственного резонанса, однако, мощность постепенно переходит в феррит и свойства этих волн снова определяются, в основном, ферритом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Булгаков, В. П. Шестопалов, Л. А. Шишкин, И. П. Якименко, Радиотехника и электроника, **5**, 11 (1960).
2. Б. М. Булгаков, В. П. Шестопалов, Л. А. Шишкин, И. П. Якименко, Радиотехника и электроника, **6**, 1 (1961).
3. Г. Сул и Л. Уокер, Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах, ИЛ, М., 1955.
4. В. Л. Гинзбург, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 74 (1961).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
17 июня 1961 г.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ С ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМИ ДИОДАМИ

А. М. Белянцев, Л. А. Островский

1. Распространение электромагнитных волн в нелинейных однородных средах и линиях с нелинейными элементами рассматривалось в работах [1–5]. Экспериментально распространение электромагнитных волн исследовалось только в искусственных линиях с нелинейными индуктивностями [1] (линия с ферритом) и нелинейными емкостями [3] (линия с варикондами). В этих работах было показано, что при распространении импульса в нелинейной искусственной линии возможно увеличение крутизны фронта, а также экспериментально были исследованы некоторые характеристики сформированного импульса в зависимости от параметров линии и импульса. Уменьшение длительности фронта на выходе нелинейной линии по сравнению с длительностью фронта импульса на входе теоретически объяснялось эволюцией простых волн и возможным образованием ударных электромагнитных волн [1–4]. Более подробное экспериментальное исследование распространения мощных наносекундных импульсов в искусственных линиях с ферритом показывает, что образование крутых фронтов (и ударных волн) в случае таких импульсов не может быть объяснено на основании теории простой волны [6]. Это обстоятельство связано с релаксационными свойствами феррита, которые заметно проявляются при работе с наносекундными импульсами. Релаксационные процессы определяют и минимальную длительность фронта сформированного импульса. Поэтому представляет интерес исследование аналогичных эффектов в линиях с нелинейными элементами, релаксационные свойства которых проявляются на более высоких частотах, чем у ферритов. В этом отношении особенно интересны полупроводниковые материалы. В линиях с полупроводниковыми диодами возможно получение коротких фронтов при амплитудах напряжения импульса в несколько вольт*.

2. В данной работе приводятся результаты экспериментального исследования распространения импульсов в искусственных линиях с нелинейными емкостями n—p-переходов. Использовались две линии. В первой линии (линия I) в качестве нелинейной емкости использовалась емкость плоскостного кремниевого диода, во второй (линия II)—емкость коллектор-база триода П1Е. Зависимость указанных емкостей от запирающего напряжения u, снятая на частотах 33 и 10 *мгц*, показана на рис. 1**. Линия I состояла из 22 ячеек ($L = 0{,}07$ *мгн*), линия II— из 26 ячеек ($L = 0{,}38$ *мгн*). На вход линий подавался импульс с амплитудой до 50 *в* и длительностью фронта от 5 до 50 *нсек*. Импульс наблюдался с помощью скоростного осциллографа, имеющего развертки в 25 и 150 *нсек* на экран трубки бегущей волны.

Исследовалось изменение формы импульса по длине линии при различных параметрах импульса на входе. Если длительность фронта входного импульса велика по сравнению с постоянной времени ячейки $\tau_0 = \sqrt{C_0 L}$, то в рассматриваемой линии возможны простые волны. При этом легко показать, что длительность фронта τ_{12} между фиксированными уровнями напряжения u_1 и u_2 меняется с расстоянием линейно:

$$\tau_{12} = \tau_{12}(0) - n(\tau_1 - \tau_2),$$

* Длительности фронта импульса порядка единиц и долей наносекунды при формировании импульса в линии с ферритом могут быть получены только при токах в десятки ампер [1,6], а следовательно, в линии с волновым сопротивлением порядка 75 *ом* при напряжении в сотни вольт.

** Добротность диодов при смещении более 10 *в*, измеренная на частоте 33 *мгц*, несколько превышает 50, добротность емкости коллектор-база триодов ПИЕ на частоте 10 *мгц* порядка 20.

где $\tau_{12}(0)$—значение τ_{12} на входе линии, $\tau_l = \sqrt{LC(u_l)}$, $C(u)$—нелинейная емкость, n—порядковый номер ячейки.

Результаты эксперимента по измерению длительности фронта* τ приведены на рис. 2а (для линии I) и рис. 2б (для линии II). Сплошные прямые на рис. 2 соответствуют теоретическому ходу зависимости τ от n.

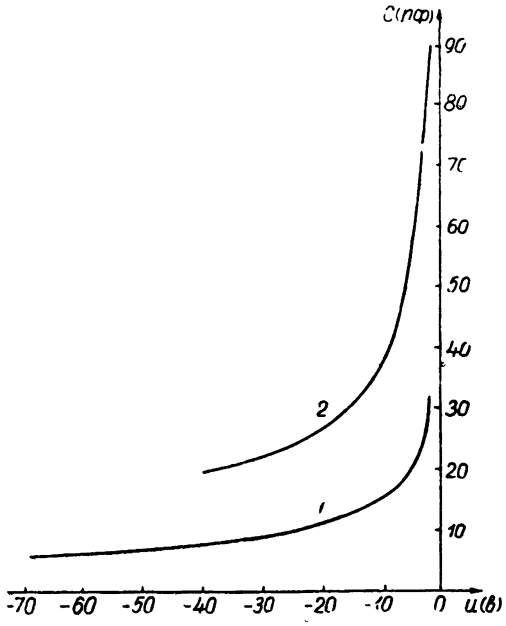


Рис. 1. Зависимость емкости от запирающего напряжения u:
1—емкость диодов, 2—емкость коллектор-база триодов П1Е.

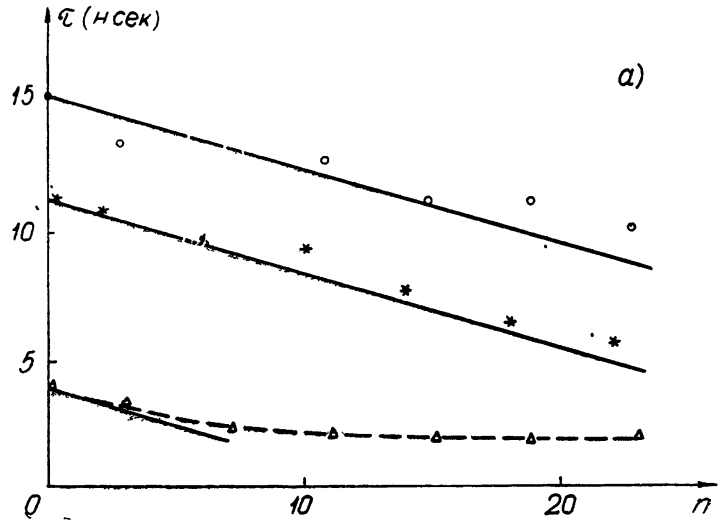


Рис. 2. Изменение длительности фронта импульса τ по длине линии:
а) линия I.

* За τ была взята длительность между уровнями $0{,}2\,u_0$ и $0{,}8\,u_0$, где u_0 — амплитуда импульса.

Как видно из рис. 2а, экспериментальные точки хорошо ложатся на теоретическую прямую. Соответствие теории с экспериментом в случае линии II (рис. 2б) несколько хуже. Последнее, по-видимому, связано с имевшимся разбросом в значениях емкости коллектор-база у триодов ПІЕ, из которых была собрана линия*. Сущест-

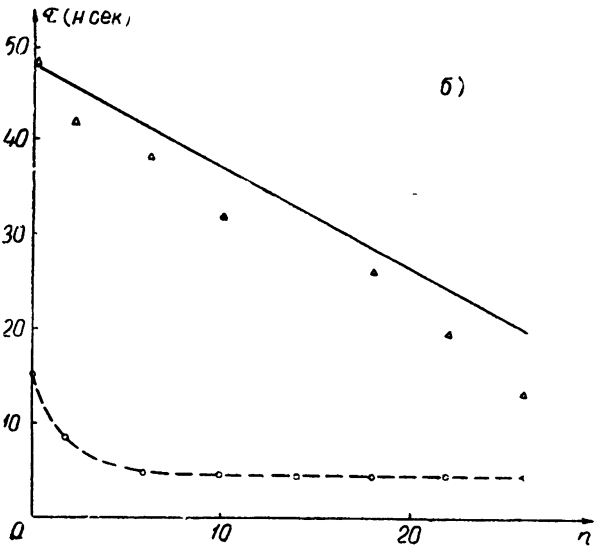


Рис. 2. Изменение длительности фронта импульса τ по длине линии:
б) линия II.

венное расхождение теории и эксперимента, имеющее место при $\tau \sim \tau_0$ естественно объясняется влиянием дискретности линии**. Минимальная длительность фронта импульсов, полученная в данном эксперименте, была порядка $2 \cdot 10^{-9}$ *сек****. Следует отметить, что во всех случаях $\tau_{мин}$ определялась дисперсией линии, ограничения же $\tau_{мин}$ из-за релаксационных процессов в диодах и триодах не наблюдалось. Это указывает на возможность получения еще более коротких фронтов при соответствующем уменьшении L и удлинении линии для тех же амплитуд импульса. На рис. 3 приведены осциллограммы фронта импульса на входе линии II (рис. 3а) и после прохождения линий II и I (рис. 3б).

Экспериментальная и теоретическая зависимости τ на выходе линии I от постоянного отрицательного смещения на диодах приведены на рис. 4. Соответствие теории и эксперимента вполне удовлетворительное. Увеличение длительности спада импульса при его распространении в линии значительно превышает теоретически ожидаемое. Это, по-видимому, связано с влиянием отражений.

Были исследованы также особенности отражения сформированного импульса от разомкнутого конца нелинейной линии. В отличие от случая линейной линии, напряжение импульса при отражении может увеличиваться более чем в два раза [6,7]. На рис. 5 показана зависимость изменения напряжения импульса, отраженного от разомкнутого конца линии II, от напряжения смещения при различных амплитудах падающего. Величина отношения $u_{отр}/u_{пад}$ достигает 2,5 при амплитуде импульса в десять вольт. Аналогичный эксперимент ставился и на линии с полупроводниковыми диодами; однако наблюдаемый эффект увеличения амплитуды отраженного импульса был меньше (порядка 2,1 ÷ 2,2).

---

* Приведенная на рис. 1 зависимость $C(u)$ является усредненной.

** При $\tau \sim \tau_0$ из-за дисперсии, связанной с дискретностью параметров линии, за фронтом импульса проявляются осцилляции (рис. 3в).

*** Так как линии имели сравнительно небольшое число ячеек, то эквивалентное увеличение их длины (для получения $\tau_{мин}$) достигалось последовательным уменьшением фронта входного импульса.

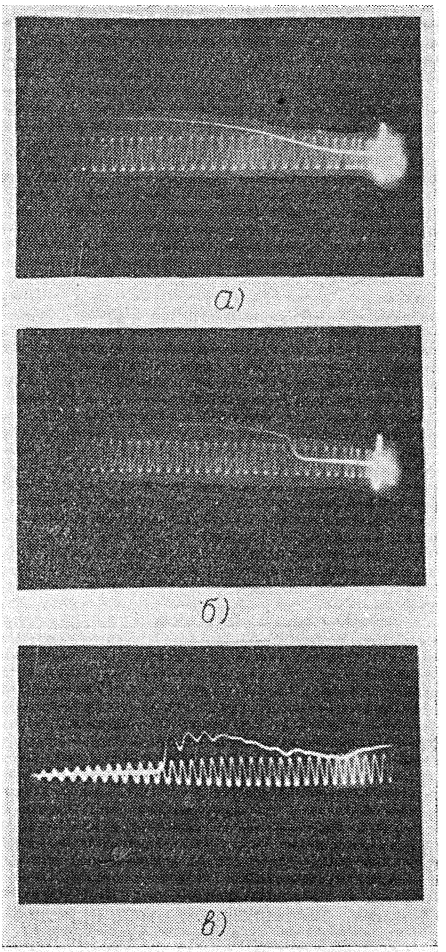


Рис. 3. Осциллограммы фронта импульса.

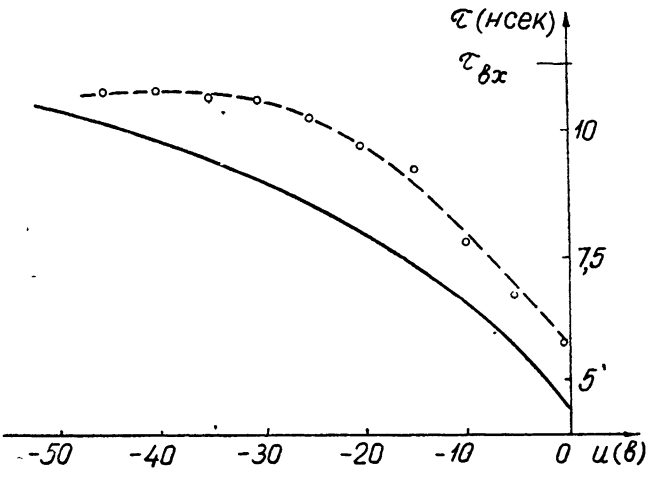


Рис. 4. Зависимость длительности фронта импульса на выходе линии I от напряжения смещения u.

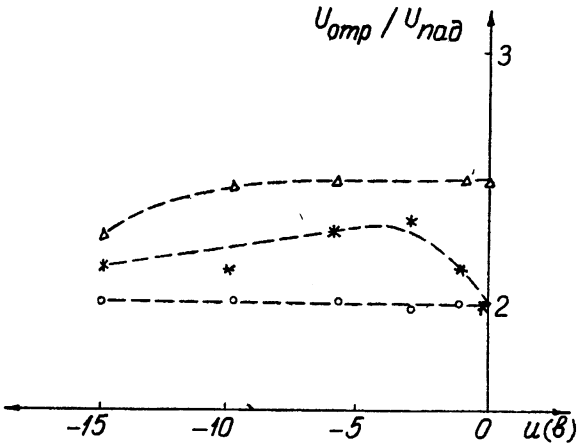


Рис. 5. Зависимость отношения $u_{отр}/u_{пад}$ от напряжения смещения u (линия II):
ΔΔΔ — $u_{0\,пад} = 10$ *в*; *** — $u_{0\,пад} = 25$ *в*; ○○○ — $u_{0\,пад} = 50$ *в*.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Катаев, Вопросы радиоэлектроники, сер. 6, № 2, 61 (1959); № 3, 3 (1960).
2. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖТФ, **36**, 957 (1959); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 79 (1960).
3. И. Г. Катаев, Вопросы радиоэлектроники, сер. 6, № 1, 46 (1960).
4. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 276 (1960).
5. Р. В. Хохлов, Доклад на конференции МВ и ССО СССР по радиоэлектронике, Харьков, 1960.
6. А. М. Белянцев, Л. А. Островский, Л. И. Соловьева, Доклад на совещании по ферромагнетизму и антиферромагнетизму, Ленинград, 1961.
7. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, Г. И. Фрейдман, Доклад на юбилейной сессии, посвященной 100-летию со дня рождения А. С. Попова, Москва, 1959.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 июля 1961 г.

РАСЧЕТ ШУНТОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И ДОБРОТНОСТИ ДВУХРЯДНЫХ ЛЕСТНИЧНЫХ ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СТРУКТУР

А. Н. Диденко и Ю. А. Панов

При анализе вопроса об эффективности использования замедляющих систем в ускорительной технике представляет интерес параметр, называемый шунтовым: сопротивлением на единицу длины и определяемый для бегущей волны по формуле

$$r_{ш} = E_z^2/P_n, \tag{1}$$

где E_z—продольная компонента электрического поля в месте пролета пучка, P_n—потери на единицу длины. Воспользовавшись соотношениями между коэффициентом затухания, групповой скоростью $v_{гр}$, добротностью Q, потоком мощности P и запасенной энергией W, $r_{ш}$ можно выразить также через такие параметры системы, как сопротивление связи $R_{св}$, добротность и групповую скорость [1]:

$$r_{ш} = \frac{4\pi}{\lambda} R_{св} Q \frac{v_{гр}}{c}$$

(c—скорость света в вакууме, λ—длина электромагнитной волны). Этот параметр не представляет особенного интереса для приборов СВЧ типа ЛОВ и ЛБВ, но имеет большое значение для техники ускорителей, поскольку позволяет установить зависимость между величиной подводимой мощности и амплитудой высокочастотного поля, возбуждаемого внутри замедляющей системы.

При использовании замедляющих систем в качестве ускоряющих устройств в волноводных циклических электронных ускорителях большой интерес представляют такие системы, которые позволяют при небольших размерах волноводов работать на длинных волнах. Недостатками системы, рассмотренной в [2] (диафрагмированный волновод прямоугольного сечения), является то, что ее наибольшая критическая длина волны равна удвоенной высоте волновода и отношение размеров пространства взаимодействия в системе велико по сравнению с длиной волны. Это приводит к тому, что при фазовой скорости, равной скорости света, поле в центре пространства взаимодействия, где пролетает пучок, значительно меньше поля у диафрагмы. На наш взгляд, этими недостатками не будет обладать двухрядная система с выступами (рис. 1).

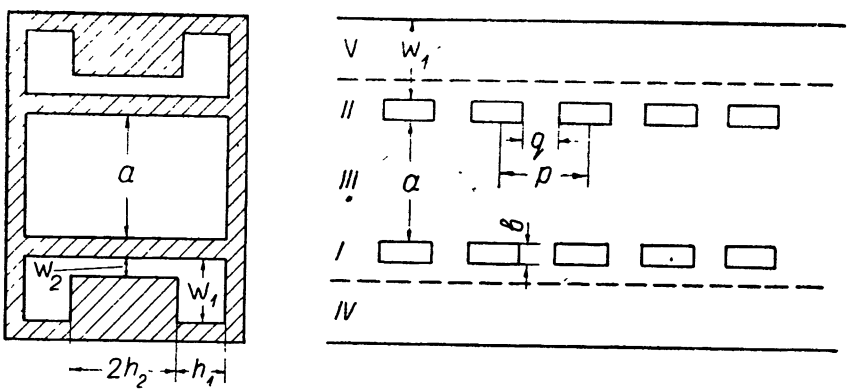


Рис. 1.

Особенностью таких систем является то, что нулевая гармоника синфазной симметричной *TEM*-волны, которая является наиболее приемлемой для ускорения электронов, имеет нормальную дисперсию и критическую длину волны, которая при соответствующим образом выбранных величинах W_1 и W_2 может значительно превосходить удвоенную высоту лестниц [3].

В настоящей заметке, используя [3] и предполагая, что влиянием изгиба можно пренебречь, мы получили формулы для шунтового сопротивления и добротности нулевой гармоники синфазной симметрической *TEM*-волны, распространяющейся в двухрядной системе с выступами; по полученным формулам проведены некоторые численные расчеты.

Выражения для E_z и P_n, входящих в формулу (1), нетрудно получить, если воспользоваться выражениями для компонент поля, приведенными в [3]:

$$P_n = \frac{\sin^2(\beta_0 q/2)}{(\beta_0 q/2)^2}\left\{\frac{1}{2k}\left[\frac{2kh_1+\sin(2kh_1)}{\sin^2(kh_1)}+\frac{2kh_2-\sin 2kh_2}{\cos^2(kh_2)}\right]\left[\mathrm{th}^2(\beta_0 W_1)+\mathrm{th}^2(\beta_0 W_2)\right]+\right.$$
$$+\frac{1}{\sin^2(kh_1)}\,\frac{\mathrm{th}(\beta_0 a/2)}{\beta_0}+\left.\frac{1}{\sin^2(kh_1)}\,\frac{[\mathrm{sh}(2\beta_0 W_1)+\mathrm{sh}(2\beta_0 W_2)\cos^2(kh_1)]}{2\beta_0\mathrm{sh}^2(\beta_0 W_1)}\right\}-$$
$$-\frac{q}{4kp}\,\frac{\sin^2(\beta_0 q/2)}{(\beta_0 q/2)^2}+\frac{2bp^2}{q^2 4kp}-\frac{q}{4kp}\,\frac{\sin^2(\beta_0 q/2)}{\beta_0 q/2}\left[\frac{2kh_1+\sin(2kh_1)}{\sin^2(kh_1)}\times\right. \tag{3}$$
$$\left.\times\,\mathrm{cth}^2(\beta_0 W_1)+\frac{2kh_2-\sin(2kh_2)}{\cos^2(kh_2)}\,\mathrm{cth}^2(\beta_0 W_2)\right];$$

$$E_z=\frac{1}{\cos^2(kh_1)}\,\frac{\sin^2(\beta_0 q/2)}{(\beta_0 q/2)^2}\,\frac{1}{\mathrm{ch}^2(\beta_0 a/2)}. \tag{4}$$

Отметим, что выражение (4) для E_z характеризует величину продольной компоненты в центре области III. Это справедливо, если пучок считать бесконечно тонким. Аналогично может быть получено выражение для добротности системы:

$$Q = 2kp\left[h_1\frac{Y_1(\Theta)}{\sin^2(kh_1)} - h_2\frac{Y_2(\Theta)}{\cos^2(kh_2)}\right] / P_n \sin(\Theta/2), \qquad (5)$$

где $Y_1(\Theta)$ и $Y_2(\Theta)$—волновые проводимости частичных областей [3].

Численные расчеты были проведены для нескольких систем. Все эти системы имеют следующие одинаковые параметры: высоту лестниц $h_1=h_2=10$ *мм*, $p=25$ *мм*, $q=5$ *мм*, $b=2$ *мм*, $W_2=4{,}73$ *мм* и замедление, равное скорости света в режиме „$\pi/2$" колебаний ($\lambda_{\pi/2}=4p$). Нужное замедление при разных a достигается путем соответствующего выбора W_1.

На рис. 2 показана зависимость замедления от длины волны (кривая 1 рассчитана при $a=10$ *мм*, $W_1=15{,}635$ *мм*; кривая 2—при $a=20$ *мм*, $W_1=18{,}92$ *мм*; кривая 3—

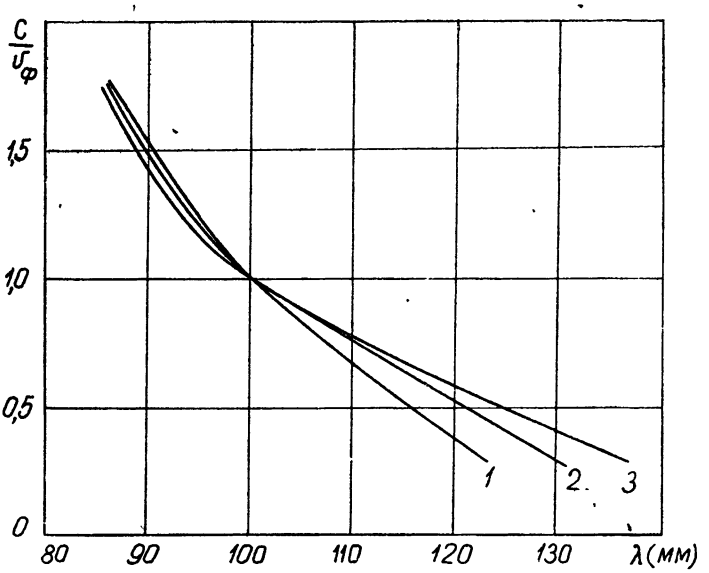


Рис. 2.

при $a=30$ *мм*, $W_1=21{,}94$ *мм*). На рис. 3 приведена зависимость шунтового сопротивления от замедления ($a=10$ *мм*; $W_1=18{,}92$ *мм*); на рис. 4—зависимость шунтового сопротивления для тех же систем от величины a при $\lambda_0=10$ *см* и $c/v_\Phi=1$.

Из этих графиков можно сделать следующие выводы.

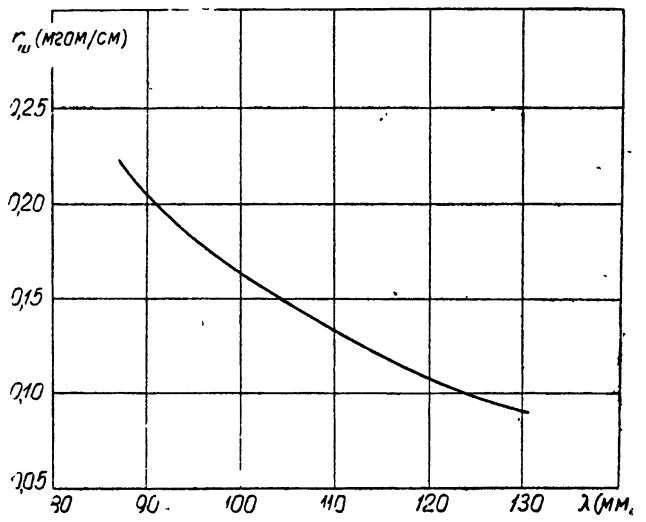


Рис. 3.

1. Используя лестничную систему с выступами, можно увеличить рабочую длину волны по сравнению с удвоенной высотой ($2h = 8$ *см*).

2. Шунтовые сопротивления рассматриваемых систем сравнимы с $r_ш$ симметричной LE_{11} —волны диафрагмированных волноводов прямоугольного сечения [1].

3. Шунтовое сопротивление при фиксированных параметрах зависит от отношения q/p в частности, при $a = 20$ *мм*, $r_ш = 0{,}21$ *мгом* $см^{-1}$, если $q/p = 0{,}4$). Как показали расчеты, наибольшие шунтовые сопротивления будут при $q/p \simeq 0{,}5$.

Результаты расчета добротности по формуле (5) для трех систем сведены в таблицу 1.

Таблица 1

a (*мм*)	10	20	30
Q	23150	25150	26460

Из этой таблицы следует, что и добротность нулевой гармоники синфазной симметричной *TEM*-волны рассмотренной системы примерно такая же, как добротность симметричной LE_{11}-волны диафрагмированного волновода ($Q^{LE_{11}} \simeq 16000$).

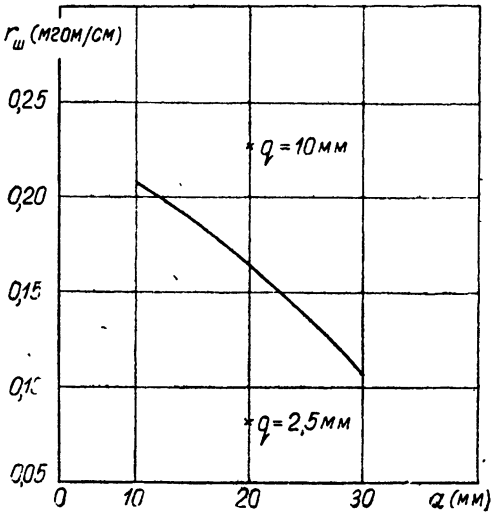


Рис 4.

Из изложенного ясно, что двухрядные лестничные системы с выступами обладают большим шунтовым сопротивлением, имеют большую добротность и позволяют значительно увеличить рабочую длину волны по сравнению с удвоенной высотой. Указанные особенности таких систем представляют значительный интерес для ускорительной техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Диденко, Е. С. Коваленко, Атомная энергия, **10**, вып. 1, 69 (1961).
2. А. А. Воробьёв, А. Н. Диденко, Е. С. Коваленко, Атомная энергия, 8, вып. 5, 459 (1960).
3. Ю. Г. Альтшулер, А. С. Татаренко, В. И. Скородумов, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, 4, 126 (1961).

Томский политехнический институт
электроники и автоматики
при Томском университете

Поступила в редакцию
22 июля 96. г.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ЛБВ

Г. Н. Рапопорт

Теория сильных сигналов в ЛБВ приводит к системе интегродифференциальных уравнений относительно амплитуды высокочастотного поля и функций $\tau(\alpha, x)$, определяющих зависимость времени пролета электрона τ от координаты x и начальной фазы α. Обычно применяемый приближенный метод сведения этой системы к дифференциальным уравнениям состоит в замене бесконечной последовательности α набором конечного числа N равноудаленных начальных фаз $\alpha_i (i = 1 \ldots N)$. Другой метод, предложенный в [1], основан на том, что $\tau(\alpha, x)$ — периодическая функция α и может быть аппроксимирована конечной суммой Фурье вида

$$\tau \simeq \mathrm{Re} \sum_{1}^{N} \tau_n(x)\, e^{in\alpha}.$$

Ограничиваясь первыми двумя членами в этой сумме, можно получить приближенные нелинейные уравнения (21)—(23) [1], которые, пользуясь случаем исправить допущенные ранее опечатки, мы приводим здесь:

$$\frac{d\Phi}{dx} = b \mp \frac{1}{4}(|F|^2 - |F_0|^2) - \frac{\delta}{2}\int_0^x |F|^2\, dx; \tag{1}$$

$$\frac{dF}{dx} \pm \delta F = \pm i\, 2 J_1(|\psi|)\frac{\psi}{|\psi|}\, e^{i\Phi}; \tag{2}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\left[F e^{-i\Phi} + 4QC\, 2J_1(|\psi|)\frac{\psi}{|\psi|}\right] J_0(|\psi|) + \left[F^* e^{i\Phi} + 4QC\, 2J_1(|\psi|)\frac{\psi^*}{|\psi|}\right] J_2(|\psi|)\left(\frac{\psi}{|\psi|}\right)^2 \tag{3}$$

(x — приведенная координата, F — безразмерная комплексная амплитуда высокочастотного поля, F_0 — начальное значение F, ψ/ω — комплексная амплитуда колебаний времени пролета, $4QC$ — параметр объемного заряда, b — параметр скорости, δ — параметр потерь, J_0, J_1, J_2 — бесселевы функции соответствующих порядков). Верхние знаки в (1)—(3) соответствуют ЛБВ, нижние — ЛОВ. В случае, когда в лампу вводится немодулированный электронный поток,

$$\Phi(0) = \psi(0) = \psi'(0) = 0. \tag{4}$$

Прочие обозначения см. в [1].

При выводе (1) — (3) в [1] параметр усиления C предполагался весьма малым и учитывалась только первая гармоника поля объемного заряда, хотя уравнение (3) легко обобщается для формального учета высших гармоник этого поля. Однако такое уточнение не является последовательным в случае ЛБВ, поскольку в исходном уравнении высшие гармоники τ (по начальной фазе) не принимались во внимание.

Для применения данной системы уравнений к участку дрейфа в клистроне достаточно положить $F = \Phi = 0$; $\psi'(0) \neq 0$. При этом учет высших гармоник кулоновского поля может быть выполнен достаточно строго; однако мы не будем останавливаться подробнее на этом вопросе.

На рис. 1 для сравнения приводятся результаты численного решения „точной" системы нелинейных уравнений ЛОВ (сплошная линия) и приближенной системы (1)—(3) (пунктир) для случая $4QC = \delta = 0$, $b = 1{,}525$; $F_0 = 1{,}5$. Интегрирование проводилось методом центральных разностей с шагом $\Delta x = 0.1$. Из рисунка видно, что приближенный метод приводит к заметному превышению длины участка взаимодействия (т. е. отношения рабочего тока к пусковому).



Рис. 1.

Расчет мощности насыщения ЛБВ по приближенной теории приводит к заниженным на 1—2 *дб* величинам. Это связано с преуменьшением амплитуды первой гармоники электронного тока. Действительно, максимальная величина коэффициента первой гармоники электронного тока согласно (22) [1] равна $\max\{2J_1(|\psi|)\} = 1{,}16$. По „точной" теории та же величина достигает 1,6 в ЛБВ и 1,45 в ЛОВ.

Из приведенного выше следует, что для расчетов мощности ЛБВ и ЛОВ следует пользоваться опубликованными результатами „точной" нелинейной теории. Приближенные уравнения ЛБВ могут быть весьма полезны для качественных оценок

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Рапопорт, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, № 5, 599 (1958).

Институт радиотехнических проблем
АН УССР

Поступила в редакцию
10 июля 1961 г.

О ВЛИЯНИИ РАЗБРОСА СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ В ЭЛЕКТРОННОМ ПУЧКЕ НА РАБОТУ УСИЛИТЕЛЬНОЙ ЛБВ

И. Г. Козлов

В процессе экспериментального изучения электронных потоков, формируемых электронными прожекторами типа Пирса [1—4], в ряде рабочих режимов было обнаружено весьма своеобразное распределение скоростей электронов. Наиболее характерные функции распределения, полученные экспериментальным путем, представлены на рис. 1. Каждая из кривых соответствует определенному ускоряющему напряжению и выражает зависимость числа частиц, приходящихся на интервал разрешимых скоростей, от их скорости. Из рассмотрения указанного рисунка видно, что в ряду с основными максимумами, примерно отвечающими ускоряющим напряжениям, у функций распределения имеются дополнительные „пики", меньшие по величине и смещен-

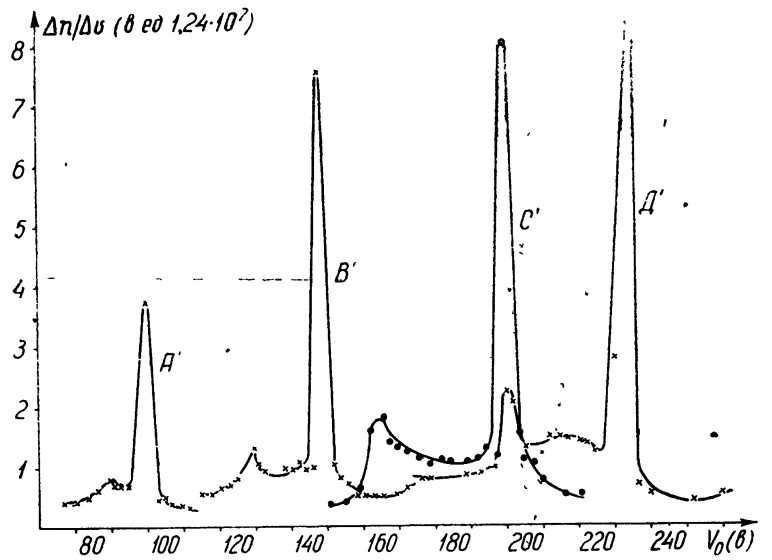


Рис. 1. Зависимость вида функции распределения скоростей электронов в электронном пучке, формируемом электронной пушкой типа Пирса, от ускоряющего напряжения:

A'—ускоряющее напряжение $U_a = 100$ *в*, ток пучка $I = 0{,}2$ *ма*; *B'* — $U_a = 150$ *в* $I = 0{,}42$ *ма*; *C'* — $U_a = 200$ *в*, $I = 0{,}55$ *ма*; *D'* — $U_a = 250$ *в*, $I = 0{,}75$ *ма*.

ные от основных в сторону малых напряжений. Значительная дисперсия скоростей в исследованных электронных пучках была объяснена влиянием вторичной электронной эмиссии из анода прожектора, диафрагмы спектрометра, рассматривавшейся как второй анод пушки, и ионизацией остаточных газов.

Представляет интерес оценка влияния обнаруженной дисперсии скоростей на работу некоторых приборов СВЧ, в частности усилителей ЛБВ. Предположим, что в усилительной ЛБВ используется электронный прожектор, формирующий слабосходящийся поток электронов, в котором в силу обсужденных ранее причин установилось распределение скоростей электронов, например, подобное изображенному на рис. 1. Допустим далее, что электронный поток сфокусирован одним из известных методов фокусировки, позволяющих потоку проходить вдоль замедляющей системы без заметной потери электронов. Пусть, наконец, фокусировка пучка не нарушает характер распределения скоростей электронов, а для предотвращения отражений энергии от конца замедляющей системы вблизи коллектора помещен поглотитель. Если рассматривать электронный поток с описанным выше распределением скоростей как состоящий из двух перемешанных по сечению групп электронов, отвечающих соответствующим максимумам функций распределения, представленным на рис 1, то задача о взаимодействии такого электронного потока с электромагнитным полем замедляющей системы может быть сведена к задаче о взаимодействии с системой двух электронных пучков. Однако при анализе работы подобного прибора необходимо учитывать и взаимодействие пучков друг с другом, т. е. так называемое электронно-волновое взаимодействие. Подобная задача в общем виде была решена Лопухиным, Рошаль, Кузьминой [5], а также (независимо от них) Тагером и Викуловым [6].

Метод расчета, примененный в работе [5], позволил вычислить коэффициент усиления „эквивалентной" двухлучевой лампы с бегущей волной. Эта задача была решена в предположении слабого сигнала и такой величины фокусирующего поля, при которой можно считать отсутствующими трансверсальные смещения электронов в процессе их поступательного движения. Разброс скоростей электронов в каждой из рассматривавшихся групп электронов полагался равным нулю. Предполагалось, что все переменные величины изменяются по экспоненциальному закону. Конвекционный ток, создаваемый полем замедляющей системы в электронном потоке, считался равным сумме токов, наводимых тем же электромагнитным полем замедляющей системы в пучках, соответствующих первому и второму максимумам функции распределения скоростей электронов.

Совместное решение уравнения для тока, наводимого полем замедляющей системы в электронном потоке, с уравнением электромагнитного поля, создаваемого в замедляющей системе первым и вторым пучками, позволило получить дисперсионное уравнение пятой степени, совпадающее по виду с уравнением, выведенным в работе [5]. Указанное дисперсионное уравнение для удобства сравнения результатов расчета с данными других авторов было решено для случая, когда затухание замедляющей системы равнялось нулю, ее волновое сопротивление составляло 10 единиц, параметры усиления, соответствующие первому и второму пучкам, равнялись $C_1=0{,}01$ и $C_2=0{,}02$, параметр десинхронизации $b=2{,}072$ и $QC_1=1$ (Q—параметр пространственного заряда). Величина a, равная отношению скорости более быстрого пучка к скорости медленного, как видно из рассмотрения рис. 1, для всех кривых приближенно равна 1,08.

Были найдены постоянные распространения пяти прямых волн, которые после решения системы уравнений на электронной вычислительной машине „Урал—1" и определения долей входного сигнала, приходящихся на амплитуды каждой из них, позволили вычислить усиление по мощности на наиболее быстро растущей с координатой волне. Указанное усиление для $C_1N=0{,}4914$ составило примерно 28 *дб*, что близко к 25 *дб*, вычисленным [5] для близких значений параметров.

Если же предположить, что вдоль замедляющей системы движется лишь один пучок электронов, ток которого равен сумме токов пучков, соответствующих первому и второму максимумам функции распределения ($a=1$, $C=0{,}021$) (отсутствует разброс скоростей электронов), то использование кривых Пирса [7] в случае $QC=1$, $b=2{,}072$ для той же самой частоты усиливаемых колебаний дает коэффициент усиления примерно в 22 *дб*. Некоторое уменьшение коэффициента усиления по сравнению со случаем двухгорбой функции распределения, вероятно, обусловлено тем обстоятельством, что в первом случае имело место дополнительное двухлучевое усиление. Следует особо отметить, что в процессе расчета не учитывался разброс скоростей в каждом из взаимодействующих пучков. Учет разброса скоростей может существенно уменьшить величину коэффициента усиления. Таким образом, при сделанных допущениях и предположениях разброс скоростей электронов не только не снижает, а даже увеличивает коэффициент усиления прибора.

Оценивая эффективность работы рассмотренного прибора, целесообразно учитывать особенности движения двухскоростного электронного потока в фокусирующем электростатическом или магнитном поле, сопровождающем обычно электронный поток от электронного прожектора до коллектора. Если предположить, что подобный „двух-

скоростной поток" движется в однородном вдоль его оси магнитном поле, и считать электронный прожектор полностью экранированным, то можно показать, что его границы будут пульсировать [8]. Отношение амплитуд пульсаций при наиболее благоприятных условиях пропорционально отношению кубов скоростей составляющих электронного потока и равно в нашем случае приблизительно 1,3. В силу указанного обстоятельства эффективность взаимодействия составляющих электронных пучков с высокочастотным полем, „стелющимся" вдоль замедляющей системы, будет различна, и этот факт не может не сказаться на работе прибора, использующего двухлучевой пучок. Этот вопрос является темой дальнейшего исследования.

Автор приносит глубокую благодарность П. В. Голубкову за предложение темы и руководство работой, а также В. Н. Шевчику за интерес к работе и ценное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Козлов, Доклад на конференции АН СССР по радиоэлектронике, М., 1957.
2. И. Г. Козлов, Доклад на конференции МВО по радиоэлектронике, Саратов, 1957.
3. П. В. Голубков, И. Г. Козлов, Доклад на конференции МВО по радиоэлектронике, Киев, 1959.
4 П. В. Голубков, Л. Э. Бахрах, И. А. Козель, И. Г. Козлов, В. Г. Медокс, Уч. зап. СГУ, Сб., посвященный 50-летию ун-та, **69**, 41 (1960).
5 В. М. Лопухин, А. С. Рошаль, Г. А. Кузьмина, Радиотехника и электроника, **5**, 1837 (1960).
6. А. С. Тагер, И. К. Викулов, Доклад на чтениях Общества им. А. С. Попова, М, 1960.
7. Дж. Пирс, Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1952.
8. A. B. Cutting, J. Fraser, Le Vide, № 67, 12 (1957).

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
15 мая 1961 г.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В КОНТУРЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Г. И. Рожкова

В работах [1–3] рассматривались установившиеся вынужденные колебания в системах с переменными параметрами. При исследовании нестационарных процессов нужно взять общее решение уравнения, описывающего колебания в контуре с меняющимися параметрами [2]:

$$\ddot{y} + y = \lambda\cos[(1+\xi)\tau - \psi] - \frac{1}{Q}\dot{y} - m y \sin(2\tau) - 2\xi_0 y, \qquad (1)$$

где

$$\tau = \frac{p}{2}t;\ \frac{1}{Q} = \frac{R}{p/2L};\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC_0};\ \frac{2\omega_0}{p} = 1+\xi_0;\ \frac{2\omega_c}{p} = 1+\xi;$$

$$y = \frac{q}{C_0 U_0};\ \lambda = \frac{E_0}{U_0};\ \frac{1}{C} = \frac{1}{C_0}[1 + m\sin(pt)].$$

Используя метод Ван-дер-Поля, аналогично [2] найдем, что в общем случае это решение имеет вид:

$$y = (C_1 e^{\alpha_1\tau} + C_2 e^{\alpha_2\tau})\sin\tau + (D_1 e^{\alpha_1\tau} + D_2 e^{\alpha_2\tau})\cos\tau + \qquad (2)$$

$$+ [A_1\sin(\xi\tau - \psi) + A_2\cos(\xi\tau - \psi)]\sin\tau + [B_1\sin(\xi\tau - \psi) + B_2\cos(\xi\tau - \psi)]\cos\tau;$$

$$2\alpha_{1,2} = -\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 - 4\xi_0^2};\quad \frac{C_1}{D_1} = \frac{D_2}{C_2} = \frac{-2\xi_0}{m/2 + \sqrt{(m/2)^2 - 4\xi_0^2}}.$$

Величины C_1 и C_2 или D_1 и D_2 определяются из начальных условий. Постоянные коэффициенты A_1, A_2, B_1, B_2 описывают установившиеся вынужденные колебания.

Проанализируем выражение (2) подробнее для случаев синхронного ($p/2=\omega_c\simeq\omega_0$) и бигармонического ($p/2\simeq\omega_c\simeq\omega_0$) режимов.

1. Синхронный режим. В этом случае (2) принимает вид:

$$y=(C_1e^{\alpha_1\tau}+C_2e^{\alpha_2\tau})\sin\tau+(D_1e^{\alpha_1\tau}+D_2e^{\alpha_2\tau})\cos\tau+A\sin(\tau+\varphi);\qquad(3)$$

$$A=\frac{\lambda}{2\left[\xi_0^2+1/4Q^2-(m/4)^2\right]}\sqrt{\xi_0^2+\frac{1}{4Q^2}+\left(\frac{m}{4}\right)^2-\frac{m}{4Q}\cos2\psi-\frac{m\xi_0}{2}\sin2\psi};$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-(1/2Q+m/4)\operatorname{tg}\psi+\xi_0}{(1/2Q-m/4)-\xi_0\operatorname{tg}\psi}.$$

Упростим выражения (3), рассмотрев случай $\xi_0=0$. Тогда

$$A=\frac{\lambda Q}{1-\beta^2}\sqrt{1-2\beta\cos(2\psi)};$$

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{1+\beta}{1-\beta}\operatorname{tg}\psi;\quad\beta=\frac{mQ}{2};\qquad(4)$$

$$C_1=D_2=0.$$

Значения C_2 и D_1, определяемые из начальных условий $y(0)=0$, $\dot y(0)=0$, соответственно равны

$$D_1=-\frac{\lambda Q\sin\psi}{1-\beta};$$

$$C_2=-\frac{\lambda Q\cos\psi}{1+\beta}+\frac{\lambda Q\sin\psi}{2}.\qquad(4a)$$

Из (4) видно, что процесс установления, как и величина установившейся амплитуды колебаний, зависит от разности фаз между сигналом и накачкой. При благоприятной разности фаз $\psi=\pi/2$, когда амплитуда установившихся колебаний максимальна, установление происходит значительно медленнее, чем в перегенерированной системе:

$$y=\frac{\lambda Q}{1-\beta}\left\{1-\exp\left[-\frac{1}{Q}(1-\beta)\tau\right]\right\}\cos\tau+\frac{\lambda Q}{2}\exp\left[-\frac{1}{Q}(1+\beta)\tau\right]\sin\tau.\qquad(5)$$

При неблагоприятной разности фаз $\psi=0$, наоборот, установление происходит быстрее:

$$y=\frac{\lambda Q}{1+\beta}\left\{1-e\left[-\frac{1}{Q}(1+\beta)\tau\right]\right\}\sin\tau.\qquad(6)$$

Таким образом, процессы установления определяются величиной, эквивалентной добротности системы. Картины установления амплитуды колебаний в синхронном режиме для разных значений ψ приведены на рис. 1.

2. Бигармонический режим. Для упрощения выкладок сразу возьмем $\xi_0=0$ и рассмотрим случай большой регенерации ($\beta\sim1$). Из начальных условий следует, что

$$D_1=\frac{\lambda}{\sqrt{4\xi^2+Q^{-2}(1-\beta)^2}}\sin(\psi-\gamma);\qquad(6)$$

$$C_2=\frac{1-\beta}{2Q}D_1+\xi D_1\cos(\psi-\gamma)+$$

$$+\frac{\lambda}{\sqrt{4\xi^2+Q^{-2}(1+\beta)^2}}\cos(\psi-\gamma);$$

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{B_2}{B_1}=\frac{-2\xi Q}{1-\beta};$$

$$\operatorname{tg}\gamma_1=\frac{A_1}{A_2}=\frac{2\xi Q}{1+\beta}.$$

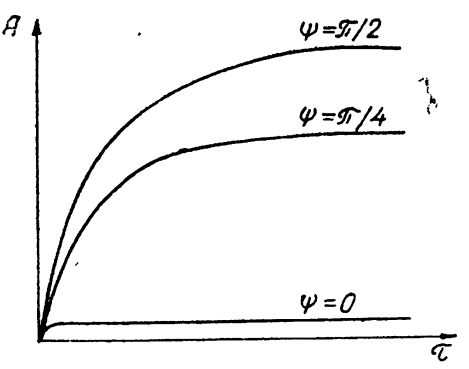


Рис. 1. Установление амплитуды колебаний в синхронном режиме для разных ψ

Из (6) видно, что величины D_1 и C_2, определяющие процесс установления, зависят от ψ.

При $\beta \sim 1$ можно считать, что установление колебаний происходит по закону:

$$y = \frac{\lambda}{\sqrt{4\xi^2 + Q^{-2}(1-\beta)^2}} \left\{ \sin(\xi\tau - \psi + \gamma) + e^{-Q^{-1}(1-\beta)\tau} \sin(\psi - \gamma) \right\} \cos\tau .$$

Картины установления колебаний для разных значений ψ при двух различных расстройках приведены на рис. 2.

При скачкообразном изменении фазы накачки или сигнала в системе также будут возникать переходные процессы, зависящие как от величины скачка фазы, так и от амплитуды колебаний в момент скачка. Начальные условия в этом случае заменяются условиями сшивания в момент скачка τ_0. При $\beta \sim 1$, если разность фазы была ψ_1, а затем стала ψ_2, имеем:

$$y_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{4\xi^2 + Q^{-2}(1-\beta)^2}} \sin(\xi\tau - \psi_1 + \gamma) \cos\tau;$$

$$y_2 = \frac{\lambda}{\sqrt{4\xi^2 + Q^{-2}(1-\beta)^2}} \left\{ D \exp\left[-\frac{1}{Q}(1-\beta)(\tau - \tau_0) \right] + \sin(\xi\tau - \psi_2 + \gamma) \right\} \cos\tau;$$

$$D = 2\cos\left(\xi\tau_0 - \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} + \gamma \right) \sin\frac{\psi - \psi_2}{2}.$$

Картины установления колебаний для нескольких скачков разности фаз и разных моментов скачка показаны на рис. 3.

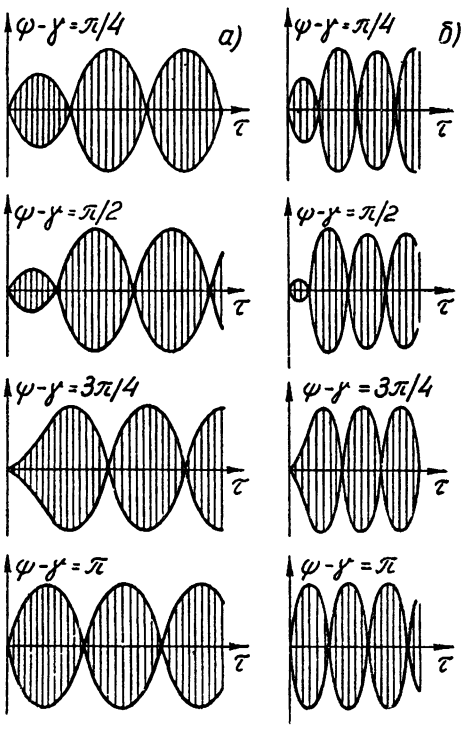


Рис. 2.
Установление колебаний в бигармоническом режиме для разных ψ при двух различных расстройках.

Как следует из изложенного, в бигармоническом режиме изменение разности фаз между сигналом и накачкой не приводит к изменению амплитуды установив-

шихся колебаний, как в синхронном режиме, а вызывает модуляцию огибающей биений колебаний частот ω_e и $\omega_p = p - \omega_c$ в контуре.

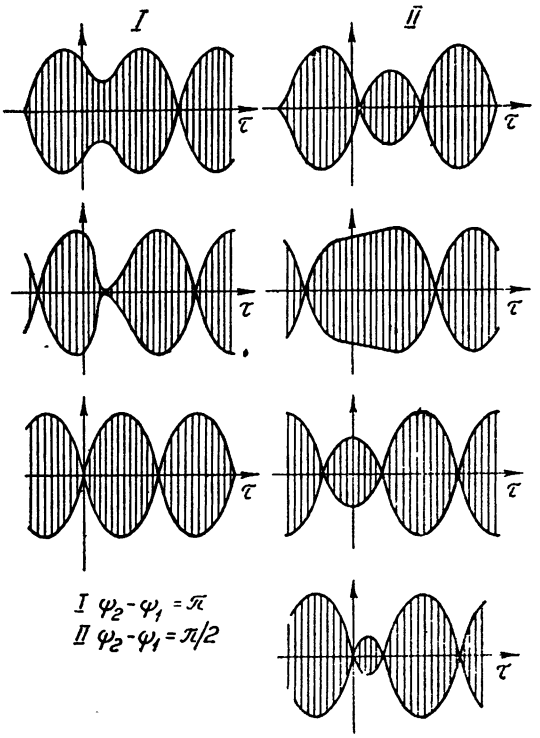


Рис. 3. Установление колебаний при скачках фазы сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1 М. А. Дивильковский, С. М. Рытов, ЖТФ, **3**, 474 (1936).
2. Е. М. Гершензон, Н. Г. Птицына, Г. И. Рожкова, В. С. Эткин, Радиоэлектронная промышленность, **17**, 3 (1959).
3. Е. М. Гершензон, Н. Г. Птицына, Г. И. Рожкова, В. С. Эткин, Радиотехника и электроника, **6**, 829 (1961).

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 13 июля 1961 г.

К ТЕОРИИ ВНЕШНЕГО ФОТОЭФФЕКТА С ПОЛУПРОВОДНИКОВ

З. И. Урицкий и Е. Н. Иванов

В настоящее время наряду с большим количеством экспериментального материала по внешнему фотоэффекту с полупроводников [1] не имеется удовлетворительного теоретического объяснения этих данных, кроме нескольких полуэмпирических попыток [2]. В настоящей работе рассмотрен фотоэффект с полупроводников в условиях, когда эффективная глубина выхода фотоэлектронов l заключена в пределах $l_1 \ll l \ll l_2$, где l_1—длина свободного пробега, l_2—эффективная глубина поглощения. При этом, очевидно, необходимо учитывать кинетику фотоэлектронов и нельзя объяснять фотоэффект затуханием интенсивности света, как это делает Дыкман [3].

В случае стационарного освещения в полупроводнике установится стационарное распределение электронов, которое может быть описано функцией распределения

$$\rho = \exp\left[(\mu_2 - E)/k\Theta\right], \qquad (1)$$

где μ_2 и Θ определяются из условий сохранения энергии и нейтральности:

$$n_0 + \Delta n = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_-}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty E^{1/2}\exp\left[(\mu_2 - E)/k\Theta\right]\,dE;$$

$$\gamma\varepsilon\Delta n + \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_-}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty E^{3/2}\exp\left[(\mu_1 - E)/kT\right]\,dE = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_-}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty E^{3/2}\exp\left[(\mu_2 - E)/k\Theta\right]\,dE,$$

$\varepsilon = \frac{m}{m_-}\hbar(\nu - \nu_0) = \alpha(\nu - \nu_0)$—энергия возбужденного электрона, определяемая из закона сохранения энергии в элементарном акте поглощения, m—приведенная масса электрона и дырки, m_- — эффективная масса электрона проводимости, $\hbar\nu_0$ — ширина запрещенной зоны,

$$\Delta n = -\frac{n_0 + p_0}{2} + \left[\frac{(n_0 + p_0)^2}{4} + \frac{f}{B}\right]^{1/2}$$

(см. [4]), n_0, p_0 — темновые концентрации электронов и дырок соответственно, $f = 8\pi k j_0/c\hbar\,[(n+1)^2 + k^2]$—функция объемного зарождения [3], B—функция вероятности рекомбинации. Коэффициент γ ($1 > \gamma > \gamma_{\text{мин}}$) характеризует степень „остывания" электронов, возбужденных светом;

$$\gamma_{\text{мин}} = \frac{3}{8}\frac{(kT)^{5/2}}{\varepsilon\Delta n}\left(\frac{2m_-}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\left[\exp\left(\mu_1/kT\right) - (n_0 + \Delta n)\left(\frac{\pi\hbar^2}{2m_- kT}\right)^{3/2}\right],$$

μ_1—уровень Ферми в неосвещенном полупроводнике.

Мы пренебрегли участием эмиттированных электронов в установлении равновесия. Кроме того, считая распределение квазибольцмановским, мы заменяем истинную кривую, имеющую малую в отношении $(kT/\hbar\nu_0)^{3/2}$ немонотонную добавку к больцмановскому члену с максимумом в области энергий $E = \varepsilon$ [5], кривой (1), ограничивающей такую же площадь. В случае полупроводников с небольшой работой выхода χ и большой запрещенной зоной это не должно приводить к существенным погрешностям.

Из (2) нетрудно получить:

$$k\Theta = \frac{2}{3}\frac{\gamma\varepsilon\Delta n + 3/2 n_0 kT}{n_0 + \Delta n};$$

$$\exp\left(\mu_2/k\Theta\right) = 4(n_0 + \Delta n)\left(\frac{\pi\hbar^2}{2m_- k\Theta}\right)^{3/2}. \tag{3}$$

Фотоэмиссию найдем по аналогии с термоэлектронной эмиссией. Пренебрегая темновым током, для количества эмиттированных электронов, у которых перпендикулярная поверхности составляющая скорости лежит в интервале ξ, $\xi + d\xi$, имеем:

$$dn(\xi) = \frac{2m_-^3}{h^3}\exp\left(\frac{\mu_2 - \chi}{k\Theta}\right)\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_1\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_2\exp\left[-\frac{m_-(\xi^2 + \zeta_1^2 + \zeta^2}{2k\Theta}\right]\xi d\xi =$$

$$= \frac{4\pi m_-^2 k\Theta}{h^3}\exp\left[\frac{\mu_2 - \chi - m_-\xi^2/2}{k\Theta}\right]\xi d\xi = g(\xi)\,d\xi. \tag{4}$$

Максимум $g(\xi)$ достигается в точке $\xi_1 = (k\Theta/m_-)^{1/2}$, т. е. смещается в сторону больших энергий с увеличением частоты и температуры в соответствии с экспериментальными данными. При $\Delta n \gg n_0$ и $\gamma\varepsilon\Delta n \gg \frac{3}{2} n_0 kT$

$$\xi_1 = (2\gamma\varepsilon/3m_-)^{1/2}$$

а при $\Delta n \ll n_0$ и $\gamma_\varepsilon \Delta n \gg \frac{3}{2} n_0 kT$

$$\xi_1 = (2\gamma_\varepsilon \Delta n / 3m_- n_0)^{1/2}.$$

Фотоэлектрическую работу выхода найдем из соотношения $\hbar\nu = E_{\text{макс}} + \varphi$, для чего определим $\xi_{\text{макс}} = (2E_{\text{макс}}/m_-)^{1/2}$ как пересечение касательной в точке перегиба к кривой $g(\xi)$ с осью ξ. Тогда

$$\xi_{\text{макс}} = \frac{3^{3/2}}{2} \left(\frac{k\Theta}{m_-}\right)^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\varphi = \hbar\nu - \frac{9}{2} \gamma_\varepsilon \frac{\Delta n}{n_0}, \tag{5}$$

если $\Delta n \ll n_0$, $\gamma_\varepsilon \Delta n \gg \frac{3}{2} kTn_0$ и

$$\varphi = \hbar\nu - \frac{9}{2} \alpha\gamma (\nu - \nu_0), \tag{5а}$$

если $\Delta n \gg n_0$, $\gamma_\varepsilon \Delta n \gg \frac{3}{2} n_0 kT$.

В работе [6] на эксперименте наблюдалась линейная зависимость φ от ν. Из (4) получим вольтамперную характеристику фототока

$$I(V) = \frac{4\pi m_-}{h^3} (k\Theta)^2 \exp\left[\frac{\mu_2 - \chi - eV}{k\Theta}\right]. \tag{6}$$

При $V = 0$ имеем спектральную характеристику $i = i(\nu)$. Так как при $k\Theta \ll \chi$ фототок пренебрежимо мал, примем за красную границу фотоэффекта $\nu_g = \nu_0 + 3\chi/2\alpha\gamma$, для которой $k\Theta \sim \chi$.

Качественное согласие с экспериментом основных характеристик фототока с полупроводников уже в таком грубом приближении свидетельствует о необходимости детального исследования кинетики фотоэмиссии с полупроводников, что явится предметом последующей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Арсеньева-Гейль, Внешний фотоэффект с полупроводников и диэлектриков, ГИТТЛ, М., 1957.
2. Apker, Phys. Rev., 74, 1462 (1948).
3. И. М. Дыкман, ЖТФ, 18, 1426 (1948).
4. E. S. Rittner, Proceedings of the photocondactivity conference in Atlantic-Sity New-York, 1956.
5. H. Fröhlich, Phys. Zs. der s. u., 8, № 5 (1935).
6. А. Н. Арсеньева-Гейль, Ван Бао-кунь, ФТТ, 111, 1622 (1961).

Поступила в редакцию
3 июня 1961 г.

УСТРОЙСТВО ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ЗАПУСКОВ В РИТМИЧНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ НЕСКОЛЬКИХ ИЗДЕЛИЙ НА ОДНОМ ОБОРУДОВАНИИ

А. С. Алексеев, Г. П. Савин

В работах [1, 2] рассмотрение процесса производства в виде движений некоторой динамической системы позволило выработать весьма простую методику расчета параметров оптимального процесса ритмичного производства нескольких типов изделий на одном оборудовании.

Основными параметрами оптимального графика ритмичного производства в этом случае являются длительности запусков отдельных изделий в производство, которые в безразмерных параметрах (см. [1, 2]) выражаются следующим образом:

$$t_i^* = p \frac{z_i}{1 - \sum_{j=1}^{n} z_j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.1}$$

где при единичном темпе потребления p—минимальное суммарное безразмерное время переналадок, а $u_i = 1/z_i$ — безразмерные темпы производства каждого из изделий. Величины t_i^*, как показано в [1, 2], дают возможность легко определить остальные параметры графика запуска и составить сам график.

В условиях реального производства из-за непредвиденных изменений в подаче материалов, в потреблении готовых изделий и т. п. необходимо довольно часто пересчитывать график запуска с тем, чтобы вести производство по возможности наилучшим образом. Это каждый раз связано с расчетом по формуле (1.1) величин t_i^* при различных p и z_i.

Можно предложить весьма простое и надежное счетно-решающее устройство для нахождения длительностей запусков согласно (1.1).

Действительно, амплитуда синусоидального напряжения, снимаемого с конденсатора C_i, в цепи последовательно соединенных источника синусоидального напряжения, индуктивности L и n конденсаторов C_j, будет

$$|v_i| = v_0 \frac{1}{\omega^2 L C_i} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j} \right)^{-1}, \tag{1.2}$$

если v_0—амплитуда, а ω—частота источника. Выражение (1.2) совпадает с (1,1), если принять

$$u_i = \omega^2 L C_i, \qquad p = v_0, \qquad t_i^* = |v_i|. \tag{1.3}$$

Очевидно, аналогичные результаты могут быть получены в схеме, состоящей из конденсатора C и нескольких индуктивностей L_i.

Интересно отметить, что условие резонанса в колебательном контуре рассматриваемой модели

$$\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} \prod_{i \neq j}^{n} C_i}{L \prod_{i=1}^{n} C_i} \tag{1.4}$$

соответствует случаю максимальной производительности оборудования, при которой еще не возможен ритмичный процесс производства, условием осуществимости которого, согласно [1, 2], является здесь неравенство $\omega > \omega_0$. В связи с этим в модели следует использовать фазочувствительный вольтметр.

Для конструктивного оформления рассматриваемого устройства можно рекомендовать использование штеккерной или кнопочной панели с набором всех необходимых конденсаторов C_i или использование двух магазинов емкостей, на первом из которых при определении t_i^* следует устанавливать $C = \left[\sum_{j \neq i}^{n} \frac{1}{C_j} \right]^{-1}$, а на втором C_i.

Эксперимент, проведенный для $n = 12$ на частоте 100 *кгц* с использованием генератора ГСС-6 и вольтметра МВЛ-2М, подтвердил вполне достаточную точность, получаемую в модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Алексеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 706 (1960).
2. А. С. Алексеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

Научно-исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 16 октября 1961 г.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В работе [1] в основной формуле (1) мною допущена ошибка. Правильное выражение для коэффициента поглощения должно иметь вид [2]:

$$\chi = \frac{|\overline{\partial E/\partial t}|^t}{2u_{\text{гр}}\bar{E}^t},$$

где $u_{\text{гр}}$ — групповая скорость магнитозвуковых волн, равная:

$$u_{\text{гр}} = \frac{2u_0^2 u_a^2}{u}\left\{u_0^2+u_a^2 \pm \left[\left(u_0^2-u_a^2\right)^2+\frac{\chi^2 u_0^2 u_a^2}{\omega^2}\left(u_0^2+u_a^2\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[(u_a+u_0)^2+\frac{\chi^2 u_0^2 u_a^2}{\omega^2}\right]^{-1/2}\left[(u_a-u_0)^2+\frac{\chi^2 u_0^2 u_a^2}{\omega^2}\right]^{-1/2}\right\}^{-1}.$$

В связи с этим формулы (8), (15) должны быть умножены на коэффициент $\eta_1 = u/u_{\text{гр}}$ формулы (12), (19) на $\eta_2 = \left(1-\frac{\chi^2 u_0^2}{\omega^2}\right)^{-1}$, выражения (14), (21) на $\eta_3 = \left(1-\frac{\chi^2 u_a^2}{\omega^2}\right)^{-1}$, (24) на $\eta_4 = \frac{u^2\left(1-u_0^2/u^2\right)^2}{\sqrt{2}\,\pi\rho_0 u_2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Ф. Филиппов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 936 (1961).
2. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, ГИТТЛ, М., 1957, стр. 245.

Ю. Ф. Филиппов

Поступило в редакцию
9 декабря 1961 г.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В статье А. Н. Малахова, В. Н. Никонова и Т. Д. Разиной «О некоторых методах и результатах измерения флюктуаций амплитуды и частоты генераторов», помещенной в № 6 журнала за 1961 год, по вине одного из авторов была допущена ошибка.

Вместо величины $\overline{z^2}$ во всех формулах статьи нужно читать $(\bar{z})^2$.

В. Н. Никонов

Поступило в редакцию
23 декабря 1961 г.

ИНФОРМАЦИЯ

КОНФЕРЕНЦИИ

СИМПОЗИУМ ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА И АНТЕННАМ созывается международным научным радиосоюзом (URSI) в Копенгагене (Дания) с 25 по 30 июня 1962 года.

Принято следующее тематическое разбиение по секциям: 1) Распространение направленных и ненаправленных электромагнитных волн в анизотропных средах (рук. Маркувиц (N. Marcuvitz) и Уейт (J. R. Wait)). 2) Рассеяние в случайных средах (рук. Сильвер (S. Silver) и Уилон (A. D. Wheelon)). 3) Распространение и излучение модулированных структур (рук Олинер (A. Oliner)). 4) Свойства частично когерентных электромагнитных полей (рук. Цукер (F. J. Zucker)). 5) Последние достижения в дифракционной теории (рук. Зигель (K. M. Siegel) и Келлер (J. B. Keller)). 6) Антенны (рук. Хансен (R. C. Hansen) и Кнудсен (H. L. Knudsen)).

Материалы должны направляться по адресу—Symposium of Electromagnetic Theory and Antennas. The Technical University of Denmark, Oster Voldgade, 10G, Copenhagen K, Denmark и содержать краткое изложение доклада (800—1200 слов) на английском или французском языках.

СИМПОЗИУМ О ЯВЛЕНИЯХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ПЛАЗМЕ созывается Гадмерским Технологическим университетом в Готенбурге (Швеция) с 2 по 4 июля 1962 г.

Адрес генерального секретаря симпозиума:

Pr. H. Wilhelmesson Research Laboratory of Electronics, Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden.

Комиссия по акустике АН СССР совместно с Научно-исследовательским радиофизическим институтом (НИРФИ при Горьковском государственном университете им. Н. И. Лобачевского проводят в июне 1962 года в г. Горьком)

ВТОРОЙ ВСЕСОЮЗНЫЙ СИМПОЗИУМ ПО ДИФФРАКЦИИ ВОЛН

Симпозиум имеет своей целью взаимную информацию участников о результатах исследований по теории диффракции волн различной природы: электромагнитных (включая диффракцию на плазменных объектах), акустических, упругих, тепловых, волн в тяжелой жидкости и др.

Учитывая важность совместных дискуссий, намечается объединить доклады в секции по методическому принципу.

1. Строгие и численные методы решения диффракционных задач и их математическое обоснование (включающее строгие постановки задач, теоремы существования и т. п.).

2. Приближенные и асимптотические методы (в том числе методы, опирающиеся на физические представления и принципы).

Предполагается также включение в программу симпозиума докладов по теории статистических нелинейных и квантово-механических диффракционных явлений.

Заявки на доклады вместе с их аннотациями (не более 3000 печатных знаков), а также сведения о докладчиках должны быть представлены не позднее 15 марта 1962 года.

Одновременно следует прислать список лиц, которые примут участие в симпозиуме.

Адрес оргкомитета: г. Горький, ул. Лядова, 25/14, НИРФИ, оргкомитет симпозиума.

Справки по телефону: г. Горький, 3-69-00, доб. 3-69, или 3-65-45; г. Москва, В-5-00-12, доб. 3-08.

Оргкомитет