

СОДЕРЖАНИЕ

Беликович В. В., Бенедиков Е. А., Ерухимов Л. М. Результаты наблюдений дискретного источника Лебедь-А под большими зенитными углами	993
Кротников В. Д., Порфириев В. А., Троицкий В. С. Разработка метода прецизионного измерения интенсивности поля и эталонирование радиоизлучения Луны на $\lambda=3,2 \text{ см}$	1004
Воденеева Д. К., Митяков Н. А. Результаты экспериментальных исследований эффекта «утраивания» в слое F ионосферы	1013
Чавдаров С. С., Часовитин Ю. К. Об оценке устойчивости отражения радиоволн от спорадического слоя E	1020
Горский С. М., Кротов В. А. Некоторые характеристики атмосферных помех в диапазоне от 2 до 25 гц	1025
Силин В. П. Релятивистское кинетическое уравнение для быстропеременных процессов в ионизированном газе	1029
Ковнер М. С. Об одном случае возбуждения волн в неравновесной магнитоактивной плазме	1035
Денисов Н. Г. О влиянии приемного устройства на флюктуации принимаемого излучения	1045
Малахов А. Н., Никонов В. Н., Разина Т. Д. О некоторых методах и результатах измерения флюктуаций амплитуды и частоты колебаний генераторов .	1052
Таланов В. И. Об излучении источников над плоскостью и синусоидально модулированным поверхностным импедансом	1065
Левитский С. М. и Баарчук Н. С. Исследование свойств цилиндрического плазменного волновода	1078
Кузьмин Н. А., Макаров Т. В. Электромагнитные волны в крестообразном волноводе, составленном из секторов	1089
Песковацкий С. А., Шеина Т. Г. Измерение диэлектрической проницаемости малых образцов в диапазоне СВЧ	1099
Кузнецов М. И., Грошков Л. М. Экспериментальное измерение траекторий электронов в цилиндрическом неразрезном магнетроне в статическом режиме	1104
Максимова А. М. О ВЧ мощности и электронном КПД генераторной лампы с двумя тормозящими электродами	1121
Средний И. Е., Маслов Е. П. Об одной задаче из теории автоколебаний	1138
Ашбель Н. И. и Постников Л. В. К вопросу об устойчивости транзисторных схем	1149
Аранович В. Г., Постников Л. В. Динамика мультивибратора на плоскостных полупроводниковых триодах	1156
 Краткие сообщения и письма в редакцию	
Болотовский Б. М., Столяров С. Н. Формулы Френеля на движущейся границе раздела двух сред	1171
Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. I, №№ 3, 4, 1961	1173
Содержание т. IV журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1961 г.	1176
Именной указатель т. IV журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1961 г.	1181

РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЙ ДИСКРЕТНОГО ИСТОЧНИКА ЛЕБЕДЬ-А ПОД БОЛЬШИМИ ЗЕНИТНЫМИ УГЛАМИ*

B. V. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Л. М. Ерухимов

Приводятся результаты наблюдений дискретного источника Лебедь-А на частоте 29,7 мгц при зенитных углах порядка 80°. Ослабление сигнала в магнитоспокойные дни обусловлено, в основном, обычным механизмом поглощения за счет соударений электронов с ионами и нейтральными молекулами. Ослабление сигнала хорошо коррелирует со степенью магнитной возмущенности, особенно в ночное время зимой. В этот период наблюдались также сильные фазовые искажения интерференционной картины. Большую роль в указанных явлениях играет, по-видимому, рассеяние радиоволн на неоднородностях электронной концентрации в верхних слоях ионосферы.

Наблюдения дискретных источников космического радиоизлучения являются одним из методов изучения ионосферы. В частности, измерения относительной интенсивности радиоизлучения источников могут дать существенную информацию о поглощении радиоволн в ионосфере [1,2]. В настоящей статье приводятся результаты измерений относительной интенсивности радиоизлучения дискретного источника Лебедь-А вблизи его нижней кульминации на частоте 29,7 мгц, проведенных в г. Горьком в 1959—60 гг.

Аппаратура и методика измерений. Наблюдения относительной интенсивности источника Лебедь-А велись при помощи фазопереключаемого интерферометра с базой в 20 λ. В качестве элементов интерферометра были использованы горизонтальные ромбические антенны, одна из которых представляла собою двойную ромбическую antennу с длиной стороны ромба в 70 м, высотой подвеса полотна над поверхностью Земли 9 м и расстоянием между осями ромбов в горизонтальной плоскости 10 м. Другим элементом интерферометра являлась двухэтажная ромбическая антenna с таким же размером сторон ромбов, что и в первой антenne (70 м) и высотами подвеса полотен 9 и 5 м. Такое сочетание антенн было выбрано с целью некоторого уменьшения уровня боковых лепестков суммарной интерференционной диаграммы направленности системы. Расчетная полуширина (по мощности) диаграммы направленности в горизонтальной и вертикальной плоскостях составляла соответственно 11° и 13°; диаграмма направленности в горизонтальной плоскости, определенная по дискретному источнику, оказалась достаточно близкой к расчетной. Сигналы от обоих элементов интерферометра после предварительного усиления подавались на отдельные смесители, имеющие общий гетеродин с частотой 6,5 мгц. В одном из гетеродинных каналов находился электронный коммутатор фазы на 180° с частотой переключения 29 гц. После смесителей сигнал подавался на УПЧ, в качестве которого был использован приемник с полосой пропускания 10 кгц. На выходе приемника имелся квадратичный детектор и гетеродинный фильтр, связанный с коммутатором фазы. Калибровка усиления приемной системы производилась

* Доклад на конференции МВ и ССО СССР по радиоэлектронике, Харьков, 1960.

с помощью шумового генератора, подключаемого к входам предварительных усилителей. Запись сигнала осуществлялась самописцами с постоянной времени 3 сек и скоростью протяжки ленты $720 \text{ мм}\cdot\text{час}^{-1}$.

Для Горького, где проводились наблюдения, высота радиоисточника Лебедь-А в нижней кульминации составляет около 8° . Поскольку, однако, вся система была повернута на 23° к востоку, высота источника, когда он проходил через диаграмму направленности интерферометра, изменялась от 9° до 11° . Радиоизлучение источника при этом проходило через слой F ионосферы на расстоянии $600 \pm 1800 \text{ км}$ к северо-северо-востоку от Горького, а нижние слои ионосферы — на расстояниях порядка $300 \pm 500 \text{ км}$ в том же направлении.

Во время описываемых наблюдений, охватывающих почти годовой цикл (с августа 1959 г. по июнь 1960 г.), всегда имелись довольно

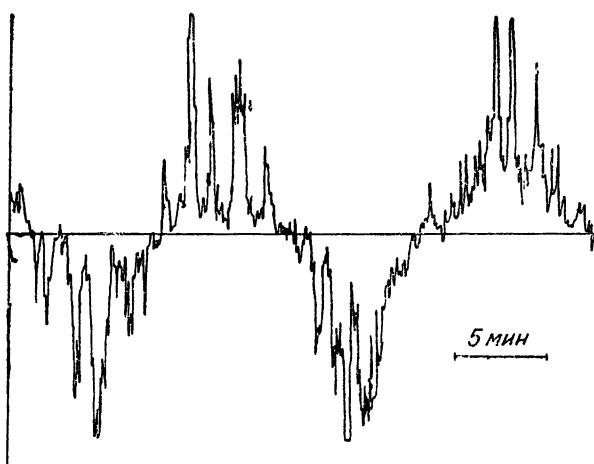


Рис. 1. Пример записи дискретного источника Лебедь-А.

значительные флюктуации интенсивности сигнала, затрудняющие определение его величины. Типичный пример интерференционной картины с такими флюктуациями показан на рис. 1. Для уменьшения вызванных наличием флюктуаций ошибок в определении величины интенсивности сигнала последняя находилась сравнением расчетной площади шести основных лепестков диаграммы направленности с площадью тех же лепестков, измеренной планиметром на ленте. В зимнее время, когда источник наблюдался ночью (см. рис. 2), обработка наблюдений в значительной степени осложнялась наличием больших фазовых искажений интерференционной картины; в связи с чем точность измерений интенсивности в это время была ниже, особенно для малых сигналов. Часть записей оказалась неудовлетворительной из-за появления промышленных помех и помех грозового характера. Помехи, создаваемые радиостанциями, устраивались сменой частоты приема сигнала в небольших пределах от номинальной частоты. В целом среднее количество записей, использованных при обработке, составило около 20 в месяц для 1959 г., несколько меньше в зимние месяцы 1960 г. и около 10 в месяц (в связи с частичными перерывами в наблюдениях) для апреля, мая и июня 1960 г.

Результаты наблюдений. Прежде, чем перейти к изложению полученных результатов, сделаем несколько предварительных замечаний относительно факторов, влияющих на величину ослабления сигнала от внеземного источника. Основными причинами, обусловливающими

уменьшение интенсивности радиоизлучения при наклонном прохождении радиоволн через ионосферу, принято считать (кроме обычного механизма поглощения радиоволн за счет соударений электронов

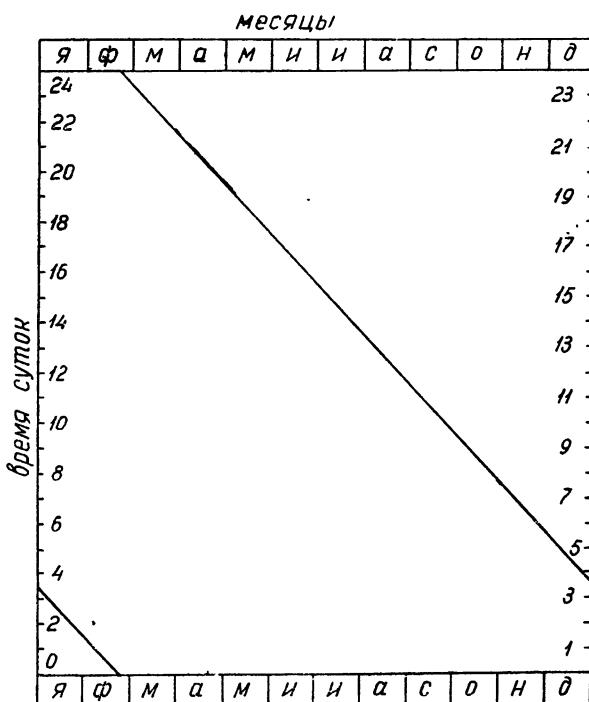


Рис. 2. Время прохождения источника Лебедь-А через диаграмму направленности интерферометра.

с ионами и нейтральными молекулами) рассеяние радиоволн на неоднородностях электронной концентрации ионосферы и рефракцию радиоизлучения при его прохождении через сферически слоистую ионосферу. Последняя причина становится существенной только на частотах, очень близких к критической частоте ионосферы при наклонном падении, когда рефракция резко возрастает. Ослабление потока радиоизлучения, вызванное рассеянием на неоднородностях ионосферы, играет, по-видимому, большую роль на частотах порядка 30 мгц (и даже на более высоких частотах; см. [1,2]). По существу, уменьшение интенсивности сигнала при рассеянии радиоволн от далекого источника происходит за счет вторичных явлений: расходимости потока радиоизлучения и полного отражения радиоволн, рассеянных в сторону увеличения зенитного угла, а также за счет увеличения поглощения рассеянных волн, вызванного удлинением их траектории в ионосфере.

К сожалению, расчет комплекса явлений, происходящих при рассеянии радиоволн, затруднителен из-за отсутствия данных о параметрах ионосферных неоднородностей. Значительно легче дать оценку величины обычного поглощения нерассеянных радиоволн при наклонном прохождении через ионосферу. Как хорошо известно [3], величина поглощения радиоволн в ионосфере для достаточно больших частот f , таких, что $(2\pi f)^2 \gg v^2$ и $f^2 \gg f_c$, где f_c — критическая частота ионосферы, а v — эффективное число соударений электронов с ионами и нейтральными молекулами, определяется формулой

$$\Gamma = \frac{e^2}{\pi m c f^2} \int \frac{N v \, dz}{n}, \quad (1)$$

где N —концентрация электронов, e и m —соответственно заряд и масса электрона, а интегрирование ведется по пути распространения радиоволн. Если считать, что распределение N и v по высоте не зависит от смещения в горизонтальном направлении, то с учетом сферичности Земли и рефракции радиоволн можно написать, что

$$\Gamma = \frac{e^2}{\pi m c f^2} \int N v \frac{dz}{\sqrt{n^2 - (R/(R+z))^2 \sin^2 \vartheta_0}}, \quad (2)$$

где n —показатель преломления радиоволн в ионосфере, R —радиус Земли, ϑ_0 —каждущийся зенитный угол источника радиоволн по выходе из ионосферы и z —вертикальная координата, отсчитываемая от поверхности Земли.

Для расчета по формуле (2) нужно, вообще говоря, задать модель ионосферы. Мы, однако, поступим иначе. Будем считать, что параметры ионосферы в месте наклонного прохождения через нее радиоволн совпадают с параметрами над местом приема. Тогда, определив отношение величин поглощения при наклонном и вертикальном прохождениях радиоволн через ионосферу $\beta = \Gamma_n / \Gamma_v$ и зная абсолютную величину Γ_v по независимым измерениям [4], мы определим и Γ_n . Для нижних слоев D и E ионосферы, где можно пренебречь искривлением траектории луча, β легко находится из чисто геометрического построения. Для $\vartheta_0 \sim 80^\circ$ и средней высоты нижних слоев порядка 100 км имеем $\beta \sim 4$. С другой стороны, величина $\Gamma_v(D, E)$ в полдень для осенних месяцев 1959 г. на частоте 18,6 мгц была порядка $0,3 \pm 0,4$ дБ. Таким образом, пересчитывая это значение поглощения на частоту 29,7 мгц по закону $\Gamma_1 / \Gamma_2 = f_2^2 / f_1^2$, получим для $\beta = 4$ $\Gamma_n(D, E) = 1,54 \Gamma_v(D, E)$ или $\Gamma_n(D, E) \sim 0,45 \pm 0,6$ дБ. В соответствии с суточным ходом $\Gamma_v(D, E)$ величина $\Gamma_n(D, E)$ в другое время суток уменьшается, опускаясь до незначительных значений после захода Солнца.

Для верхних слоев ионосферы необходимо учитывать отличие показателя преломления от единицы; не конкретизируя модель слоя F , можно дать только верхнюю границу величины β (которую полезно знать для разделения различных факторов ослабления, см. ниже), исходя из следующих соображений. Если считать, что электронная температура в слое F мало меняется с высотой, то поглощение при вертикальном прохождении радиоволн через ионосферу пропорционально $\int N^2 dz$ [5] и, следовательно, поглощение определяется в первую очередь той областью общепринятой модели слоя, где велика концентрация N электронов, т. е. областью, расположенной около максимума слоя. В то же время для этой области можно написать:

$$\beta = \int N v \frac{dz}{\sqrt{n^2 - [R/(R+z)]^2 \sin^2 \vartheta_0}} / \int \frac{N v \, dz}{n} \sim \sim \frac{\tilde{n}}{\sqrt{\tilde{n}^2 - [R/(R+z)]^2 \sin^2 \vartheta_0}}, \quad (3)$$

где \tilde{n} —некоторое эффективное значение показателя преломления в области интегрирования. Из зависимости подынтегрального выражения в (2) и (3) от показателя преломления n очевидно, что эффективное

значение \bar{n} в (3) будет тем ближе к значению показателя преломления в максимуме слоя F , чем ближе рабочая частота к критической частоте при наклонном падении. Величину β , рассчитанную по формуле (3), можно, таким образом, считать верхним пределом β , если за значение \bar{n} брать значение, соответствующее максимуму слоя F . В таблице 1 приведены значения $\beta(F)$, рассчитанные по формуле (3) в зависимости от f_c при $R=6370 \text{ км}$, высоте максимума слоя $F \sim 320 \text{ км}$, $\vartheta_0=80^\circ$ и частоте $f=30 \text{ мгц}$. Там же даны значения измеренного поглощения $\Gamma_b(F)$ при вертикальном прохождении космического радиоизлучения на частоте $18,6 \text{ мгц}$ [4] и результаты пересчета этих значений на частоту 30 мгц и наклонное падение $\Gamma_h(F)$ (с учетом данных $\beta(F)$).

Таблица 1

$f_c(F) (\text{мгц})$	6	7	8	9	10	10,4
$\beta(F)$	3,4	3,7	4,24	5,2	8,6	$\rightarrow \infty$
$\Gamma_b(F)$ на $18,6 \text{ мгц}$ (дБ)	0,645	0,5	0,57	0,67	0,8	
$\Gamma_h(F)$ на 30 мгц (дБ)	0,6	0,725	0,945	1,36	2,7	$\rightarrow \infty$

Перейдем теперь непосредственно к изложению полученных данных. На рис. 3 показаны результаты измерений за весь период наблюдений. Стрелками внизу отмечены те случаи, когда в процессе записи

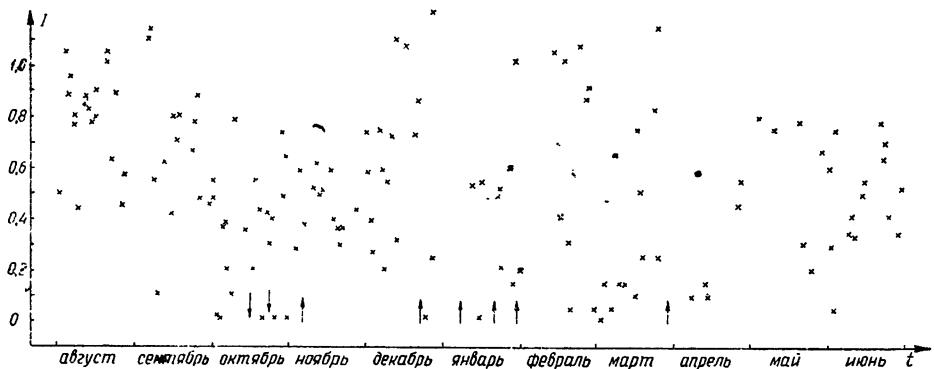


Рис. 3. Результаты наблюдений относительной интенсивности I источника Лебедь-А.

наблюдался „радиовосход“ источника. В октябре в двух случаях, отмеченных стрелками в обратном направлении, был зарегистрирован „радиозаход“ источника. Точки с нулевой интенсивностью означают, что в этих случаях источник либо вообще не наблюдался, либо его интенсивность была близка к нулю. Данные измерений, в которых величина относительной интенсивности была менее 0,2, округлены с точностью до 0,05.

Как видно из рис. 3, имеется очень большой разброс интенсивности от дня ко дню. В октябре и в зимние месяцы (включая также март) встречались дни, когда источник не наблюдался или когда его интенсивность была очень мала. В зимние месяцы отмечены также и наибольшие значения интенсивности сигнала источника. Интересно отметить, что максимальные значения интенсивности I на рис. 3 качественно коррелируют с обратным ходом критических частот слоя F .

(рис. 4): в те месяцы, когда критические частоты максимальны (октябрь 1959 г.), наблюдается уменьшение максимальных значений I ; там, где критические частоты максимальны (зимние месяцы), отмечается увеличение максимальных значений I .

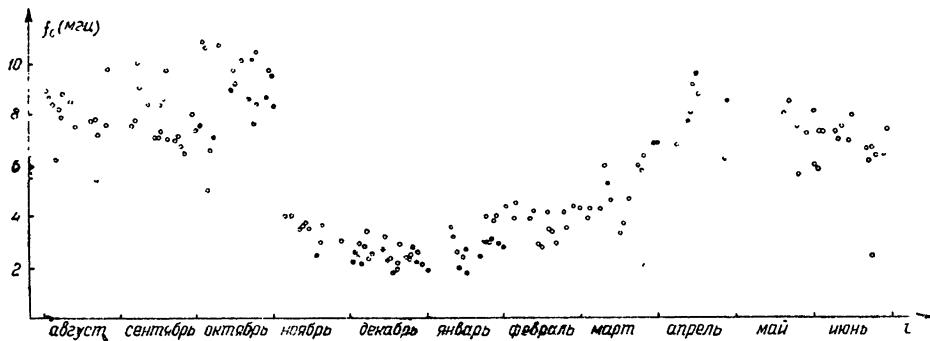


Рис. 4. Значения критических частот слоя F в Горьком во время наблюдений источника Лебедь-А.

На рис. 5 показаны измеренные значения I в зависимости от критических частот f_c в слое F для магнитоспокойных дней в августе,

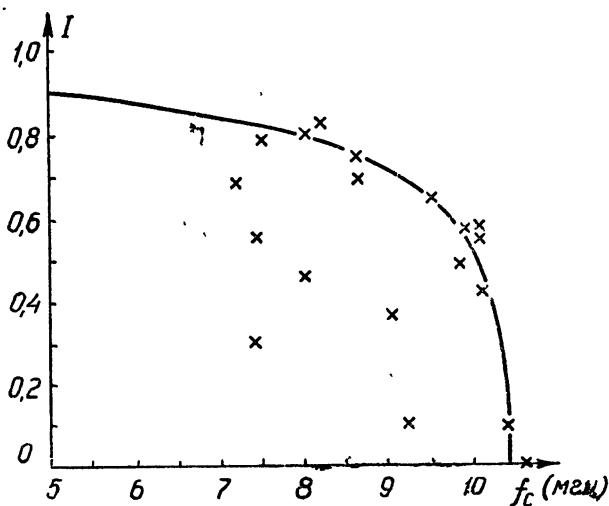


Рис. 5. Зависимость относительной интенсивности источника Лебедь-А от критических частот f_c слоя F_2 при $K_m \leq 2$ для августа, сентября и октября 1959 г.

сентябре и октябре. За магнитоспокойные дни были принятые те дни, когда значения трехчасового магнитного K -индекса Мурманска (K_m) во время сеансов наблюдений были меньше или равны 2. На рисунке имеется также расчетная кривая $\Gamma_n(F)$ по данным таблицы 1. Поглощение в нижних слоях ионосферы не принималось во внимание, поскольку его учет вызвал бы (в первом приближении) только некоторое изменение масштаба на оси ординат. Как видно из рис. 5, большое число экспериментальных точек расположено близко к расчетной зависимости $\Gamma_n(F)$.

Можно полагать, что если бы в нашем распоряжении были данные о состоянии магнитного поля Земли и ионосферы в месте прохожде-

ния радиоволн через последнюю, соответствие между расчетными и экспериментальными данными было бы полнее. Следует обратить внимание на то, что все значительные отклонения от расчетной кривой наблюдаются в сторону уменьшения сигнала. Этот результат свидетельствует о том, что максимальные значения интенсивности сигнала от источника действительно определяются только простым механизмом поглощения.

Уменьшение интенсивности космического радиоизлучения имеет значительную корреляцию с магнитной активностью. Это хорошо заметно на рис. 6, где значения I сопоставлены с магнитным K_m -индексом. Для уменьшения влияния обычного поглощения отобраны те случаи в августе, сентябре и октябре, когда $f_c F$ находились в пределах от 5 до 7 мгц.

Помимо зависимости I от K -индекса Мурманска были предприняты попытки нахождения корреляции между уменьшением I и величиной f_c слоя F над Мурманском и Диксоном, а также между I и K -индексом Москвы. Для осенне-летних месяцев 1959 г. корреляция между указанными величинами либо отсутствовала, либо была менее ярко выражена.

Таким образом, когда Солнце находится над горизонтом, имеется две отчетливо выраженные зависимости ослабления сигнала внеземного источника: уменьшение интенсивности радиоизлучения источника коррелирует с увеличением критических частот слоя F и с увеличением магнитной активности в области, близкой к зоне полярных сияний. С магнитной активностью связано, по-видимому, рассеяние радиоволн на неоднородностях ионосферы и повышенное поглощение в ионосфере, вызванное корпускулярными потоками. Последнее характерно для областей, расположенных в зоне полярных сияний.

При этом обычно считается, что повышенное поглощение радиоволн происходит в нижних слоях ионосферы. В то же время в наших экспериментах радиоизлучение источника Лебедь-А проходило нижние слои ионосферы еще в умеренных широтах, где повышенное поглощение, вызываемое корпускулярными потоками, встречается реже и играет гораздо меньшую роль по сравнению с полярными районами. Нет оснований полагать также, что нижние слои ионосферы в умеренных широтах имеют достаточное количество таких неоднородностей электронной концентрации, за счет рассеяния на которых можно было бы объяснить наблюдаемое ослабление радиоизлучения. Более правильным является предположение, что полученные вариации интенсивности сигнала источника объясняются явлениями, происходящими в слое F .

Как известно, имеются непосредственные указания о том, что корпускулярные потоки могут являться одним из ионизирующих агентов в верхней ионосфере (например, наличие так называемых „освещенных Солнцем“ полярных сияний). Возможно, что в полярную ночь

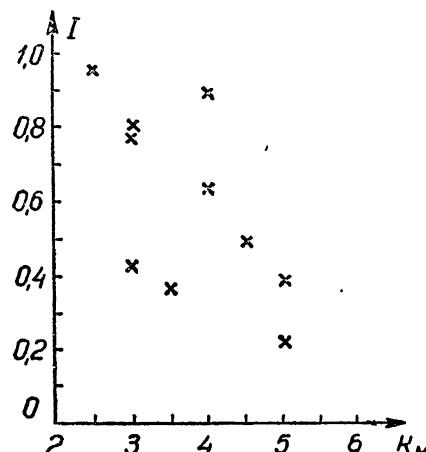


Рис. 6. Зависимость относительной интенсивности источника Лебедь-А от K_m при $f_c \leq 7$ мгц для слоя F в августе, сентябре и октябре 1959 г.

корпускулярные потоки вообще являются основным ионизирующим агентом ионосферы в полярных областях. Однако если считать, что в полярных районах ионосфера выше максимума слоя F не имеет гораздо большей протяженности по высоте по сравнению с умеренными широтами, или не предполагать наличия большого количества отрицательных ионов, величина поглощения в слое F (в соответствии с известными значениями критических частот f_c слоя F) независимо от вида ионизации должна быть невелика. В этом случае следует полагать, что в ослаблении сигнала большую роль играет рассеяние радиоволн на неоднородностях ионосферы, расположенных вблизи и выше максимума слоя F . Эти соображения в еще большей степени применимы, очевидно, к объяснению результатов ночных наблюдений зимой, к изложению которых мы переходим.

Результаты наблюдений в зимний период, когда источник проходил через диаграмму направленности системы ночью, несколько отличаются от описанных выше. Основной особенностью записей во время ночных наблюдений зимой являются большие фазовые искажения интерференционной картины. В ноябре такие записи почти не встречались, в декабре они составляли уже около 1/3 всех записей, а в январе, феврале и марте искажения были в большинстве случаев. Довольно часто интерференционная картина в этот период времени нарушалась настолько, что исчезало всякое подобие лепестков, и прохождение источника через диаграмму направленности системы сказывалось лишь в появлении флюктуирующего сигнала с большей или меньшей амплитудой.

Пример такой записи виден на рис. 7, где сохранен масштаб рис. 1.

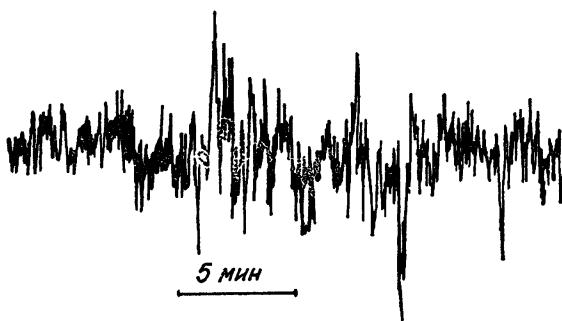


Рис. 7. Пример записи радиоизлучения источника в магнитоактивные дни.

Как правило, регистрируемая интенсивность сигнала в дни, когда наблюдались искажения (возмущенные дни), была гораздо ниже обычной величины. Иногда сигнал вообще не наблюдался, хотя критические частоты слоя F как в Горьком, так и в Мурманске были далеки от критической частоты при наклонном падении. Почти всегда появление сильных возмущений на записях сигнала с января 1960 г. коррелировали с увеличением значений K_m . Так, в марте для 10 дней (из 17 дней наблюдений), когда были сильные искажения, среднее значение K_m составило 4,9 и не опускалось ниже 3, тогда как для остальных 7 дней, когда искажения были сравнительно малы, среднее значение K_m было равно лишь 2,3. Для тех дней февраля и марта, когда интенсивность источника была особенно низка (менее 0,1 в относительных единицах), среднее значение K_m достигало величины 5,6.

Для получения дополнительной информации в зимние месяцы были привлечены данные о приеме радиоизлучения источника Лебедь-А

через боковые лепестки диаграммы направленности интерферометра (которые оказались достаточно большими для уверенного обнаружения источника), а также данные о приеме сигналов от источника Кассиопея-А. При прохождении источника Лебедь-А через боковые лепестки диаграммы направленности (после прохождения им основных лепестков) высота источника над горизонтом увеличивается и достигает $18 \pm 20^\circ$. Радиоисточник Кассиопея-А, принимаемый, по-видимому, дополнительным лепестком в вертикальной плоскости, наблюдался под углами $25 \pm 30^\circ$. Разница во времени между прохождением источника Лебедь-А через максимумы основных и боковых лепестков составила около 1,5 часов. Источник Кассиопея-А проходил через диаграмму направленности системы спустя 3 часа после источника Лебедь-А.

Данные наблюдений боковых лепестков и сигнала от источника Кассиопея-А показывают, что в целом возмущенность интерференционной картины становится меньше с увеличением угла места. Довольно часто записи указанных дополнительных сигналов обнаруживали только обычные флюктуации интенсивности, тогда как интерференционная картина основных лепестков была сильно искажена. Встречались, однако, и другие случаи, когда при наличии основных лепестков на записях пропадали или были очень слабыми и боковые лепестки, и сигнал от источника Кассиопея-А. Эти и другие интересные случаи зимнего периода наблюдений выписаны в таблице 2, где приняты следующие обозначения: „рв“—„радиовосход“ и „рз“—„радиозаход“ источника*, „и“—искажения интерференционной картины, „с“—очень сильные искажения интерференционной картины, „с“—слабая интенсивность сигнала источника Кассиопея-А. Первый ряд значений K_m соответствует времени прохождения источника Лебедь-А, второй ряд—времени прохождения источника Кассиопея-А. Интенсивность радиоизлучения дана в относительных единицах. Прочерки означают отсутствие данных, знак „+“—наличие отчетливого слабо искаженного сигнала источника Кассиопея-А.

Таблица 2

Дата наблюдений	Характеристика сигнала источника Лебедь-А		Характеристика источника Кассиопея-А	Значения индекса K_m
	основные лепестки	боковые лепестки		
Декабрь				
1	0,6	рз	0	$6 \div 4$ —
7	0,1	рв	—	—
9	0,6	—	—	$2 \div 1$ —
22	рв	—	—	$3 \div 1$ —
23	0	—	—	22 —
Январь				
12	0,5 и	рз, и	0	$5 \div 6$ 6
13	0,5 и	рз, и	0	$7 \div 3$ 3
14	0	0	рв	$6 \div 7$ 7
15	0,55 и	и	с	$6 \div 7$ 7
20	рв	—	—	
22	0,5 ии	рз, и	сс	6 5
29	рв	+	+	2 2
Февраль				
17	1	и	рз	$3 \div 6$ 6
20	0,05 ии	ии	ии	7 7
29	0,05 ии	ии	ис	$4 \div 5$ 4

* Здесь под терминами радиовосход и радиозаход подразумевается появление или пропадание сигнала во время сеанса наблюдений независимо от причины этих явлений.

Интересен случай 17 февраля, когда очень хорошо и с большой интенсивностью наблюдался сигнал в основные лепестки диаграммы направленности, боковые лепестки были сильно искажены, а при прохождении источника Кассиопея-А был отмечен его „радиозаход“. Такому изменению характера записи соответствовало увеличение значений индекса K_m с 3 до 6 единиц. Подобное соответствие не всегда соблюдалось. Так, 13 января был отмечен „радиозаход“ источника

Дата наблюдений	Характеристика сигнала источника Лебедь-А		Характеристика источника Кассиопея-А	Значения индекса K_m
	основные лепестки	боковые лепестки		
Март 2	0	0	0	6 6
5	0,05 ии	ии	+	5 5
16	0,75 и	0	рв	6 6
22	рв	0	0	4-6 5

Лебедь-А в боковых лепестках и отсутствие сигнала источника Кассиопея-А, хотя индекс K_m во время прохождения источника Кассиопея-А был равен 3. Непонятно, почему сигнал источника Лебедь-А отсутствовал в начале сеансов наблюдений 22 декабря, 20 и 29 января, так как критические частоты ионосферы в эти дни были достаточно малы, а магнитная активность была невысока. Следует отметить также, что в последних случаях интенсивность сигнала после его появления на записях становилась сравнительно высокой.

Кроме указанных в таблице двух дней (20 и 29 января) в течение первых трех месяцев 1960 г. отмечено еще 7 дней со значениями $K_m \leq 2$ (23 января, 10, 23 и 26 февраля, 18, 22 и 23 марта). В пяти из последних семи дней наблюдалась очень большая интенсивность сигнала; 18 марта, когда интенсивность была небольшой, происходило нарастание магнитной активности (K_m увеличился с 2 до 5).

Таким образом, приведенные выше данные свидетельствуют о том, что ночью в зимние месяцы ослабление сигнала от внеземного источника тесно связано с увеличением магнитной активности. То обстоятельство, что аномальные явления (искажения интерференционной

картины и уменьшение интенсивности сигнала) наиболее ярко выражены в феврале—марте, связано, по-видимому, с тем, что именно в эти месяцы наблюдения проводились около полуночи, когда указанные аномалии максимальны. Об этом свидетельствуют также результаты, опубликованные в [2].

Данные, полученные в декабре 1959 г., когда наблюдения проводились приблизительно в 5 час утра, имеют меньше аномальных характеристик, причем искажения интерференционной картины слабо коррелируют с индексом K_m . Однако для декабря имеется 1 пол-

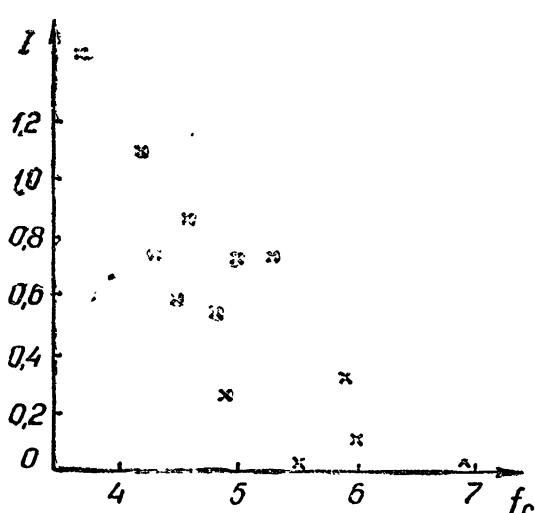


Рис. 8. Зависимость интенсивности источника Лебедь-А от критических частот слоя F_2 над Мурманском в декабре 1959 г.

определенная корреляция значений I с критическими частотами Мурманска (см. рис. 8). Как следует из рис. 8, интенсивность сигнала становится небольшой уже при $f_c \sim 6 \div 7$ мгц для слоя F . Не привлекая дополнительных данных, такую зависимость I от f_c можно объяснить, как упоминалось выше, либо увеличением толщины слоя F в полярной ионосфере, либо наличием там большого количества отрицательных ионов.

Несмотря на недостаточность сведений о состоянии ионосферы и магнитного поля Земли в месте прохождения через нее космического радиоизлучения, проведенные измерения указывают на то, что в магнитоспокойные дни ослабление сигнала при наклонном прохождении радиоволн через ионосферу обусловлено в основном обычным механизмом поглощения радиоволн за счет соударений электронов с ионами и нейтральными молекулами. В магнитоактивные дни ослабление сигнала хорошо коррелирует с магнитным индексом K зоны полярных сияний, причем ослабление часто бывает очень сильным и сопровождается большими фазовымиискажениями. Объяснение аномальных явлений в магнитоактивные дни следует искать, по-видимому, в комплексе явлений, связывающих корпускулярные потоки с ионизацией и образованием неоднородностей ионосферы вблизи и выше максимума слоя F .

В заключение авторы пользуются случаем поблагодарить Г. Г. Гетманцева за внимание и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. I. A. Chivers, J. S. Greenhow, J. Atm. Terr. Phys., 17, 1 (1959).
2. J. Tuominen, J. Riihimaa, Ann. Acad. Sci. Fennica, A6, 712 (1960).
3. В. Л. Гинзбург, Теория распространения радиоволн в плазме, Физматгиз, М., 1961.
4. Е. А. Бенедиктов, Ю. С. Коробков, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, Л. Н. Ходалева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 957 (1960).
5. Е. А. Бенедиктов, Н. А. Митяков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 44 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
8 марта 1961 г.

OBSERVATION RESULTS OF THE DISCRETE SOURCE CYGNUS-A AT THE LARGE ZENITH ANGLES

V. V. Belikovitch, E. A. Benediktor, L. M. Erukhimov

The results of observation of the discrete source Cygnus-A are given at the large zenith angles of about 80° at 29.7 Mc. The signal attenuation during magnetic-quiet days are caused in the main by the usual absorption mechanism due to electron collisions with ions and neutral molecules. The signal attenuation is well correlated with magnetic disturbancies degree, especially in the winter night-time. In that period the strong phase distortion of interference picture was also observed. Apparently the scattering of radio waves on the electron density inhomogeneities in the upper ionosphere plays the great part in these phenomena.

РАЗРАБОТКА МЕТОДА ПРЕЦИЗИОННОГО ИЗМЕРЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ПОЛЯ И ЭТАЛОННИРОВАНИЕ РАДИОИЗЛУ- ЧЕНИЯ ЛУНЫ НА $\lambda=3,2$ см

В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий

Теоретически и экспериментально разработан и обоснован метод прецизионного измерения радиоизлучения дискретных источников, Луны, Солнца и др. на волнах сантиметрового диапазона путем сравнения с известным тепловым излучением абсолютно черного тела, помещенного под достаточным углом места в фраунгоферовой зоне антенны. Показано, что при низких углах места возникает дифракционная ошибка, которая может быть определена и исключена применением второго теплового эталона в виде отверстия в черной плоскости или путем применения двух тепловых излучателей, образующих систему дополнительных экранов. Теоретически и экспериментально определены условия отсутствия дифракционной ошибки. Метод обеспечивает точность измерения порядка $\pm 2\%$. Измеренная этим методом средняя по диску радиотемпература Луны на $\lambda = 3,2$ см с точностью около $\pm 2,5\%$ равна $T_{LF} = 210^\circ + 13,5^\circ \times \cos(\Omega t - 55^\circ)$.

Применяемые до настоящего времени в радиоастрономии методы абсолютных измерений [1] практически не обеспечивают точности в среднем лучше, чем $\pm (10 \div 15)\%$. Между тем, современное состояние радиоастрономии в ряде случаев (например, при измерении интенсивности дискретных источников) настоятельно требует существенного повышения точности. В настоящей работе рассматривается и применяется метод, близкий к методам Троицкого, Цейтлина [1,2], Уайтхерста [3] и Молчанова (см., например, [1]), но свободный от их недостатков и обеспечивающий точность порядка $\pm 2\%$ и выше.

Разработанный метод был применен для прецизионного измерения радиотемпературы Луны на волне 3,2 см. Это измерение необходимо для решения вопроса о природе поверхности Луны [4], а также для использования Луны в качестве эталона радиоизлучения для калибровки антенных устройств [1] (в том числе при различных радиоастрономических измерениях на сверхвысоких частотах).

1. МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ

Метод измерения состоит в сравнении радиоизлучения от какого-либо источника с тепловым радиоизлучением нагреветого до окружающей температуры абсолютно черного диска или отверстия в черной плоскости, расположенных под достаточно большим углом места h_d на фоне неба. Поскольку эталонным сигналом, как очевидно, является разность температуры диска и радиотемпературы фона (неба на высоте h_d), этот метод со стороны высоких частот ограничен миллиметровыми волнами, для которых температура неба на уровне моря достаточно высока, а со стороны низких частот, как будет показано ниже, возрастающими дифракционными ошибками.

При измерении радиоизлучения Луны размеры диска и отверстия целесообразно выбирать такими, чтобы они, располагаясь в фраунгоферовой зоне (расстояние до телескопа $R \geq D^2/\lambda$, где D — диаметр зер-

кала), имели бы видимые размеры, равные угловым размерам Луны, и линейные размеры, много большие длины волны.

Измерение производится в три этапа. Сначала луч антенны направляется под углом места h_d , затем в него помещается „искусственная луна“—черный диск—и определяется показание прибора n_d или приращение температуры антенны ΔT_{a_d} . Далее вместо диска ставится черная плоскость, охватывающая главный лепесток и имеющая в центре отверстие, равное диску, затем в отверстие вставляется диск и тоже определяется приращение показаний прибора n_{ot} или приращение температуры антенны $\Delta T_{a_{ot}}$. Наконец, как обычно, производится измерение сигнала n_L от Луны. При этом, как известно (см., например, [2]), приращение температуры антенны от радиоизлучения Луны

$$\Delta T_{al} = T_{LF} (1 - \beta_L),$$

где $\beta_L = 1 - \int_{\Omega_L} F_0^2 d\Omega / \int_{4\pi} F_0^2 d\Omega$ —коэффициент рассеяния мощности вне

диска Луны и $T_{LF} = \int_{\Omega_L} F_0^2 T_e d\Omega / \int_{\Omega_L} F_0^2 d\Omega$.

Найдем приращение температур антенны ΔT_{a_d} и $\Delta T_{a_{ot}}$. Пусть невозмущенная диаграмма антенны по полю равна $F_0(\varphi, h)$. При установке плоскости с отверстием антенну и эту плоскость целесообразно рассматривать как новую antennную систему. Очевидно, что ее диаграмма является дифракционной диаграммой отверстия F_1 . В случае диска, который является дополнительным экраном, новая дифракционная диаграмма поля будет F_2 . При этом поля связывают очевидные энергетические условия:

$$\int_{\Omega_d} F_0^2 d\Omega = \int_{4\pi} F_1^2 d\Omega; \quad \int_{4\pi - \Omega_d} F_0^2 d\Omega = \int_{4\pi} F_2^2 d\Omega, \quad (2)$$

где Ω_d —телесный угол диска и отверстия.

Температура антенны, направленной на черную плоскость с отверстием, равна

$$T_{a_1} = \left(\int_{\Omega_n} F_0^2 T_0 d\Omega - \int_{\Omega_d} F_0^2 T_0 d\Omega \right) / \int_{4\pi} F_0^2 d\Omega + \int_{4\pi} F_1^2 T(h) d\Omega / \int_{4\pi} F_0^2 d\Omega,$$

где Ω_n —угловые размеры черной плоскости, T_0 —температура диска, равная окружающей температуре, $T(h)$ —яркостная температура фона. Для определенности в дальнейшем будем использовать значения $T(h)$ в сантиметровом диапазоне, где она определяется излучением атмосферы [5] и Земли. Первый член полученного выражения учитывает излучение черной плоскости, а второй—излучение фона в дифракционную диаграмму за отверстием.

При помещении в отверстие черного диска

$$T_{a_2} = \int_{\Omega_n} F_0^2 T_0 d\Omega / \int_{4\pi} F_0^2 d\Omega.$$

Приращение температуры антенны

$$\Delta T_{a_{ot}} = T_{a_2} - T_{a_1} = T_0 \int_{\Omega_d} F_0^2 d\Omega / \int_{4\pi} F_0^2 d\Omega - \int_{4\pi} F_1^2 T(h) d\Omega / \int_{4\pi} F_0^2 d\Omega. \quad (3)$$

Отношение двух интегралов в первом члене дает долю мощности, заключенной в телесном угле отверстия. Обозначим эту величину, как

обычно, через $1 - \beta$ [1]. Умножая и деля второй член на величину $\int_{4\pi} F_1^2 d\Omega$, представляющую полную дифракционную мощность излучения, и учитывая (2), получим:

$$\Delta T_{a_{ot}} = T_0 (1 - \beta) - T_{ot} (1 - \beta), \quad (4)$$

где $1 - \beta = \int_{\Omega_d} F_0^2 d\Omega / \int_{4\pi} F_0^2 d\Omega$ и

$$T_{ot} = \int_{4\pi} F_1^2 T(h) | \int_{4\pi} F_1^2 d\Omega \quad (4a)$$

имеет смысл эффективной „температуры отверстия“.

Как видно, последняя зависит от величины и характера распределения фоновой температуры около направления h_d главного луча диаграммы F_1 и формы самой диаграммы. В случае достаточно равномерного фона в области порядка ширины дифракционной диаграммы $T_{ot} = T(h_d)$. В частности, очевидно, что чем больше отверстие по сравнению с длиной волны, тем уже диаграмма F_1 и тем с большим основанием можно считать фон в пределах диаграммы постоянным.

При достаточно узкой диаграмме и плавном изменении яркости фона целесообразно значение фоновой температуры представить в виде ряда

$$T(h) = T(h_d) + a(h - h_d) + b(h - h_d)^2 + \dots$$

Отсюда из (4a), учитывая, что в силу симметрии функции F^2 интегралы от четных членов исчезают, получим:

$$T_{ot} = T(h_d) + \int_{4\pi} F_1^2 b(h - h_d)^2 d\Omega / \int_{4\pi} F_1^2 d\Omega + \dots = T(h_d) + \Delta T_{ot} + \dots$$

и вместо (4) будем иметь окончательно:

$$\Delta T_{a_{ot}} = (T_0 - T_h) (1 - \beta) - \Delta T_{ot} (1 - \beta). \quad (5)$$

Здесь $T_h = T(h_d)$ и

$$\Delta T_{ot} = \int_{4\pi} F_1^2 b(h - h_d)^2 d\Omega / \int_{4\pi} F_1^2 d\Omega \quad (5a)$$

—дополнительная „температура отверстия“, связанная с дифракционным рассеянием за отверстием и неравномерностью фона излучения в пределах углов рассеяния. При равномерном фоне ($a = 0$, $b = 0$ и т. д.) второй член в (5), как и следует ожидать, исчезает. Нетрудно убедиться, что если температура диска и фона одинаковы (случай теплового равновесия в полости), то, как и следует, $\Delta T_{a_{ot}} \equiv 0$. Полученный в (5) результат физически очевиден: приращение температуры антенны — сигнал — пропорционален разности между температурой диска и закрытого им фона.

Найдем теперь приращение температуры ΔT_{a_d} при установке диска в свободном пространстве в луче антенны. При отсутствии диска температура равна

$$\begin{aligned} T_{a_1} &= \int_{4\pi} F_0^2 T(h) d\Omega / \int_{4\pi} F_0^2 d\Omega = T(h_d) (1 - \beta) + \\ &+ \int_{4\pi - \Omega_1} F_0^2 T(h) d\Omega / \int_{4\pi} F_0^2 d\Omega. \end{aligned}$$

Здесь первый член даст температуру антенны для конуса лучей углового размера Ω_d , в котором $T(h) = T(h_d) = \text{const}$, а второй — от всей остальной части диаграммы. При установке диска

$$T_{a_2} = T_0 \int_{\Omega_d} F_0^2 d\Omega / \int_{4\pi} F_0^2 d\Omega + \int_{4\pi - \Omega_d} F_2^2 T(h) d\Omega / \int_{4\pi} F_0^2 d\Omega.$$

Приращение температуры антенны ΔT_{a_d} будет равно

$$\Delta T_{a_d} = (T_0 - T_h) (1 - \beta) + \left[\int_{4\pi} F_2^2 T(h) d\Omega - \int_{4\pi - \Omega_d} F_0^2 T(h) d\Omega \right] / \int_{4\pi} F_0^2 d\Omega. \quad (6)$$

Подставляя сюда ряд для $T(h)$ и учитывая условия (2), получим:

$$\Delta T_{a_d} = (T_0 - T_h) (1 - \beta) + \Delta T_d (1 - \beta), \quad (7)$$

где ΔT_d — дифракционное „потепление“ диска, аналогичное потеплению отверстия ΔT_{ot} в (5) и равное

$$\Delta T_d = \left[\int_{4\pi} F_2^2 b (h - h_d)^2 d\Omega - \int_{4\pi - \Omega_d} F_0^2 b (h - h_d)^2 d\Omega \right] / \int_{4\pi} F_0^2 d\Omega. \quad (8)$$

Нетрудно убедиться из (6) или (8) с помощью (2), что, если антenna находится в равномерно нагретой черной полости с температурой $T_h = T_0$, то, как и должно быть, оба члена в (7) обращаются в нуль и $\Delta T_{a_d} \equiv 0$. При равномерном фоне и $T_0 \neq T_h$ в (7) остается только первый член, а дифракционный, как и следует ожидать, исчезает.

Оценим значения дифракционных добавок к температуре в (5) и (7). При этом, вообще говоря, необходимо решить дифракционную задачу определения полей F_1 и F_2 . Так как размеры применяемых тел многое больше длины волны, то для этого расчета достаточно воспользоваться известным приближенным методом физической оптики. Однако при некоторых условиях опыта оценка может быть сделана проще. Учитывая, что диск и отверстие являются дополнительными экранами, можно воспользоваться принципом Бабине [6]. Согласно этому принципу $F_0 = F_1 + F_2$. Всюду вне углового раствора Ω_{gl} главного луча $F_0^2 = 0$ и, следовательно, там же $F_1^2 = F_2^2$. Подставляя $F_2^2 = F_0^2 + F_1^2 - 2F_0F_1$ в (8), получим:

$$\Delta T_d = \Delta T_{ot} + \left[\int_{\Omega_d} F_0^2 b (h - h_d)^2 d\Omega - 2 \int_{\Omega_{gl}} F_0 F_1 b (h - h_d)^2 \right] / \int_{4\pi} F_0^2 d\Omega.$$

Будем считать, как это обычно имеет место, что в пределах углового размера главного лепестка Ω_{gl} фоновая температура постоянна или меняется линейно; тогда каждый из интегралов в числителе обращается в нуль и

$$\Delta T_d = \Delta T_{ot}. \quad (8a)$$

Это соотношение и выражения (5), (7) показывают, что в первом случае калибровочный сигнал уменьшен, а во втором увеличен на одну и ту же величину, обусловленную дифракцией и особенностями фона. Находя среднее значение сигналов от диска и отверстия, получим окончательно эталонный сигнал, практически свободный от дифракционных ошибок:

$$\Delta T_{a_{st}} = (T_0 - T_h) (1 - \beta). \quad (9)$$

Как видно, применение источников, образующих систему дополнительных экранов, позволяет исключить дифракционный член. В случае использования в качестве эталона только диска или отверстия возможны ошибки порядка $(\Delta T_{\text{от}} - \Delta T_{\text{эт}})/\Delta T_{\text{эт}} = \Delta T_{\text{от}}/T_0$. Очевидно, что для уменьшения этой погрешности целесообразно устанавливать диск при наибольшем угле места, где сам фон мал и в больших пределах углов практически постоянен. Кроме того, сохраняя угловые размеры, целесообразно увеличивать размеры диска по сравнению с длиной волны, чтобы дифракционная диаграмма F_1^2 или F_2^2 была достаточно узкой около направления h_d . Допустимые минимальные размеры диска определяются конкретными условиями и величиной h_d , а также возрастанием роли краевых эффектов при дифракции. По-видимому, с точки зрения характера дифракции размер в $3 \div 4$ длины волны является еще допустимым [7]. Заметим, что если размер диска порядка или более ширины диаграммы, то, очевидно, дифракционные поправки также исчезают; однако этот случай最难 реализуется на практике.

Находя отношение (9) и (1) и заменяя $\Delta T_{\text{эт}}$ и ΔT_L значением отклонения выходного прибора $n_{\text{эт}} = (n_{\text{от}} + n_d^*)/2$ и n_L , получим для температуры Луны выражение:

$$T_{LF} = \frac{n_L}{n_{\text{эт}}} (T_0 - T_h) \frac{\int_{\Omega_d} F_0^2 d\Omega}{\int_{\Omega_L} F_0^2 d\Omega} e^{\gamma(h)}. \quad (10)$$

Здесь член $e^{\gamma(h)}$ дает поправку на поглощение радиоизлучения Луны в атмосфере; h —высота Луны, $\gamma(h)$ —показатель затухания ее излучения в атмосфере.

Пусть угловые размеры диска близки к угловым размерам Луны, а высоты h , h_d Луны и диска достаточно велики, чтобы можно было пользоваться плоской идеализацией атмосферы. Тогда, проводя расчеты аналогично тому, как это сделано в [2], и обозначая отношение интегралов в (10) через α , получим:

$$T_{LF} = T_0 \frac{n_L}{n_{\text{эт}}} \alpha e^{-\Delta\gamma} \left[1 + \frac{32}{T_0} \gamma(h_d) \right], \quad (11)$$

где $\Delta\gamma = \gamma(h_d) - \gamma(h)$. Величина α при угловых размерах „искусственной луны“, близких к размерам Луны, мало отличается от единицы. Действительно,

$$\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{\int_{\Omega_d} F_0^2 d\Omega - \int_{\Omega_L} F_0^2 d\Omega}{\int_{\Omega_d} F_0^2 d\Omega} = 1 - \frac{2F_0^2(r_d) \Delta r}{F_0^2(r_{\text{ср}}) r_d}.$$

Для применявшейся антенны

$$\alpha = \left[1 - 2 \frac{0,9}{0,95} \frac{\Delta r}{r_d} \right]^{-1},$$

причем $\Delta r = r_d - r_L$ —разность углового радиуса диска и Луны. Из (10) и (11) видно, что точность измерения определяется небольшими возможными ошибками в угловых размерах диска, его температуре

и относительной точности измерений отклонений η . Более подробно оценка ошибок дана ниже.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА МЕТОДА

Для проверки основных выводов метода и выяснения влияния дифракции, фона, угла места расположения диска, рельефа местности, влияния краевых эффектов при дифракции и других факторов были проведены измерения эталонных сигналов и Луны при различных условиях на $\lambda = 3,2 \text{ см}$ (см. таблицу 1).

Таблица 1

№	Эталон	Диаметр (см)	Расстояние от телеско- пана	Угол места эталона (град)	$\frac{\Delta T_{\text{ад}}}{\Delta T_{\text{от}}}$	Высота гори- зонта за эта- лоном (град)
1	Диск и отверстие	57	62,5	14,5	$1,12 \pm 0,005$	горы вы- сотой $7^\circ \div 8^\circ$
2	Диск и отверстие	57	62,5	35	$1,00 \pm 0,005$	горы вы- сотой $4^\circ \div 7^\circ$
3	Диск и отверстие	57	2,5	14	1,04	$2^\circ \div 4^\circ$
4	Диск	110,8	117,4	20		$4^\circ \div 6^\circ$

Приведенные в таблице измеренные значения отношения $\Delta T_{\text{ад}} / \Delta T_{\text{от}}$ показывают степень влияния дифракционного „потепления“ диска и отверстия. Действительно, согласно (5) и (7), при малых дифракционных членах

$$\Delta T_{\text{ад}} / \Delta T_{\text{от}} \approx 1 + 2\Delta T_{\text{от}} / (T_0 - T_{\text{н}}).$$

На рис. 1 представлена зависимость этого отношения от угла возвышения диска над горизонтом. Как видно из таблицы и рисунка, „потепление“ практически исчезает, когда высота луча над видимым горизонтом

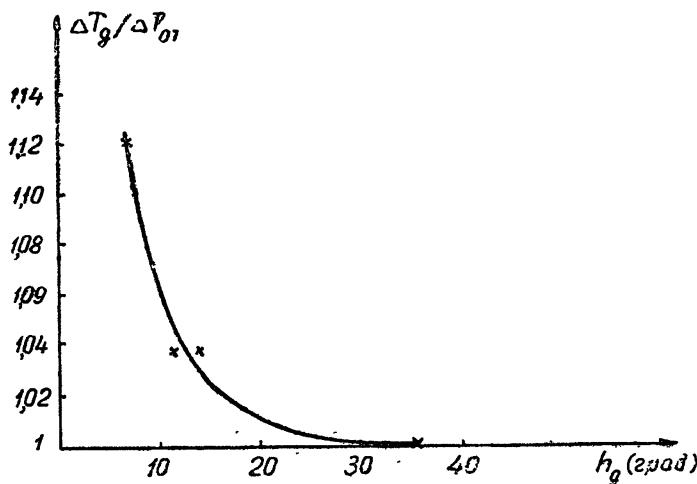


Рис. 1. Зависимость дифракционной ошибки от высоты эталонов над горизонтом.

$h_g = h_d - h_{\text{гор}} > 15^\circ \div 20^\circ$. Это находит свое объяснение в том, что дифракционная диаграмма отверстия на уровне 0,1 по мощности порядка $\pm 3^\circ$, т. е. в первом случае захватывает большое излучение гор (около 300°K).

Таким образом, для случаев № 2 и № 4 оказалось возможным

пользоваться в качестве эталона только диском. Увеличение размеров диска вдвое в случае № 4 преследовало цель убедиться в правильности выбора фазового центра, т. е. точки внутри антенной системы, откуда определяются видимые угловые размеры диска и отверстия.

3. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ И ТОЧНОСТЬ

Измерения проводились на вертикальной поляризации радиометром с диаметром зеркала 1,5 м при постоянной времени 16 сек и пороге чувствительности около 0,2°К. Температура антенны от Луны и диска была соответственно около 12°К и 16°К. Ширина диаграммы по высоте составляла 1,2°, по азимуту 1,2° (ордината диаграммы на лимбе Луны составляла 90% от максимума). Таким образом, измеряемая величина T_{LF} практически равна средней по диску радиотемпературе Луны.

В начале измерений проводилась калибровка по горячему эталону и зениту. При измерениях поочередно записывалось приращение сигнала при направлении только на Луну и диск или отверстие. Как показали измерения, температура антенны из-за неоднородности рельефа по азимуту менялась на $0,5 \pm 1^{\circ}\text{K}$ при изменении азимута на $15^{\circ} \div 20^{\circ}$. Поэтому при измерении Луны антenna отводилась в опорную область всего на 2° .

При приеме „искусственной луны“ направление диаграммы антенны не менялось. Нулевое положение записывалось при отсутствии „искусственной луны“, а сигнал—при ее установке. Применение способа отведения диаграммы (как для Луны) здесь недопустимо, так как заметно влияние опор „искусственной луны“ и близких к лучу опорных сооружений или местных предметов. Было обращено особое внимание, чтобы при установке и снятии Луны никаких новых элементов вспомогательных опорных конструкций не появлялось (кроме самого диска).

В результате получалась серия чередующихся измерений (Луна, диск, отверстие и т. д.). Серия измерений считалась удовлетворительной, если, согласно калибровке, усиление системы оставалось постоянным от начала до конца измерений с точностью до $2 \div 4\%$.

В первом опыте, как видно из таблицы, влияние дифракции было довольно значительным. Она давала завышенные значения радиотемпературы Луны при измерении путем сравнения с отверстием и заниженные значения—при сравнении с диском. Отклонение от средней истинной температуры составляло 5,7% для обоих случаев. При расчете все относилось к диску и учитывалась найденная поправка на дифракцию.

Все измерения проводились ежедневно в течение одного лунного цикла, причем в условиях № 1 (см. таблицу 1)—9 дней (20.II—28.II), № 2—8 дней (2.III—9.III) и № 4—11 дней (10.III—20.III). Каждая серия ежедневных наблюдений длилась $2 \div 3$ часа. Наблюдения Луны велись в часы, близкие к ее кульминации при углах места h от 25° до 60° . Обработка данных проводилась по формуле (11). Температура диска, равная окружающей температуре, бралась средней за время наблюдения, что даёт точность $\pm 1^{\circ}$. Величина α вычислялась по формуле (12), причем радиус Луны брался для середины интервала наблюдения, что дает точность $\pm 0,05^{\circ}$ (угловой диаметр менялся за двухчасовой интервал наблюдений не более, чем на $0,1'$). Величины затухания $\gamma(h_d)$ и $\gamma(h)$ рассчитывались, согласно [8], при средней влажности, имевшей место в часы наблюдений. Значения n_L и n_d определялись усреднением записи сигнала, длящейся обычно $2 \div 2,5$ минуты.

Случайные ошибки измерений определяются в основном ошибкой в измерении n_L/n_d , достигающей $\pm 3\%$ из-за флюктуаций и уходов

нуля. Ошибка из-за неточности определения $\gamma(h_d) - \gamma(h)$ составляет около $\pm 1\%$ (в основном из-за изменения влажности) и T_0 около $\pm 0,3\%$. Неточность α определяется в основном изменением видимого диаметра Луны в течение наблюдения и составляет не более $0,3\%$. Полная среднеквадратичная случайная ошибка единичного измерения получается равной $\pm 4\%$. Поскольку каждая серия измерений содержала около $6-10$ замеров, случайная ошибка ежедневного измерения не превосходила $\pm 1,5\%$.

Систематическая ошибка абсолютных измерений возникает, в первую очередь, из-за неопределенности положения точки отсчета расстояния от телескопа до диска, равной по порядку половине фокусного расстояния (неопределенность фазового центра диаграммы). При наименьшем из использованных расстояний это дает неопределенность в телесном угловом размере диска, равную $\pm 2\%$. Неточность замера углового диаметра „искусственной луны“ от принятой точки наблюдения $\pm 0,5\%$ дает ошибку в $\pm 1\%$, неточность теории учета метеоусловий может дать ошибку в $\pm 1\%^*$, неточность учета влияния диаграммы в величине $\alpha \pm 0,3\%^{**}$ и, наконец, неточность исключения дифракционной поправки дает ошибку $\pm 0,5\%^{***}$. Полная систематическая ошибка при квадратичном суммировании будет равна $\pm 2,5\%$.

Для уменьшения ошибки из-за неопределенности фазового центра было проведено измерение Луны с вдвое большим расстоянием диска до телескопа, что снижает указанную ошибку в 4 раза. При этом общая ошибка не должна превышать $\pm 2\%$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

На рис. 2 приведены полученные значения средней по диску радиотемпературы Луны за один цикл. Кривая хода температуры аппроксируется выражением

$$T_{LF} = 210^\circ + 13,5^\circ \cos(\Omega t - 55^\circ) + 1,7^\circ \cos(2\Omega t + 44^\circ) + \\ + 0,5^\circ \cos(3\Omega t + 11^\circ). \quad (13)$$

Абсолютное значение имеет среднеквадратичную систематическую погрешность не хуже $\pm 2,5\%$. Точность значения амплитуды определяется относительной ошибкой измерений полной температуры и не превосходит $\pm 5\%$. Как видно из кривой фазового хода средней радиотемпературы Луны, измерения, проведенные при различных условиях, указанных в таблице 1, хорошо сопрягаются. В местах перехода от одних условий к другим не наблюдается каких-либо заметных скачков. Это, в частности, свидетельствует о правильности способа исключения дифракционных ошибок, основанного на равенстве $\Delta T_{\text{ср}}$ и ΔT_d .

Заметим, наконец, что полученное значение постоянной составляющей средней по диску радиотемпературы $\bar{T}_{LF} = 210^\circ \text{K} \pm 5^\circ$ не противоречит более высокому значению $\bar{T}_{LF} = 255^\circ \text{K} \pm 2,5^\circ$, найденному в [2], так как последнее является яркостной радиотемпературой центра диска. По теоретическим оценкам яркостная температура центра диска может превышать среднюю по диску на $5-12\%$, т. е. равна около 230°K , что попадает в интервал температур, определенный в [2].

* Величина самой поправки на поглощение и излучение атмосферы для случая № 1 не превосходила 4% .

** Величина α менялась от 1,1 до 1,12.

*** Дифракционная поправка составляла 5.7% .

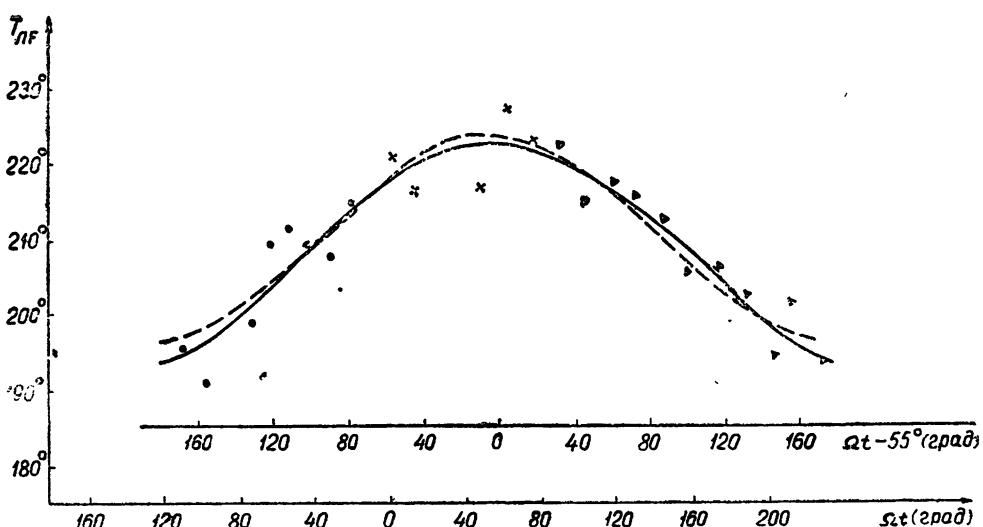


Рис. 2. Фазовая зависимость средней по диску радиотемпературы Луны (сплошная линия), первая гармоника (пунктир):

○ — измерения в условиях № 1 с 20.II по 28.II,
 × — измерения в условиях № 2 с 2.III по 8.III,
 ▽ — измерения в условиях № 4 с 8.III по 20.III.

В заключение выражаем благодарность Н. М. Цейтлину и В. А. Резину за полезное обсуждение работы и критику.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 393 (1961).
2. К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 600 (1961).
3. R. N. Whithurst, J. Kopeland, F. H. Mitchell, Proc. IRF, 45, 1410 (1957).
4. В. С. Троицкий, Сб. трудов симпозиума «Луна» в Пулково, 1961, Труды Комиссии по физике планет, 1961.
5. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 19 (1958).
6. Л. Д. Ландау, Б. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1960.
7. Дж. Р. Менцер, Дифракция и рассеяние радиоволн, изд. Сов. радио, М., 1958.
8. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 4, 19 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
13 мая 1961 г.

THE DEVELOPMENT OF THE METHOD OF FIELD INTENSITY PRECISE MEASUREMENT AND STANDARTIZATION OF LUNAR RADIO EMISSION AT $\lambda = 3,2$ cm

V. D. Krotikov, V. A. Porfirjev, V. S. Troitsky

A method was worked out experimentally and theoretically of the precise measurement of radio emission of discrete sources, the Moon, the Sun and other on centimeter wavelengths by comparison with the known thermal emission of black body, placed at the sufficient elevation angle in the antenna Fraunhofer region. It was shown, that at low elevation angles the diffraction error arises, which may be determined and excluded by using the second thermal standard in the form of hole in the black plane or by means of two thermal emitters forming additional screens system. The conditions of diffraction error absence were found by the theory and experiment. The method provides the measurement accuracy of about $\pm 2\%$. The disk average Moon radio temperature at $\lambda = 3,2$ cm is equal to $T_{MF} = 210^\circ + 13,5^\circ \cos(\Omega t - 55^\circ)$ with accuracy $\pm 2,5\%$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ЭФФЕКТА «УТРАИВАНИЯ» В СЛОЕ F ИОНОСФЕРЫ

Д. К. Воденеева, Н. А. Митяков

Приводятся результаты наблюдений z -компоненты в слое F ионосферы в г. Горьком весной 1961 г. Показано, что причиной возникновения z -компоненты является взаимодействие радиоволн при наклонном падении с последующим обратным рассеянием на ионосферных неоднородностях.

Анизотропия ионосферы обычно приводит к появлению двух ветвей на высотно-частотных характеристиках слоя F , которые соответствуют обыкновенной и необыкновенной волнам. В ряде случаев, однако, наблюдается дополнительная ветвь — так называемая z -компонента (эффект „утраивания“). С увеличением геомагнитной широты вероятность появления z -компоненты возрастает, в средних же широтах интенсивная z -компонента наблюдается очень редко. Экспериментальные исследования z -компоненты довольно малочисленны и неполны. В то же время теоретическое объяснение самого факта появления z -отражений на средних широтах до сих пор встречается с известными трудностями. Эффект „утраивания“ (или взаимодействие радиоволн) наиболее полно рассмотрен в работах Денисова (см., например, [1]). Исходя из результатов этих работ, можно показать, что в применении к слою F интенсивность z -компоненты в обычных условиях на средних широтах не должна превосходить 10^{-7} от интенсивности обыкновенной компоненты. Чтобы объяснить наблюдавшиеся на опыте значительно большие интенсивности, обычно считали, что явление „утраивания“ на средних широтах связано с аномально большими вертикальными градиентами электронной концентрации. Такие градиенты, однако, противоречат нашим сведениям об ионосфере. Скотт [2] высказал предположение, что взаимодействие радиоволн происходит при наклонном падении с последующим обратным рассеянием на ионосферных неоднородностях. При этом направление прихода z -компоненты должно отличаться от вертикали, приближаясь к направлению магнитного поля Земли. Именно такой результат был экспериментально получен для слоя F Эллис [3]. Этот вывод существенно изменил уставновившуюся точку зрения на механизм возникновения z -компоненты. В то время как качественное объяснение эффекта „утраивания“ в средних широтах в настоящее время достаточно ясно, подробный количественный анализ этого явления до сих пор не производился (см. подробнее [4, 5]).

В настоящей статье приводятся результаты экспериментальных исследований эффекта „утраивания“ в слое F ионосферы. Наблюдения проводились в марте 1961 г. в г. Горьком. Результаты наблюдений полностью согласуются с данными Эллиса [3]. Кроме того, измерения интенсивности z -компоненты вместе с наблюдениями за характером отраженных от слоя F сигналов позволили сделать некоторые выводы как о самом механизме взаимодействия, так и о механизме обратного рассеяния z -компоненты. Ниже приводится краткое описание эксперимента, а также обсуждаются полученные результаты.

1. Наблюдения проводились в феврале—марте 1931 г. на ионосферной станции ручного управления, имеющей мощность в импульсе около 50 квт и длительность импульса 130 мксек. Углы прихода определялись путем измерения разности фаз сигналов, приходящих на разнесенные антенны:

$$\varphi_{ij} = (2\pi d_{ij}/\lambda) \sin \Theta_{ij}, \quad (1)$$

где φ_{ij} — разность фаз сигналов в антенах i, j , d_{ij} — расстояние между антеннами, λ — длина волны, Θ_{ij} — угол прихода в плоскости, где расположены антенны. В качестве приемных антенн использовались четыре симметричных горизонтальных диполя длиной по 20 м; расположение антенн показано на рис. 1. На вход фазометра можно было подключать любую пару антенн.

Фазометр состоял из двух приемников с общими гетеродинами и измерительной приставки*. Сигнал с выхода первого приемника создавал на экране осциллографа круговую развертку, сигнал второго приемника использовался для подсвета луча. При этом на экране осциллографа получалась полуокружность, и изменение разности фаз сигналов на входах приемников на угол φ вызывало поворот полуокружности на тот же угол. С помощью стробирующего импульса имелась возможность измерять разность фаз φ любого отраженного от ионосферы сигнала. В каждом измерении разность фаз z -компонент сравнивалась с разностью фаз сбывновенной (или необыкновенной) компоненты. Таким образом определялся угол прихода z -компоненты, отсчитанный от направления прихода обыкновенной (необыкновенной) компоненты.

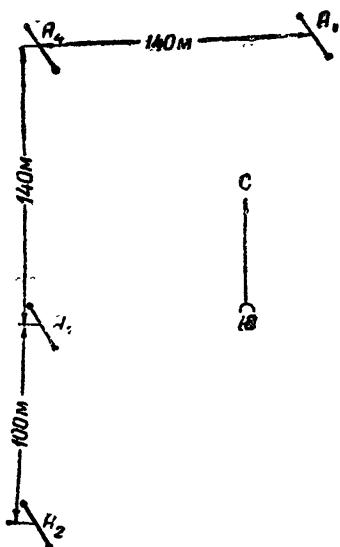


Рис. 1. План расположения приемных антенн.

и A_2A_2 с базой 100 м использовались для контрольных измерений.

Точность отсчета фазы φ на экране осциллографа составляла $\pm 10^\circ$, что соответствует точности измерения угла прихода $\pm 0,5^\circ$ на частоте 0 мгц. Состояние поляризации отраженных сигналов определялось путем измерения разности фаз в двух взаимно-перпендикулярных ромбических антенах. Визуальные наблюдения за общим состоянием ионосферы (измерение амплитуд и действующих высот отраженных сигналов и т. д.) проводились с помощью отметчика типа "А".

Рабочие частоты выбирались в зависимости от условий эксперимента на $0,7 \div 1,5$ мгц ниже критической частоты обыкновенной компоненты слоя F . При наличии z -компоненты наблюдения проводились по следующей программе: I) измерялись углы прихода z -компоненты по отношению к направлению прихода обыкновенной (необыкновенной) компоненты в направлениях север—юг и восток—запад;

* Авторы призывают В. О. Рапопорт и Л. А. Скребковой за помощь в конструировании фазометра.

2) оценивались флюктуации углов прихода как обыкновенной (необыкновенной), так и z -компоненты; 3) измерялись интенсивности z -компоненты по отношению к интенсивности обыкновенной (необыкновенной) компоненты; 4) определялись высоты отраженных сигналов; 5) в некоторых случаях проводились контрольные измерения поляризации обыкновенной, необыкновенной и z -компоненты; 6) измерялась протяженность групп сигналов обыкновенной компоненты при увеличении рабочей частоты на 0,7 мгц.

Всего было отмечено около 50 случаев появления z -отражений. Оказалось, что z -компонента наблюдалась наиболее часто утром (с 7 до 11 час) и вечером (с 16 до 20 час; время московское). На рис. 2 построена экспериментальная зависимость углов прихода z -компоненты от частоты (угол прихода отсчитывается к югу от направления

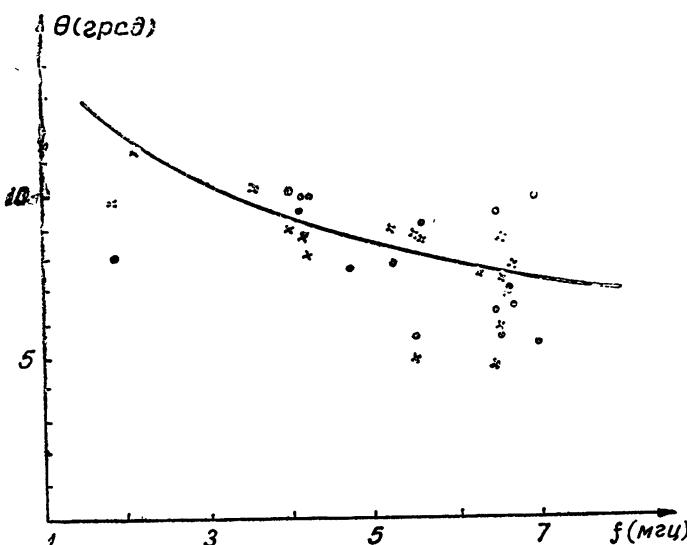


Рис. 2. Зависимость угла прихода z -компоненты от частоты (угол прихода отсчитывается к югу от вертикали):

— теоретическая кривая, ●●● — экспериментальные данные с базой 140 метров, ××× — экспериментальные данные с базой 240 метров.

прихода обыкновенной компоненты). Сплошной линией показана теоретическая зависимость от частоты критического угла взаимодействия Θ_{kp} [4]:

$$\sin \Theta_{kp} = \sin \alpha \left(\frac{\sqrt{u}}{1 + \sqrt{u}} \right)^{1/2}, \quad (2)$$

где α — угол между вертикалью и магнитным полем Земли, $\sqrt{u} = f_n/f$ — отношение гирочастоты к рабочей частоте. Для Г. Горького на высоте $h = 200$ км $f_n = 1,3$ мгц и $\alpha = 19^\circ$.

Из рисунка видно, что экспериментальные точки хорошо согласуются с теоретической кривой. Среднее квадратичное отклонение $\sqrt{(\Delta\theta)^2}$ составляет $1,75^\circ$. По линии восток — запад направление прихода z -компоненты в среднем совпадает с направлением прихода обыкновенной компоненты. Было замечено, что временные флюктуации углов прихода z -компоненты всегда меньше, чем флюктуации обыкновенной

(необыкновенной) компоненты. При этом максимальные флюктуации углов прихода z -компоненты не превышали $\pm 1^\circ$, в то время как флюктуации обыкновенной (необыкновенной) компоненты часто превосходили $\pm 5^\circ$. Поэтому разброс точек на рис. 2, в основном, обусловлен флюктуациями углов прихода обыкновенной (необыкновенной) компоненты. Средняя амплитуда z -компоненты обычно составляла менее $5 \div 10\%$ от средней амплитуды обыкновенной (необыкновенной) компоненты; однако иногда амплитуда возрастала до $30 \div 50\%$.

Характеры флюктуаций амплитуд обыкновенной и z -компоненты резко различны. В то время как средний период флюктуаций обыкновенной компоненты измерялся секундами, период изменений z -компоненты составлял десятки секунд. Действующая высота z -компоненты возрастила с увеличением частоты и обычно при измерениях была больше высоты обыкновенной компоненты на $50 \div 100$ км. Контрольные измерения поляризации z -компоненты показали, что направление вращения эллипса поляризации совпадает с обыкновенной компонентой и противоположно направлению вращения в необыкновенной компоненте. Это соответствует как теоретическим представлениям [5], так и другим экспериментальным данным [6, 7].

В присутствии z -компоненты обыкновенный, необыкновенный и z -сигналы обычно носили характер четких единичных импульсов; иногда обыкновенный сигнал был слегка диффузным. Однако при увеличении частоты на $0,7$ мгц (при этом уровень отражения обыкновенной компоненты на частоте $f + f_n/2 = f + 0,7$ мгц приблизительно соответствовал уровню отражения z -компоненты на частоте f) обыкновенный сигнал всегда имел характер группы протяженностью более 100 км. С другой стороны, наличие групп сигналов обыкновенной компоненты не всегда сопровождалось присутствием z -компонента на более низких частотах. Анализ высотно-частотных характеристик не показал существенных изменений в ветвях характеристик, снятых во время наблюдений. По-видимому, низкая разрешающая способность автоматической станции не позволяет наблюдать z -компоненту с малой интенсивностью. Именно это обстоятельство является, вероятно, причиной крайне редких случаев появления z -компоненты в высотно-частотных характеристиках. К сожалению, отмеченные нами случаи интенсивной z -компоненты не совпадали с временем работы автоматической ионосферной станции.

2. Приведенные выше экспериментальные данные подтверждают измерения Эллиса [3] и свидетельствуют о том, что z -компоненты на средних широтах является результатом взаимодействия радиоволн при наклонном падении с последующим обратным рассеянием. Действительно, взаимодействие может иметь место лишь тогда, когда на уровне $v = \omega_0^2/\omega^2 = 1$ (здесь $\omega_0 = (4\pi e^2 N/m)^{1/2}$ — плазменная частота, ω — рабочая частота) имеет место продольное распространение, т. е. волновой вектор параллелен магнитному полю Земли. Согласно закону Снеллиуса, угол падения Θ_{kp} определяется при этом выражением

$$\sin \Theta_{kp} = n_{v=1} \sin \alpha, \quad (3)$$

где $n_{v=1}$ — показатель преломления при $v = 1$. Отсюда сразу получаем формулу (2) для угла прихода z -компоненты.

В отсутствие неоднородностей необыкновенная волна после взаимодействия и отражения от уровня $v \approx 1 + \sqrt{u}$ уходит в область

$n \rightarrow \infty$, т. е. в плазменную волну*. Для иллюстрации на рис. 3 построена дисперсионная кривая при угле падения $\Theta_0 = \Theta_{kp}$. По оси абсцисс отложена величина $q = n \cos \Theta$, по оси ординат $v = \omega_0^2/\omega^2$ (см. подробнее [4]).

Угловые размеры области взаимодействия, так же как и коэффициент прохождения радиоволн через „окно прозрачности“, нами не вычислялись. Однако можно полагать, что при не слишком большом угле α количественные оценки будут мало отличаться от случая нормального падения, где угловые размеры области взаимодействия при малых углах волнового вектора с магнитным полем H_0 , в основном, характеризуются частотой соударений v на уровне $v = 1$. При этом угловые размеры β области взаимодействия на уровне $v = 1$ определяются из выражения [5]

$$v = \omega_H \sin^2 \beta / 2 \cos \beta. \quad (4)$$

Если учесть рефракцию, то для малых углов β , дифференцируя (3) получим:

$$\cos \Theta_{kp} \Delta \Theta_{kp} = n_{v=1} \beta \cos \alpha. \quad (5)$$

и, следовательно, угловые размеры „окна прозрачности“ по выходе из ионосферы

$$\begin{aligned} \Delta \Theta_{kp} &= \\ &= \frac{\cos \alpha}{\cos \Theta_{kp}} \left(\frac{2v \sqrt{u}}{\omega_H (1 + \sqrt{u})} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

В слое F $v \sim 10^4$ сек $^{-1}$, $\omega_H = 8,15 \cdot 10^6$ сек $^{-1}$ и на частоте $f = 6$ мгц $\Delta \Theta_{kp} \approx 1^\circ$, что соответствует экспериментальным результатам.

Тот факт, что интенсивность z -компоненты бывает иногда сравнима с интенсивностью обыкновенной компоненты, позволяет надеяться, что коэффициент прохождения радиоволн через „окно прозрачности“ $D \sim 1$. По-видимому, интенсивность z -компоненты определяется, в основном, не коэффициентом D , а условиями обратного рассеяния в области отражения. Механизм обратного рассеяния требует

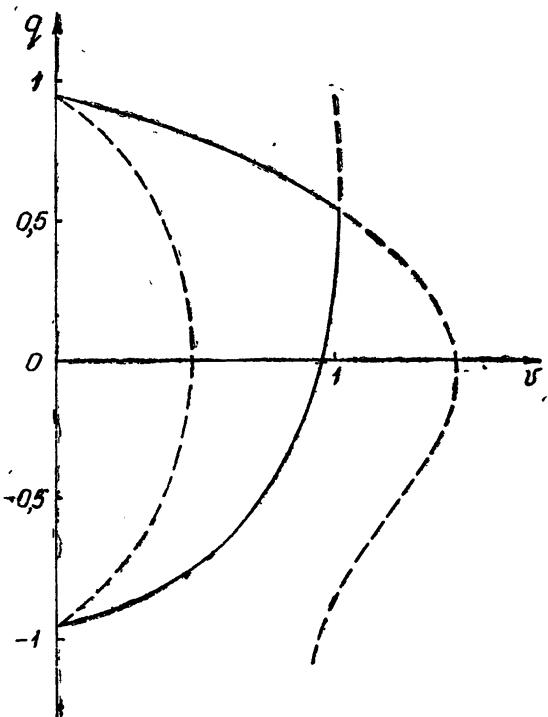


Рис. 3. Дисперсионная кривая для критического угла падения ($\sqrt{u} = 1/2$, $\alpha = 20^\circ$, $\theta = \Theta_{kp} = 15^\circ$): — обыкновенная компонента, - - необыкновенная компонента.

* Полное затухание плазменной волны на достаточно малом расстоянии должно приводить, в принципе, к нагреванию некоторой локальной области плазмы вблизи от уровня v_∞ , т. е. к нелинейным явлениям типа люксембург-горьковского эффекта. Кроме того, как указал Н. Г. Денисов, тепловое излучение плазмы на уровне v_∞ может свободно выходить из ионосферы через „окно прозрачности“, что в принципе дает возможность определить температуру ионосферы.

особого рассмотрения; ниже мы ограничимся лишь некоторыми замечаниями.

Из эксперимента следует, что наличие z -компоненты всегда сопровождается группами сигналов обыкновенной компоненты, которые отражаются от того же уровня, где рассеивается z -компоненты. При этом группа обыкновенных сигналов состоит, как правило, из нескольких четких импульсов, амплитуды которых сравнимы с амплитудой обычных отражений. Можно полагать поэтому, что каждый импульс является результатом почти зеркального отражения от края неоднородности, расположенной в стороне от зенита. Это подтверждается измерениями направлений углов прихода: импульсы имеют различные углы прихода, медленно изменяющиеся во времени.

В отсутствие неоднородностей радиоволна, посланная под углом Θ_0 , отражается от уровня, где показатель преломления имеет минимальную величину, т. е. $n^2 = \sin^2 \Theta_0$. В квазипродольном случае показатель преломления обыкновенной компоненты

$$n^2 = 1 - \frac{v}{1 + \sqrt{u}} = 1 - \frac{4\pi e N}{m \omega (\omega + \omega_H)}.$$

Пусть $N = N_0 - \Delta N$, где N_0 — значение электронной концентрации при $n = 0$; тогда

$$\sin^2 \Theta_0 = \Delta N/N. \quad (7)$$

Неоднородности электронной концентрации с относительной дисперсией $(\delta N/N)^2 \ll 1$ будут приводить к существенным искривлениям луча как раз в области минимальных значений показателя преломления, где малые возмущения N приводят к относительно большим возмущениям показателя преломления n . Условием сильных возмущений является, очевидно, неравенство

$$\sin^2 \Theta_0 \leq \sqrt{(\delta N/N)^2}. \quad (8)$$

Для обратного отражения необходимо, кроме того, чтобы градиенты электронной концентрации в неоднородностях были сравнимы с регулярными вертикальными градиентами. Поскольку отражение каждого импульса группы носит зеркальный характер, можно предположить, что размеры неоднородностей порядка или больше размеров первой зоны Френеля, т. е. $\xi \geq \sqrt{\lambda R}$. Для $\lambda \sim 50 \text{ м}$, $R \sim 300 \text{ км}$ имеем $\xi \geq 4 \text{ км}$.

Существенно, что в данном элементе телесного угла $\Delta\Omega$, направленном под углом Θ_0 к зениту, случай обратного отражения может реализоваться лишь при специфических условиях, которые могут встречаться довольно редко. Однако в силу того, что диаграмма направленности антенны освещает большое количество неоднородностей, такие условия могут иметь место для нескольких неоднородностей одновременно. При этом отраженный сигнал будет иметь вид группы, состоящей из ряда импульсов.

В случае z -компоненты „окно прозрачности“ с размерами $1 \div 2^\circ$ расположено под углом $\Theta_0 \approx 8 \div 10^\circ$ к югу от зенита. Чтобы получить достаточно интенсивное обратное рассеяние под углом Θ , необходимо, чтобы относительные флюктуации электронной концентрации превосходили $\sin^2 \Theta_0$, т. е. $\sqrt{(\delta N/N)^2} \geq 3 \cdot 10^{-2}$. Такие неоднородности вызывают, с другой стороны, появление группы обыкновенных сигналов на частоте $f + f_n/2$. Естественно, что случай полного возврата энергии

в данный телесный угол должен быть исключительно редким, что и наблюдается на опыте.

Необходимо отметить, что наблюдения z -компоненты могут привести существенную пользу при исследовании ионосферных неоднородностей. Малые угловые размеры „окна прозрачности“, по существу, эквивалентны узкой диаграмме направленности антенной системы. По-видимому, именно этим можно объяснить тот факт, что период флюктуаций амплитуды z -компоненты существенно больше, чем у обычновенной компоненты.

В заключение авторы пользуются случаем поблагодарить В. Л. Гинзбурга и Г. Г. Гетманцева за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Денисов, ЖЭТФ, 29, 380 (1955).
2. G. C. W. Scott, J. Geophys. Res., 55, 64 (1950).
3. G. R. Ellis, J. Atm. Terr. Phys., 3, 263 (1953); 8, 43 (1956).
4. Н. А. Митяков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 159 (1959).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
6. B. Landmark, J. Atm. Terr. Phys., 2, 251 (1952).
7. R. Sata naga u ana, J. Atm. Terr. Phys., 13, 201 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
8 июня 1961 г.

EXPERIMENTAL RESULTS OF THE INVESTIGATION OF „TRIPPLE SPLITTING“ IN THE IONOSPHERIC F LAYER

D. K. Vodeneeva, N. A. Mityakov

The results are given of z -component observations in ionospheric F layer during the spring 1961. It was shown, that the cause of z -component appearance is the interaction of oblique incident radio waves and their following back scattering by the ionospheric irregularities.

ОБ ОЦЕНКЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОТРАЖЕНИЯ РАДИОВОЛН ОТ СПОРАДИЧЕСКОГО СЛОЯ E

С. С. Чавдаров, Ю. К. Часовитин

Делается попытка выявить некоторые закономерности спорадического слоя E по данным нескольких ионосферных станций (Ростов-на-Дону, Москва, Юлиусру/Рюген, Вакканай, Мурманск), причем вместо общепринятой характеристики, вероятности появления этого слоя, использован параметр, характеризующий устойчивость отражения радиоволн от спорадического слоя E (длительность непрерывных отражений τ). Рассмотрено распределение относительного числа случаев непрерывных отражений от слоя E_s по длительности и показано, что для среднеширотных станций (Ростов, Москва, Юлиусру/Рюген, Вакканай) в летние месяцы наиболее устойчивые непрерывные отражения наблюдаются, как правило, от слоя E , типов f и c ; в зимние месяцы длительность непрерывных отражений от различных типов слоя E_s примерно одинакова. Отмечается, что для высокоширотной станции Мурманск характерна меньшая длительность непрерывных отражений, что связано со специфическими особенностями ионосферы в высоких широтах. Вводится понятие вероятности появления слоя E_s с длительностью непрерывных отражений $\tau > \tau_0$.

Изучению особенностей спорадического слоя E ионосферы, играющего большую роль в распространении радиоволн, посвящено значительное число работ, выполненных в последние годы (см. [1-4] и др.). Обычно спорадический слой E характеризуется вероятностью появления $p(E_s)$, которая используется и для определения возможности связи через этот слой. Однако $p(E_s)$ не дает представления об устойчивости связи, которая зависит, помимо прочих условий, от длительности существования непрерывных отражений от спорадического слоя E . При малых длительностях непрерывных отражений связь через E_s становится неустойчивой, что может приводить к потере части информации. Поэтому представляется целесообразным введение дополнительного параметра, который характеризовал бы устойчивость отражений от этого слоя. За такой параметр может быть принято время τ существования непрерывных отражений от слоя E_s , которое будем в дальнейшем называть длительностью непрерывных отражений от спорадического слоя E . Этот параметр может быть получен наиболее точно при непрерывной регистрации отражений. При наблюдениях через некоторые интервалы времени за длительность непрерывных отражений с достаточной точностью можно принять интервал, в течение которого при каждом наблюдении было зарегистрировано отражение.

При вертикальном зондировании ионосферы сеансы наблюдений обычно проводятся четыре раза в час, что позволяет определять длительность непрерывных отражений с точностью до 15 минут. Проведенные пятиминутные и непрерывные контрольные измерения показали, что сделанное выше предположение о возможности определения τ из дискретных наблюдений достаточно хорошо оправдывается.

В настоящей работе сделана попытка провести сравнительную оценку устойчивости отражения радиоволн от спорадического слоя E по материалам нескольких станций. Были использованы результаты вертикального зондирования ионосферы за 1958 г. по станциям Ростов-

на-Дону (апрель—декабрь), Москва (март—декабрь), Мурманск (январь—сентябрь), Юлиусру/Рюген—ГДР (январь—август), Вакканай—Япония (январь—декабрь).

Эти станции были выбраны таким образом, что четыре из них (Юлиусру/Рюген, Москва, Ростов, Вакканай) образуют среднеширотную группу с большой разницей по долготе, а одна (Мурманск) расположена в высоких широтах. При обработке в качестве исходного материала использовались f -графики ионосферных данных, которые для станций Москва, Мурманск, Юлиусру/Рюген и Вакканай были получены из Мирового центра данных МГГ (Москва).

По классификации МГГ, принятой специальным комитетом по всемирному зондированию ионосферы, введено разделение спорадического слоя E на 9 типов, которые различаются по их виду на ионограммах [2]. Наиболее часто встречающимися типами слоя E_s для рассматриваемых станций являются типы f , l , c , h , r . Для этих типов спорадического слоя E было подсчитано распределение относительного числа случаев непрерывных отражений по длительности. При этом подсчете каждое появление непрерывных отражений независимо от длительности существования считалось за один случай. Относительное число случаев определялось как отношение числа появлений слоя E_s данной длительности к общему количеству случаев непрерывных отражений от спорадического слоя E данного типа за рассматриваемый месяц. Для каждого месяца были построены интегральные распределения относительного числа случаев непрерывных отражений в зависимости от τ .

Подробный анализ полученных графиков позволил выявить характер сезонных изменений величины τ для различных типов слоя E_s . Наиболее наглядно можно представить эти изменения, если воспользоваться медианными значениями длительности непрерывных отражений — $\tau_{\text{мед}}$. Эта величина может в известной степени характеризовать устойчивость отражения радиоволн от спорадического слоя E , так как по определению медиана половина всех случаев непрерывных отражений имеет длительность больше $\tau_{\text{мед}}$.

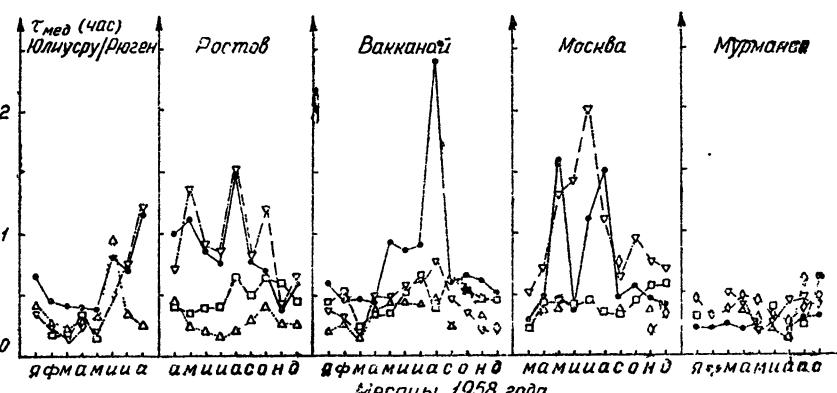


Рис. 1. Медианные значения длительности непрерывных отражений от слоя E_s :

- слой E_s типа f ,
- слой E_s типа l ,
- ▽— слой E_s типа c ,
- △...△... слой E_s типа h ,
- ◇...◇... слой E_s типа r .

На рис. 1 представлены медианные значения длительности непрерывных отражений, вычисленные по соответствующим интегральным распределениям. Из него видно, что для всех среднеширотных станций

(Москва, Ростов, Юлиусру/Рюген, Вакканай) медианные значения τ для слоя E_s типов f и c возрастают в летние месяцы (исключая июнь для Москвы), но это возрастание различно для разных станций. Так, для типа c имеем следующие наибольшие значения $\tau_{\text{мед}}$: для Москвы—2 часа (июль), для Ростова—1 час 30 мин (август), для станции Юлиусру/Рюген—1 час 15 мин (август), для станции Вакканай—45 мин. (август). Для типа f наибольшие значения $\tau_{\text{мед}}$ следующие: для станции Вакканай—2 час 30 мин (август), для Москвы—1 час 30 мин (май), для Ростова—1 час 30 мин (август), для станции Юлиусру/Рюген—1 час 15 мин (август). Слой E_s типа l не обнаруживает явно выраженных сезонных изменений длительности непрерывных отражений. Для него $\tau_{\text{мед}}$ колеблется около 30 мин для Москвы, Ростова и станции Вакканай и 15 мин для станции Юлиусру/Рюген. Поведение слоя E_s типа h имеет некоторые особенности для различных станций: для Ростова значения $\tau_{\text{мед}}$ колеблются около 15 мин, для станции Вакканай имеется небольшое увеличение $\tau_{\text{мед}}$ в летние месяцы (до 30 мин), а для станции Юлиусру/Рюген наблюдается резкое возрастание $\tau_{\text{мед}}$ в июне (до 60 мин).

Как видно из рис. 1, медианные значения длительности непрерывных отражений для высоколатитудной станции Мурманск меньше, чем для среднеширотных станций. Для всех типов спорадического слоя E они лежат примерно в пределах 15–30 мин в течение всего года.

Максимальная длительность непрерывных отражений $\tau_{\text{макс}}$ для различных типов E_s и разных станций колеблется в довольно широких пределах. Так, для типа c в летние месяцы устойчивое отражение радиоволн может наблюдаться в течение многих часов; в отдельных случаях $\tau_{\text{макс}}$ достигает величины порядка 15–19 час для Москвы, 13–15 час для станции Юлиусру/Рюген, 7–9 час для Ростова и станции Вакканай. Для типа f величина $\tau_{\text{макс}}$ может достигать 7 час для Ростова, Москвы и станции Юлиусру/Рюген в летние месяцы и 11 час для станции Вакканай в сентябре–октябре. Для E_s типа l на станциях Москва, Ростов, Вакканай в отдельных случаях, главным образом в летнее время, наблюдаются $\tau_{\text{макс}}$ порядка 7–9 час, а для станции Юлиусру/Рюген $\tau_{\text{макс}}$ для этого же типа E_s , как правило, не превышает 2–3 час. Для E_s типа h в Москве и Ростове $\tau_{\text{макс}}$ в очень редких случаях достигает 2–3 час, в то же время на станциях Юлиусру/Рюген и Вакканай в летние месяцы $\tau_{\text{макс}}$ для этого типа E_s может достигать величины порядка 5 час.

Для Мурманска максимальная длительность непрерывных отражений для типов f и h не превышает 2–3 час, для типов l и c в редких случаях наблюдается $\tau_{\text{макс}}$ порядка 5 час. Для типа r величина $\tau_{\text{макс}}$ может достигать 9 час.

Подводя некоторый итог выше изложенному, можно отметить, что для рассматриваемых среднеширотных станций в летние месяцы наиболее устойчивые непрерывные отражения наблюдаются, как правило, от слоя E_s типов f и c ; в зимние месяцы длительность непрерывных отражений от различных типов спорадического слоя E примерно одинакова. Для высоколатитудной станции Мурманск отражения от слоя E_s менее устойчивы, что связано со специфическими особенностями ионосферы в высоких широтах.

До сих пор мы рассматривали распределение числа случаев непрерывных отражений от слоя E_s по длительности, и все приведенные выше рассуждения не были связаны с общепринятой характеристикой спорадического слоя—вероятностью его появления. Эта связь устанавливается введением понятия вероятности появления слоя E_s с дли-

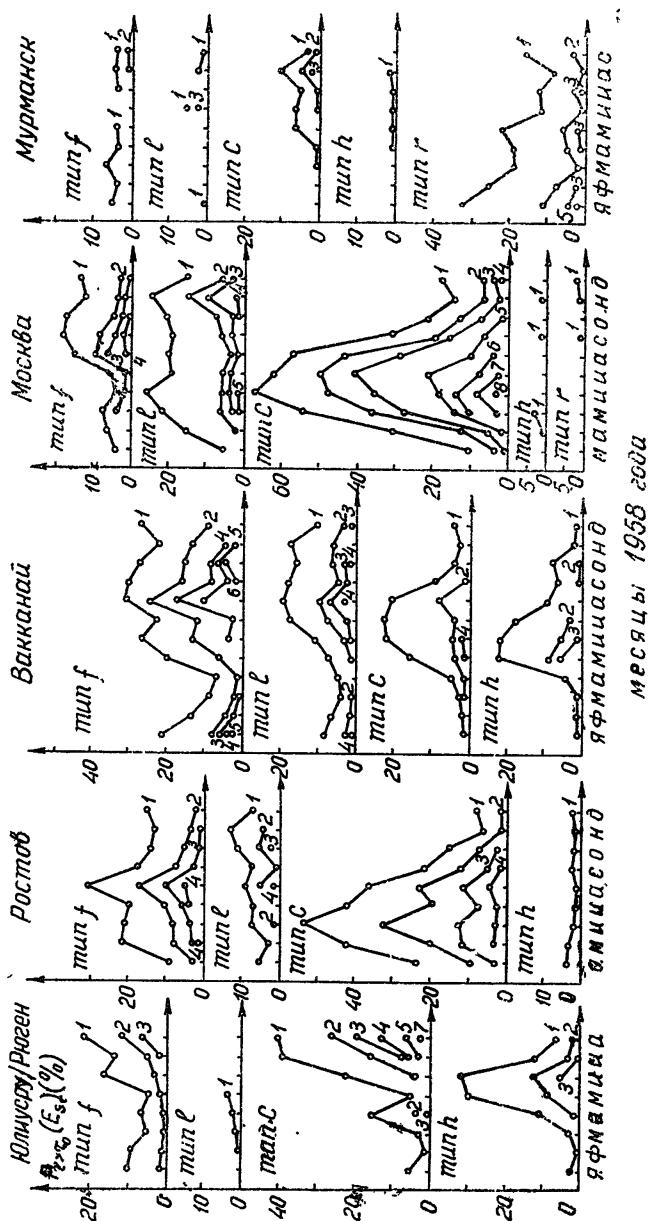


Рис. 2. Вероятность появления слоя E_s с длительностью непрерывных отражений $\tau > \tau_0$:

1— $\tau_0 = 0$; 2— $\tau_0 = 3$ час; 3— $\tau_0 = 5$ час; 4— $\tau_0 = 7$ час; 5— $\tau_0 = 9$ час; 6— $\tau_0 = 11$ час; 7— $\tau_0 = 15$ час; 8— $\tau_0 = 19$ час.

тельностью непрерывных отражений $\tau > \tau_0$, которая определяется как $P_{\tau > \tau_0}(E_s) = \sum N_i \tau_i / T$. Здесь N_i —число случаев непрерывных отражений от E_s с длительностью $\tau_i > \tau_0$, а T —общее время, в течение которого проводились наблюдения. Очевидно, что при $\tau_0 = 0$ будут учтены все сеансы, во время которых наблюдался слой E_s , и в этом случае $P_{\tau > 0}(E_s)$ будет представлять обычную вероятность появления E_s , вычисленную только не для определенного часа суток, а для всего месяца в целом. Если же $\tau_0 \neq 0$, то при вычислении $P_{\tau > \tau_0}(E_s)$ учитываются только случаи существования отражений от слоя E_s с $\tau > \tau_0$.

Рассчитанная таким образом вероятность $P_{\tau > \tau_0}(E_s)$ для различных типов слоя E_s за каждый месяц приведена на рис. 2. Полученные семейства кривых дают возможность определить, какой вероятностью обладают наблюдения, имеющие длительность τ . Это, в свою очередь, дает возможность оценить, как часто в данном месяце появляются случаи непрерывных отражений от слоя E_s различной длительности. Кроме этого, графики рис. 2 наглядно иллюстрируют данные о максимальной длительности непрерывных отражений от спорадического слоя E , приведенные выше.

Нам кажется, что приведенный в настоящей работе метод обработки результатов наблюдений при дальнейшем развитии и привлечении более обширного экспериментального материала может оказаться полезным для оценки условий радиосвязи, а также для выяснения некоторых вопросов, связанных с природой спорадического слоя E .

Считаем своим долгом выразить признательность Г. А. Вакуленко за помощь, оказанную при обработке материалов наблюдений.

Л И Т Е РА Т У РА

1. Н. П. Бенькова, Труды Томского ун-та, № 2, 79 (1957).
2. J. A. Thomas, E. K. Smith, J. Atm. Terr. Phys., 13, 295 (1959).
3. С. С. Чавдаров, сб. Исследования ионосферы, № 5, изд. АН СССР, М., 1960, стр. 64.
4. Т. С. Керблай, сб. Исследования ионосферы, № 5, изд. АН СССР, М., 1960, стр. 50.

Ростовский-на-Дону государственный университет

Поступила в редакцию
8 марта 1961 г.

ON THE STABILITY ESTIMATION OF RADIO WAVES REFLECTION FROM THE SPORADIC LAYER E_s

S. S. Tchavdarov, Yu. K. Tchasovitin

An attempt is made to reveal some regularities of the sporadic layer E according to the data of ionospheric stations (Rostov-Don, Moscow, Yuliusru/Ryugen, Vakanay, Murmansk). Instead of well known appearance probability of the layer the another parameter was used which characterizes the reflection stability of radio waves from the sporadic layer E (the time of continuous reflection τ). The time-duration distribution of relative number of continuous reflections from the E_s layer has been examined. It was shown that at the mid-latitude stations (Rostov, Moscow, Yuliusru/Ryugen, Vakanay) in summer months the most stable continuous reflections from the E_s layer observed are as a rule the f and c types; in winter months the duration of continuous reflections of different types from the E_s layer is approximately equal. It is noticed, that at the Murmansk station the lesser time of continuous reflections is typical, that is connected with specific conditions of ionosphere at high latitudes. The concept of appearance probability of the E_s layer characterized by continuous reflection time $\tau > \tau_0$ is introduced.

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АТМОСФЕРНЫХ ПОМЕХ В ДИАПАЗОНЕ от 2 до 25 гц

C. M. Горский, B. A. Кротов

Приводятся результаты анализа флюктуаций уровня атмосферных помех и спектральная плотность вертикальной магнитной составляющей электромагнитного поля в диапазоне 2–25 гц.

1. В ряде работ, выполненных в последнее время, рассматриваются некоторые характеристики атмосферных помех инфракраского диапазона частот ($f < 1 \text{ кгц}$). Так, в работах [1–3] приводятся данные об интенсивности атмосферных помех, создаваемых медленной частью атмосфериков (медленный хвост), и ее изменениях в течение суток. В статье [4] на основе анализа молниевых разрядов и в работе [5] делается вывод о плавном спаде спектральной плотности атмосферных помех с уменьшением частоты в диапазоне ниже 1 кгц.

Авторы работ [6, 7], посвященных исследованию микропульсаций магнитного поля Земли, отмечают, что, хотя наибольшая интенсивность пульсаций типа P_c (порядка нескольких γ^*) лежит в диапазоне частот $0.1 \div 0.02 \text{ гц}$, тем не менее, они могут иметь заметную интенсивность в диапазоне от 1 до 10 гц.

На основании приведенных данных можно сделать вывод, что в диапазоне от 2 до 25 гц спектр атмосферных помех должен содержать составляющие, соответствующие как атмосферикам, так и микропульсациям магнитного поля.

2. Цель настоящей работы состояла в исследовании спектральных закономерностей и измерении интенсивности вертикальной магнитной составляющей электромагнитного поля атмосферных помех в диапазоне от 2 гц до 25 гц. Измерения проводились на Черноморском побережье Крыма.

Прием атмосферных помех производился на горизонтальную рамочную антенну. Антenna состояла из трех витков с заземленной средней точкой и имела площадь $5 \cdot 10^4 \text{ м}^2$. Блок-схема усиления приведена на рис. 1. Усилитель имел симметричный вход и несимметричный выход. Максимальный коэффициент усиления усилителя, равный $2.5 \cdot 10^5$, мог быть уменьшен скачком в 2,5 и 10 раз. Полоса частот, пропускаемых усилителем, лежала в пределах от 2 до 25 гц. Сигнал усилителя поступал на магнитофон для записи инфразвуковых частот (полоса частот от 2 до 200 гц) и одновременно для визуального наблюдения на осциллограф. Минимальная обнаружимая величина сигнала составляла $2 \cdot 10^{-5} \gamma$.

Проведенные измерения показывают, что средний уровень атмосферных помех в течение суток испытывает незначительные флюктуации. Осциллограмма атмосферных помех приведена на рис. 2. На рис. 3 приведена функция распределения амплитуд: По оси ординат отложена плотность вероятности в условных единицах, а по оси абсцисс — вели-

* $\gamma = 10^{-5} \text{ эрстед}$.

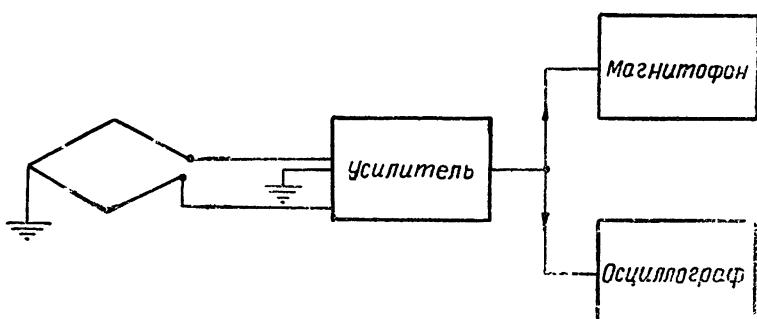


Рис. 1.



Рис. 2.

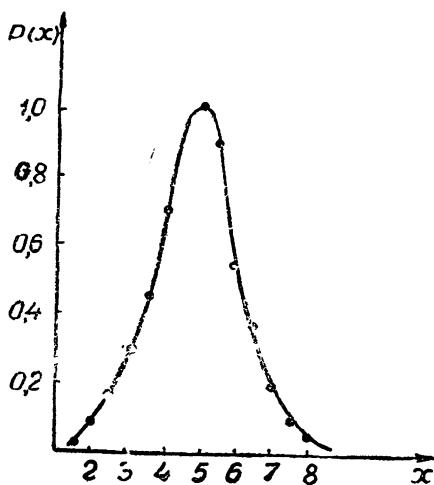


Рис. 3.

чина амплитуды в единицах 10^{-4} г. Среднее квадратичное значение пульсаций магнитной составляющей, полученное усреднением данных наблюдений за октябрь, составляет $5 \cdot 10^{-4}$ г.

Спектральный анализ записей атмосферных помех проводился на оптическом спектроанализаторе [8] с разрешающей способностью 0,1 гц. На рис. 4 приведена спектограмма атмосферных помех, полученная по данным наблюдений в дневное время за одну минуту. Спектр имеет неровный характер, и его интенсивность плавно повышается к нижней части диапазона. Исключение составляет резкая линия на частоте 9 гц.

По аналогии с работой [9] эту линию можно объяснить возбуждением шарового эндовибратора „Земля—ионосфера“ молниевыми разрядами на основной частоте, хорошо совпадающей с наблюдаваемой. Нужно

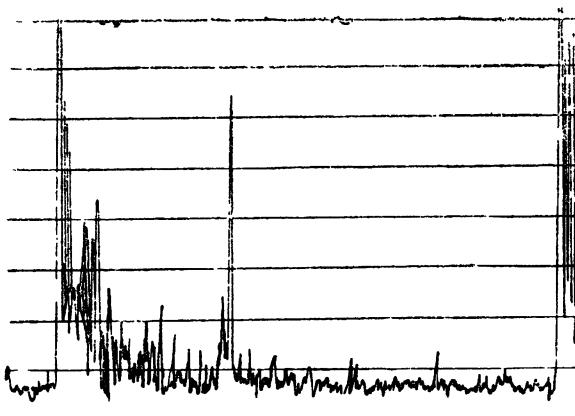


Рис. 4.

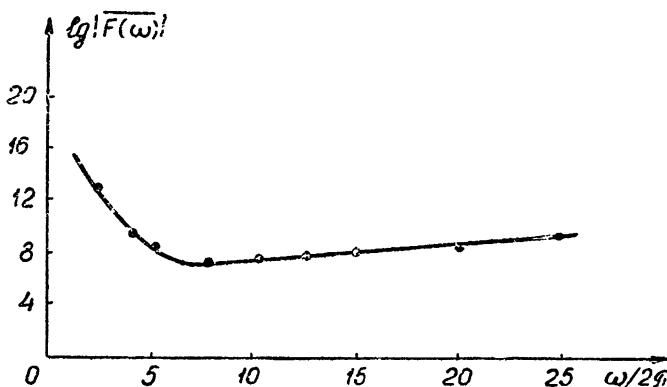


Рис. 5.

отметить, что линия не обнаруживалась на спектрограммах шумов, измеренных после захода Солнца.

На рис. 5 приведен график спектральной плотности атмосферных шумов, полученный усреднением отдельных спектрограмм за 25 сеансов наблюдений, проведенных в течение сентября—октября. На графике по оси абсцисс отложена частота, а по оси ординат величина $lg |\bar{F}(\omega)|$, где $|\bar{F}(\omega)|$ — средний модуль спектральной плотности ЭДС атмосферных помех. На графике видно, что $|\bar{F}(\omega)|$ в рассматриваемом диапазоне частот имеет небольшой минимум. По-видимому, он представляет собой некоторую границу между спектром шумов атмосфериков и спектром микропульсаций магнитного поля Земли.

В заключение авторы пользуются случаем поблагодарить В. А. Зверева и М. М. Кобрина за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, изд. АН СССР, М., 1960.
2. F. Nerburg, J. Atm. Terr. Phys., **10**, 266 (1957).
3. E. F. Pierce, J. Res. Nat. B. St., **64-D**, 4 (1960).
4. A. D. Watt, J. Res. Nat. B. St., **64-9**, 4 (1960).

5. Б. С. Эненштейн, А. Е. Аронов, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 62 (1957).
6. W. H. Campbell, J. Res. Nat. B. St., 64-D, 4 (1960).
7. Obayashi Tatsuzo, Rept. Jonos. Res. Japan, 12, 3 (1958).
8. В. А. Зверев, Е. Ф. Орлов, Приборы и техника эксперимента (в печати).
9. W. O. Schumann, H. König, Naturwiss., 41, 183 (1954).

Горьковский научно-исследовательский радиофизический
институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 апреля 1961 г.

SOME CHARACTERISTICS OF ATMOSPHERIC NOISE IN THE BAND OF 2-25 c/s

S. M. Gorsky, V. A. Krotov

The analysis results are given of fluctuations of the atmospheric noise level and the spectral density of vertical magnetic component of electromagnetic field in the band of 2-25 c/s.

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ БЫСТРОПЕРЕМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В ИОНИЗИРОВАННОМ ГАЗЕ

B. P. Силин

Получено кинетическое уравнение для релятивистских заряженных частиц, пригодное как в случае характерных времен процессов, малых или сравнимых с временами столкновений, так и в случае характерных размеров неоднородностей, малых по сравнению с существенными параметрами столкновений.

Кинетическое уравнение для нерелятивистских частиц, описывающее процессы, заметно меняющиеся за время столкновения, было получено в работе [1]. В настоящей статье будет найдено соответствующее кинетическое уравнение для случая релятивистских частиц.

Обычно релятивистское кинетическое уравнение для ионизированного газа записывается в виде:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}_\alpha) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \mathbf{B}(\mathbf{r}_\alpha)] \right\} = J_\alpha^0,$$

где \mathbf{E} и \mathbf{B} представляют собой самосогласованное поле, а интеграл столкновений, например, согласно работам [2, 3], имеет вид:

$$J_\alpha^0 = \frac{\partial}{\partial p_\alpha^i} \sum_\beta (N_\beta / V) \int d\mathbf{p}_\beta I_{\alpha\beta}^{ij}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta) \left[\frac{\partial}{\partial p_\alpha^j} - \frac{\partial}{\partial p_\beta^j} \right] f_\alpha f_\beta,$$

где

$$I_{\alpha\beta}^{ij}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta) = (4\pi e_\alpha e_\beta)^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\beta}{c^2} \right)^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{\pi k_i k_j \delta(k\mathbf{v}_\alpha - k\mathbf{v}_\beta)}{[k^2 - (k\mathbf{v}_\alpha / c)^2]^2}.$$

В последнем интеграле область интегрирования ограничивается значениями $p_{\max}^{-1} \leq k \leq p_{\min}^{-1}$. При получении такого кинетического уравнения принимается, что функции распределения слабо меняются за характерное время столкновений и на характерных прицельных параметрах. Однако в релятивистском случае, например, при распространении электромагнитной волны с периодом, существенно меньшим характерного времени столкновения, одновременно возникает пространственная неоднородность распределения с размером, существенно меньшим характерного прицельного параметра столкновений. В таких условиях следует использовать полученное ниже кинетическое уравнение.

Заметим, что релятивистский интеграл столкновений для распределений, меняющихся медленно во времени и резко меняющихся в пространстве, был получен в работе Климонтовича [2]. Для плавных распределений соответствующий интеграл столкновений получен Беляевым и Будкером [3] (см. также [2]). В последнем случае релятивистский интеграл столкновений содержит большой логарифм, возникающий от интегрирования по прицельным параметрам $L = \ln(\rho_{\max}/\rho_{\min})$. При этом ρ_{\max} является дебаевским радиусом экранирования (см. также [4]). Поэтому отличие получаемого ниже интеграла столкновений

от обычного [3] будет проявляться в условиях, когда, с одной стороны, характерный размер неоднородности окажется небольшим в сравнении с дебаевским радиусом, а, с другой стороны, когда характерное время изменения процесса окажется меньше ρ_{\max}/v — времени столкновения с прицельным параметром ρ_{\max} .

Описывая систему заряженных частиц, строго говоря, необходимо рассматривать не только частицы, но и электромагнитное поле. Однако для получения кинетического уравнения, учитывающего столкновение частиц газа со слабым взаимодействием, можно поступить более просто. Именно, целесообразно выделить самосогласованное поле, которое, как обычно, описывается уравнениями Максвелла с плотностью тока и заряда, определяющимися функциями распределения частиц. С другой стороны, для нахождения силовой корреляции, определяющей столкновения, используем выражение для силы, действующей на частицу α со стороны частицы β , движущейся равномерно:

$$F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta; \mathbf{v}_\alpha; \mathbf{v}_\beta) = 4\pi e_\alpha e_\beta i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{k}, \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)}{k^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v}_\beta/c)^2} \times \\ \times \left\{ -\mathbf{k} \left(1 - \frac{\mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\beta}{c^2} \right) + \mathbf{v}_\beta \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{v}_\beta - \mathbf{v}_\alpha)}{c^2} \right\}. \quad (1)$$

Тогда для функции распределения f_α и парной коррелятивной функции $g_{\alpha\beta}$ могут быть написаны (ср. [5]) следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + e_\alpha \left\{ E(\mathbf{r}_\alpha) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \mathbf{B}(\mathbf{r}_\alpha)] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = \\ = - \sum_\beta \int d\mathbf{p}_\beta d\mathbf{r}_\beta \frac{N_\beta}{V} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} F_{\alpha\beta}; \\ \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \mathbf{v}_\beta \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{r}_\beta} + e_\alpha \left\{ E(\mathbf{r}_\alpha) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \mathbf{B}(\mathbf{r}_\alpha)] \right\} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} + \\ + e_\beta \left\{ E(\mathbf{r}_\beta) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\beta \mathbf{B}(\mathbf{r}_\beta)] \right\} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{p}_\beta} + F_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} + F_{\beta\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{p}_\beta} + \\ + F_{\alpha\beta} f_\beta \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} + F_{\beta\alpha} f_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{p}_\beta} + \sum_\gamma \frac{N_\gamma}{V} \int d\mathbf{p}_\gamma d\mathbf{r}_\gamma \times \\ \times \left\{ F_{\alpha\gamma} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} g_{\beta\gamma} + F_{\beta\gamma} \frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{p}_\beta} g_{\alpha\gamma} + F_{\alpha\gamma} \frac{\partial g_{\alpha\beta\gamma}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} + F_{\beta\gamma} \frac{\partial g_{\alpha\beta\gamma}}{\partial \mathbf{p}_\beta} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для получения кинетического уравнения необходимо найти выражение бинарной коррелятивной функции $g_{\alpha\beta}$, определяемой уравнением (3). Последнее в предположении слабости взаимодействия может быть существенно упрощено. Во-первых, из сравнения различных членов этого уравнения ясно, что бинарная коррелятивная функция будет порядка U/T по сравнению с $f_\alpha f_\beta$, где U/T — отношение энергии взаимодействия к кинетической энергии. Поэтому в уравнении (3) можно пренебречь членами

$$F_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} + F_{\beta\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{p}_\beta}.$$

Во-вторых, написав соответствующее уравнение для тройной корре-

лятивной функции, легко видеть, что она также будет порядка U/T по сравнению с $f_\alpha g_{\beta\gamma}$. Это позволяет пренебречь в уравнении (3) членами

$$\sum_\gamma \frac{N_\gamma}{V} \int d\mathbf{p}_\gamma dr_\gamma \left\{ F_{\alpha,\gamma} \frac{\partial g_{\alpha\beta\gamma}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} + F_{\beta,\gamma} \frac{\partial g_{\alpha\beta\gamma}}{\partial \mathbf{p}_\beta} \right\}$$

по сравнению с аналогичными слагаемыми, содержащими бинарную коррелятивную функцию. В третьих, наше предположение о возможности описания рассеяния с помощью силы (1) может иметь место лишь в условиях, когда поля \mathbf{E} и \mathbf{B} настолько малы, что не влияют на траекторию частицы во время столкновения. Это предположение соответствует возможности пренебречь в уравнении (3) полями \mathbf{E} и \mathbf{B} . В результате для коррелятивной функции можем записать следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \mathbf{v}_\beta \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{r}_\beta} + F_{\alpha,\beta} f_\beta \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} + F_{\beta,\alpha} f_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{p}_\beta} = \\ = - \sum_\gamma \frac{N_\gamma}{V} \int d\mathbf{p}_\gamma dr_\gamma \left\{ F_{\alpha,\gamma} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} g_{\beta\gamma} + F_{\beta,\gamma} \frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{p}_\beta} g_{\alpha\gamma} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Правая часть уравнения (4) существенна для экранировки кулоновского взаимодействия в случае медленно меняющихся процессов. Если же распределение частиц существенно меняется за время, малое в сравнении с характерным временем, соответствующим экранировке кулоновского взаимодействия, то правую часть уравнения (4) можно не учитывать. В этом случае решение уравнения (4) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta, \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, t) = g_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{v}_\alpha(t-t_0), \mathbf{r}_\beta - \mathbf{v}_\beta(t-t_0), \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, t_0) - \\ - \int_{t_0}^t dt' \{ f_\alpha(\mathbf{r}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha(t'-t), \mathbf{p}_\alpha, t') F_{\beta,\alpha}(\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_\alpha + (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{v}_\alpha)(t'-t); \mathbf{p}_\beta; \mathbf{p}_\alpha) \times \\ \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\beta} - \frac{\partial \mathbf{v}_\beta^i}{\partial \mathbf{p}_\beta} (t' - t) \frac{\partial}{\partial r_\beta^i} \right) f_\beta(\mathbf{r}_\beta + \mathbf{v}_\beta(t'-t), \mathbf{p}_\beta, t') + \\ + f_\beta(\mathbf{r}_\beta + \mathbf{v}_\beta(t'-t), \mathbf{p}_\beta, t') F_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta + (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta)(t'-t); \mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}_\beta) \times \\ \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} - \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha^i}{\partial \mathbf{p}_\alpha} (t' - t) \frac{\partial}{\partial r_\alpha^i} \right) f_\alpha(\mathbf{r}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha(t'-t), \mathbf{p}_\alpha, t') \}. \end{aligned} \quad (5)$$

Формула (5) уже позволяет записать уравнение (2) как уравнение для функции распределения f_α . Однако это уравнение будет также содержать начальную коррелятивную функцию, что будет его существенно отличать от обычного кинетического уравнения.

Если рассматриваются установившиеся процессы, протекающие в течение времени, значительно превышающего, например, характерное время столкновения, то t_0 можно принять равным $-\infty$, а начальной коррелятивной функцией $g_{\alpha\beta}^{(0)}$ можно пренебречь. Тогда

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta, \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, t) = - \int_{-\infty}^0 d\tau \left\{ f_\alpha(\mathbf{r}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha \tau, \mathbf{p}_\alpha, t + \tau) \times \right. \\ \times F_{\beta,\alpha}(\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_\alpha + (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{v}_\alpha)\tau, \mathbf{p}_\beta; \mathbf{p}_\alpha) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\beta} - \frac{\partial \mathbf{v}_\beta^i}{\partial \mathbf{p}_\beta} \tau \frac{\partial}{\partial r_\beta^i} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times f_\beta(r_\beta + v_\beta \tau, p_\beta, t + \tau) + f_\beta(r_\beta + v_\beta \tau, p_\beta, t + \tau) \times \\ & \times F_{\alpha, \beta}(r_\alpha - r_\beta + (v_\alpha - v_\beta)\tau; p_\alpha; p_\beta) \left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial v_\alpha^i}{\partial p_\alpha} \tau \frac{\partial}{\partial r_\alpha^i} \right) \times \\ & \times f_\alpha(r_\alpha + v_\alpha \tau, p_\alpha, t + \tau) \}. \end{aligned} \quad (6)$$

В нерелятивистском пределе эта формула соответствует формуле (3) работы [1].

При подстановке выражения (6) в левую часть уравнения (2) следует учесть тот факт, что наше рассмотрение является неточным в условиях, когда частицы сближаются на такие расстояния, что их энергия взаимодействия становится не малой в сравнении с их кинетической энергией. Такая неточность проявляется в возникновении логарифмической расходимости при малых $r_\alpha - r_\beta$. Поэтому ниже при интегрировании по $r_\alpha - r_\beta$ область интегрирования ограничим ρ_{\min} . После всего сказанного можно записать искомое кинетическое уравнение в виде:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_\alpha} + e_\alpha \left\{ E + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_\alpha} = J_\alpha, \quad (7)$$

где интеграл столкновений J_α имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} J_\alpha = & - \sum_\beta \frac{N_\beta}{V} \frac{\partial}{\partial p_\alpha^i} \int d\mathbf{p}_\beta dr_\beta F_{\alpha, \beta}^i(r_\alpha - r_\beta, v_\alpha, v_\beta) \int_{-\infty}^0 d\tau \times \\ & \times \left\{ F_{\beta, \alpha}^j(r_\beta - r_\alpha + (v_\beta - v_\alpha)\tau, v_\beta, v_\alpha) f_\alpha(r_\alpha + v_\alpha \tau, p_\alpha, t + \tau) \times \right. \\ & \times \left(\frac{\partial}{\partial p_\beta^j} - \frac{\partial v_\beta^i}{\partial p_\beta^j} \tau \frac{\partial}{\partial r_\beta^i} \right) f_\beta(r_\beta + v_\beta \tau, p_\beta, t + \tau) + \\ & + F_{\alpha, \beta}^j(r_\alpha - r_\beta + (v_\alpha - v_\beta)\tau, v_\alpha, v_\beta) f_\beta(r_\beta + v_\beta \tau, p_\beta, t + \tau) \times \\ & \times \left. \left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha^j} - \frac{\partial v_\alpha^i}{\partial p_\alpha^j} \tau \frac{\partial}{\partial r_\alpha^i} \right) f_\alpha(r_\alpha + v_\alpha \tau, p_\alpha, t + \tau) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

В релятивистском случае для процессов с пространственно слабо неоднородными распределениями, когда можно пренебречь зависимостью функций распределения в интегrale столкновений от координат, а также при достаточно медленном изменении во времени интеграл столкновений (8) переходит в соответствующее выражение работы Беляева и Будкера [3]. При этом распределения должны слабо меняться на расстояниях порядка дебаевского радиуса и за время порядка периода плазменных колебаний.

Нетрудно продвинуться несколько дальше и учесть влияние самосогласованного поля на столкновение частиц, рассматривая такой эффект как поправочный. Для этого получим поправку к коррелятивной функции, удержав в уравнении (3) члены с самосогласованным полем, но считая, что стоящая при них функция имеет вид (5). Тогда для поправки к коррелятивной функции в случае устновившихся процессов получаем:

$$\begin{aligned} \delta g_{\alpha\beta}(r_\alpha, r_\beta, p_\alpha, p_\beta) = & - \int_{-\infty}^t dt' \left\langle e_\alpha \left\{ E(r_\alpha + v_\alpha(t'-t), t') + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{c} [v_\alpha, B(r_\alpha + v_\alpha(t'-t), t')] \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial v_\alpha^i}{\partial p_\alpha} (t'-t) \frac{\partial}{\partial r_\alpha^i} \right\} + \right. \\ & \left. + e_\beta \left\{ E(r_\beta + v_\beta(t'-t), t') + \frac{1}{c} [v_\beta, B(r_\beta + v_\beta(t'-t), t')] \right\} \times \right. \\ & \left. \times \left\{ \frac{\partial}{\partial p_\beta} - \frac{\partial v_\beta^i}{\partial p_\beta} (t'-t) \frac{\partial}{\partial r_\beta^i} \right\} \right\rangle g_{\alpha\beta}(r_\alpha + v_\alpha(t'-t), r_\beta + v_\beta(t'-t), p_\alpha, p_\beta, t'). \end{aligned} \quad (9)$$

Формула (9) позволяет получить следующий поправочный член для правой части уравнения (7):

$$\begin{aligned} \delta J_\alpha = & \sum_\beta \frac{N_\beta}{V} \frac{\partial}{\partial p_\alpha^i} \int d\mathbf{p}_\beta d\mathbf{r}_\beta F_{\alpha\beta}^i(r_\alpha - r_\beta, v_\alpha, v_\beta) \int_{-\infty}^0 d\tau \times \\ & \times \left(e_\alpha \left\{ E^j(r_\alpha + v_\alpha \tau, t+\tau) + \frac{1}{c} [v_\alpha, B(r_\alpha + v_\alpha \tau, t+\tau)]^j \right\} \times \right. \\ & \times \left\{ \frac{\partial}{\partial p_\alpha^j} - \frac{\partial v_\alpha^j}{\partial p_\alpha^j} \tau \frac{\partial}{\partial r_\alpha^j} \right\} + e_\beta \left\{ E^j(r_\beta + v_\beta \tau, t+\tau) + \frac{1}{c} [v_\beta, B(r_\beta + v_\beta \tau, t+\tau)]^j \right\} \times \\ & \times \left. \left\{ \frac{\partial}{\partial p_\beta^j} - \frac{\partial v_\beta^j}{\partial p_\beta^j} \tau \frac{\partial}{\partial r_\beta^j} \right\} \right) g_{\alpha\beta}(r_\alpha + v_\alpha \tau, r_\beta + v_\beta \tau, p_\alpha, p_\beta, t+\tau). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $g_{\alpha\beta}$ определяется формулой (6).

Как и в случае формулы (8), следует иметь в виду, что при достаточно малых $r_\alpha - r_\beta$ наше рассмотрение неприменимо. Другой учет поправки, обусловленной самосогласованным полем, основан на изменении силы, действующей на частицу α со стороны частицы β связанным с неравномерностью движения в самосогласованном поле. При этом

$$\begin{aligned} \delta F_{\alpha\beta}(r_\alpha, r_\beta, v_\alpha, v_\beta, t) = & \frac{4\pi e_\alpha e_\beta c}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta - v_\beta(t'-t)} \times \\ & \times \left[-\frac{\sin ck(t-t')}{k} \left\{ \left(\mathbf{k} - \frac{[\mathbf{v}_\alpha [\mathbf{k} \mathbf{v}_\beta]]}{c^2} \right) \int_t^{t'} dt'' (\mathbf{k} \delta \mathbf{v}_\beta(t'')) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{i}{c^2} [\mathbf{v}_\alpha [\mathbf{k}, \delta \mathbf{v}_\beta(t')]] \right\} - \frac{1}{c} \cos ck(t-t') \left\{ \delta \mathbf{v}_\beta(t') - i \mathbf{v}_\beta \int_t^{t'} dt'' (\mathbf{k} \delta \mathbf{v}_\beta(t'')) \right\} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\delta \mathbf{v}_\alpha = \frac{1}{m_\alpha} \sqrt{1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2}} \left\{ \delta \mathbf{p}_\alpha + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \delta \mathbf{p}_\alpha) \right\}; \quad (12)$$

$$\delta \mathbf{p}_\alpha = e_\alpha \int_{-\infty}^t dt' \left\{ E(r_\alpha + v_\alpha(t'-t), t') + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{B}(r_\alpha + v_\alpha(t'-t), t')] \right\}. \quad (13)$$

Соответствующая поправка для коррелятивной функции определяется формулой, подобной формуле (6):

$$\begin{aligned} \Delta g_{\alpha\beta}(r_\alpha, r_\beta, p_\alpha, p_\beta, t) = - \int_{-\infty}^0 d\tau \left\{ \delta F_{\beta,\alpha}(r_\beta + v_\beta \tau, r_\alpha + \right. \\ \left. + v_\alpha \tau, v_\beta, v_\alpha, t + \tau) f_\alpha(r_\alpha + v_\alpha \tau, p_\alpha, t + \tau) \left(\frac{\partial}{\partial p_\beta} - \frac{\partial v_\beta^i}{\partial p_\beta} \tau \frac{\partial}{\partial r_\alpha^i} \right) \times \right. \\ \times f_\beta(r_\beta + v_\beta \tau, p_\beta, t + \tau) + \delta F_{\alpha,\beta}(r_\alpha + v_\alpha \tau, r_\beta + v_\beta \tau, v_\alpha, v_\beta, t + \tau) \times \\ \times f_\beta(r_\beta + v_\beta \tau, p_\beta, t + \tau) \left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial v_\alpha^i}{\partial p_\alpha} \tau \frac{\partial}{\partial r_\beta^i} \right) f_\alpha(r_\alpha + v_\alpha \tau, p_\alpha, t + \tau) \}. \end{aligned} \quad (14)$$

В результате получаем следующий поправочный член к правой части уравнения (7):

$$\begin{aligned} \Delta J_\alpha = \sum_\beta \int dp_\beta dr_\beta \frac{N_\beta}{V} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial p_\alpha} \delta F_{\alpha,\beta}(r_\alpha, r_\beta, p_\alpha, p_\beta, t) + \right. \\ \left. + F_{\alpha,\beta}(r_\alpha - r_\beta, v_\alpha, v_\beta) \frac{\partial \Delta g_{\alpha\beta}}{\partial p_\alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

В заключение укажем, что полученное здесь кинетическое уравнение может быть использовано, например, для получения высокочастотной диэлектрической проницаемости релятивистской плазмы в приближении по e^2 более высоком, чем обычное приближение самосогласованного взаимодействия. При этом следует определить плотность тока при условии, что зависимость поля от времени и координат имеет вид $e^{-i\omega t + ikr}$. Для частот, больших плазменной, полученное в настоящей статье кинетическое уравнение позволит получить релятивистские поправки к диэлектрической проницаемости, становящиеся не малыми, во-первых, при температурах, сравнимых с 10^9 °К, а во-вторых, при наличии релятивистских направленных потоков заряженных частиц в ионизированном газе.

Я признателен В. Л. Гинзбургу за интерес к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, ЖЭТФ, 38, 1771 (1960).
2. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ, 38, 1212 (1960).
3. С. Т. Беляев, Г. И. Будкер, ДАН СССР, 107, 807 (1956).
4. В. П. Силин, ЖЭТФ, 40, 1768 (1961).
5. Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, М.—Л., 1946.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
8 июня 1961 г.

RELATIVISTIC KINETIC EQUATION FOR RAPIDLY VARYING PROCESSES IN IONIZED GAS

V. P. Silin

The kinetic equation of relativistic charged particles has been obtained suitable to the case of processes with characteristic times, which are less or equal the collision times as well as in the case of inhomogeneities with characteristics scale less than the essential collision parameters.

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛН В НЕРАВНОВЕСНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

M. C. Kovner

Проводится кинетическое рассмотрение устойчивости потока заряженных частиц, пропизывающего магнитоактивную плазму, по отношению к «медленным» волнам. Найдены инкременты (декременты) звуковой и магнитогидродинамических волн, связанные с когерентным магнитотормозным излучением частиц потока.

В большинстве работ, посвященных рассмотрению взаимодействия потоков заряженных частиц с магнитоактивной плазмой, исследуется возбуждение нормальных волн, фазовая скорость которых много больше средних тепловых скоростей частиц плазмы ([¹⁻⁴] и др.). Такое предпочтение, отдаваемое «быстрым» волнам, связано с тем, что при фазовой скорости, сравнимой с тепловой скоростью частиц в плазме, волны сильно затухают из-за механизма поглощения Ландау [⁵]. Однако, как известно, существует промежуточная, более узкая область, когда фазовая скорость волны много меньше средней тепловой скорости электронов плазмы, но в то же время много больше средней тепловой скорости ионов, в которой возможно распространение нормальных волн с незначительным затуханием последних. При этом можно рассматривать как вопрос о распространении нормальных волн в равновесной плазме, так и вопрос о возбуждении этих волн потоками заряженных частиц. Первому вопросу посвящены работы [⁶⁻⁸]; в настоящей статье находятся условия возбуждения потоками заряженных частиц волн в однородной, неограниченной и магнитоактивной плазме в указанной выше области, т. е. когда

$$v_{T_1} \cos \alpha \ll \omega/k \ll v_{T_2} \cos \alpha.$$

Здесь ω/k — фазовая скорость волны, $v_{T_\gamma} = (T_\gamma/m_\gamma)^{1/2}$ — средняя тепловая скорость частиц плазмы (индекс $\gamma = 1, 2$ относится соответственно к ионам и электронам плазмы), α — угол между волновым вектором \mathbf{k} и постоянным внешним магнитным полем \mathbf{H}_0 .

Ниже будет рассматриваться неустойчивость, связанная с магнитотормозным излучением частиц потока. Неустойчивость, вызванная излучением Вавилова—Черенкова, исследовалась в работе [⁹]. При $\alpha = 0$ возбуждение продольных волн в области $v_{T_1} \cos \alpha \ll \omega/k \ll v_{T_2} \cos \alpha$ рассматривалось в статье [¹⁰]. Как и в указанных работах [¹⁻⁴], поток предполагается однородным, неограниченным и квазинейтральным. Концентрация потока считается слабой, т. е.

$$N_s \ll N.$$

Средняя скорость потока v_0 направлена вдоль магнитного поля \mathbf{H}_0 .

1. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Исходными для получения дисперсионного уравнений являются система кинетических уравнений и уравнений электродинамики с самосогласованным полем. Не проводя подробных вычислений, мы сразу

воспользуемся результатами, полученными в статье [11], где были найдены общие соотношения, определяющие устойчивость системы в случае малых инкрементов (декрементов). При этом дисперсионное уравнение запишется в виде:

$$\text{Det } \varepsilon_{ik} + \Delta^s = iF(\delta), \quad (1.1)$$

где

$$F(\delta) = \sum_{\gamma=1}^2 \left\{ \delta_{\gamma}^+ \left[b_{\gamma} \left\langle A_1 + A_2 + B + E \left(\frac{\omega + \omega_{H\gamma}}{\omega_{H\gamma}} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \right\rangle - b_{\gamma}^+ (C - D) \right] + \delta_{\gamma}^- \left[b_{\gamma} \left\langle A_1 + A_2 - B + E \left(\frac{\omega - \omega_{H\gamma}}{\omega_{H\gamma}} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \right\rangle + b_{\gamma}^- (C + D) \right] + \delta_{\gamma}^0 \left[Eb_{1\gamma} - 2Db_{\gamma}^0 + 4A_2 b_{\gamma} \frac{k^2 v_{T\gamma}^2}{\omega_{H\gamma}^2} \sin^2 \alpha \right] \right\}; \quad (1.2)$$

$$\delta_{\gamma}^{0,\pm} = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega + p\omega_{H\gamma}}{kv_{T\gamma} \cos \alpha} \right)^2 \right]_{p=0,\pm 1}; \quad b_{\gamma} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{0\gamma}^2 \omega}{kv_{T\gamma} \cos \alpha}; \quad (1.3)$$

$$b_{1\gamma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{0\gamma}^2 \omega^3}{(kv_{T\gamma} \cos \alpha)^3}; \quad b_{\gamma}^{0,\pm} = b_{\gamma} \frac{\omega + p\omega_{H\gamma}}{\omega_{H\gamma}} \quad (p = 0, \pm 1);$$

$$A_1 = \omega^4 (\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{23}^2); \quad A_2 = \omega^4 (\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{13}^2); \quad B = 2i\omega^4 (\varepsilon_{12}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{23}\varepsilon_{13}); \quad (1.4)$$

$$C = 2\omega^4 (\varepsilon_{12}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{13}); \quad D = 2i\omega^4 (\varepsilon_{11}\varepsilon_{23} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{12}); \quad E = \omega^4 (\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{12}^2).$$

Для Δ^s при магнитотормозной неустойчивости в асимптотических случаях имеем:

$$\frac{\omega_{0\gamma}^2}{(\omega - kv_0)^2 - \omega_{H\gamma}^2} [-(A_1 + A_2)(\omega - kv_0)^2 - E(kv_0)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - B\omega_{H\gamma}(\omega - kv_0) - Dkv_0\omega_{H\gamma} \operatorname{tg} \alpha - Ckv_0(\omega - kv_0) \operatorname{tg} \alpha] = \frac{\omega_{0\gamma}^2 Q}{(\omega - kv_0)^2 - \omega_{H\gamma}^2} \quad (1.5)$$

при $|\omega - kv_0 \pm \omega_{H\gamma}| \gg kv_{T\gamma} \cos \alpha$;

$$i \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{0\gamma}^2 (\omega - kv_0)}{kv_{T\gamma} \cos \alpha} \left[A_1 + A_2 \mp B + (D \pm C) \frac{\omega + \omega_{H\gamma}}{\omega_{H\gamma}} \operatorname{tg} \alpha + E \left(\frac{\omega + |\omega_{H\gamma}|}{\omega_{H\gamma}} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \right] \quad (1.5a)$$

при $|\omega - kv_0 + |\omega_{H\gamma}|| \ll kv_{T\gamma} \cos \alpha$. В формулах (1.2)–(1.5a) введены следующие обозначения:

$$\omega_{0\gamma}^2 = 4\pi N_{\gamma} e^2/m_{\gamma}; \quad \omega_{H1} = \omega_{H3} = -\Omega_H; \quad \omega_{H2} = \omega_{H4} = \omega_H \quad (1.6)$$

(значения $\gamma = 3,4$ относятся соответственно к ионам и электронам потока). Компоненты тензора ε_{ik} выпишем, считая выполненным условие

$$\left| \frac{\omega - \omega_{H\gamma}}{kv_{T\gamma} \cos \alpha} \right| \gg 1, \quad (1.7)$$

которое означает, что рассмотрение проводится вне области гирорезонанса, и условие

$$\frac{k^2 v_{T\gamma}^2}{\omega_{H\gamma}^2} \sin^2 \alpha \ll 1, \quad (1.8)$$

что заведомо имеет место, если гирорадиус частиц сорта γ много меньше длины волны. Заметим, что из формулы (1.7) и условия $v_{T\gamma} \cos \alpha \ll \omega/k \ll v_{T2} \cos \alpha$ следует выполнение неравенства

$$\omega \ll \omega_H. \quad (1.9)$$

Из общих выражений для ε_{ik} , приведенных в [12] (см. также [4]), получаем:

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\omega_{01}^2}{\omega^2 - \Omega_H^2} \left[1 + k^2 v_{T1}^2 \left(\frac{\omega^2 + 3\Omega_H^2}{(\omega^2 - \Omega_H^2)^2} \cos^2 \alpha + \frac{3\sin^2 \alpha}{\omega^2 - 4\Omega_H^2} \right) \right] + 1 - n^2 \cos^2 \alpha;$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} = & -i \frac{\omega_{01}^2 \omega}{\Omega_H (\omega^2 - \Omega_H^2)} + i \frac{k^2}{\omega^2} \sum_{\gamma=1}^2 \frac{\omega_{0\gamma}^2 \omega \omega_{H\gamma}}{\omega^2 - \omega_{H\gamma}^2} \left[\frac{3\omega^2 + \omega_{H\gamma}^2}{(\omega^2 - \omega_{H\gamma}^2)^2} v_{T\gamma}^2 \cos^2 \alpha + \right. \\ & \left. + \frac{6v_{T\gamma}^2 \sin^2 \alpha}{\omega^2 - 4\omega_{H\gamma}^2} \right]; \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{13} = -2 \frac{\omega_{01}^2}{(\omega^2 - \Omega_H^2)^2} k^2 v_{T1}^2 \sin \alpha \cos \alpha + n^2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\omega_{01}^2}{\omega^2 - \Omega_H^2} \left[1 + k^2 v_{T1}^2 \left(\frac{\omega^2 + 3\Omega_H^2}{(\omega^2 + \Omega_H^2)^2} \cos^2 \alpha + \frac{\omega^2 + 8\Omega_H^2}{\omega^2 (\omega^2 - 4\Omega_H^2)} \right) \right] + 1 - n^2;$$

$$\varepsilon_{23} = -i \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\omega} \left\{ \frac{\omega_{01}^2}{\Omega_H} \left[1 + \left(\frac{\omega}{kv_{T2} \cos \alpha} \right)^2 \right] + k^2 \cos^2 \alpha \times \right.$$

$$\left. \times \left[-\frac{\omega_{01}^2 \Omega_H (3\omega^2 - \Omega_H^2) v_{T1}^2}{\omega^2 (\omega^2 - \Omega_H^2)^2} + \frac{\omega_{02}^2 v_{T2}^2}{\omega_H^3} \right] \right\};$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\omega_{01}^2}{\omega^2} \left[1 + 3 \left(\frac{kv_{T1} \cos \alpha}{\omega} \right)^2 + \frac{k^2 v_{T1}^2 \sin^2 \alpha}{\omega^2 - \Omega_H^2} \right] +$$

$$+ \frac{\omega_{02}^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega}{kv_{T2} \cos \alpha} \right)^2 + 1 - n^2 \sin^2 \alpha.$$

Так как мы рассматриваем нерелятивистские потоки, то нас с точки зрения неустойчивости интересуют лишь волны, для которых

$$n^2 \gg 1, \quad (1.11)$$

что следует и из правой части неравенства $v_{T1} \cos \alpha \ll \omega/k \ll v_{T2} \cos \alpha$.

Принимая во внимание (1.11) и используя формулы (1.10), запишем дисперсионное уравнение (1.1) в виде:

$$R \frac{v_{T_1}^2}{c^2} k^6 c^6 + \frac{a_1}{k^2 c^2} (c^2 k^2 - c^2 k_1^2) (c^2 k^2 - c^2 k_2^2) (c^2 k^2 - c^2 k_3^2) + \Delta^s = iF(\delta), \quad (1.12)$$

где

$$a_1 = -\omega_{01}^2 (\omega^2 - \Omega_H^2 \cos^2 \alpha) (\omega^2 - \Omega_H^2)^{-1}, \quad (1.13)$$

$c^2 k_1^2, c^2 k_2^2, c^2 k_3^2$ — корни уравнения

$$\begin{aligned} & k^6 c^6 + \frac{1}{\omega^2 - \Omega_H^2 \cos^2 \alpha} \left\{ k^4 c^4 \frac{\omega^2}{\omega_{01}^2} \left[2\omega_{01}^4 - \omega_{02}^2 (\omega^2 - \Omega_H^2) \frac{c^2}{v_{T_2}^2} \right] - \right. \\ & \left. - k^2 c^2 \frac{\omega^4}{\Omega_H^2 \cos^2 \alpha} \left[\omega_{01}^4 + \Omega_H^2 \omega_{02}^2 \frac{c^2}{v_{T_2}^2} (1 + \cos^2 \alpha) + \frac{\omega_{01}^2 \omega^6 \omega_{02}^2}{\Omega_H^2 \cos^2 \alpha} \frac{c^2}{v_{T_2}^2} \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

а

$$R \sim 1.$$

Учет члена $R (v_{T_1}^2/c^2) k^6 c^6$, где $v_{T_1}^2/c^2 \ll 1$ ($v_{T_1}^2/c^2 \sim 10^{-13}$ град) дает плазменную ионную волну; однако, как показывает решение, эта волна не удовлетворяет левой части неравенств $v_{T_1} \cos \alpha \ll \omega/k \ll v_{T_2} \cos \alpha$ и в области $\omega \ll \omega_{01}$ сильно затухает, и мы ее исключаем из рассмотрения. Эта волна, вообще говоря, может существовать лишь в области частот ω , близких к ω_{01} .

Рассмотрим решение уравнения (1.14) в двух предельных случаях. Пусть

$$v_{mg}^2 \gg v_{zb}^2, \quad (1.15)$$

где $v_{mg}^2 \simeq H_0^2/4\pi NM$; $v_{zb}^2 \simeq mv_{T_2}^2/M$ и угол α не очень близок к $\pi/2$. При этом решениями уравнения (1.14) будут

$$c^2 k_1^2 = \frac{\omega^2 - \Omega_H^2}{\omega^2 - \Omega_H^2 \cos^2 \alpha} \frac{M}{m} \frac{c^2}{v_{T_2}^2} \omega^2 \quad (1.16)$$

(магнитозвуковая волна),

$$c^2 k_{2,3}^2 = \frac{\omega_{01}^2 \omega^2}{\Omega_H^2 - \omega^2} \frac{1 + \cos \alpha \pm \sqrt{\sin^4 \alpha + \frac{4\omega^2}{\Omega_H^2} \cos^2 \alpha}}{2\cos^2 \alpha} \quad (1.17)$$

(магнитогидродинамические волны). Условие (1.15) означает, что

$$n_1^2 \gg n_{2,3}^2. \quad (1.18)$$

Отметим, что волна, которой соответствует знак + (необыкновенная волна), существует лишь при $\omega < \Omega_H$.

Если же выполнено неравенство, обратное (1.15) (или (1.18)), то решения уравнения (1.14) имеют вид:

$$c^2 k_1^2 = \frac{M}{m} \frac{c^2}{v_{T_2}^2} \omega^2; \quad (1.19)$$

$$c^2 k_{2,3}^2 = \frac{\omega_{01}^2 \omega^2}{\Omega_H (\Omega_H \cos \alpha \pm \omega) \cos \alpha}.$$

Из последней формулы следует, что необыкновенная волна, которой соответствует знак $-$, может существовать лишь при $\omega < \Omega_H \cos \alpha$.

2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН «ХОЛОДНЫМ» ПОТОКОМ

Пусть тепловым движением ионов плазмы и частиц потока можно пренебречь. Тогда, воспользовавшись результатами работы [11], можно сразу написать выражение для инкрементов (декрементов) волн:

$$\mu_i = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{F(\delta)}{\Phi_1} \pm \sqrt{\left[\frac{F(\delta)}{\Phi_1} \right]^2 + 2 \frac{\omega_{01}^2}{|\omega_H|} \frac{Q}{\Phi_1}} \right\} \quad (\mu \equiv \text{Im } \omega), \quad (2.1)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{a_1}{c^2 k_j^2} \prod_{1 \leq q+j \leq 3} (c^2 k_j^2 - c^2 k_q^2) \frac{\partial}{\partial \omega} (c^2 k_j^2), \quad (2.2)$$

а F и Q определяются формулами (1.2) и (1.5). Приведем выражения для величин A_1 , A_2 , B , C , D , E , входящих в F и Q в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} A_1 &= k^4 c^4 \sin^2 \alpha + k^2 c^2 \left(\omega_{01}^2 - \frac{\omega_{02}^2 \omega^2}{k^2 v_{T2}^2 \cos^2 \alpha} + \frac{\omega_{01}^2 \omega^2}{\omega^2 - \Omega_H^2} \sin^2 \alpha \right) + \\ &\quad + \frac{\omega_{01}^2 \omega^2}{(\omega^2 - \Omega_H^2) \cos^2 \alpha} \left(\omega_{01}^2 \frac{\Omega_H^2 - \omega^2 \sin^2 \alpha}{\Omega_H^2} - \frac{\omega_{02}^2 \omega^2}{k^2 v_{T2}^2} \right); \\ A_2 &= k^2 c^2 \left(\omega_{01}^2 \frac{\omega^2 - \Omega_H^2 \cos^2 \alpha}{\omega^2 - \Omega_H^2} - \frac{\omega_{02}^2 \omega^2}{k^2 v_{T2}^2} \right) + \frac{\omega_{01}^2 \omega^2}{\omega^2 - \Omega_H^2} \left(\omega_{01}^2 - \frac{\omega_{02}^2 \omega^2}{k^2 v_{T2}^2 \cos^2 \alpha} \right); \\ B &= -2 \frac{\omega \omega_{01}^2}{\Omega_H (\omega^2 - \Omega_H^2)} \left(k^2 c^2 \Omega_H^2 \sin^2 \alpha + \omega^2 \omega_{01}^2 - \omega_{02}^2 \frac{\omega^4}{k^2 v_{T2}^2 \cos^2 \alpha} \right); \\ C &= \left[k^4 c^4 + k^2 c^2 \frac{\omega_{01}^2 \omega^2}{\omega^2 - \Omega_H^2} - \frac{\omega_{01}^2 \omega^4}{\Omega_H (\omega^2 - \Omega_H^2) \cos^2 \alpha} \right] \sin 2\alpha; \\ D &= \frac{\omega \omega_{01}^2 \Omega_H}{\omega^2 - \Omega_H^2} \left(k^2 c^2 - \frac{\omega^2 \omega_{01}^2}{\Omega_H^2 \cos^2 \alpha} \right) \sin 2\alpha; \\ E &= k^4 c^4 \cos^2 \alpha + \frac{\omega_{01}^2 \omega^2}{\omega^2 - \Omega_H^2} k^2 c^2 (1 + \cos^2 \alpha) - \frac{\omega_{01}^4 \omega^4}{\Omega_H^2 (\omega^2 - \Omega_H^2)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Соотношение (1.2) для $F(\delta)$ значительно упрощается, если пренебречь в нем экспоненциальными членами. Тогда

$$\begin{aligned} F(\delta) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{02}^2 \omega}{k v_{T2} \cos \alpha} \left[E \frac{\omega^2}{k^2 v_{T2}^2 \cos^2 \alpha} - D \frac{\omega}{\omega_H} \operatorname{tg} \alpha + \right. \\ &\quad \left. + 2A_2 \frac{k^2 v_{T2}^2}{\omega_H^2} \sin^2 \alpha \right]; \end{aligned} \quad (2.4)$$

при $n_1^2 \gg n_{2,3}^2 \quad (v_{\text{мг}}^2 \gg v_{\text{ш}}^2)$

$$F(n_1^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{02}^2 \omega^3 k^2 c^2}{k v_{T2} \cos \alpha} \frac{c^2}{v_{T2}^2}; \quad (2.5)$$

$$F(n_{2,3}^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{02}^2 \omega}{k v_{T1} \cos \alpha} \left(-D \frac{\omega}{\omega_H} \operatorname{tg} \alpha + 2A_2 \frac{k^2 v_{T2}^2}{\omega_H^2} \sin^2 \alpha \right),$$

а при $n_1^2 \ll n_{2,3}^2$ ($v_{\text{мг}}^2 \ll v_{\text{зв}}^2$)

$$F(n_1^2) = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{01}^5 \omega^6}{k v_{T2} \Omega_H^2 (\omega^2 - \Omega_H^2) \cos \alpha} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha}; \quad (2.6)$$

$$F(n_{2,3}^2) = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} 2 \frac{\omega_{02}^2 \omega^6 \omega_{01}^6 v_{T2}^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{k v_{T2} (\omega^2 - \Omega_H^2) (\Omega_H \cos \alpha \pm \omega) c^2 \Omega_H^2 \omega_H^2 \cos \alpha}.$$

Рассматриваемая неустойчивость может быть вызвана как когерентным излучением ионов, так и электронов потока. Исследуем вначале неустойчивость, вызванную магнитотормозным излучением электронов потока. При этом

$$\omega - k v_0 + \omega_H \approx 0 \quad (2.7)$$

и

$$\begin{aligned} Q &\approx \omega_H^2 (-A_1 - A_2 - B + C \operatorname{tg} \alpha - D \operatorname{tg} \alpha - E \operatorname{tg}^2 \alpha) = \\ &= -\omega_H^2 \left\{ k^2 c^2 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \left[\frac{\omega_{01}^2 (\omega^2 - \Omega_H^2 \cos^2 \alpha)}{\omega^2 - \Omega_H^2} - \frac{\omega_{02}^2 \omega^2}{k^2 v_{T2}^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_{01}^2 \omega^2}{(\omega^2 - \Omega_H^2) \cos^2 \alpha} \left[\omega_{01}^2 (1 + \cos^2 \alpha) - \frac{2 \omega \omega_{01}^2}{\Omega_H} + \frac{2 \omega_{02}^2 \omega^2}{k^2 v_{T2}^2} \frac{\omega - \Omega_H}{\Omega_H} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Подставим в приведенную формулу (2.8) $k^2 c^2$ из (1.17), (1.19); тогда в случае, если $n_1^2 \gg n_{2,3}^2$,

$$Q(n_1^2) = \frac{\omega^2 \omega_{01}^4 \omega_H^2}{(\omega + \Omega_H)^2} \operatorname{tg}^2 \alpha; \quad (2.9)$$

$$Q(n_{2,3}^2) = \frac{\omega_H^2 \omega_{02}^2 \omega^2 c^2}{v_{T2}^2 \cos^2 \alpha} \left[1 + \cos^2 \alpha - 4 \frac{\left(1 - \frac{\omega}{\Omega_H} \right) \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha \pm \sqrt{\sin^4 \alpha + 4 \frac{\omega^2}{\Omega_H^2} \cos^2 \alpha}} \right];$$

если же $n_1^2 \ll n_{2,3}^2$, то

$$Q(n_1^2) = \omega_H^2 \frac{\omega_{01}^4 \omega^2}{\omega^2 - \Omega_H^2} \operatorname{tg}^2 \alpha; \quad (2.10)$$

$$Q(n_{2,3}^2) = \mp \omega_H^2 \frac{\omega_{01}^4 \omega^3 (1 \mp \cos \alpha)^2}{\Omega_H (\omega^2 - \Omega_H^2) \cos^3 \alpha}.$$

Приведенные формулы (2.1)–(2.9) решают вопрос об устойчивости в данном случае. В качестве примера вычислим инкременты (декременты) для звуковой волны (1.16) и магнитогидродинамических волн (1.19):

$$\Phi_1(n_1^2) = \frac{2\omega^3\omega_{02}^4 C^4 (\omega^4 - 2\omega^2\Omega_H^2 \cos^2 \alpha + \Omega_H^4 \cos^2 \alpha)}{(\omega^2 - \Omega_H^2)^2 v_{T2}^4 \omega_{01}^2}, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi^{1/2} (\omega^2 - \Omega_H^2 \cos^2 \alpha)^{3/2} (\omega^2 - \Omega_H^2)^{1/2} \omega_{01} \omega}{2^{3/2} (\omega^4 - 2\omega^2\Omega_H^2 \cos^2 \alpha + \Omega_H^4 \cos^2 \alpha) \omega_{02} \cos \alpha} \pm \right. \\ & \pm \left[\frac{\pi \omega_{01}^2 \omega^2 (\omega^2 - \Omega_H^2) (\omega^2 - \Omega_H^2 \cos^2 \alpha)^3}{8\omega_{02}^2 (\omega^4 - 2\omega^2\Omega_H^2 \cos^2 \alpha + \Omega_H^4 \cos^2 \alpha)^2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\omega_H \omega_{01}^6 \omega_{04}^2 v_{T2}^4 (\omega^2 - \Omega_H^2 \cos^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha}{\omega \omega_{02}^4 C^4 (\omega + \Omega_H)^2 (\omega^4 - 2\omega^2\Omega_H^2 \cos^2 \alpha + \Omega_H^4 \cos^2 \alpha)} \right]^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Как нетрудно видеть, выражение в квадратных скобках в (2.12) положительно, поэтому при $\alpha \neq 0$ всегда существует нарастающее решение.

Для магнитогидродинамических волн (при $n_{2,3}^2 \gg n_1^2$)

$$\Phi_1(n_{2,3}^2) = \mp \frac{2\omega_{01}^6 \omega^4 (2\Omega_H \cos \alpha \pm \omega)}{(\omega^2 - \Omega_H^2) (\Omega_H \cos \alpha \pm \omega)^2 \Omega_H^2 \cos^2 \alpha}; \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \mu_{2,3} = & \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{v_{T2}}{c} \frac{\omega_{01} (\Omega_H \cos \alpha \pm \omega)^{3/2} \sin^2 \alpha}{\omega_H^2 (2\Omega_H \cos \alpha \pm \omega) (\Omega_H \cos \alpha)^{1/2}} \mp \right. \\ & \mp \left[\frac{\pi}{2} \frac{v_{T2}^2}{c^2} \frac{\omega_{01}^2 (\Omega_H \cos \alpha \pm \omega)^3 \sin^4 \alpha}{\omega_H^2 \Omega_H^2 (2\Omega_H \cos \alpha \pm \omega)^2 \cos \alpha} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\omega_{04}^2 \omega_H^2 (\Omega_H \cos \alpha \pm \omega)^2 (1 \mp \cos \alpha)^2}{\omega_{02}^2 \omega^3 (2\Omega_H \cos \alpha \pm \omega) \cos \alpha} \right]^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Учитывая, что при $\omega \ll \omega_H k v_0 \simeq \omega_H$, (2.14) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mu_{2,3} = & \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{v_0 v_{T2}}{c^2} \frac{\omega_{02}^2 \omega (\Omega_H \cos \alpha \pm \omega)}{\omega_H^3 (2\Omega_H \cos \alpha \pm \omega)} \sin^2 \alpha \mp \right. \\ & \mp \left[\frac{\pi}{2} \frac{v_0^2 v_{T2}^2}{c^4} \frac{\omega_{02}^4 \omega^2}{\omega_H^6} \left(\frac{\Omega_H \cos \alpha \pm \omega}{2\Omega_H \cos \alpha \pm \omega} \right)^2 \sin^4 \alpha + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\omega_{04}^2 \omega_H^2 (\Omega_H \cos \alpha \pm \omega)^2 (1 \mp \cos \alpha)^2}{\omega_{01}^2 \omega^3 (2\Omega_H \cos \alpha \pm \omega) \cos \alpha} \right]^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Это слагаемое, стоящее в квадратных скобках формулы (2.15), больше нуля, так как волна n_3^2 (которой соответствует нижний знак) может существовать лишь при $\omega < \Omega_H \cos \alpha$. В частности, если $\alpha = 0$, то

$$\mu_2 = 0,$$

$$\mu_3 = -\frac{1}{2} \left[\frac{\omega_{04}^2 \omega_H^2 (\Omega_H - \omega)^2}{\omega_{02}^2 \omega (2\Omega_H - \omega)} \right]^{1/2}, \quad (2.16)$$

что совпадает с результатом, полученным в [10].

Отметим, что при $\alpha = 0$ решения (1.16), (1.17) и (1.19) совпадают. Это следует из того, что в данном случае исходное дисперсионное уравнение распадается на три не связанных между собой уравнения.

Совершенно аналогично проводится рассмотрение возбуждения волн в плазме ионами потока. В частности, при $\omega \ll \Omega_H$ применимы все формулы (2.7)–(2.16), если в них заменить ω_H на $-\Omega_H$.

3. ВОЗБУЖДЕНИЕ КОГЕРЕНТНОГО МАГНИТОВРЕМЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛАЗМЕ «ГОРЯЧИМ» ПОТОКОМ

Пусть выполнено неравенство

$$|\omega - \mathbf{k}v_0 + |\omega_{H\gamma}| | \ll kv_{T\gamma} \cos \alpha, \quad (3.1)$$

которое означает, что дисперсия скоростей частиц потока, связанная с их тепловым движением, значительно превосходит разность между фазовой скоростью возмущения и средней скоростью потока, смещенной на величину $|\omega_{H\gamma}| k^{-1}$, иными словами, фазовая скорость, смещенная на величину $|\omega_{H\gamma}| k^{-1}$, находится „внутри“ соответствующей функции распределения. Тогда в силу условия (1.8) с необходимостью выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} |\omega - \mathbf{k}v_0 - |\omega_{H\gamma}| | &\gg kv_{T\gamma} \cos \alpha; \\ |\omega - \mathbf{k}v_0| &\gg kv_{T\gamma} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.2)$$

С учетом (3.2) из формулы (3.12) статьи [11] получим выражение для поправки к частоте $\omega^{(0)} = \mathbf{k}v_0 - |\omega_{H\gamma}|$ в виде:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_j = -i\Phi_1^{-1} \left\{ F(\delta) + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{0\gamma}^2 (\omega - \mathbf{k}v_0)}{kv_{T\gamma} \cos \alpha} \times \right. \\ \left. \times \left[A_1 + A_2 \mp B + (D \pm C) \frac{\omega + |\omega_{H\gamma}|}{\omega_{H\gamma}} \operatorname{tg} \alpha + E \left(\frac{\omega + |\omega_{H\gamma}|}{\omega_{H\gamma}} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В рассматриваемом случае эта добавка в первом приближении всегда мнимая. Если знаки у члена $F(\delta)$ и второго слагаемого в фигурной скобке одинаковы, то будут существовать лишь затухающие решения; если же эти знаки различны, то при

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left| \frac{kv_{T\gamma} \cos \alpha}{\omega_{0\gamma}^2 (\omega - \mathbf{k}v_0)} F(\delta) \right| < \\ < \left| A_1 + A_2 \mp B + (D \pm C) \frac{\omega + |\omega_{H\gamma}|}{\omega_{H\gamma}} \operatorname{tg} \alpha + E \left(\frac{\omega + |\omega_{H\gamma}|}{\omega_{H\gamma}} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \right| \end{aligned} \quad (3.4)$$

возникает неустойчивость, в противном случае волны также будут затухать. В формулах (3.3), (3.4) верхний знак соответствует когерентному магнитовремзному излучению ионов, нижний – излучению электронов потока.

В качестве примера рассмотрим возбуждение волн электронами потока при $n_{2,3}^2 \gg n_1^2$. (Если выполнено неравенство, обратное приведенному, то исследование проводится совершенно аналогично.)

В силу неравенства (1.9) имеем для электронов потока:

$$A_1 + A_2 + B + (D - C) \frac{\omega + \omega_H}{\omega_H} \operatorname{tg} \alpha + E \left(\frac{\omega + \omega_H}{\omega_H} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = - \frac{Q}{\omega_H^2}, \quad (3.5)$$

где Q определяется формулами (2.8)–(2.10). Далее из (1.13), (1.19), (2.2) находим:

$$\Phi_1(n_1) = 2\omega_{01}^6 \omega^3 / (\omega^2 - \Omega_H^2) \Omega_H^2 \cos^2 \alpha. \quad (3.6)$$

Подставив (3.5), (3.6) в формулу (3.3) и используя соотношения (2.6), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\mu(n_1^2)}{\omega} &= \sqrt{\frac{m\pi}{32M}} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \times \\ &\times \left(1 - \frac{N_s}{N} \sqrt{\frac{MT_4}{mT_2}} \frac{\omega_H \Omega_H^2}{\omega^3} \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из последнего выражения видно, что нижняя граница концентрации потока, при которой начинается неустойчивость, определяется неравенством:

$$N_s > N \sqrt{\frac{mT_4}{MT_2}} \frac{\omega^3}{\omega_H \Omega_H^2} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}. \quad (3.8)$$

Формулы (3.7), (3.8) показывают, что при $\alpha = 0$ звуковая волна в случае (3.1) затухает. Если $\alpha \neq 0$, то концентрация N_s , при которой начинается неустойчивость, сильно зависит от частоты, более низкочастотные волны возбуждаются при более низких плотностях потока. Из (2.8) следует также, что чем „холоднее“ поток, тем при более низких концентрациях появляется неустойчивость. На рис. 1 изображен график функции $N_s X / N$ от T_4 / T_2 , заданной соотношением

$$\frac{N_s}{N} \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{\omega_H \Omega_H^2}{\omega^3} \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{T_4}{T_2}}, \quad (3.9)$$

которая ограничивает сверху область устойчивости.

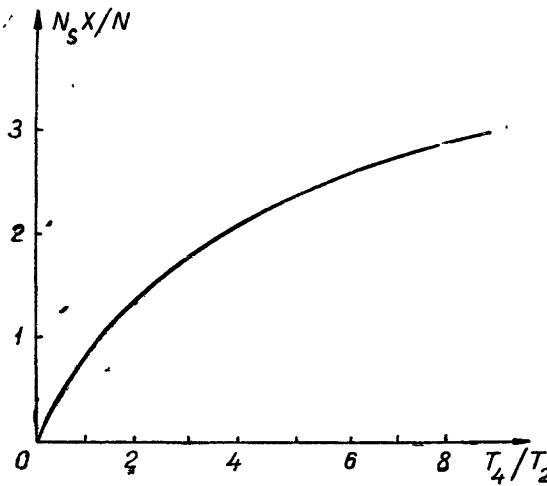


Рис. 1,

Наконец, для двух других волн, используя формулы (1.13), (1.19), (2.6), (2.10), (3.3), (3.5), получим:

$$\mu_{2,3} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\Omega_H^2 (\Omega_H \cos \alpha \pm \omega)^2}{2\omega^4 (2\Omega_H \cos \alpha \pm \omega) k \cos \alpha} \times \\ \times \left\{ 4 \frac{\omega_{02}^2 \omega^6 v_{T2}^2 \sin^2 \alpha}{c^2 \Omega_H^2 \omega_H^2 v_{T2} (\Omega_H \cos \alpha \pm \omega)} - \frac{\omega_{04}^2 \omega^3 \omega_H}{\omega_{01}^2 \Omega_H v_{T4}} (1 \mp \cos \alpha)^2 \right\}. \quad (3.10)$$

Отсюда видно, что при $\alpha = 0$ волна 3 всегда будет нарастать (в том приближении, когда можно в (1.2) пренебречь экспоненциальными членами). Если же $\alpha \neq 0$, то усиление будет при

$$\frac{N_s}{N} \frac{c^2}{v_{T2} v_{T4}} \frac{\omega_H^4 (\Omega_H \cos \alpha \pm \omega)}{\omega_{02}^2 \omega^3} \frac{(1 \mp \cos \alpha)^2}{2 \sin 2\alpha \sin \alpha} > 1. \quad (3.11)$$

Автор благодарен Б. Н. Гершману и В. В. Железнякову за просмотр рукописи и дискуссию результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 14 (1959).
2. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 57 (1960).
3. М. С. Ковнер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 746 (1960).
4. К. Н. Степанов, К. Н. Китченко, ЖЭТФ, 31, 167 (1961).
5. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 16, 571 (1948).
6. Г. В. Гордеев, ЖЭТФ, 24, 445 (1953).
7. А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, ЖЭТФ, 31, 642 (1956).
8. Б. Н. Гершман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 654 (1959).
9. М. С. Ковнер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 765 (1961).
10. М. С. Ковнер, ЖЭТФ, 41, 527 (1961).
11. М. С. Ковнер, ЖЭТФ (в печати).
12. М. С. Ковнер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 444 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
1 апреля 1961 г.

ON ONE CASE OF WAVES EXCITATION IN NONEQUILIBRIUM MAGNETOACTIVE PLASMA

M. S. Kovner

The kinetic consideration is given of stability (relative to the "slow" waves) of the charged particles stream penetrating through magnetoactive plasma. The increments (decrements) of sound and magnetohydrodynamics waves were found which are connected with coherent synchrotron radiation of particles,

О ВЛИЯНИИ ПРИЕМНОГО УСТРОЙСТВА НА ФЛЮКТУАЦИИ ПРИНИМАЕМОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Н. Г. Денисов

Исследуются пульсации параметров рассеянного излучения на выходе приемного устройства (например, в фокусе линзы). Определяются корреляционные функции флюктуаций комплексного поля, которые дают возможность рассчитать статистические свойства амплитудных и фазовых флюктуаций принимаемого излучения. Найдены формулы, определяющие связь корреляционных функций на входе и выходе приемного устройства.

При измерениях флюктуаций параметров рассеянного излучения всегда приходится иметь дело с тем или иным прибором (приемным устройством), оказывающим определенное влияние на флюктуации величин, подлежащих непосредственному измерению. Так, при приеме рассеянного радиоизлучения существенное влияние на средний уровень сигнала, а также на флюктуации амплитуды и фазы оказывает диаграмма направленности или апертура антенны [1,2]. Аналогичные вопросы возникают при расчете средней интенсивности и флюктуаций звука или света в фокусе линзы [3]. Большинство работ этого направления посвящено расчету средней интенсивности принимаемого излучения. В статьях [2,3] рассмотрены малые флюктуации амплитуды и фазы на выходе приемного устройства. В последнее время появилось много статей, в которых исследуются статистические свойства как больших, так и малых флюктуаций комплексного поля [5-9]. Однако в этих работах рассматривались флюктуации величины, средний квадрат которой равен сумме средних квадратов амплитудных и фазовых изменений. Эта величина, как известно, обладает простейшими статистическими свойствами. Сравнительно просто рассчитываются также флюктуации полного потока через диафрагму телескопа, если известно распределение флюктуаций потока [10]. Что же касается амплитудных и фазовых изменений принимаемого излучения, то, как уже указывалось, в литературе имеется расчет лишь для случая, когда они малы. Можно, однако, описать статистические свойства амплитудных и фазовых флюктуаций при довольно общих предположениях о характере флюктуационного поля как для больших, так и для малых флюктуаций амплитуды и фазы принимаемого излучения.

1. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ФЛЮКТУАЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПОЛЯ

В исследованиях флюктуирующего излучения всегда имеется прибор, показания которого подвергаются статистической обработке. По ее результатам обычно и судят о статистических свойствах самого излучения. В этой связи возникает задача об отыскании зависимости между статистическими свойствами принимаемого сигнала на входе и выходе приемного устройства. Здесь мы имеем дело с прохождением шума через линейные системы. Такими системами могут быть различного рода антенные устройства, которые используются при приеме рассеянного излучения, оптические и акустические фокусирующие системы.

Обозначим поле на плоскости $z = 0$ (на входе приемного устройства) через

$$E_0(r, t) = e^{iS_0(r, t) + \ln A_0(r, t)}.$$

Для определенности будем считать, что случайные изменения амплитуды A_0 и фазы S_0 волны обусловлены случайными неоднородностями слоя, через который проходит волна. В этом случае вариации фазы $\Delta S = S_0 - \bar{S}_0$ и уровня $B_0 = \ln A_0 - \ln \bar{A}_0$ будут распределены нормально и легко находятся статистические параметры поля. Например, среднее поле будет равно [4]

$$\bar{E}_0 = e^{1/2[-R_{B_0}(0) - R_{S_0}(0) + i2R_{S_0B_0}(0)]} e^{i\bar{S}_0 + \ln \bar{A}_0}, \quad (1)$$

где R_S , R_B и R_{SB} — функции корреляций фазы, амплитуды и функция их взаимной корреляции. В формуле (1) введен множитель $e^{-R_{B_0}(0)}$, учитывающий затухание среднего поля из-за рассеяния.

На выходе приемного устройства имеем (поле в фокусе линзы):

$$E = \int_{\Sigma} E_0 d\sigma; \quad \bar{E} = \bar{E}_0 \Sigma, \quad (2)$$

где Σ — эффективная площадь антенны или входная поверхность линзы.

Введем в рассмотрение величину

$$f = f_1 + if_2 = \frac{(E - \bar{E})}{\bar{E}} = \frac{\int (E_0 - \bar{E}_0) d\sigma}{\int \bar{E}_0 d\sigma} = \frac{1}{\Sigma} \int f_0 d\sigma. \quad (3)$$

Компоненты f_1 и f_2 определяют флюктуации амплитуды и фазы поля. Легко показать, что при малых флюктуациях

$$f = i\Delta S + \ln(A/\bar{A}), \quad (4)$$

где $\Delta S = S - \bar{S}$, \bar{S} и \bar{A} — фаза и амплитуда среднего поля на выходе приемного устройства. В случае больших флюктуаций флюктуации амплитуды и фазы определяются через f_1 и f_2 по хорошо известным формулам.

Таким образом, наша задача состоит в нахождении статистических свойств комплексного поля f при заданных статистических свойствах поля на входе приемного устройства f_0 . Для решения этой задачи введем следующие корреляционные функции комплексного поля:

$$R_{ff^*}(\tau) = \overline{f(t)f^*(t+\tau)} = \overline{f_1(t)f_1(t+\tau)} + \quad (5)$$

$$+ \overline{f_2(t)f_2(t+\tau)} = R_{f_1}(\tau) + R_{f_2}(\tau);$$

$$R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)} = \overline{f_1(t)f_1(t+\tau)} - \quad (6)$$

$$- \overline{f_2(t)f_2(t+\tau)} + 2if_1(t)\overline{f_2(t+\tau)} =$$

$$= R_{f_1}(\tau) - R_{f_2}(\tau) + 2iR_{f_1f_2}(\tau).$$

Зная функции (5) и (6), мы можем определить $R_{f_1}(\tau)$, $R_{f_2}(\tau)$ и $R_{f_1f_2}(\tau)$.

Найдем вначале эти функции на входе приемного устройства (по выходе из неоднородного слоя), считая, что уровень и фаза падающей волны распределены нормально [11]:

$$R_{f_0 f_0^*}(\xi, \eta, \tau) = \frac{\bar{E}_0(x, y, t) E^*(x + \xi, y + \eta, t + \tau) - |\bar{E}_0|^2}{|\bar{E}_0|^2} = \\ = e^{R_{B_0}(\xi, \eta, \tau) + R_{S_0}(\xi, \eta, \tau)} - 1. \quad (7)$$

Аналогично подсчитывается функция $R_{f_0}(\tau)$:

$$R_{f_0}(\xi, \eta, \tau) = \frac{\bar{E}_0(x, y, t) E(x + \xi, y + \eta, t + \tau) - (\bar{E}_0)^2}{(\bar{E}_0)^2} = \\ = e^{R_{B_0}(\xi, \eta, \tau) - R_{S_0}(\xi, \eta, \tau) + 2iR_{S_0 B_0}(\xi, \eta, \tau)} - 1. \quad (8)$$

При прохождении через приемник эти функции, естественно, изменяются. Рассчитать их значения на выходе приемного устройства можно с помощью формулы (3). Запишем формулу (3) в следующем виде:

$$f(t) = \frac{1}{\Sigma} \int \int f_0(x, y, t) dx dy = \frac{1}{\Sigma} \int \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x, y, t) K(x, y) dx dy, \quad (9)$$

где функция $K(x, y)$ определяет распределение регулярных токов в раскрыве приемной антенны, работающей в режиме излучения (освещенность входной поверхности линзы). Теперь легко показать, что корреляционные функции при прохождении шума через прибор преобразуются следующим образом:

$$R_{ff^*}(\tau) = \frac{1}{\Sigma^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} R_{f_0 f_0^*}(\xi, \eta, \tau) R_k(\xi, \eta) d\xi d\eta; \\ R_f(\tau) = \frac{1}{\Sigma^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} R_{f_0}(\xi, \eta, \tau) R_k(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (10)$$

где $R_k(\xi, \eta) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y) K(x - \xi, y - \eta) dx dy$ — корреляционная функция распределения токов в раскрыве антенны, которая связана фурье-преобразованием с диаграммой направленности антенны или с дифракционной картиной Фраунгофера [1, 10].

Формулы (10) можно записать в другом виде, если ввести пространственные спектры функций $R_{ff^*}(\xi, \eta, \tau)$, $R_f(\xi, \eta, \tau)$ и $R_k(\xi, \eta)$:

$$F_{ff^*}(x_1, x_2, \tau) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ff^*}(\xi, \eta, \tau) e^{i(x_1 \xi + x_2 \eta)} d\xi d\eta; \\ F_f(x_1, x_2, \tau) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(\xi, \eta, \tau) e^{i(x_1 \xi + x_2 \eta)} d\xi d\eta; \\ F_k(x_1, x_2) = \frac{1}{\Sigma^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} R_k(\xi, \eta) e^{i(x_1 \xi + x_2 \eta)} d\xi d\eta. \quad (11)$$

Функция $F_k(x_1, x_2)$ определяет диаграмму направленности антенны или

дифракционную картину Фраунгофера в оптической системе. Для круглой диафрагмы с диаметром D эта функция равна

$$F_k(x_1, x_2) = \left(\frac{2J_1(xD)}{xD} \right)^2; \quad x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (12)$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка.

Подставляя в (10) R_{ff^*} , R_f и R_k , выраженные через их спектры, найдем:

$$R_{ff^*}(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{f_0 f_0^*}(x_1, x_2, \tau) F_k(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (13)$$

Отсюда, в частности, следует, что при очень узкой диаграмме направленности (с линзой, размеры которой охватывают много неоднородностей поля) функции $R_{ff^*}(\tau)$ и $R_f(\tau)$ определяются спектрами $F_{f_0 f_0^*}(0,0,\tau)$ и $F_{f_0}(0,0,\tau)$ соответственно.

2. ПРИЕМ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ МАЛЫХ ФЛЮКТУАЦИЙ

Если принимаемое излучение прошло небольшую толщу неоднородной среды, то флюктуации амплитуды и фазы поля на входе приемного устройства будут малы, т. е. $|R_S| \ll 1$, $|R_B| \ll 1$ и $|R_{SB}| \ll 1$. Из формул (7) и (8) можно приближенно записать:

$$\begin{aligned} R_{f_0 f_0^*}(\xi, \eta, \tau) &\simeq R_{B_0}(\xi, \eta, \tau) + R_{S_0}(\xi, \eta, \tau); \\ R_{f_0}(\xi, \eta, \tau) &\simeq R_{B_0}(\xi, \eta, \tau) - R_{S_0}(\xi, \eta, \tau) + 2iR_{S_0 B_0}(\xi, \eta, \tau). \end{aligned} \quad (14)$$

Так как функция $R_k(\xi, \eta)$ действительна, то из (10) легко получить формулы для корреляционных функций $R_S(\tau)$, $R_B(\tau)$ и $R_{SB}(\tau)$:

$$R_S(\tau) = \frac{1}{\Sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{B_0 S_0}(\tau) R_k(\xi, \eta) d\xi d\eta; \quad (15)$$

$$R_{BS}(\tau) = \frac{1}{\Sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{B_0 S_0}(\xi, \eta, \tau) R_k(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Таким образом, при малых флюктуациях интересующие нас величины преобразуются по формуле (10) или (13) так же, как функции $R_{ff^*}(\xi, \eta, \tau)$ и $R_f(\xi, \eta, \tau)$. Так, например,

$$R_B(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{B_0}(x_1, x_2, \tau) F_k(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (16)$$

Рассмотрим простейший случай — перенос неоднородностей со скоростью v [10]. Тогда

$$\begin{aligned} F_{B_0}(x_1, x_2, \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{B_0}(\xi - v_x \tau, \eta - v_y \tau) e^{ix_1 \xi + ix_2 \eta} d\xi d\eta = \\ &= F_{B_0}(x_1, x_2) e^{-ix_1 v_x \tau + ix_2 v_y \tau}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя в (16) и интегрируя в полярной системе координат x, ϑ , получим:

$$R_S(\tau) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{B_0}(x) F_k(x) J_0(x v \tau) dx. \quad (18)$$

Дальнейшее исследование корреляционных соотношений связано с выбором конкретных функций корреляции. Расчеты для функции $F_B(x)$, соответствующей „закону двух третей“, см. в [10].

Очень простое выражение для корреляционных функций получается в том случае, когда спектры $F_{B_0}(x_1, x_2)$ и $F_k(x_1, x_2)$ разбиваются на произведения функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$F_{B_0}(x_1, x_2) = F_{B_01}(x_1) F_{B_02}(x_2); \quad F_k(x_1, x_2) = F_{k1}(x_1) F_{k2}(x_2), \quad (19)$$

и скорость v направлена по одной координате: $v = v_y$. Тогда на основе (16) и (17) найдем, что

$$\begin{aligned} F_S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_S(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{v} F_{B_02}\left(\frac{\omega}{v}\right) F_{k2}\left(\frac{\omega}{v}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} F_{B_01}(x_1) F_{k1}(x_1) dx_1, \end{aligned} \quad (20)$$

т. е. спектры пульсаций амплитуды или фазы в фокусе линзы определяются произведением пространственных спектров $F_{B_0}(\omega/v) F_{k2}(\omega/v)$. Этот простой результат был получен в [6] для квадратной диафрагмы и гауссовой функции корреляции случайных неоднородностей путем очень сложных вычислений.

3. СЛУЧАЙ БОЛЬШИХ ФЛЮКТУАЦИЙ

Мы нашли общую связь между корреляционными функциями поля на входе и выходе приемного устройства (10). При малых флюктуациях амплитуды и фазы поля такая же связь существует между корреляционными функциями флюктуаций амплитуды и фазы (15). Однако при больших флюктуациях параметров принимаемого излучения отыскание этой связи является значительно более сложной задачей. Для ее решения нужно знать распределение вероятностей компонент комплексного поля.

Если размеры приемного устройства (диаметр объектива) сравнимы с пространственным масштабом корреляции поля принимаемого излучения, то распределение компонент поля на выходе устройства будет логарифмически нормальным (уровень и фаза распределены нормально). Флюктуации потока излучения в этом случае рассчитаны в работе [10]. Здесь мы ограничимся рассмотрением другого случая, когда размеры диаграммы велики по сравнению с масштабом неоднородностей поля. Поле на выходе складывается из полей многих независимых источников и его компоненты будут распределены по нормальному закону. Кроме того, при больших флюктуациях амплитуды и фазы среднее поле мало (см. (1)) и, следовательно, $E \approx \bar{E}f$. В этом случае функция $R_E = R_{E_1} - R_{E_2} + 2iR_{E_1 E_2} = (\bar{E})^2 R_f$ будет экспоненциально мала. Это

означает, что $R_{E_1} \simeq R_{E_2}$ и $R_{E_1 E_2} \simeq 0$ ($E = E_1 + iE_2$). С другой стороны, мы имеем:

$$R_{EE^*}(\tau) = R_{E_1}(\tau) + R_{E_2}(\tau) = |\bar{E}|^2 R_{ff^*}(\tau). \quad (21)$$

Функция $R_{ff^*}(\tau)$ подсчитывается обычным способом по формуле (13). Следовательно,

$$\begin{aligned} R_{E_1}(\tau) &\simeq R_{E_2}(\tau) = \frac{|\bar{E}|^2}{2} R_{ff^*}(\tau) = \\ &= \frac{|\bar{E}|^2}{2} \frac{1}{\Sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{f_0 f_0^*}(\xi, \eta, \tau) R_k(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (22)$$

где $R_{f_0 f_0^*}$ выражается формулой (7).

Теперь легко отыскать корреляционные функции амплитуды поля. Действительно, мы имеем случайный комплексный вектор \bar{E} , компоненты которого изменяются независимо друг от друга и распределены нормально с дисперсией (22). Известно, что в этом случае амплитуда поля будет распределена по Релею и фаза равновероятно принимает значение в интервале $(-\pi, +\pi)$. Таким образом, мы приходим к известной схеме расчета корреляции амплитуд (см., например, [12]). В этом случае корреляционные функции амплитуд и их квадратов определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \overline{A(t_1) A(t_2)} &= 2\sigma^2 \left[E(r) - \frac{1}{2} (1 - r^2) K(r) \right] \simeq \frac{\pi\sigma^2}{2} \left(1 + \frac{r^2(\tau)}{4} \right); \\ \overline{A^2(t_1) A^2(t_2)} &= 4\sigma^2 (1 + r^2(\tau)); \end{aligned} \quad (23)$$

при этом $\bar{A} = \sqrt{\pi/2}\sigma$. В приведенных формулах K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, $\sigma^2 = \bar{E}_1^2 = \bar{E}_2^2$, $r(\tau) = R_{E_1}(\tau)/\sigma^2 = R_{E_2}(\tau)/\sigma^2$.

Коэффициент корреляции $r(\tau)$ для больших диаметров телескопов выражается через корреляционную функцию комплексного поля $R_{ff^*}(\tau)$ (см. (22)):

$$r = R_{E_1}(\tau)/\sigma^2 = R_{ff^*}(r)/R_{ff^*}(0). \quad (24)$$

Функция $R_{ff^*}(r)$ вычислялась в других работах (см., например, [6,7]) для конкретных функций корреляции случайных неоднородностей и конкретных диафрагм. Эти результаты, естественно, можно использовать для расчета корреляционных функций амплитуды, квадрата амплитуды поля или их флюктуаций, основываясь на формулах (23).

Заметим, наконец, что расчеты при $\bar{E} \neq 0$ можно провести аналогично, но результаты выражаются в виде более сложных формул.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Зверев, Акуст. ж., 3, 329 (1957).
2. A. D. Wheelon, J. Appl. Phys., 28, 684 (1957).
3. В. А. Красильников, В. И. Татарский, ДАН СССР, 88, 435 (1953).
4. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
5. Л. А. Чернов, Акуст. ж., 3, 360 (1957).
6. Э. А. Бляхман, Акуст. ж., 4, 128 (1958).

7. Э. А. Бляхман, Л. А. Чернов, Акуст. ж., 5, 21 (1959).
8. М. Н. Кром и Л. А. Чернов, Акуст. ж., 4, 341 (1958).
9. М. Н. Кром, Акуст. ж., 5, 45 (1959).
10. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
11. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 630 (1961).
12. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1957.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 апреля 1961 г.

ON INFLUENCE OF RECEIVING SYSTEM ON FLUCTUATIONS OF RECEIVED RADIATION

N. G. Denisov

Parameters fluctuations of the scattered radiation at a receiving system output (e. g. in a lens focus) are investigated. The correlation functions of complex field fluctuations are determined, which make it possible to find the statistical characteristics of amplitude and phase fluctuations of received radiation. The formulas have been obtained, which determine relationship between receiver input and output correlation functions.

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ И РЕЗУЛЬТАТАХ ИЗМЕРЕНИЯ ФЛЮКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ И ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ГЕНЕРАТОРОВ

A. H. Малахов, B. N. Никонов, T. D. Разина

Рассматривается чувствительность метода контура и метода линии задержки при измерении флюктуаций амплитуды и частоты колебания. Приводятся результаты измерения флюктуаций для генераторов на лампах с оксидным и вольфрамовым катодами.

В некоторых прикладных задачах радиофизики возникает необходимость исследования формы спектральной линии колебания. Известно, что к немонохроматичности спектральной линии приводят флюктуации частоты колебания. Наличие флюктуаций амплитуды также видоизменяет форму спектральной линии. Если флюктуации амплитуды и частоты распределены нормально, что обычно предполагается, то их спектральные плотности совершенно однозначно определяют форму спектральной линии колебания [1-6]. И, следовательно, в этом случае информация о спектральной линии колебания может быть получена из измерений этих спектральных плотностей.

В литературе известны два метода измерения спектральной плотности флюктуаций частоты—это метод контура [2] и метод линии задержки [3]. Для измерения амплитудных флюктуаций колебания обычно применяется прямой демодуляционный метод. В настоящей работе рассматривается чувствительность этих методов, обусловленная шумами измерительной аппаратуры. Кроме того, приводятся результаты экспериментального исследования методом контура флюктуаций амплитуды и частоты генераторов на обычных лампах с оксидным катодом и генераторов на лампах с вольфрамовым катодом, где, как известно, отсутствует фликкер-шум. Результаты этих измерений позволяют выяснить действительное влияние фликкер-шума лампы на флюктуации амплитуды и частоты.

1. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ МЕТОДОВ ИЗМЕРЕНИЯ

Блок-схема установки для измерения спектра флюктуаций частоты и амплитуды колебания изображена на рис. 1. На вход дискриминатора подается исследуемое квазимохроматическое колебание

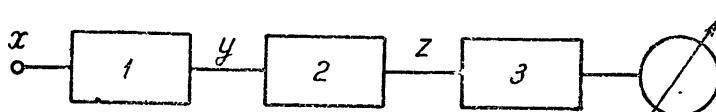


Рис. 1. Блок-схема установки для измерения спектра флюктуаций частоты и амплитуды колебания генератора:
1—дискриминатор, 2—детектор, 3—анализатор.

$$x(t) = A_0 [1 + \alpha(t)] \cos (\omega_0 t + \int v(t) dt), \quad (1.1)$$

где $\alpha(t)$ и $v(t)$ —случайные стационарные процессы, имеющие взаимную корреляционную функцию $\Phi_{\alpha v}(\tau) = \langle \alpha(t)v(t+\tau) \rangle$ (черта сверху обозначает статистическое усреднение), причем $\alpha=0$, $v=0$, $\alpha^2 \ll 1$, $v^2 \ll \omega_0^2$. Дискриминатором может служить или контур или система линии задержки. Его основная функция заключается в превращении частотной модуляции входного колебания в амплитудную модуляцию выходного колебания. (При измерении амплитудных флюктуаций колебание (1.1) либо подается на вход детектора помимо дискриминатора, либо принимаются меры, исключающие основную рабочую функцию этой системы.) На выходе детектора мы имеем колебание

$$y(t) = B_0 [1 + \beta(t)] \cos (\omega_0 t + \int v_1(t) dt). \quad (1.2)$$

Относительные амплитудные флюктуации $\beta(t)$ колебания $y(t)$ линейным образом зависят как от $\alpha(t)$, так и от $v(t)$, в результате чего можно написать следующее общее выражение для спектральной плотности флюктуаций $\beta(t)$:

$$\begin{aligned} W_\beta(\Omega, n) = & K_\alpha(\Omega, n) W_\alpha(\Omega) + K_v(\Omega, n) W_v(\Omega) + \\ & + K_{\alpha v}^0(\Omega, n) W_{\alpha v}^0(\Omega) + K_{\alpha v}^1(\Omega, n) W_{\alpha v}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $W_x(\Omega)$ —спектральная плотность процесса $x(t)$ на частоте Ω , n —некоторый параметр, определяемый настройкой дискриминатора, $K(\Omega, n)$ —частотные характеристики дискриминатора, $W_{\alpha v}^0(\Omega)$, $W_{\alpha v}^1(\Omega)$ —смешанные спектральные плотности*.

За детектором следует фильтр, пропускающий только низкие (по сравнению с ω_0) частоты. На выходе детектора и фильтра кроме постоянной составляющей \bar{z} (см. рис. 1) будут флюктуации $\Delta z(t)$, пропорциональные $\beta(t)$. Считая, что на рассматриваемых частотах Ω детектор не вносит никаких частотных искажений, будем иметь на выходе детектора полезный сигнал $\Delta z(t)$ со спектральной плотностью

$$W_{\Delta z}(\Omega, n) = \bar{z}^2 l^2 W_\beta(\Omega, n), \quad (1.4)$$

который поступает на анализатор спектра. В (1.4) l —числовой множитель, значение которого определяется типом детектора; для линейного детектора, например, $l=1$, для квадратичного $l=2$ и т. д.

При измерении спектральной плотности $W_{\Delta z}(\Omega)$, в общем случае достаточно малой, мы должны учитывать и собственные шумы аппаратуры $z_w(t)$. Эти шумы складываются, в основном, из шумов на выходе детектора $z_{w_d}(t)$ и приведенных ко входу шумов анализатора $z_{w_a}(t)$:

$$z_w(t) = z_{w_d}(t) + z_{w_a}(t).$$

Отсюда полное шумовое напряжение на входе анализатора, равное $\Delta z(t) + z_w(t)$, имеет спектральную плотность

$$W_{\Delta z}(\Omega) + W_{z_{w_d}}(\Omega) + W_{z_{w_a}}(\Omega). \quad (1.5)$$

* Смешанные спектральные плотности определены как

$$W_{\alpha v}^0(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\alpha v}(\tau) \cos(\Omega\tau) d\tau, \quad W_{\alpha v}^1(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\alpha v}(\tau) \sin(\Omega\tau) d\tau.$$

Нетрудно видеть, что в общем случае $W_{\alpha v}^1(\Omega) \neq 0$, поскольку $\Phi_{\alpha v}(\tau)$ в реальном генераторе имеет как четную ($\Phi_{\alpha v}^0(\tau)$), так и нечетную ($\Phi_{\alpha v}^1(\tau)$) части [4].

Собственные шумы определяют минимально обнаружимый сигнал $\Delta z(t)$ со спектральной плотностью

$$W_{\Delta z}^{\min}(\Omega) = W_{zw}(\Omega).$$

Это, в свою очередь, приводит к минимально обнаружимой спектральной плотности

$$W_{\beta}^{\min}(\Omega, n) = \frac{1}{\delta^2 \omega^2} W_{zw}(\Omega). \quad (1.6)$$

На основании (1.3), определяя функции $K(\Omega, n)$ для конкретных дискриминаторов, можно найти $W_{\alpha}^{\min}(\Omega)$, $W_{\gamma}^{\min}(\Omega)$ и т. д.

Ниже мы рассчитаем частотные характеристики $K_{\alpha}(\Omega, n)$, $K_{\gamma}(\Omega, n)$, $K_{\alpha\gamma}^0(\Omega, n)$ и $K_{\alpha\gamma}^1(\Omega, n)$ для конкретных методов измерений.

2. МЕТОД КОНТУРА

Задача о прохождении колебания $x(t)$ через колебательный контур рассматривалась Гореликом и Елкиным [6]; ими показано, что $\beta(t)$ связано с $\alpha(t)$ и $\nu(t)$ следующим уравнением:

$$\ddot{\beta} + 2\delta\dot{\beta} + \lambda^2\beta = \lambda^2\alpha + \dot{\delta}\alpha - \eta\nu. \quad (2.1)$$

Здесь $2\delta = \omega_k/Q_k = \Pi_k$ — полоса контура, настроенного на частоту ω_k и имеющего добротность Q_k , $\lambda^2 = \delta^2 + \eta^2$, $\eta = \omega_0 - \omega_k$ — расстройка. Записывая уравнение для β в момент времени $t+\tau$, перемножая его с (2.1) и проводя усреднение, нетрудно получить дифференциальное уравнение для функции корреляции $\Phi_{\beta}(\tau)$:

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}_{\beta}(\tau) + (2\lambda^2 + 4\delta^2)\dot{\Phi}_{\beta}(\tau) + \lambda^4\Phi_{\beta}(\tau) = \\ = -\delta^2\ddot{\Phi}_{\alpha}(\tau) + \lambda^4\Phi_{\alpha} + \eta^2\Phi_{\nu} - 2\delta\eta\dot{\Phi}_{\alpha\gamma}^1 + 2\lambda^2\eta\Phi_{\alpha\gamma}^0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Переходя от (2.2) известным образом к спектральным плотностям, будем иметь:

$$W_{\beta}(\Omega) = \frac{(\delta^2\Omega^2 + \lambda^4)W_{\alpha}(\Omega) + \eta^2W_{\nu}(\Omega) - 2\lambda^2\eta W_{\alpha\gamma}^0(\Omega) + 2\delta\eta\Omega W_{\alpha\gamma}^1(\Omega)}{(\lambda^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}. \quad (2.3)$$

Вводя в качестве указанного выше параметра n безразмерную расстройку $n = \eta/\delta$, на основании (2.3) и (1.3) можно получить:

$$K_{\alpha}(\Omega, n) = \frac{1 + b\Omega^2/\delta^2}{1 + a\Omega^2/\delta^2 + b\Omega^4/\delta^4}; \quad (2.4)$$

$$K_{\gamma}(\Omega, n) = \frac{c}{\delta^2} \frac{1}{1 + a\Omega^2/\delta^2 + b\Omega^4/\delta^4}; \quad (2.5)$$

$$K_{\alpha\gamma}^0(\Omega, n) = -\frac{2}{\delta} \sqrt{c} \frac{1}{1 + a\Omega^2/\delta^2 + b\Omega^4/\delta^4}; \quad (2.6)$$

$$K_{\alpha\gamma}^1(\Omega, n) = \frac{2}{\delta} \frac{c}{n} \frac{\Omega/\delta}{1 + a\Omega^2/\delta^2 + b\Omega^4/\delta^4}, \quad (2.7)$$

где

$$a = a(n) = \frac{3 - n^2}{(1+n^2)^2}, \quad b = b(n) = \frac{1}{(1+n^2)^2}, \quad c = c(n) = \frac{n^2}{(1+n^2)^2}.$$

Для целей измерения $W_{\beta}(\Omega, n)$ необходимо, во-первых, чтобы $W_{\beta}(\Omega, n)$ было по возможности большим и, во-вторых, чтобы $W_{\beta}(\Omega, n)$

без частотных искажений (условие квазистатичности) передавало спектральные плотности $W_\alpha(\Omega)$, $W_v(\Omega)$ и $W_{\alpha v}(\Omega)$. Исходя из этих требований, необходимо выбирать соответствующее затухание контура δ (полосу Π_k) и наивыгоднейшее значение расстройки n . Из (2.4)–(2.7) видно, что для выполнения условий квазистатичности необходимо, чтобы

$$b \Omega_{\max}^4 / \delta^4 \ll 1, \quad a \Omega_{\max}^2 / \delta^2 \ll 1,$$

где Ω_{\max} — максимальная частота, на которой производятся измерения. Учитывая, что в процессе измерения расстройка n принимает значения примерно от -1 до $+1$, нетрудно видеть, что указанные выше условия достаточно хорошо удовлетворяются, если полоса контура

$$\Pi_k \geq 3\Omega_{\max} = 6\pi F_{\max}. \quad (2.8)$$

Отсюда получаем следующее условие для необходимой добротности контура:

$$Q_k \leq f_0 / 3F_{\max}. \quad (2.9)$$

В дальнейшем будем считать, что условие (2.9) выполнено. Тогда формулы (2.4)–(2.7) переходят в следующие:

$$K_\alpha(\Omega, n) = 1; \quad (2.10)$$

$$K_v(\Omega, n) = Q_k^2 4n^2 / \omega_0^2 (1 + n^2)^2; \quad (2.11)$$

$$K_{\alpha v}^0(\Omega, n) = -Q_k 4n / \omega_0 (1 + n^2); \quad (2.12)$$

$$K_{\alpha v}^1(\Omega, n) = +Q_k 4n \Omega / \omega_0 (1 + n^2)^2 \delta. \quad (2.13)$$

Поскольку ранее было принято, что $\Omega \ll \delta$, то $K_{\alpha v}^1 \ll K_{\alpha v}^0$, и учитывать последнее слагаемое в (1.3) следует только, когда

$$W_{\alpha v}^1(\Omega) \geq \frac{\delta}{\Omega} W_{\alpha v}^0(\Omega). \quad (2.14)$$

Для обычных генераторов условие (2.14), по-видимому, не выполняется [4].

Рассмотрим способ определения отдельных слагаемых в формуле (1.3). Пусть, например, последним слагаемым можно пренебречь. Объединение (1.3) и (2.10)–(2.12) дает тогда:

$$W_\beta(\Omega, n) = W_\alpha(\Omega) + 4 \left(\frac{Q_k}{\omega_0} \right)^2 \frac{n^2}{(1+n^2)^2} W_v(\Omega) - 4 \frac{Q_k}{\omega_0} \frac{n}{1+n^2} W_{\alpha v}^0(\Omega). \quad (2.15)$$

Фиксируя частоту измерений Ω , нетрудно видеть, что зависимость $W_\beta(\Omega, n)$ от расстройки n имеет вид, указанный на рис. 2. Из этого рисунка, а также из (2.15) следует, что, измеряя $W_\beta(\Omega, -1)$, $W_\beta(\Omega, 0)$ и $W_\beta(\Omega, +1)$, легко определить искомые спектральные плотности, равные

$$W_\alpha(\Omega) = W_\beta(\Omega, 0); \quad (2.16)$$

$$W_v(\Omega) = Q_k^{-2} \omega_0^2 [W_\beta(\Omega, +1) + W_\beta(\Omega, -1) - 2W_\beta(\Omega, 0)]; \quad (2.17)$$

$$W_{\alpha v}^0(\Omega) = \frac{1}{4} Q_k^{-1} \omega_0 [W_\beta(\Omega, -1) - W_\beta(\Omega, +1)]. \quad (2.18)$$

Таким образом, определение спектральных плотностей флюктуаций амплитуды и частоты колебаний $W_\alpha(\Omega)$, $W_v(\Omega)$, $W_{\alpha v}^0(\Omega)$, $W_{\alpha v}^1(\Omega)$ с помощью метода контура заключается в измерении анализатором спектральных плотностей $W_{\Delta z}(\Omega, 0)$, $W_{\Delta z}(\Omega, +1)$, $W_{\Delta z}(\Omega, -1)$ и в последующем расчете с использованием формул (1.6), (2.16)–(2.18).

3. МЕТОД ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ

Метод линии задержки рассматривался в работах Берштейна и Троицкого [3, 6]. В этом случае $\beta(t)$ связано с $\alpha(t)$ и $v(t)$ следующим соотношением:

$$\beta(t) = \frac{1}{1+k^2+2k\cos\psi_0} \left\{ \alpha(t) + k^2\alpha(t+\tau_0) + k[\alpha(t) + \alpha(t+\tau_0)]\cos\psi_0 - k\sin\psi_0\Delta\varphi \right\}, \quad (3.1)$$

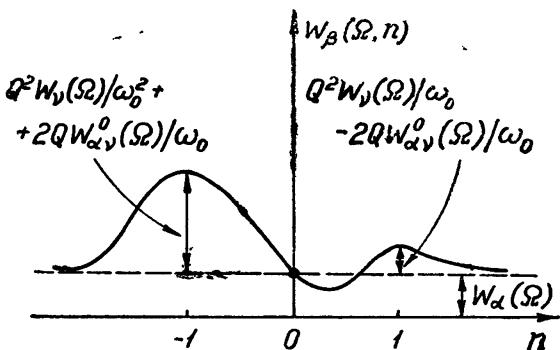


Рис. 2. Зависимость $W_\beta(\Omega, n)$ от n при фиксированном Ω для случая $W_{\alpha v}^1(\Omega) \equiv 0$ (метод контура).

где τ_0 — время задержки, $\psi_0 = \omega_0\tau_0$ — угол между вектором колебания X_τ , прошедшего линию задержки, и колебания X_0 , поданного непосредственно на вход детектора, k — отношение амплитуды колебания X_τ к амплитуде колебания X_0 , $\Delta\varphi$ — набег фазы исследуемого колебания за время задержки τ_0 , равный

$$\Delta\varphi = \varphi(t + \tau_0) - \varphi(t) = \int_t^{t+\tau_0} v(x) dx.$$

Записывая выражение для β в момент $t + \tau$, умножая его на (3.1) и проводя усреднение произведения, получим для функции корреляции β выражение

$$\begin{aligned} \Phi_\beta(\tau) &= \frac{1}{[1+k^2+2k\cos\psi_0]^2} \left\{ (1-k^2)^2\Phi_\alpha(\tau) + [k(k+\cos\psi_0)(1+k\cos\psi_0) \times \right. \\ &\times (\Phi_\alpha(\tau-\tau_0) + 2\Phi_\alpha(\tau) + \Phi_\alpha(\tau+\tau_0))] + k^2\sin^2\psi_0 \int_0^{\tau_0} (\tau_0-y)(\Phi_v(\tau+y) + \right. \\ &+ \Phi_v(\tau-y)) dy - k\sin\psi_0 ((1+k\cos\psi_0) \int_0^{\tau_0} (\Phi_{\alpha v}(\tau+x) + \Phi_{\alpha v}(\tau-x)) dx + \\ &+ (k^2+k\cos\psi_0) \int_0^{\tau_0} [\Phi_{\alpha v}(\tau+x-\tau_0) + \Phi_{\alpha v}(\tau-x+\tau_0)] dx \Big\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Переходя от (3.2) известным образом к спектральным плотностям, будем иметь:

$$\begin{aligned}
 W_\beta(\Omega) = & \frac{1}{[1+k^2+2k\cos\psi_0]^2} \left\{ \left[(1-k^2)^2 + 4k(k+\cos\psi_0)(1+k\cos\psi_0) \times \right. \right. \\
 & \times \cos^2 \frac{\Omega\tau_0}{2} \left. \right] W_\alpha(\Omega) + 4k^2 \sin^2 \psi_0 \frac{2}{\Omega^2} W_\alpha(\Omega) - 2k[1+k^2+2k\cos\psi_0] \times \\
 & \times \sin \psi_0 \frac{\sin(\Omega\tau_0)}{\Omega} W_{\alpha\gamma}^0(\Omega) - 4k(1-k^2) \sin \psi_0 \frac{2}{\Omega} W_{\alpha\gamma}^1(\Omega) \Big\}. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Вводя параметр $n = \operatorname{ctg}\psi_0$ (целесообразность выбора такого n будет видна из дальнейшего), на основании (3.3) и (1.4) можно получить:

$$K_\alpha(\Omega, n) = b^2(n) [(1-k^2)^2 + 4k(k+\cos\psi_0)(1+k\cos\psi_0)] \cos^2 \frac{\Omega\tau_0}{2}; \tag{3.4}$$

$$K_\nu(\Omega, n) = b^2(n) k^2 \sin^2 \psi_0 \frac{\sin^2(\Omega\tau_0/2)}{(\Omega\tau_0/2)^2} \tau_0^2; \tag{3.5}$$

$$K_{\alpha\gamma}^0(\Omega, n) = -2b(n)k \sin \psi_0 \frac{\sin(\Omega\tau_0)}{\Omega\tau_0} \tau_0; \tag{3.6}$$

$$K_{\alpha\gamma}^1(\Omega, n) = -b^2(n)(1-k^2)k \sin \psi_0 \frac{\sin^2(\Omega\tau_0/2)}{(\Omega\tau_0/2)^2} \Omega\tau_0^2. \tag{3.7}$$

Здесь $\cos\psi_0$ и $\sin\psi_0$ являются функциями n , а

$$b(n) = (1+k^2+2k\cos\psi_0)^{-1}.$$

Исходя из тех же требований при измерении $W_\beta(\Omega, n)$, что и в методе контура, необходимо выбрать соответствующее время задержки τ_0 и наивыгоднейшие значения k и ψ_0 . Совершенно очевидно, что для выполнения условия квазистатичности необходимо, чтобы $\Omega_{\max} \tau_0 / 2\pi \ll 1$, где Ω_{\max} — максимальная частота, на которой производятся измерения. Это условие будет удовлетворяться, если

$$\tau_0 \ll 1/\Omega_{\max}. \tag{3.8}$$

Кроме того, как показано в работах [3,6], можно так подобрать условия измерения, чтобы $K_\alpha(\Omega, n)$ не зависела от Ω . Согласно (3.4), это будет выполнено, когда коэффициент перед $\cos^2(\Omega\tau_0/2)$ обратится в нуль. Для этого достаточно соблюдения одного из условий:

$$k = -\cos\psi_0; \quad k = -1/\cos\psi_0. \tag{3.9}$$

При $k = -\cos\psi_0$ формулы (3.4)–(3.7) переходят в следующие:

$$K_\alpha(\Omega, n) = 1; \tag{3.10}$$

$$K_\nu(\Omega, n) = n^2 Q_\alpha^2 \omega_0^{-2} = n^2 (Q_\alpha/\omega_0)^2; \tag{3.11}$$

$$K_{\alpha\gamma}^0(\Omega, n) = 2n Q_\alpha \omega_0^{-1} = 2n \frac{Q_\alpha}{\omega_0}; \tag{3.12}$$

$$K_{\alpha\gamma}^1(\Omega, n) = n \frac{Q_\alpha}{\omega_0} \Omega\tau_0. \tag{3.13}$$

При $k = -1/\cos \phi_0$ формулы (3.10)–(3.12) не изменяются, а в формуле (3.13) меняется знак:

$$K_{\alpha\nu}^1(\Omega, n) = -nQ_\nu(\Omega\tau_0/\omega_0). \quad (3.13a)$$

В формулах (3.11)–(3.13) введено обозначение $\tau_0\omega_0 = Q_\nu$ — „добротность“ линии задержки. Ввиду условия (3.8) имеем, как и раньше, $K_{\alpha\nu}^1 \ll K_{\alpha\nu}^0$. Поэтому можно опустить последний член в (1.3). Тогда спектры $W_\beta(\Omega)$ при обоих условиях (3.9) будут тождественными.

Рассмотрим способ определения отдельных слагаемых по измерениям спектральной плотности $W_\beta(\Omega, n)$. Выбирая одно из условий (3.9), можем переписать (1.3) с учетом (3.10)–(3.12):

$$W_\beta(\Omega, n) = W_\alpha(\Omega) + n^2 \left(\frac{Q_\nu}{\omega_0} \right)^2 W_\nu(\Omega) + 2n \left(\frac{Q_\nu}{\omega_0} \right) W_{\alpha\nu}^0(\Omega). \quad (3.14)$$

Фиксируя частоту измерений Ω , нетрудно видеть, что в нашем случае зависимость $W_\beta(n, \Omega)$ от параметра n имеет вид, указанный на рис. 3. Отсюда легко найти, что

$$W_\alpha(\Omega) = W_\beta(\Omega, 0); \quad (3.15)$$

$$W_\nu(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{2n^2 Q_\nu^2} [W_\beta(\Omega, +n) + W_\beta(\Omega, -n) - 2W_\beta(\Omega, 0)]; \quad (3.16)$$

$$W_{\alpha\nu}^0(\Omega) = \frac{\omega_0}{4nQ_\nu} [W_\beta(\Omega, +n) - W_\beta(\Omega, -n)]. \quad (3.17)$$

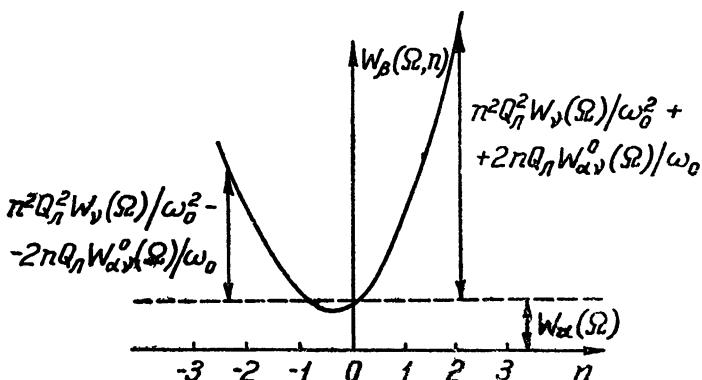


Рис. 3. Зависимость $W_\beta(\Omega, n)$ от n при фиксированном Ω для случая $W_{\alpha\nu}^1(\Omega) \equiv 0$ (метод линии задержки).

Таким образом, определение спектральных плотностей флюктуаций амплитуды и частоты колебания $W_\alpha(\Omega)$, $W_\nu(\Omega)$, $W_{\alpha\nu}^0(\Omega)$ и $W_{\alpha\nu}^1(\Omega)$ с помощью метода линии задержки заключается (так же, как и в методе контура) в измерении анализатором спектральных плотностей $W_{\Delta z}(\Omega, 0)$, $W_{\Delta z}(\Omega, n)$, $W_{\Delta z}(\Omega, -n)$ и в последующих вычислениях с использованием формул (1.6), (3.15)–(3.17).

4. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ МЕТОДА КОНТУРА И МЕТОДА ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ

Рассмотрим чувствительность обоих методов, определяемую собственными шумами аппаратуры.

Как уже отмечалось в первом разделе, представляет интерес выражение чувствительности не через минимально обнаружимые флюк-

туации $\beta(t)$, а через минимально обнаружимые амплитудные флюктуации $\alpha(t)$ или через минимально обнаружимые флюктуации частоты $\nu(t)$ исследуемого колебания. Для этого предположим, что флюктуации $\beta(t)$ порождаются или только флюктуациями $\alpha(t)$ или только флюктуациями $\nu(t)$. Тогда (считая условия (2.9) и (3.8) выполненными) получим:

$$W_{\alpha}^{\min}(\Omega) = \frac{1}{l^2 z^2} W_{z\text{ш}}(\Omega); \quad (4.1)$$

$$W_{\nu}^{\min}(\Omega) = \frac{1}{K_{\nu}(\Omega, n)} \frac{1}{l^2 z^2} W_{z\text{ш}}(\Omega). \quad (4.2)$$

Рассмотрим собственные шумы аппаратуры*

$$W_{z\text{ш}}(\Omega) = W_{z\text{шд}}(\Omega) + W_{z\text{ша}}(\Omega). \quad (4.3)$$

Собственные шумы детектора в исследуемой области частот Ω (от 1 Гц до 1 мГц) порождаются фликкер- и дробовым шумом; первый из них определяет $W_{z\text{шд}}(\Omega)$ на низких частотах, второй — на высоких. Поскольку интенсивность фликкер-шума падает с ростом частоты Ω , то и $W_{z\text{шд}}(\Omega)$ падает с ростом Ω (по-видимому, для кристаллического детектора вплоть до $\Omega/2\pi=1$ мГц). Таким образом, $W^{\min}(\Omega)$ также падает с ростом Ω . Имеет смысл оценить лишь худшую чувствительность аппаратуры, которая, согласно сказанному ранее, будет иметь место на низких частотах, где основным шумом детектора является фликкер-шум.

Известно [7], что при возбуждении кристаллических детекторов полем высокой частоты они обладают фликкер-шумом, спектральная плотность которого равна

$$W_{z\text{шд}}(\Omega) = \bar{z}^2 E / i_0^\beta \Omega^\gamma. \quad (4.4)$$

Здесь параметры β и γ принимают значения, близкие к единице, i_0 — постоянная составляющая тока, протекающего через кристалл. Если положить $\beta = \gamma = 1$, то $E = 10^{-10} \div 10^{-13}$ а. Разброс значений E связан с тем, что E сильно зависит от типа и экземпляра кристаллического диода. Выбирая $i_0 = 1$ ма, будем иметь:

$$W_{z\text{шд}} = \bar{z}^2 \frac{10^{-7} \div 10^{-10}}{\Omega}. \quad (4.5)$$

Перейдем к рассмотрению шумов анализатора. В отличие от шумов детектора, их спектральная плотность $W_{z\text{ша}}(\Omega)$ не зависит от z . Это приводит к тому, что шумы анализатора входят в формулы чувствительности в виде $W_{z\text{ша}}(\Omega)/\bar{z}^2$. В самом деле, учитывая (4.5), можно написать:

$$\frac{1}{l^2 z^2} W_{z\text{ш}}(\Omega) = \frac{1}{l^2} \left[\frac{10^{-7} \div 10^{-10}}{\Omega} + \frac{1}{\bar{z}^2} W_{z\text{ша}}(\Omega) \right]. \quad (4.6)$$

Выбирая, в принципе, достаточно большое \bar{z} , собственными шумами анализатора всегда можно пренебречь по сравнению с шумами детектора и, тем самым, пренебречь их влиянием на чувствительность аппаратуры. Оценка величины собственных шумов обычных анализаторов показывает, что даже при $\bar{z} = 1$ второе слагаемое в формуле (4.6)

* Мы рассматриваем только низкочастотные шумы. Как показывают оценки, которые подтверждаются экспериментом, высокочастотными шумами блоков, стоящих до детектора, можно пренебречь.

можно не учитывать. Поэтому будем считать окончательно (полагая также $l = l_0$), что

$$\frac{1}{l^2 z^2} W_{zw}(\Omega) = \frac{10^{-7} + 10^{-10}}{\Omega}. \quad (4.7)$$

Объединяя (4.1), (4.2) и (4.7), получим:

$$W_a^{\min}(\Omega) = \frac{10^{-7} + 10^{-10}}{\Omega}; \quad (4.8)$$

$$W_v^{\min}(\Omega) = \frac{1}{K_v(\Omega, n)} \frac{10^{-7} + 10^{-10}}{\Omega}. \quad (4.9)$$

Формулы (4.8) и (4.9) определяют искомую чувствительность обоих методов.

В методе контура, выбирая $n = \pm 1$, будем иметь для минимально обнаружимых частотных флюктуаций на основании (2.11) и (4.9) выражение:

$$W_v^{\min}(\Omega) = \left(\frac{\omega_0}{Q_k} \right)^2 \frac{10^{-7} + 10^{-10}}{\Omega}. \quad (4.10)$$

В случае метода линии задержки минимально обнаружимые частотные флюктуации, согласно (3.11) и (4.9), равны

$$W_v^{\min}(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{n^2 Q_l^2} \frac{10^{-7} + 10^{-10}}{\Omega}. \quad (4.11)$$

Сравнивая (4.10) и (4.11), легко видеть, что чувствительность метода линии задержки к частотным флюктуациям эквивалентна чувствительности метода контура с добротностью контура, равной

$$Q_k = Q_{k\alpha} \equiv n Q_l = \operatorname{ctg} \phi_0 \omega_0 \tau_0. \quad (4.12)$$

Таким образом, при выполнении условия (4.12) чувствительность обоих методов одинакова. Если $Q_k < n Q_l$, то метод контура менее чувствителен, чем метод линии задержки. Если $Q_k > n Q_l$, то, наоборот, метод линии задержки обладает меньшей чувствительностью, чем метод контура.

Рассмотрим подробнее соотношение между Q_k и $n Q_l \equiv Q_{k\alpha}$. Казалось бы, метод линии всегда лучше метода контура, ибо $n = \operatorname{ctg} \phi_0$ всегда можно сделать сколь угодно большим, выбирая ϕ_0 достаточно близко к $2\pi m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Однако при таком ϕ_0 очень сильно возрастают технические трудности удержания постоянства ϕ_0 , так как начинают сказываться флюктуации параметров линии и т. п. Вместе с этим требуется большая мощность от измеряемого генератора. Опыт показывает, что следует ограничиться величиной $\phi_0 \approx \pm 5^\circ + 2\pi m$, т. е. $n = 10$, что мы и примем для дальнейшего.

Итак, пусть частота измеряемого колебания равна f_0 , а максимальная частота измерений — F_{\max} . В этом случае (2.9) и (3.7) дают:

$$Q_k = \frac{f_0}{3F_{\max}}; \\ Q_{k\alpha} = 10 Q_l = \frac{10 f_0}{F_{\max}} = 30 Q_k. \quad (4.13)$$

Следовательно, даже при $n = 10$

$$Q_{k\alpha} \gg Q_k. \quad (4.14)$$

Однако условие (4.14) не всегда легко может быть выполнено. Дело в том, что $\tau_0 \approx 1/2\pi F_{\max}$, и если f_0 мало (F_{\max} невелико), то для сохранения условия (4.14) потребуется очень большое τ_0 . Последнее технически осуществить не всегда возможно; если же брать малое τ_0 , то при уменьшении f_0 добротность линии падает, так как $Q_L = \omega_0 \tau_0$ и может оказаться, что $10 Q_L < Q_k$.

Рассмотрим два примера. Пусть $f_0 = 10^{10}$ Гц и $F_{\max} = 1,5 \cdot 10^5$ Гц. Для неискаженного измерения методом контура требуется контур с добротностью $Q_k \leq 2,2 \cdot 10^4$ (см. раздел 2). С другой стороны, для неискаженного измерения методом задержки ее время задержки должно быть равно

$$\tau_0 \leq 1/2\pi 1,5 \cdot 10^5 \approx 10^{-6} \text{ сек.}$$

Это соответствует длине кабеля $L \leq 300$ м. При этом эквивалентная добротность контура $Q_{k\alpha} = 10 Q_L = 10 \cdot 2\pi f_0 \tau_0 = 6,6 \cdot 10^5 = 30 Q_k$. Пусть теперь $f_0 = 10^5$ Гц, $F_{\max} = 300$ Гц. При этих условиях необходим контур с добротностью $Q_k \leq 100$. Чтобы метод задержки дал в этих условиях эквивалентную добротность $Q_{k\alpha} = 10 Q_L = 10 \cdot 2\pi f_0 \tau_0 = 100$, необходимо время задержки должно быть $\tau_0 = 1,6 \cdot 10^{-5}$ сек ($L = 4800$ м). Если имеющаяся линия такова, что $L < 4800$ м, то следует использовать метод контура.

Таким образом, чувствительность обоих методов при использовании кристаллических детекторов определяется формулой (4.8) и уравнением

$$W_{\min}(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{Q^2} \frac{10^{-7} \div 10^{-10}}{\Omega}, \quad (4.15)$$

где $Q = Q_k$ или $Q = Q_{k\alpha}$ в зависимости от применяемого метода.

Совершенно аналогично может быть проведен расчет чувствительности рассмотренных методов при использовании ламповых детекторов. Нетрудно видеть, что, например, для диода 6Х6, спектральная плотность фликкер-шума которого (см., например, [10])

$$W_{\text{шум}}(\Omega) \approx z^2 \frac{10^{-14}}{\Omega}, \quad (4.16)$$

чувствительность определяется соотношениями:

$$W_{\alpha}^{\min}(\Omega) \approx \frac{10^{-14}}{\Omega}, \quad W_{\text{шум}}^{\min}(\Omega) \approx \frac{\omega_0^2}{Q^2} \frac{10^{-14}}{\Omega}. \quad (4.17)$$

Разумеется, формулы (4.16), (4.17), как и предыдущие аналогичные формулы, справедливы лишь для тех частот Ω , на которых фликкер-шум детектора превышает дробовой шум. Для 6Х6 при токе 1 мА фликкер-шум становится сравнимым с дробовым на частотах порядка 1 кГц.

5. ИЗМЕРЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКОЙ ШИРИНЫ ЛИНИИ НЕКОТОРЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

В этом разделе излагаются результаты экспериментального исследования флюктуаций амплитуды и частоты некоторых генераторов, проведенного методом контура. Главной задачей этого эксперимента было выяснение влияния фликкер-шума лампы на флюктуации частоты генератора, что теоретически уже обсуждалось в литературе [8, 9]. Для этого наряду с обычной лампой с оксидным катодом использовалась лампа с вольфрамовым катодом, у которой фликкер-шум практически отсутствует (см., например, [10]).

а) Условия эксперимента. Блок-схема установки для измерения флюктуаций амплитуды и частоты генераторов представлена на рис. 4. Исследовались две серии генераторов с контуром в цепи анода: генераторы первой серии имели частоту 10^5 Гц, второй— $1,25 \cdot 10^6$ Гц. Каждая серия включала в себя два генератора: один на лампе с оксидным катодом, другой на лампе с вольфрамовым катодом. Первый генератор на частоту 10^5 Гц был собран на лампе 6Ж8 и имел амплитуду колебаний около 200 в. Лампой с вольфрамовым катодом для второго генератора служил старый триод П-7. Амплитуда колебаний этого генератора была 45 в. Генераторы на частоту $1,25 \cdot 10^6$ Гц были собраны на лампах 6Ж1П и П-7. Амплитуды колебаний этих генераторов были равны соответственно 110 в и 30 в.

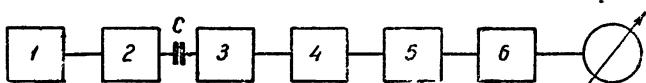


Рис. 4. Блок-схема экспериментальной установки:

1—исследуемый генератор; 2—катодный повторитель; $C=0,5 \text{ пФ}$ —переходная емкость; 3—контур-дискриминатор; 4—катодный повторитель; 5—детектор и фильтр; 6—анализатор спектра.

Контур-дискриминатор состоял из катушки, намотанной из литцендрата, и воздушного конденсатора переменной емкости, которым можно было менять относительную расстройку контура n в пределах от -3 до $+3$. Контур имел добротность 100 на частоте 10^5 Гц и 60 на частоте $1,25 \cdot 10^6$ Гц. Чтобы уничтожить влияние предыдущего и последующего каскадов, колебательное напряжение подавалось на контур через малую емкость $C=0,5 \text{ пФ}$, а снималось с помощью катодного повторителя.

Детектор с фильтром низких частот был собран на лампе 6Х6 и проволочных сопротивлениях. Для исследования спектральной плотности шумов использовался анализатор спектра с диапазоном частот от 1 до 300 Гц и полосой 0,5 Гц (этот анализатор аналогичен описанному в [11]).

Собственные шумы детектора и анализатора были много меньше измеряемых шумов, так что мы ими пренебрегли. Тем самым на выходе анализатора получалось непосредственно $W_{\Delta z}(F, n)$ (см. (1.4)).

б) Результаты измерений. После соответствующей обработки результатов измерений (см. раздел 2) была получена зависимость $W_\beta(F, n)$ от расстройки n при определенном значении F . На рис. 5 и 6 изображены $W_\beta(F, n)$ при $F=5$ Гц для генераторов первой и второй серий соответственно. Из этих графиков можно определить, согласно (2.17), спектральную плотность флюктуаций частоты $W_\gamma(F)$ для точки $F=5$ Гц. Для получения всей зависимости $W_\gamma(F)$ от F были измерены спектры $W_{\Delta z}(F, n)$ в зависимости от F для трех значений $n=0, \pm 1$. Как показал эксперимент, полученные отсюда зависимости $W_\gamma(F)$ имели вид:

$$W_\gamma(F) = A/F^\alpha \quad (\alpha \approx 1). \quad (5.1)$$

Отсюда нетрудно было вычислить техническую ширину спектральной линии генераторов по формуле [12]:

$$\Delta f = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[\int_0^\infty W_\gamma(F) dF \right]^{1/2}. \quad (5.2)$$

Заменяя пределы интегрирования на 1 Гц и 300 Гц, получим значение

Δf за время порядка 1 сек (размытие спектральной линии флюктуациями частоты (5.1) является процессом нестационарным; ср. [1³]).

Рис. 5. Зависимость $W_\beta(F, n)$ от n при $F=5$ гц для генераторов первой серии:

...—для генератора на лампе с оксидным катодом, $\times \times \times$ —для генератора на лампе с вольфрамовым катодом.

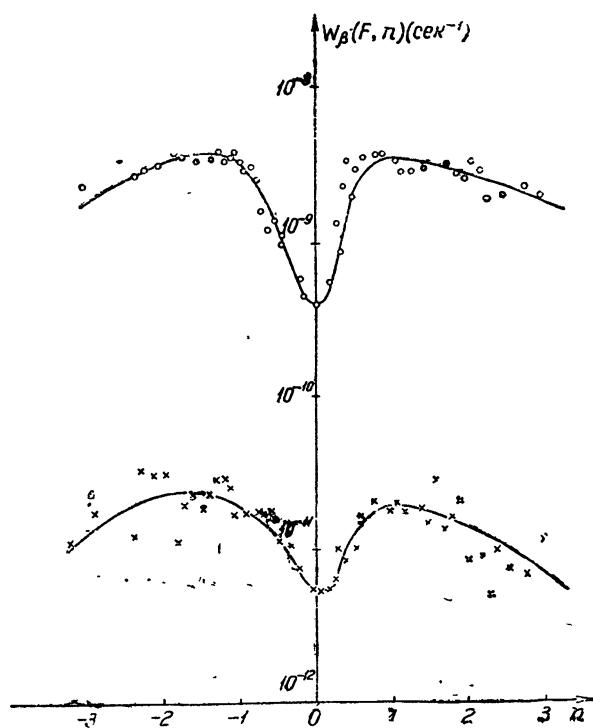
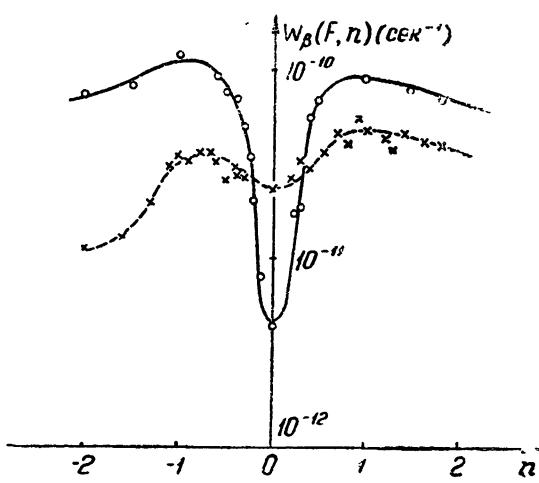


Рис. 6. Зависимость $W_\beta(F, n)$ от n при $F=5$ гц для генераторов второй серии:

...—для генератора на лампе с оксидным катодом, $\times \times \times$ —для генератора на лампе с вольфрамовым катодом.



В таблице 1 приведены значения относительной ширины линии $\delta f = \Delta f/f_0$ для исследованных генераторов.

Таблица 1

Частота	Генератор	
	с оксидным катодом	с вольфрамовым катодом
$f_0 = 10^5$ гц	10^{-6}	10^{-7}
$f_0 = 1,25 \cdot 10^6$ гц	$5 \cdot 10^{-7}$	10^{-7}

Из таблицы 1 ясно, что простая замена оксидного катода на вольфрамовый (в генераторах заменялись лишь лампы 6Ж8 и 6ЖКП на П-7, остальные детали схемы оставались прежними) существенно уменьшает ширину линии.

Эти результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Принимая во внимание результаты измерения $W_s(F)$ для генератора на лампе 6ЖКП на частоте $f_0 = 190 \text{ мгц}$ [14], дающие значение $\delta f \approx 10^{-7}$, можно, по-видимому, утверждать, что в широких пределах изменения f_0 (по крайней мере, от 10^6 гц до $2 \cdot 10^8 \text{ гц}$) относительная техническая ширина линии генератора на лампе с оксидным катодом равна $10^{-6} \div 10^{-7}$ за время наблюдения порядка 1 сек.

2. Как показывают теоретические оценки [8, 9, 13] и настоящий эксперимент, существенную долю в δf для генераторов на лампах с оксидными катодами вносит фликкер-шум ламп.

Наконец, результаты эксперимента позволяют надеяться на определенное уменьшение технической ширины линии в генераторах СВЧ (например, клистронах) при замене оксидного катода вольфрамовым.

Авторы приносят благодарность И. Л. Берштейну за полезные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Middleton, Quart. Appl. Math., 9, 337; 10, 35 (1952).
2. D. Middleton, Trans. IRE, ED-1, 56 (1954).
3. И. Л. Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., 14, 145 (1950).
4. А. Н. Малахов, В. Н. Никонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 104 (1961).
5. Г. С. Горелик, Г. А. Елкин, Радиотехника и электроника, 2, 28 (1957).
6. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 1, 818 (1956).
7. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 1001 (1960).¹
8. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 20 (1958); 2, 573 (1959).
9. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 241 (1960).
10. А. И. Чикин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 419 (1960).
11. А. Н. Малахов, Приборы и техника эксперимента, 1, 79 (1958).
12. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 2, 1295 (1957).
13. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 4, 54 (1959).
14. Ю. А. Драгин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 5—6, 93 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
8 февраля 1961 г.

ON SOME METHODS AND RESULTS OF MEASUREMENT OF AMPLITUDE AND FREQUENCY FLUCTUATIONS IN GENERATORS

A. N. Malakhov, V. N. Nikonov, T. D. Razina

The sensitivity of the resonator method and delay line method has been examined in measurement of amplitude and frequency fluctuations. The fluctuations measurement results are given for oscillators with oxide-coated and tungsten cathodes.

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ИСТОЧНИКОВ НАД ПЛОСКОСТЬЮ С СИНУСОИДАЛЬНО МОДУЛИРОВАННЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ ИМПЕДАНСОМ

В. И. Таланов

Рассчитано волновое поле, создаваемое над плоскостью с синусоидально изменяющимся импедансом нитью магнитного тока. Выяснены особенности возбуждения поверхностных и квазиволн в такой системе, а также связь этих полей с диаграммой направленности пространственной волны.

В работе [1] были рассмотрены свободные волны над бесконечной плоскостью с синусоидально изменяющимся поверхностным импедансом, локализованные в той или иной степени вблизи этой плоскости. Такие волны в зависимости от параметров импедансной структуры могут быть двух типов. Прежде всего это чисто поверхностные волны, все пространственные гармоники которых являются медленными; поле таких волн полностью сосредоточено вблизи импедансной плоскости. Во-вторых, это волны, содержащие не только медленные, но и быстрые пространственные гармоники, в результате чего имеет место излучение энергии из приповерхностного слоя. Такие волны затухают в направлении распространения их вдоль структуры.

Волны второго типа, названные в работе [1] квазиволнами, строго говоря, должны быть, в свою очередь, разбиты на две группы. В том случае, если быстрыми являются обратные гармоники, то, как нетрудно убедиться, поле последних хотя и медленно (по сравнению с полем замедленных гармоник), но все-таки убывает (по экспоненциальному закону) по мере удаления от направляющей плоскости. Скорость этого убывания, связанная со скоростью затухания волн вдоль структуры, зависит от глубины модуляции поверхностного импеданса. Таким образом, эти волны, несмотря на наличие быстрых гармоник, сохраняют присущее волнам первого типа свойство локализации энергии в некотором слое вблизи направляющей поверхности. Назовем волны этой группы слабо локализованными поверхностными волнами. При рассмотрении общих свойств, характерных как для волн с медленными гармониками, так и для волн с обратными быстрыми гармониками, и те и другие будем называть просто поверхностными волнами.

Если в числе быстрых гармоник имеются и прямые, то поле последних оказывается экспоненциально нарастающим при удалении от импедансной плоскости. За волнами этой группы мы сохраним термин „квазиволновые“, понимая под этим, что волна имеет структуру, присущую обычным поверхностным волнам лишь в слое, прилегающем непосредственно к поверхности импедансной структуры *.

* Необходимость в рассмотрении волн, обладающих описанным свойством, возникает всякий раз, когда приходится иметь дело с излучателями, формирование диаграмм которых осуществляется с помощью волноводных структур, канализирующих быстрые ($v_f > c$) волны. Примером может служить волноводно-щелевая антенна бегущей волны [2]. Поля в таких антенах в зарубежной литературе получили специальное назва-

В работе [1] поверхностные волны изучались безотносительно к конкретному способу их возбуждения. Между тем очевидно, что эти волны должны составлять лишь часть общего волнового комплекса, возбуждаемого произвольным распределением источников, заданных в ограниченной области пространства. Что же касается квазиволновой волны, то она, очевидно, даже и не может быть возбуждена никаким реальным источником. Тем не менее, рассмотрение этой волны оказывается полезным для выяснения основных особенностей формирования диаграмм направленности с помощью модулированных импедансных структур [1]. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть полное волновое поле, создаваемое простейшими источниками над плоскостью с периодически изменяющимся импедансом, с тем, чтобы выяснить более детально как особенности возбуждения поверхностных и квазиволновых или близких к ним по структуре полей, так и роль этих полей в формировании диаграмм направленности заданных источников. Этому вопросу посвящена настоящая работа, в которой рассмотрено поле, возбуждаемое бесконечной нитью магнитного тока над плоскостью с синусоидально изменяющимся поверхностным импедансом.

1. ПОСТАНОВКА И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пусть над плоскостью $x = 0$ (рис. 1), характеризуемой импедансным краевым условием

$$E_z = Z(z) H_y, \quad (1.1)$$

где

$$Z(z) = iZ_0 [Q_0 + Q_1 \sin(\beta kz)] \quad (\operatorname{Re} Z = 0);$$

$$Z_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}; \quad k = \omega \sqrt{\epsilon\mu}; \quad \beta = 2\pi/kD,$$

расположена нить магнитного тока I^m , проходящая через точку $x=H$, $z=z_0$ параллельно оси y .

Поле, возбуждаемое таким источником, можно представить в виде суммы первичного поля

$$H_n = \frac{\omega e I^m}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz|x-H|-ih(z-z_0)} \frac{dh}{x}, \quad (1.2)$$

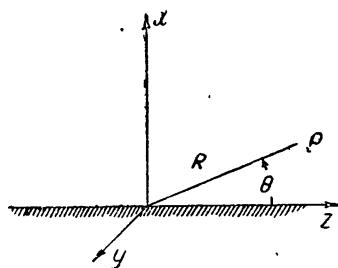


Рис. 1.

где $x = \sqrt{k^2 - h^2}$, и вторичного поля H_v , обусловленного влиянием импедансной плоскости на поле H_n . Вторичное поле, учитывая периодический характер граничных условий на плоскости $x = 0$, представим в виде:

$$H_v = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(h) e^{-ih_n z - ix_n x} dh, \quad (1.3)$$

где $h_n = h + k\beta n$, $h_0 = h$, $x_n = \sqrt{k^2 - h_n^2}$.

Поля (1.2) и (1.3) будут удовлетворять принципу излучения при $x \rightarrow \infty$, если знаки квадратных корней в выражениях для x_n при всех n выбирать таким образом, чтобы выполнялось условие

ние «волны с утечкой» (leaky waves), однако в отечественной литературе, насколько нам известно, в этом вопросе не сложилось укоренившейся терминологии.

$$\operatorname{Im} \alpha_n < 0, \quad (1.4)$$

необходимое также для сходимости интегралов. Контур интегрирования в (1.2) и (1.3) проходит по действительной оси, на которой (при действительном k) лежат точки ветвления подынтегральных функций

$$h = \pm k + k\beta m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.5)$$

определеняемые условием

$$\alpha_m = 0.$$

Для однозначного выбора направлений обхода этих точек можно считать, что волновое число k комплексно: $k = k_1 - ik_2$, где $k_2 > 0$ — сколь угодно малая, но конечная величина. При этом точки ветвления (1.5) смещаются в отрицательно мнимую или положительно мнимую полу-плоскость, как показано на рис. 2. В окончательных выражениях всегда будем полагать $k_2 = 0$.

Уравнения для амплитуд пространственных гармоник $a_n(h)$ получим, подставляя сумму полей H_p и H_b в граничное условие (1.1) и приравнивая нулю коэффициенты при функциях $e^{-ih_n z}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$\begin{aligned} a_{-1} a_{-1} + B(a_0 - a_{-2}) &= -bB; & \alpha_0 a_0 + B(a_1 - a_{-1}) &= -b \tilde{a}_0; \\ \alpha_1 a_1 + B(a_2 - a_0) &= bB; \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \alpha_n a_n + B(a_{n+1} - a_{n-1}) &= 0 \\ (|n| \geq 2). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь

$$b = \frac{\omega e^{Im}}{4\pi x} e^{-ixH + ihx_0};$$

$$\tilde{a}_0 = kQ_0 + ix,$$

остальные обозначения с точностью до размерного множителя k те же, что и в работе [1]:

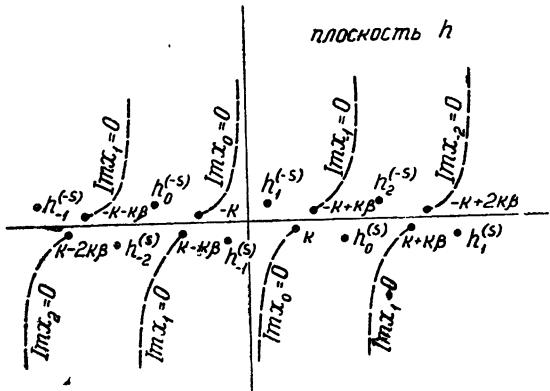


Рис. 2.

$$\alpha_n = kQ_0 - ix_n, \quad B = kQ_1/2i. \quad (1.8)$$

Для решения системы уравнений (1.6)–(1.7) введем в рассмотрение непрерывные дроби *

$$D_n = \alpha_n + \frac{B^2}{\alpha_{n+1}} + \frac{B^2}{\alpha_{n+2}} + \dots; \quad (1.9)$$

$$C_n = \alpha_n + \frac{B^2}{\alpha_{n-1}} + \frac{B^2}{\alpha_{n-2}} + \dots, \quad (1.9a)$$

* Введенные здесь величины D_n и C_n связаны с использованной в [1] величиной T_n очевидными соотношениями

$$D_{n+1} = B^2/kT_n, \quad C_n = -kT_n.$$

определяемые соответственно рекуррентными соотношениями

$$D_n = \alpha_n + \frac{B^2}{D_{n+1}}, \quad C_n = \alpha_n + \frac{B^2}{C_{n-1}}.$$

Нетрудно видеть, что к этим соотношениям приводятся уравнения (1.7), если обозначить

$$B \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = D_n \quad (n \geq 2); \quad (1.10)$$

$$-B \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = C_n \quad (n \leq -2). \quad (1.10a)$$

Из (1.10) и (1.10a) соответственно при $n = 2$ и $n = -2$ находим:

$$B \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = D_2, \quad -B \frac{\alpha_{-1}}{\alpha_{-2}} = C_{-2}.$$

Решая эти уравнения совместно с (1.6), для α_{-1} , α_0 , α_1 получим следующие выражения:

$$\alpha_{-1} = bB \frac{\tilde{\alpha}_0 - \alpha_0}{C_{-1}\Delta}; \quad \alpha_0 = -b \frac{\tilde{\Delta}}{\Delta}; \quad \alpha_1 = bB \frac{\alpha_0 - \tilde{\alpha}_0}{D_1\Delta}, \quad (1.11)$$

где

$$\Delta = \alpha_0 + \frac{B^2}{C_{-1}} + \frac{B^2}{D_1}; \quad (1.12)$$

$$\tilde{\Delta} = \tilde{\alpha}_0 + \frac{B^2}{C_{-1}} + \frac{B^2}{D_1}. \quad (1.13)$$

Амплитуды остальных пространственных гармоник находятся из (1.10) и (1.10a).

Полное поле, таким образом, представляется в виде

$$H = H_{\text{п}} + H_{\text{в}_0} + \sum_{n=0}^{\infty} H_{\text{в}_n} + \sum_{n=0}^{\infty} H_{\text{в}_{-n}}, \quad (1.14)$$

где

$$H_{\text{в}_0} = -\frac{\omega \epsilon I^m}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta} e^{-ixH + ihz_0}}{\Delta} e^{-ixx - ihz} dh;$$

$$H_{\text{в}_n} = B^n \frac{\omega \epsilon I^m}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixH + ihz_0}}{D_1 D_2 \dots D_n \Delta} e^{-ix_n x - i h_n z} dh; \quad (1.15)$$

$$H_{\text{в}_{-n}} = (-1)^n B^n \frac{\omega \epsilon I^m}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixH + ihz_0}}{C_{-1} C_{-2} \dots C_{-n} \Delta} e^{-ix_{-n} x - i h_{-n} z} dh.$$

Прежде, чем переходить к анализу полученного решения, приведем ряд легко доказываемых соотношений, необходимых в дальнейшем:

$$\chi_n(h) = \chi_{-n}(-h); \quad (1.16)$$

$$\alpha_n(h) = \alpha_{-n}(-h); \quad (1.17)$$

$$D_n(h) = C_{-n}(-h); \quad (1.18)$$

$$\Delta(h) = \Delta(-h); \quad (1.19)$$

$$D_n(h + k\beta m) = D_{n+m}(h); \quad (1.20)$$

$$C_n(h + k\beta m) = C_{n+m}(h); \quad (1.21)$$

$$\Delta(h + k\beta m) = \frac{D_1 D_2 \dots D_m(h)}{C_0 C_1 \dots C_{m-1}(h)} \Delta(h); \quad (1.22)$$

$$\Delta(h - k\beta m) = \frac{C_{-1} C_{-2} \dots C_{-m}(h)}{D_0 D_{-1} \dots D_{-(m-1)}(h)} \Delta(h). \quad (1.23)$$

Учитывая эти соотношения, вторичное поле в (1.14) можно привести к виду, более удобному для анализа:

$$H_B = \frac{\omega I^m}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{P(H, z_0, -h) e^{-ix - ihz}}{\Delta} + \frac{e^{-iz(x+H) - ih(z-z_0)}}{2iz} \right] dh, \quad (1.24)$$

где

$$P(x, z, h) = e^{-ix - ihz} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B^m}{D_1 \dots D_m} e^{-iz_m x - ih_m z} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m B^m}{C_{-1} \dots C_{-m}} e^{-iz_{-m} x - ih_{-m} z}. \quad (1.25)$$

2. АНАЛИЗ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ. ПОВЕРХНОСТНАЯ ВОЛНА

Подынтегральное выражение в (1.24), имеющее, как уже отмечалось, бесконечно большое число точек ветвления (1.5), будет однозначной функцией на римановой поверхности h с бесконечным числом листов. Проведем разрезы вдоль линий (рис. 2)

$$\operatorname{Im} x_m = 0 \quad (2.1)$$

и будем рассматривать только тот из листов (назовем его первым), на котором выполнено условие (1.4). Помимо точек ветвления особыми точками (типа полюса) подынтегрального выражения в (1.24) являются также корни уравнения

$$\Delta(h) = 0. \quad (2.2)$$

Учитывая свойства функции $\Delta(h)$ (1.19) и (1.22), (1.23), эти корни можно представить в виде:

$$h_m^{(\pm s)} = \pm h^{(s)} + k\beta m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2.3)$$

Уравнение (2.2) и свойства его решений (2.3) были изучены в работе [1] при рассмотрении свободных поверхностных и квазиповерхностных волн. Здесь важно отметить, что корни (2.3) попадают на рассматриваемый первый лист римановой поверхности лишь в том случае, если они соответствуют поверхностной волне. Если же эти корни соответствуют квазиповерхностной волне, то они оказываются лежащими на одном из других листов, так как для быстрой гармоники такой волны (например, номера n) $\operatorname{Im} x_n > 0$:

Имея в виду это замечание, рассмотрим поле (1.24). При $z > z_0$, деформируя путь интегрирования в нижнюю полуплоскость, сведем интеграл (1.24) к сумме вычетов в полюсах (2.3) и к сумме интегралов по разрезам (2.1), лежащим в этой полуплоскости. Первая сумма даст поверхность волну (если, конечно, корни (2.3) лежат на рассматриваемом листе), вторая — пространственную. Аналогично можно преобразовать интеграл (перемещением пути интегрирования в верхнюю полуплоскость) и при $z < z_0$.

Вычисляя поле поверхности волны $H^{(s)}$, имеем:

$$\begin{aligned} H^{(s)} &= -\frac{\omega \varepsilon I^m}{\Delta'(h_m^{(s)})} P(H, z_0, -h^{(s)}) P(x, z, h^{(s)}) \quad (z > z_0); \\ H^{(s)} &= -\frac{\omega \varepsilon I^m}{\Delta'(h_m^{(s)})} P(H, z_0, h^{(s)}) P(x, z, -h^{(s)}) \quad (z < z_0). \end{aligned} \quad (2.4)$$

При выводе этих формул использовано соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} P(H, z_0, -h_m^{(\pm s)}) \frac{e^{-ix_m^{(\pm s)}x - ih_m^{(\pm s)}z}}{\Delta'(h_m^{(\pm s)})} &= \\ = \pm \frac{1}{\Delta'(h^{(s)})} P(H, z_0, \mp h^{(s)}) P(x, z, \pm h^{(s)}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

которое легко доказывается, если принять во внимание, что

$$\Delta'(h^{(s)}) = \frac{C_0 \dots C_{n-1}(h^{(s)})}{D_1 \dots D_n(h^{(s)})} \Delta'(h^{(s)} + nk\beta) =$$

$$= \frac{D_0 \dots D_{-(n-1)}(h^{(s)})}{C_{-1} \dots C_{-n}(h^{(s)})} \Delta'(h^{(s)} - nk\beta);$$

$$\frac{C_0 \dots C_{m-1}(h^{(s)})}{B^m} = (-1)^m \frac{B^m}{D_1 \dots D_m(h^{(s)})}. \quad (2.7)$$

Формула (2.6) вытекает из (1.22)–(1.23), а (2.7) является следствием уравнения

$$\Delta(h_m^{(s)}) = C_m(h^{(s)}) + \frac{B^2}{D_{m+1}(h^{(s)})} = 0. \quad (2.8)$$

В поле (2.4) могут присутствовать либо одни медленные гармоники (прямые и обратные: $|h_n^{(s)}| > k$), что соответствует поверхности волне, распространяющейся вдоль плоскости без затухания (при $\text{Im } k = 0$), либо также и быстрые, но одни лишь обратные пространственные гармоники ($0 > \text{Re } h_n^{(s)} > -k$). В последнем случае имеем слабо локализованную поверхность волну. Выделить аналогичным образом поле квазиверхностной волны во всем полупространстве $x > 0$ не представляется возможным, так как соответствующие такой волне корни (2.3) оказываются лежащими, как уже указывалось, вне первого листа.

Напомним, что в работе [1] при анализе поля (2.4) и корней характеристического уравнения (2.2) мы не различали между собой слабо локализованных поверхностных и квазиверхностных волн, хотя

последние и являются энергетически нереализуемыми. Целесообразность такого подхода основывалась на естественном предположении, что выражение типа (2.4) применимо для описания поля вблизи поверхности замедляющей импедансной структуры независимо от того, являются ли быстрые гармоники в таком поле обратными (слабо локализованная поверхностная волна) или прямыми (квазиверхностная волна). Обоснованность такого предположения выяснится ниже после рассмотрения поля пространственной волны.

Не останавливаясь подробнее на анализе выражения (2.4), отметим лишь, что амплитуды волн (2.4) слева и справа от источника в общем случае различны, что объясняется асимметрией в законе модуляции импеданса относительно сечения $z = z_0$. Эти амплитуды будут одинаковы, если источник расположен в одном из сечений

$$z_{0n} = \frac{D}{4} + n \frac{D}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \dots). \quad (2.9)$$

Рассмотрим еще возбуждение поверхностной волны на частотах π - и 2π -колебаний [1].

При колебаниях типа π (для простоты ограничимся рассмотрением случая $h^{(s)} = k\beta/2$), используя результаты работы [1], имеем соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \alpha_{-(m+1)}; & \alpha_m &= \alpha_{-(m+1)}; \\ D_m &= C_{-(m+1)}; & D_0 &= C_{-1} = \pm iB. \end{aligned} \quad (2.10)$$

При этом зависимость поля поверхностной волны от координат будет описываться функцией

$$\begin{aligned} P(x, z, k\beta/2) &= 2e^{\pm i\pi/4 - ix^{(s)}x} \cos \left[\frac{1}{2} \left(\beta kz \pm \frac{\pi}{2} \right) \right] + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2B^m}{D_1 \dots D_m (k\beta/2)} e^{-ix_m^{(s)}x + i(\pi/2)(m+1) \mp i\pi/4} \times \\ &\times \cos \left[\beta \left(m + \frac{1}{2} \right) kz + \frac{\pi}{2} (m+1) \mp \frac{\pi}{4} \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $x_m^{(s)} = k \sqrt{1 - \beta^2(m + 1/2)^2}$. Однако амплитуда этой волны обращается в бесконечность, так как

$$\Delta' (k\beta/2) = D'_0 - \frac{B^2}{C'_{-1}} C'_{-1} = D'_0 \left(1 + \frac{B^2}{C'_{-1}} \right) = 0. \quad (2.12)$$

Аналогичным образом при колебаниях типа 2π (опять ограничиваясь рассмотрением лишь одного случая $h^{(s)} = k\beta$) имеем:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \alpha_{-(m+2)}; & \alpha_m &= \alpha_{-(m+2)}; \\ D_m &= C_{-(m+2)}; & D_0 &= C_{-2} = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

причем $C_{-1}C_{-2} = B^2$. Из (2.4) следует, что

$$\begin{aligned} P(x, z, k\beta) &= 2e^{-ix^{(s)}x} \cos (\beta kz) - \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2iB^m e^{i(\pi/2)(m+1) - ix_m^{(s)}x}}{D_1 \dots D_m (k\beta)} \sin [(m+1)k\beta(z + D/4)], \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\kappa_m^{(s)} = k \sqrt{1 - \beta^2(m+1)^2}$. Однако, как и в предыдущем случае, амплитуда поля (2.14) обращается в бесконечность, так как

$$\Delta'(\kappa\beta) = D'_0 - \frac{B^2}{C_{-1}^2} C'_{-1} = D'_0(\kappa\beta) + C'_{-2}(\kappa\beta) = 0. \quad (2.15)$$

Расходимость амплитуды поверхности волны при π - и 2π -колебаниях здесь аналогична расходимости амплитуды волны, возбуждаемой в экранированном волноводе, при совпадении частоты внешнего источника с критической частотой этой волны [3].

3. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ И ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ

Поле пространственной волны в общем случае определяется выражением (1.24), в котором интеграл следует взять по контурам, охватывающим разрезы (2.1). Мы ограничимся рассмотрением лишь поля в дальней зоне, воспользовавшись для его вычисления методом перевала.

Введем цилиндрические координаты R и Θ , положив (рис. 1)

$$x = R \sin \Theta, \quad z = R \cos \Theta.$$

Стационарной, как нетрудно убедиться, является точка

$$h = h_0 = k \cos \Theta, \quad \kappa = \kappa_0 = k \sin \Theta. \quad (3.1)$$

Используя обычные приемы вычисления, для полного поля в дальней зоне с учетом поля первичного источника получим следующее выражение:

$$H^{(r)} = \frac{\omega \epsilon I^m}{2 \sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i(kR-\tau/4)}}{\sqrt{kR}} \Phi(h_0) e^{ih_0 z_0}, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(h_0) = & e^{i\kappa_0 H} - \frac{\tilde{\Delta}(h_0)}{\Delta(h_0)} e^{-i\kappa_0 H} + \frac{2\kappa_0}{i \Delta(h_0)} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{B^m}{C_{-1} \dots C_{-m}(h_0)} e^{-i\kappa_{-m} H - ik\beta m z_0} + \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m B^m}{D_1 \dots D_m(h_0)} e^{-i\kappa_m H + ik\beta m z_0} \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При $B = 0$ выражение (3.3) переходит в известное соотношение для диаграммы магнитного линейного источника над плоскостью с однородным импедансом [4]:

$$\Phi(h_0) = e^{i\kappa_0 H} - (\sigma_0/\alpha_0) e^{-i\kappa_0 H}.$$

Диаграмма направленности (3.3), вообще говоря, несимметрична относительно нормали. Симметрия, как и в случае поверхности волны, достигается, если

$$z_0 = D/4 + nD/2 \quad (n = 0, \pm 1, \dots).$$

Например, при $z_0 = D/4$ имеем:

$$\Phi(h_0) = \Phi(-h_0) = e^{i\kappa_0 H} - \frac{\tilde{\Delta}}{\Delta} e^{-i\kappa_0 H} + \frac{2\kappa_0}{i \Delta} g(h_0), \quad (3.4)$$

где

$$g(h_0) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{kQ_1}{2} \right)^m \left(\frac{e^{-i\kappa_{-m} H}}{C_{-1} \dots C_{-m}} + \frac{e^{-i\kappa_m H}}{D_1 \dots D_m} \right). \quad (3.5)$$

Особый интерес представляют те случаи (рассмотрением которых мы для простоты и ограничимся), когда $\beta \geq 2$, так что при любом h_0 имеет место соотношение *

$$|h_m| > k; \quad |m| > 1. \quad (3.6)$$

При этом все величины

$$\alpha_{\pm m} = kQ_0 - ix_{\pm m} = kQ_0 - \tilde{x}_{\pm m} \equiv kQ_0 - \sqrt{h_{\pm m}^2 - k^2}$$

будут действительными числами. Действительной будет и функция $g(h_0)$, что упрощает расчет диаграммы направленности (3.4). Ряд в выражении для $g(h_0)$ (впрочем, как и в общей формуле) сходится достаточно быстро, особенно при малой глубине модуляции импеданса Q_1 . Действительно, при больших m и $H=0$ отношение двух последовательных членов ряда составляет величину порядка $Q_1/m\beta$, убывающую с ростом m ; если же $H \neq 0$, то быстрота сходимости ряда еще больше из-за экспоненциальных множителей $\exp(-x_{\pm m}H)$. Сравнительно быстро сходятся также и непрерывные дроби C_{-n} и D_n . Это позволяет при расчете диаграмм по формуле (3.3) и (3.4) ограничиться лишь несколькими первыми членами ряда, а также оборвать на соответствующих членах непрерывные дроби C_{-n} и D_n , что фактически соответствует учету в разложении поля (1.3) по пространственным гармоникам лишь конечного числа первых гармоник.

На рис. 3 приведены в логарифмическом масштабе графики зависимости $|\Phi(\gamma_0 = \cos \Theta)|^2$, рассчитанные по формуле (3.4) при $\beta = 2$, $H=0$ и различных значениях параметров $\xi = Q_1^2/4 = |B|^2/k^2$ и $\gamma_s = \sqrt{1+Q_0^2}$. При расчете кривых в выражении (3.4) были учтены члены, содержащие только величины α_0 , $\alpha_{\pm 1}$ и $\alpha_{\pm 2}$. Характерной особенностью приведенных кривых является наличие резко выраженного максимума в направлении γ_0 , определяемом фазовой постоянной $\gamma_{-1}^{(s)} = h_{-1}^{(s)} / k \approx \gamma_s - \beta$ быстрой пространственной гармоники в поле (2.4). Этот результат можно получить и в общем виде, исходя из (3.3).

Запишем выражение (3.3) в виде

$$\Phi(h_0) = e^{ix_0 H} + \sum_{-\infty}^{\infty} b_m e^{-ix_m H + ik\beta m z_0} \quad (3.7)$$

и рассмотрим амплитуды b_m отдельных гармоник при изменении h_0 от 0 до k , предполагая, что глубина модуляции импеданса достаточно мала. Коэффициенты b_m содержат в знаменателях величину $\Delta(h)$, обращающуюся в нуль при комплексных значениях аргумента $h_0 = h_n^{(\pm s)}$, лежащих при

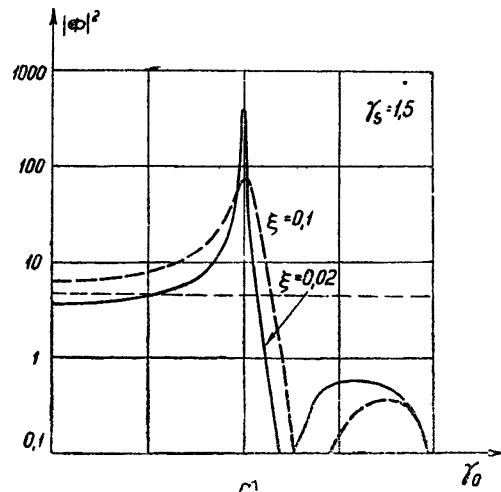


Рис. 3а.

* Полученные ниже результаты справедливы и при $\beta < 2$, если рассматривается такая область значений h_0 , в которой условие (3.6) остается выполненным.

** Горизонтальной пунктирной прямой на этих рисунках обозначен уровень излучения при $Q_0 = Q_1 = 0$.

сделанном предположении вблизи действительной оси [1]: $\operatorname{Im} h_n^{(s)} \approx O(k\xi) \ll k$. Такими корнями уравнения (2.2), попадающими в рассматриваемом случае в полосу $|\operatorname{Re} h| < k$, являются точки $h_{-1}^{(s)} = h^{(s)} - k\beta$ и $h_1^{(-s)} = -h_{-1}^{(s)}$. Оценим порядок величины различных коэффициентов b_m на действительной оси в окрестности этих точек. Наибольшее значение в окрестности точки $h_{-1}^{(s)}$ принимает коэффициент b_1 , выражение для квадрата модуля которого можно представить в виде:

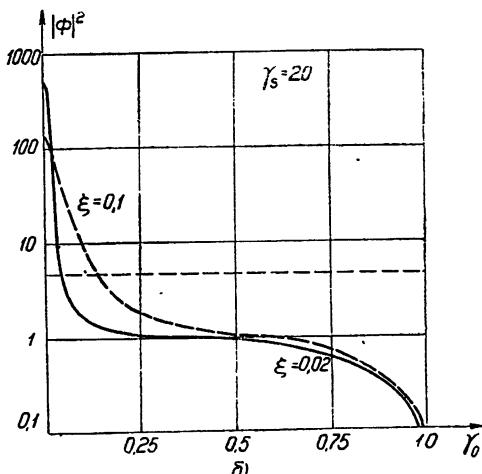


Рис. 3б.

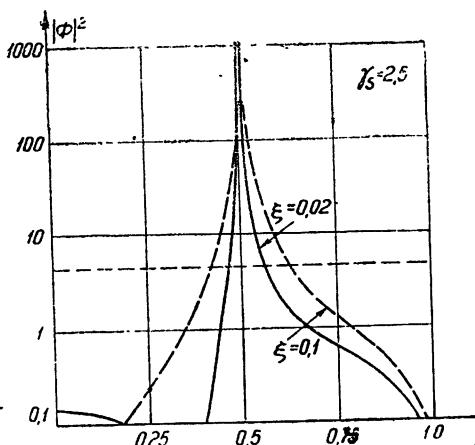


Рис. 3в.

$$|b_1|^2 = \frac{4x_0^2 |B|^2}{|C_0(h_0)|^2 |\Delta(h_0 + k\beta)|^2} = \frac{4x_0^2 |B|^2}{[D_1(kQ_0 - |B|^2/C_{-1}) - |B|^2]^2 + D_1^2(k^2 - h_0^2)}.$$

Можно показать, что при $\xi = |B|^2/k^2 \ll 1$ на частотах, далеких от частот π - и 2π -колебаний, с точностью до членов порядка ξ^2 экстремальной точкой этого выражения является корень уравнения

$$D_1 = k\xi Q_0 / (\gamma_s^2 - \gamma_0^2), \quad (3.8)$$

решая которое, получим выражение (пренебрегая членами порядка ξ^2 и выше)

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{h_0}{k} = \gamma_s - \beta + \xi \frac{\sqrt{\gamma_s^2 - 1}}{2\gamma_s \beta} \times \\ &\times \left[\frac{\sqrt{\gamma_s^2 - 1} + \sqrt{(\gamma_s + \beta)^2 - 1}}{\gamma_s + \beta/2} - \frac{\sqrt{\gamma_s^2 - 1}}{\gamma_s - \beta/2} \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

совпадающее с приближенным выражением для $\operatorname{Re} h_{-1}^{(s)}$ (см. формулу (1.20) работы [1]). Значение $|b_1|^2$ в максимуме приближенно равно

$$|b_1|_{\max}^2 = \frac{4}{\xi} \beta (2\gamma_s - \beta) = O(\xi^{-1}) \quad (3.10)$$

и при малой величине параметра модуляции ξ может быть достаточно большим.

Заметим, что сама величина $\Delta(h_0)$ на действительной оси в окрестности экстремальной точки $h_0 = \operatorname{Re} h_{-1}^{(s)}$ имеет порядок ξ^0 :

$$|\Delta(h_0 = \operatorname{Re} h_{-1}^{(s)})|^2 = \frac{k^2(1 - \gamma_0^2)(\gamma_s^2 - \gamma_0^2)}{\gamma_s^2 - 1} \Big|_{\gamma_0 = \operatorname{Re} h_{-1}^{(s)}} = O(\xi^0). \quad (3.11)$$

Поэтому для всех коэффициентов b_m при $m < 0$ точка $h_0 = \operatorname{Re} h_{-1}^{(s)}$ не является экстремальной, и эти коэффициенты будут порядка $\xi^{m/2}$ (в частности, $|b_0| = 1$ на всем отрезке $|h_0| \leq k$ действительной оси). Коэффициенты b_m при $m \geq 2$, хотя и содержат в знаменателях малую величину $D_1 = O(\xi)$ (3.8), однако по отношению к b_1 имеют порядок $\xi^{(m-1)/2}$. Кроме того, как уже отмечалось, все коэффициенты b_m с ростом $|m|$ быстро убывают из-за появления в знаменателях дополнительных множителей типа C_{-m} или D_m . Поэтому при расчете диаграммы вблизи точки экстремума $h_0 = \operatorname{Re} h_{-1}^{(s)}$ можно ограничиться учетом в (3.7) одного лишь члена, содержащего b_1 , если, конечно, источник приподнят над плоскостью $x = 0$ не слишком высоко, так что $|\exp(-ix_1 H)| = |\exp(-iz_1 H)| \approx 1$.

Аналогично можно прийти к заключению, что в окрестности экстремальной точки $h_0 = -\operatorname{Re} h_{-1}^{(s)}$ наибольшим коэффициентом в (3.7) будет b_{-1} .

Для исследования диаграммы в окрестности экстремальной точки $h_0 = \operatorname{Re} h_{-1}^{(s)}$ в соответствии с вышеизложенным оставим в (3.7) только один член, содержащий b_1 . Учитывая (1.22), имеем:

$$\Phi(h_0) \simeq -\frac{2x_0 Be^{-ix_1 H + ik\beta z_0}}{i \Delta(h_0 + k\beta) C_0(h_0)}. \quad (3.12)$$

Вблизи точки экстремума это выражение можно записать в виде

$$\Phi(h_0) \simeq \frac{2ix_0 Be^{-ix_1^{(s)} H + ik\beta z_0}}{C_{-1}(h^{(s)}) \Delta'(h^{(s)}) (h_0 - h_{-1}^{(s)})}. \quad (3.13)$$

Вблизи другой экстремальной точки $h_0 = -\operatorname{Re} h_{-1}^{(s)}$ аналогично имеем:

$$\Phi(h_0) \simeq \frac{2ix_0 Be^{-ix_1^{(s)} H - ik\beta z_0}}{C_{-1}(h^{(s)}) \Delta'(h^{(s)}) (h_0 + h_{-1}^{(s)})}. \quad (3.14)$$

Сравним полученные выражения (3.13) и (3.14) с диаграммой излучения слабо локализованной поверхностью волны (2.4), предполагая, что в последней быстрой, а следовательно, и ответственной за излучение является — 1-ая пространственная гармоника. Распределение поля этой гармоники на плоскости $x = 0$ с точностью до членов порядка ξ имеет вид:

$$H_{-1}^{(s)} = \pm \omega e I^m \frac{B}{C_{-1}(h^{(s)}) \Delta'(h^{(s)})} e^{-ix_1^{(s)} H \mp ih_{-1}^{(s)}(z-z_0) \pm ik\beta z_0} \quad (z \geq z_0). \quad (3.15)$$

Поле в области $x > 0$ описывается выражением:

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} H(h) e^{-ixx - ihz} dh, \quad (3.16)$$

где

$$H(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{-1}^{(s)} e^{ihz} dz. \quad (3.17)$$

Поле в дальней зоне получим из (3.16) с помощью метода перевала:

$$H^{(r)} = -\frac{\omega e I^m}{V 2\pi} \frac{x_0 B}{\Delta'(h^{(s)}) C_{-1}(h^{(s)})} \frac{e^{-i(kR - \pi/4)}}{\sqrt{kR}} \times \\ \times \left(\frac{e^{-ix^{(s)}H - ik\beta z_0}}{h_0 + h_{-1}^{(s)}} + \frac{e^{-ix^{(s)}H + ik\beta z_0}}{h_0 - h_{-1}^{(s)}} \right) e^{ih_0 z_0}. \quad (3.18)$$

Нетрудно видеть, что диаграмма направленности этого поля излучения вблизи максимумов $h_0 = \operatorname{Re} h_{-1}^{(s)}$ и $h_0 = -\operatorname{Re} h_{-1}^{(s)}$ совпадает с диаграммой, описываемой соответственно выражениями (3.13) и (3.14). Полученный результат позволяет сделать вывод, что при соответствующих условиях (малая глубина модуляции импеданса, а следовательно, и малая величина коэффициента затухания слабо локализованной поверхности волны, достаточно высокая эффективность возбуждения поверхности волны, имеющая место при сравнительно больших значениях поверхностного импеданса и расположении источника вблизи импедансной структуры) поле около импедансной плоскости близко к полю (2.4).

Заметим, что совпадение диаграмм (3.18) и (3.13)–(3.14) имеет место при любых направлениях максимального излучения ($h_0 = \pm \operatorname{Re} h_{-1}^{(s)}$), в том числе и при $\operatorname{Re} h_{-1}^{(s)} > 0$, когда выражение (2.4) описывает квазиволну. Отсюда можно сделать вывод, что поле вблизи импедансной плоскости близко к (2.4) и в этом случае, хотя при $\operatorname{Re} h_{-1}^{(s)} > 0$ волна (2.4), взятая во всем полупространстве $x > 0$, лишена физического смысла из-за обращения в бесконечность ее 1-ой гармоники при $x \rightarrow \infty$.

Таким образом, формирование остронаправленных диаграмм излучения с помощью периодически модулированных импедансных структур с соответствующим образом подобранными параметрами объясняется возбуждением на таких структурах полей, имеющих вблизи структур характер слабо локализованных поверхностных или квазиволновых волн типа (2.4), представляющих собой по сути дела обычные поверхностные волны, возмущенные периодическим изменением параметров замедляющей системы. В связи с этим оказывается возможным применить выражение (2.4) для задания поля на антенах с синусоидально изменяющимся импедансом замедляющей структуры, а следовательно, и для расчета их диаграмм направленности не только в случае слабо локализованных поверхностных, но также и в случае квазиволновых волн, возбуждение которых в чистом виде не может быть осуществлено никакими реальными источниками. Рассмотрение методов расчета таких антенн было проведено в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 802 (1960).
2. L. O. Goldstone, A. A. Olinev, IRE Trans. AP-7, 4, 307 (1959).
3. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
4. A. L. Cullen, Proc. IEE, р. IV, 101, 225 (1954).

ON THE RADIATION OF SOURCES OVER THE PLANE WITH SINUSOIDAL MODULATED SURFACE IMPEDANCE

V. I. Talanov

The wave field has been calculated, which was excited over the plane with sinusoidal modulated surface impedance by the magnetic current line. The peculiarities of excitation of the surface and leaky waves in such a system were cleared up, as well as the connection of these fields with radiation pattern of the space wave.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПЛАЗМЕННОГО ВОЛНОВОДА*

C. M. Левитский и H. C. Баранчук

Экспериментально исследована зависимость замедления и волнового сопротивления цилиндрического плазменного волновода от концентрации электронов, частоты сигнала и давления газа. Концентрация электронов измерялась методом ленгмюровского зонда. Получены выражения для затухания и волнового сопротивления плазменного волновода. Экспериментальные данные сопоставлены с результатами расчета.

В настоящее время, судя по появившимся публикациям, широкое внимание начал привлекать новый вид передающих линий—так называемые плазменные волноводы. Основные свойства их были рассмотрены в работе [1]. В частности, там было указано, что электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль плазменного волновода, являются волнами замедленными и что плазменный волновод обладает верхней предельной частотой пропускания. Наиболее замечательным свойством, отличающим плазменные волноводы от прочих передающих линий и замедляющих систем, является то, что их параметры (фазовую скорость, сопротивление связи и др.) можно весьма гибко изменять чисто электрическими способами: путем изменения концентрации электронов в плазме или наложения постоянного магнитного поля [2].

Проведенные рядом авторов экспериментальные исследования качественно подтвердили теорию плазменных волноводов [3–6]. Однако количественное сопоставление данных теории и эксперимента в этих работах не вполне убедительно, так как часть авторов вообще не измеряла концентрации электронов в плазме, а в остальных работах эта величина измерялась только сверхвысокочастотными методами. Как известно, этими методами трудно получить точное абсолютное значение концентрации электронов; кроме того, в большинстве случаев эти методы дают лишь значение концентрации, усредненное по сечению разряда, тогда как в плазменном волноводе основную роль играет локальная концентрация электронов у стенок разрядной трубы.

В настоящей работе ставилась задача количественного сопоставления расчетных и экспериментальных данных для цилиндрического плазменного волновода. Поэтому для измерения концентрации электронов мы воспользовались методом ленгмюровского зонда, позволяющим производить локальные и абсолютные измерения этой величины. Были проведены систематические измерения таких параметров плазменного волновода как замедление, затухание и волновое сопротивление в диапазоне частот от 375 до 3000 мгц при различных концентрациях электронов и давлениях газа. Результаты измерений сопоставлены с данными расчета. Поскольку расчета для затухания и волнового сопротивления плазменного волновода до настоящего времени опубликовано не было, в статье вычислены выражения для этих величин. И расчет и эксперимент относятся к случаю, когда постоянное магнитное поле отсутствует.

* Доклад на конференции МВ и ССО СССР по радиоэлектронике, Харьков, 1960.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ ПЛАЗМЕННОГО ВОЛНОВОДА

Для исследования свойств волн, распространяющихся вдоль цилиндрического плазменного волновода, использовалась установка, схематически изображенная на рис. 1. Буквой Г здесь обозначен генератор, В — волномер, А — фиксированный аттенюатор на 10 дБ, которым дальний тракт развязывался по отношению к генератору.

Для измерения степени согласования плазменного волновода с СВЧ-трактом применялась коаксиальная измерительная линия ИЛ₁. Исследуемый плазменный волновод представлял собой длинную отпаянную газоразрядную трубку Л, которая вставлялась вместо центрального проводника в измерительную линию ИЛ₂. Сведения о характере распространения электромагнитных волн вдоль плазменного волновода можно было получить, снимая с помощью подвижного зонда линии ИЛ₂ картину распределения поля вдоль этой линии.

Для измерения фазовой скорости желательно было иметь картину стоячих волн; поэтому в конце измерительной линии ИЛ₂ ставилась металлическая втулка, увеличивающая коэффициент отражения. Если же требовалось измерить затухание волн, то вместо отражателя в этом же месте помещался поглотитель. Картина распределения радиальной компоненты электрического поля вдоль линии ИЛ₂ могла записываться на фотобумагу с помощью шлейфного осциллографа ШО. Типичные записи распределения поля представлены на рис. 2а (с отражателем в конце линии) и рис. 2б (с поглотителем в конце линии).

Основной частью газоразрядной лампы, использовавшейся в качестве плазменного волновода, была погруженная в измерительную линию ИЛ₂ калиброванная стеклянная трубка с внутренним диаметром 10 мм и внешним диаметром 12,5 мм. (Диаметр канала измерительной линии ИЛ₂ — 16 мм, а длина ее рабочей части — около 200 мм.) Лампа оканчивалась анодом, представлявшим собой короткий коваровый цилиндр диаметром 12 мм, приваренный к стеклу трубки.

Разряд постоянного тока зажигался между анодом и накаливающимся оксидным катодом разрядной лампы. Для измерения концентрации электронов в основной трубке на участке, находящемся вне измерительной линии, были помещены два зонда: цилиндрический зонд ЦЗ и плоский поверхностный зонд ПЗ. С помощью этих зондов, используя обычную методику, мы имели возможность измерять концентрацию зарядов как на оси трубки, так и у поверхности ее стенки.

Трубки наполнялись насыщенными парами ртути или водородом. При этом давление в трубках можно было регулировать либо изменением температуры баллона путем охлаждения его катодной части в жидкости ультратермостата, либо изменением режима водородного генератора. Основные измерения были проведены на лампах со ртутным наполнением.

Для возбуждения волн вдоль разрядной трубки ее анод присоединялся к коаксиальному кабелю питания через систему возбуждения СВ. В одном варианте эта система представляла собой дельта-трансформа-

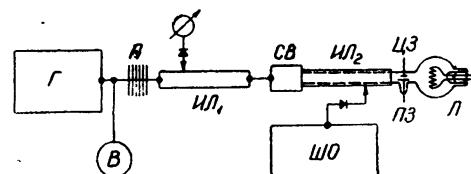


Рис. 1. Блок - схема экспериментальной установки.

тор, через который анод лампы присоединялся непосредственно к внутреннему проводнику коаксиального кабеля, идущего от выхода линии ИЛ₁, так что лампа вместе с корпусом линии ИЛ₂ становилась как бы продолжением этого кабеля. В другой конструкции (волноводного типа) для возбуждения плазменного волновода широкая сторона входного и выходного волноводов с сечением 75×10 мм пересекалась коаксиальной системой, где внутренним проводником служила разрядная трубка. Эта система могла быть использована лишь для частот выше 2000 мгц.

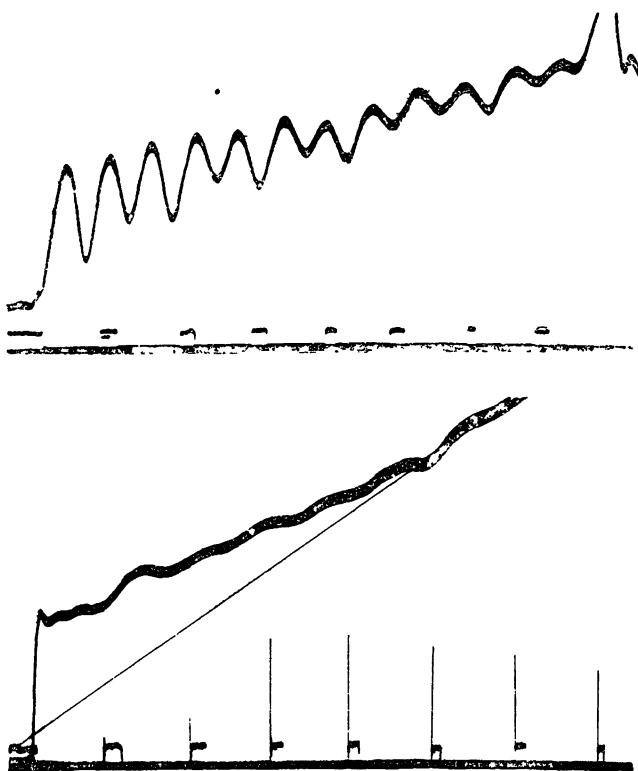


Рис. 2. Распределения радиальной компоненты электрического поля вдоль плазменного волновода:
а) с отражателем в конце линии; б) с поглотителем в конце линии.
Метки расстояния нанесены через 2 см.

Питание разряда обычно осуществлялось по внутреннему проводнику коаксиального кабеля, который в генераторе Г соединялся с корпусом через петлю связи. Во втором варианте системы возбуждения анод лампы присоединялся к корпусу системы непосредственно.

2. ЗАМЕДЛЕНИЕ ВОЛН В ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ

Компоненты электромагнитного поля в цилиндрическом плазменном волноводе для волны аксиально-симметричного типа TM были найдены в работе [1] и имеют следующий вид:

в плазме

$$B_{\varphi_p} = \tilde{A}_p I_1(m'_p r) e^{j(\alpha z - \omega t)};$$

в диэлектрике

$$B_{\varphi_d} = j \frac{2}{\pi} A_d K_1(m'_d r) e^{j(\alpha z - \omega t)};$$

$$E_{r_p} = \frac{\alpha c^2}{\omega \epsilon_p} A_p I_1(m'_p r) e^{j(\alpha z - \omega t)}; \quad E_{r_d} = j \frac{2}{\pi} \frac{\alpha c^2}{\omega \epsilon_d} A_d K_1(m'_d r) e^{j(\alpha z - \omega t)}; \quad (1)$$

$$E_{z_p} = j \frac{m'_p c^2}{\omega \epsilon_p} A_p I_0(m'_p r) e^{j(\alpha z - \omega t)}; \quad E_{z_d} = \frac{2}{\pi} \frac{m'_d c^2}{\omega \epsilon_d} A_d K_0(m'_d r) e^{j(\alpha z - \omega t)},$$

где ϵ_p и ϵ_d — диэлектрическая проницаемость плазмы и окружающего диэлектрика; m'_p и m'_d — поперечные коэффициенты распространения в плазме и диэлектрике; α — продольный коэффициент распространения. „Сшивание“ тангенциальных составляющих полей на границе плазмы и диэлектрика позволяет получить дисперсионное уравнение

$$\epsilon_p \frac{I_1(x)}{x I_0(x)} = -\epsilon_d \frac{K_1(y)}{y K_0(y)}, \quad (2)$$

где $x = m'_p a$, $y = m'_d a$ (a — радиус плазменного стержня). Связь между продольным и поперечным коэффициентами распространения имеет обычный вид:

$$\alpha_p^2 = k^2 \epsilon_p + m'^2_p; \quad \alpha_d^2 = k^2 \epsilon_d + m'^2_d. \quad (3)$$

Из очевидного равенства продольных коэффициентов распространения в плазме и диэлектрике $\alpha_p = \alpha_d = \alpha$ получаем второе уравнение, связывающее величины x и y :

$$x^2 - y^2 = k^2 a^2 (\epsilon_d - \epsilon_p). \quad (4)$$

Учет металлического экрана радиуса b , окружающего плазменный волновод, приводит к некоторому видоизменению полей (1) и дисперсионного уравнения (2), которое в этом случае имеет вид [7]:

$$\epsilon_p \frac{I_1(x)}{x I_0(x)} = \quad (2a)$$

$$= -\frac{\epsilon_d}{y} \frac{I_1(y) K_0(\eta) - I_0(\eta) K_1(y)}{I_0(\eta) K_0(y) - I_0(y) K_0(\eta)},$$

где $\eta = m'_d b$.

Картина распределения полей для одного конкретного случая ($a = 0,5 \text{ см}$; $f = 1290 \text{ мГц}$; $\epsilon_d = 4,2$; $\epsilon_p = -21$) при $b = \infty$ и $b = 0,8 \text{ см}$ изображена на рис. 3.

Совместное решение уравнений (2) и (4) оказывается возможным лишь для $-\epsilon_p > \epsilon_d$. По мере сближения этих величин коэффициенты распространения x , y и α быстро возрастают, обращаясь при $-\epsilon_p = \epsilon_d$ в бесконечность. Возрастание продольного коэффициента распространения $\alpha = \omega/v_\phi$ означает уменьшение фазовой скорости волны. Мерилом уменьшения фазовой скорости может быть коэффициент замедления $\beta = c/v_\phi = \alpha/k$.

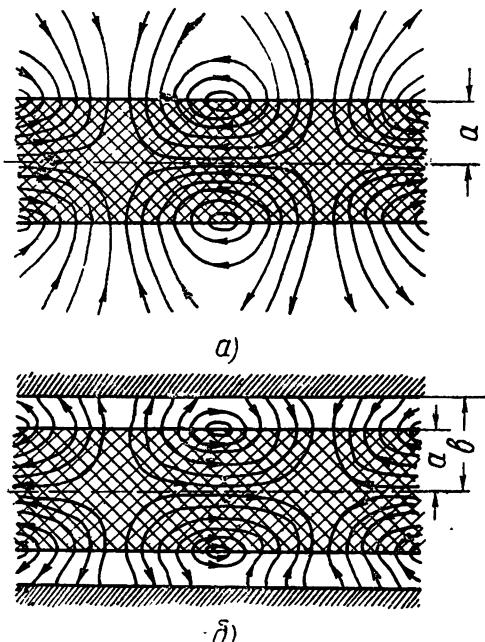


Рис. 3. Картина силовых линий электрического поля:
а) в плазменном волноводе с безграничным диэлектриком; б) в плазменном волноводе, окруженном металлическим экраном.

Определение фазовой скорости и замедления волны, распространяющейся вдоль плазменного волновода, производилось путем измерения длины стоячей волны, образующейся в линии ИЛ₂ при наличии отражения (рис. 2а). Измерения были проведены в диапазоне частот от 375 до 3000 мгц при давлении паров ртути $1,27 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст. Было проверено, что при сохранении концентрации электронов неизменной давление газа на фазовую скорость волны влияния не оказывает.

На рис. 4 представлен типичный ход величины замедления в зависимости от концентрации электронов на частоте 670 мгц. Концентрация электронов, отложенная по оси абсцисс, здесь и на всех даль-

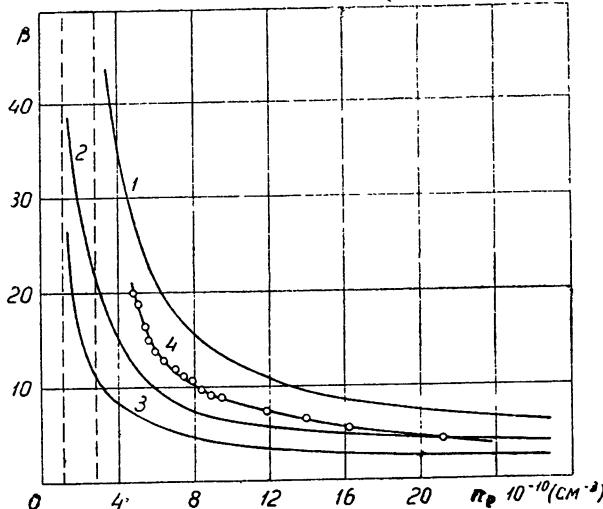


Рис. 4. Зависимость замедления β от концентрации электронов n_e , измеренной у стенки трубы (частота 670 мгц):

1—расчетная кривая для $\epsilon_d = 4,2$ без учета металлического экрана; 2—для $\epsilon_d = 1$ с учетом экрана; 3—для $\epsilon_d = 1$ без учета экрана; 4—экспериментальная кривая.

нейших графиках измерена плоским зондом у поверхности трубы. На этом же графике нанесены расчетные кривые для величины замедления, полученные путем совместного решения уравнений (2) и (4). Поскольку было неясно, нужно ли учитывать роль металлического экрана и что следует принять в качестве диэлектрика (воздух или стекло), расчеты велись для нескольких возможных вариантов: кривая 1—для $\epsilon_d = 4,2^*$ без учета металлического экрана, кривая 2—для $\epsilon_d = 1$ с учетом экрана, кривая 3—для $\epsilon_d = 1$ без учета экрана.

Результаты, представленные на рис. 4, и результаты, полученные при измерении на других частотах, показывают, что экспериментальные кривые стремятся по мере возрастания концентрации электронов к кривой 2, а по мере понижения концентрации электронов—к кривой 1. Точное совпадение экспериментальной кривой с какой-либо из расчетных не имеет места. Причиной тому является, по всей вероятности, радиальная неоднородность плазмы и диэлектрика. Действительно, по мере понижения концентрации электронов и возрастания

* Диэлектрическая проницаемость стекла ЗС-5, из которого была изготовлена лампа, была измерена нами на частоте 2000 мгц методом полного резонатора [8] и оказалась равной 4,2.

поперечных коэффициентов распространения электромагнитное поле волны концентрируется у границы раздела плазма—диэлектрик и электрические силовые линии проходят, в основном, внутри стекла. При этом картина явлений приближается к тем условиям, для которых рассчитана кривая 1. Наоборот, по мере возрастания концентрации электронов замедление понижается и электрические силовые линии проходят в основном через воздух. При этом должно ощутимо сказываться влияние металлического экрана и условия эксперимента приближаются к условиям, для которых рассчитана кривая 2.

Величина замедления, как и следует из теории, при прочих равных условиях зависит от параметра ka , возрастаая по мере его уменьшения.

На частотах 2000 ± 3000 мгц не удавалось получить замедления более, чем в 7 раз, тогда как на частоте 375 мгц легко удавалось получить замедление в 25 ± 30 раз. Предел для наблюдавшихся замедлений связан с резким возрастанием затухания по мере приближения к предельному режиму. Было замечено, что на трубке малого диаметра ($a = 0,3$ см) удавалось получить при том же значении ϵ_p несколько большие замедления, чем на описанной выше трубке, применявшейся для основных измерений.

3. РАСЧЕТ И ИЗМЕРЕНИЕ ЗАТУХАНИЯ

Второй параметр, характеризующий распространение волн в плазменном волноводе, — затухание до настоящего времени был изучен меньше, чем замедление. Нами были проведены измерения величины затухания в зависимости от частоты, концентрации электронов и давления газа, а также получено выражение для затухания, с которым можно было сравнить данные эксперимента. При расчете коэффициента затухания пренебрегалось потерями в окружающем диэлектрике; предполагалось, что источником затухания волн в плазменном волноводе являются только потери в плазме, происходящие от столкновений электронов с нейтральными молекулами газа. Диэлектрическая проницаемость плазмы с учетом потерь может быть записана как комплексная величина [9]:

$$\epsilon_p = \epsilon'_p - j\epsilon''_p = \epsilon'_p - j(1 - \epsilon'_p) \nu_{\text{эфф}}/\omega, \quad (5)$$

где $\nu_{\text{эфф}}$ — эффективная частота соударений электронов с молекулами газа.

Поскольку ϵ_p с учетом поглощения является комплексной величиной, x , y и α , входящие наряду с ϵ_p в уравнения (2) и (4), также величины комплексные:

$$x = x' - jx''; \quad y = y' - jy''; \quad \alpha = \alpha' - j\alpha''.$$

Основным допущением, которое используется в расчете, будет условие малости потерь в плазме, т. е. $\epsilon''_p \ll \epsilon'_p$. Это дает право полагать, также, что $x'' \ll x'$, $y'' \ll y'$ и $\alpha'' \ll \alpha'$.

Обозначим сокращенно сложные функции, входящие в (2), через $f(x)$ и $\varphi(y)$:

$$I_1(x)/xI_0(x) = f(x); \quad K_1(y)/yK_0(y) = \varphi(y).$$

Используя приведенные выше неравенства, можно разложить $f(x)$ и $\varphi(y)$ в ряд Тейлора по малому параметру, сохранив только первые члены ряда:

$$f(x) = f(x' - jx'') = f(x') + j \frac{x''}{x'} F(x');$$

$$\varphi(y) = \varphi(y' - jy'') = \varphi(y') + j \frac{y''}{y'} \Phi(y'),$$

где $F(x') = -x'f'(x')$ и $\Phi(y') = -y'\varphi'(y')$. Подставляя теперь f и φ в уравнение (2), отделяя вещественную часть от мнимой и пренебрегая членами второго порядка малости, получим два независимых уравнения:

$$\varepsilon'_p f(x') = -\varepsilon_d \varphi(y'); \quad (6)$$

$$\varepsilon'_p \frac{x''}{x'} F(x') - \varepsilon''_p f(x') = -\varepsilon_d \frac{y''}{y'} \Phi(y'). \quad (7)$$

Поступив подобным же образом с уравнением (4), найдем:

$$x'^2 - y'^2 = k^2 a^2 (\varepsilon_d - \varepsilon'_p); \quad (8)$$

$$x'x'' - y'y'' = -\frac{1}{2} \varepsilon''_p k^2 a^2. \quad (9)$$

Уравнения (6) и (8) полностью соответствуют (2) и (4). Это означает, что из-за малости затухания ни фазовая скорость волны, ни конфигурация ее полей не претерпят изменения. Эффект затухания учитывается уравнениями (7) и (9), при совместном решении которых можно получить x'' и y'' . Подставляя эти значения в (3) и выполнив операции, аналогичные проведенным выше, можно без труда получить продольный коэффициент затухания α'' :

$$\alpha'' = -\frac{\varepsilon''_p (2x'^2 f + k^2 a^2 \varepsilon'_p F)}{2\alpha' a^2 \varepsilon_d \left(\frac{\varepsilon'_p}{\varepsilon_d} F + \Phi \frac{x'^2}{y'^2} \right)}. \quad (10)$$

Возвращаясь от сложных функций f , φ , F и Φ вновь к модифицированным функциям Бесселя, получим окончательно:

$$\alpha'' = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1 - \varepsilon'_p}{\varepsilon'_p} \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \frac{k^2 \varepsilon'_p (I_1^2 - I_0^2) + (2I_0 I_1/x') \alpha'^2}{(I_1^2 - I_0^2 + 2I_0 I_1/x') + (\varepsilon'_p I_1^2 / \varepsilon_d K_1^2) (K_0^2 - K_1^2 + 2K_0 K_1/y')} . \quad (11)$$

К этому же выражению можно прийти и энергетическим методом [10], используя известное выражение $\alpha'' = P_{\text{потерь}}/2P_{\text{поток}}$, где $P_{\text{поток}}$ — поток мощности через сечение линии, а $P_{\text{потерь}}$ — погонные потери мощности в этом же сечении.

Эти величины могут быть найдены, исходя из известной конфигурации электромагнитного поля и проводимости плазмы.

Экспериментально коэффициент затухания определялся путем обработки кривых $i_{\text{дет}}(x)$, аналогичных кривой, изображенной на рис. 2б, снятых в присутствии поглотителя в конце плазменного волновода. Обработка заключалась в построении этих кривых в полулогарифмическом масштабе; коэффициент затухания α'' и обратная ему величина $l_{\text{ср}}$ (среднее расстояние затухания) находились по наклону получавшихся прямых. (При этом было проверено, что детектор зонда линии работал в режиме, близком к линейному детектированию, и, следовательно, ток детектора был пропорционален полю в окрестности зонда.)

Результат измерений на частоте 670 мгц представлен на рис. 5. На этом же графике нанесены зависимости $l_{cp} = f(n_e)$, полученные из выражения (11) для $\epsilon_d = 1$ и $\epsilon_d = 4,2^*$. Как видно, экспериментальная кривая располагается между расчетными кривыми. Поскольку поле волны проходит частично в стекле, а частично в воздухе, такой результат вполне понятен и очевиден. Он аналогичен тому, что было получено выше для величины замедления. Следует отметить, что в области концентраций, соответствующих большим замедлениям, когда поле волны сосредоточено в стекле, экспериментальная кривая рис. 5 приближается к расчетной кривой для $\epsilon_d = 4,2$.

Изменение затухания с частотой демонстрируется рис. 6. В качестве параметра была принята величина замедления $\beta = 6,5$. Ослабление на единицу длины в широком диапазоне частот составляет доли $db \cdot cm^{-1}$ и возрастает к высокочастотному концу спектра. Подобный ход ослабления наблюдается и для других значений β .

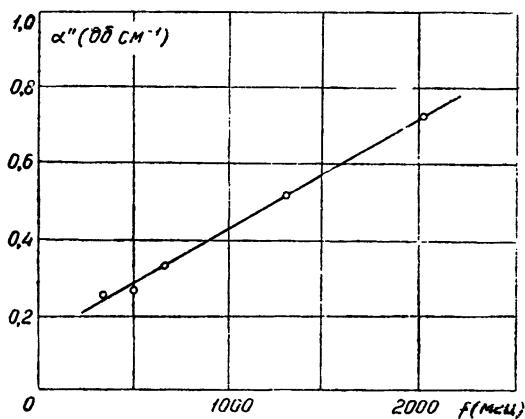


Рис. 6. Зависимость коэффициента затухания α'' от частоты f (замедление $\beta = 6,5$, давление паров ртути $1,27 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст.).

Значительный интерес представляет зависимость затухания от давления газа. Если судить по выражению (11), то при прочих равных условиях коэффициент затухания должен быть пропорционален давлению. Для проверки последнего измерялось затухание и замедление на частоте 2000 мгц в интервале давлений от 10^{-3} до $5 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст. Изо всего цикла выбирались данные, соответствовавшие некоторым определенным значениям β . Это давало уверенность, что все остальные величины (α , x и y), входящие в (11), будут

оставаться неизменными и величина затухания будет зависеть только от $\gamma_{\text{эфф}}$, т. е. от давления газа. На рис. 7 изображены зависимости $\alpha''(p)$ для нескольких значений β . Линейный ход их подтверждает пропорциональность между затуханием и давлением.

* Величина $\gamma_{\text{эфф}}$, использовавшаяся при расчете, была получена путем гиперболической аппроксимации зависимости $Q(v)$ для ртути [11] и полагалась равной $\gamma_{\text{эфф}} = 2 \cdot 10^{10}$ мм рт. ст. $^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$.

Как указывалось выше, при $-\epsilon_p < \epsilon_d$ распространение волн в плазменном волноводе невозможно. Анализ выражения (11) показывает, что по мере приближения к этому условию затухание плазменного волновода быстро возрастает и при $-\epsilon_p = \epsilon_d$ обращается в бесконечность.

Предельную концентрацию электронов, при которой прекращается распространение волн вдоль плазменного волновода, и соответствующую ей величину диэлектрической проницаемости плазмы можно найти экспериментально путем экстраполяции кривой рис. 5 до $l_{cp} = 0$. Найденное таким способом ϵ_p для десяти частот, на которых производились измерения, оказалось равным $-4,5 \pm 0,4$, что совпадает по абсолютной величине с диэлектрической проницаемостью стекла, которая, как указывалось выше, равна 4,2. Этот результат, уже отмечавшийся в статье [12], отличается от результатов,

Рис. 7. Зависимость затухания от давления паров ртути при разных значениях β (частота 2000 мгц).

полученных в работе [6]. Указанное расхождение вызвано, по всей вероятности, неточностью в измерении абсолютного значения концентрации электронов и диэлектрической проницаемости плазмы в [6].

4. ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Определим величину волнового сопротивления плазменного волновода W таким же способом, как это сделано в работе [13] по отношению к волновому сопротивлению спирали:

$$W = U_m^2 / 2 P_{\text{поток}}, \quad (12)$$

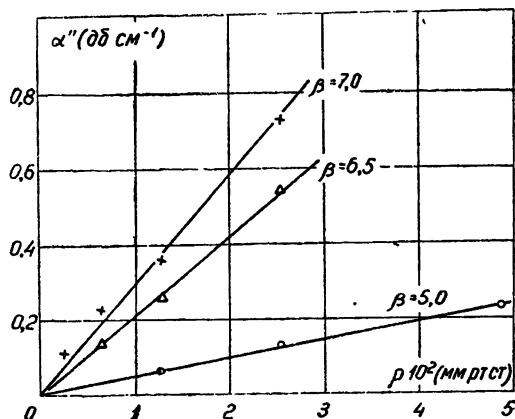
где $P_{\text{поток}}$ — поток мощности, вычисленный в разделе 3, U_m — „поперечное“ напряжение, получающееся интегрированием радиального электрического поля в пределах от радиуса волновода a до бесконечности (или до радиуса внешнего проводника b , если он имеется):

$$U_m = \int_a^\infty E_{m_{rd}}(r) dr. \quad (13)$$

Определенное таким способом выражение для волнового сопротивления плазменного волновода после подстановки соответствующих выражений приобретает вид:

$$W = 4 \frac{\alpha}{\omega \epsilon_d} \frac{K_0^2(y)}{y^2} \left[\frac{\epsilon_d}{\epsilon_p} \frac{K_1^2}{I_1^2} \left(I_1^2 - I_0^2 + \frac{2}{x} I_0 I_1 \right) + \left(K_0^2 - K_1^2 + \frac{2}{y} K_1 K_0 \right) \right]^{-1}. \quad (14)$$

Поскольку по мере приближения концентрации электронов к предельному значению поток мощности стремится к нулю, а „поперечное“



напряжение остается конечным, волновое сопротивление плазменного волновода должно в области критического режима стремиться к бесконечности. График зависимости $W(n_e)$, рассчитанный по формуле (14) для $\epsilon_d = 4,2$, изображен на рис. 8.

Экспериментальное измерение волнового сопротивления произошло с помощью линии ИЛ₁ в диапазоне частот от 375 до 670 мгц. Необходимые для пересчета импеданса параметры четырехполюсника

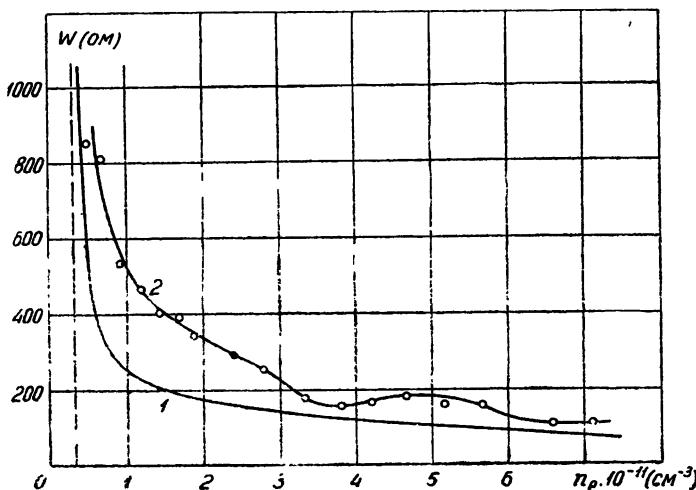


Рис. 8. Теоретическая (1) и экспериментальная (2) зависимости волнового сопротивления плазменного волновода W от концентрации электронов n_e (частота 670 мгц).

включенного между выходом линии ИЛ₁ и началом плазменного волновода, определялись известным методом подвижного короткозамыкающегося поршня [14]. Чтобы предотвратить появление отраженной волны, конец плазменного волновода был покрыт слоем поглощающего вещества. За волновое сопротивление плазменного волновода принимался импеданс, измеренный линией ИЛ₁ и пересчитанный в сечение, соответствующее началу плазменного волновода. Отождествление входного импеданса плазменного волновода с его входным сопротивлением является не вполне строгим, так как при этом не учитываются сложные дифракционные явления, происходящие в месте перехода передающих линий. Потому здесь вряд ли возможно ожидать количественного совпадения данных расчета и эксперимента.

Результаты измерений волнового сопротивления на частоте 670 мгц изображены на рис. 8 (кривая 2). Ход этой кривой качественно совпадает с ходом рассчитанной зависимости. Хорошего согласования плазменного волновода с коаксиальной линией удавалось достичь лишь при весьма больших концентрациях электронов ($-\epsilon_p > 100$), где плазменный стержень приближался по своим свойствам к металлическому стержню. Некоторая волнистость экспериментальной кривой объясняется не вполне совершенным согласованием поглотителя с плазменным волноводом.

Попытки измерить волновое сопротивление плазменного волновода на более высоких частотах (в диапазоне 2000–3000 мгц) не увенчались успехом, так как из-за ограниченности разрядного тока лампы не удавалось получить достаточно больших абсолютных значений диэлектрической проницаемости плазмы. Волновое сопротивление

плазменного волновода, работавшего в режиме, близком к критическому, было при этом очень большим и лежало за пределами точности измерения линии.

Сопоставление результатов экспериментального исследования параметров цилиндрического плазменного волновода с данными расчета показало, что важную, а при больших замедлениях решающую роль играет величина диэлектрической проницаемости материала, из которого изготовлены стенки плазменного волновода и который непосредственно граничит с плазмой. Для точного подсчета параметров плазменного волновода требуется, очевидно, построение теории, учитывающей неоднородность или многослойность диэлектрика, окружающего плазму.

Затухание в плазменном волноводе пропорционально давлению газа и возрастает по мере приближения к критическому режиму (т. е. к режиму, соответствующему прекращению распространения волн вдоль плазменного волновода). Точно так же ведет себя и волновое сопротивление, которое в критическом режиме обращается в бесконечность.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. O. Schumann, Z. f. Naturforsch., 5a, 181 (1950).
2. Я. Б. Файнберг, М. Ф. Горбатенко, ЖТФ, 29, 549 (1959).
3. G. Bittner, Z. angew. Physik., 10, 117 (1958).
4. К. Д. Синельников, П. М. Зейдлиц, Я. Б. Файнберг, Л. В. Дубовой, А. М. Некрашевич, О. Г. Загороднов, Е. И. Лупенко, Б. Г. Сафронов, Н. В. Тополя, Труды II Международной конференции по мирному использованию атомной энергии, 1, изд. Гл. упр. атомн. энергии. М., 1956, стр. 110.
5. A. W. Trivelpiece, R. W. Gould, J. Appl. Phys., 30, 1784 (1959).
6. В. И. Зимина, Радиотехника и электроника, 5, 938 (1960).
7. Б. Н. Руткевич, Я. Б. Файнберг, ЖТФ, 29, 280 (1959).
8. Спец. физ. практикум, 1, изд. МГУ, М., 1960.
9. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Файнберг, Распространение радио волн, ГИТТЛ, М., 1953.
10. А. Г. Гуревич, Полые резонаторы и волноводы, изд. Сов. радио, М., 1952.
11. В. Л. Грановский, Электрический ток в газах, 1, ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
12. С. М. Левитский, Н. С. Баранчук, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 725 (1960).
13. Дж. Р. Пирс, Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1952.
14. Справочник по волноводам, изд. Сов. радио, М., 1952.

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию
6 февраля 1961 г.

THE INVESTIGATION OF THE PROPERTIES OF THE CYLINDRICAL PLASMA WAVEGUIDE

S. M. Levitsky and N. S. Barantchouk

The delay and wave impedance dependence on the electron density, signal frequency and gas pressure have been investigated by experiment in the case of the cylindrical plasma waveguide. The electron density was measured by Lengmurs sonde method. Experimental data were compared with account results. The attenuation and wave impedance formulas are obtained for the plasma waveguide.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В КРЕСТООБРАЗНОМ ВОЛНОВОДЕ, СОСТАВЛЕННОМ ИЗ СЕКТОРОВ

H. A. Кузьмин, T. B. Макаров

Вариационным методом найдены собственные функции и собственные значения волн регулярного идеально проводящего крестообразного волновода. Приведены численные результаты.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Нахождение полей и определение критических частот электромагнитных волн (E и H типов) в регулярном идеально проводящем волноводе сводится к решению скалярных уравнений

$$\Delta \begin{Bmatrix} \tilde{\psi} \\ \psi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{x} \\ x \end{Bmatrix}^2 \begin{Bmatrix} \tilde{\psi} \\ \psi \end{Bmatrix} = 0 \quad (1)$$

при соответствующих краевых условиях:

а) для магнитных волн

$$\tilde{\partial\psi}/\partial n|_L = 0, \quad (2)$$

б) для электрических волн

$$\psi|_L = 0 \quad (3)$$

на контуре L поперечного сечения S_{\perp} волновода. Все геометрические параметры крестообразного волновода приведены на рис. 1. Оператор Δ в (1) — двухмерный оператор Лапласа; \tilde{x} , x — собственные значения соответственно магнитных и электрических волн; n — внешняя нормаль к контуру; функции $\tilde{\psi}$ и ψ — продольные компоненты магнитного и электрического векторов Герца, связанные с продольными компонентами полей известными соотношениями:

$$H_z = \tilde{x}^2 \tilde{\psi}; \quad E_z = x^2 \psi,$$

причем

$$\begin{Bmatrix} \tilde{x} \\ x \end{Bmatrix}^2 = k^2 - \begin{Bmatrix} \tilde{h} \\ h \end{Bmatrix}^2$$

(\tilde{h} , h — постоянные распространения магнитных и электрических волн соответственно).

Как известно, экстремальные функционалы, уравнениями Эйдера которых являются (1), имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{x} \\ x \end{Bmatrix}^2 = \iint_{S_{\perp}} \left(\nabla \begin{Bmatrix} \tilde{\psi} \\ \psi \end{Bmatrix} \right)^2 dS_{\perp} \quad (4)$$

при условиях, что

$$\int \int_{S_\perp} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\psi} \\ \psi \end{array} \right\}^2 dS_\perp = 1, \quad (5)$$

где ∇ — двухмерный оператор Гамильтона. Для сокращения записи введем обозначение u_n , под которым будем понимать приближенные выражения для $\tilde{\psi}$ или ψ при соответствующих условиях (2) или (3).

Для нахождения собственных значений и собственных функций удобно воспользоваться методом Ритца, согласно которому приближенные решения строятся в виде ряда

$$u_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, \quad (6)$$

где a_i — неизвестные коэффициенты. Функции φ_i в соответствии с методом Ритца [1] должны удовлетворять краевому условию (3); при условиях (2) требования на φ_i могут быть ослаблены. Последовательность функций φ_i должна быть полной линейно-независимой системой. Коэффициенты a_i выбираются из условия минимума (4) при условии (5). Таким образом, задача сводится к нахождению минимума функции n переменных:

$$(\nabla u_n, \nabla u_n) = \sum_{i,j=1}^n (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) a_i a_j,$$

где круглые скобки означают скалярное произведение функций.

Следуя методу неопределенных множителей Лагранжа, составим функционал

$$F = (\nabla u_n, \nabla u_n) - \left\{ \begin{array}{c} \tilde{x} \\ x \end{array} \right\}^2 (u_n, u_n)$$

и из условия $\partial F / \partial a_j = 0$ получим симметричную систему

$$\sum_{i=1}^n a_i \left[(\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) - \left\{ \begin{array}{c} \tilde{x} \\ x \end{array} \right\}^2 (\varphi_i, \varphi_j) \right] = 0 \quad (7)$$

$$(j = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Система (7) — линейная однородная относительно a_i . Из условия равенства ее детерминанта нулю получаем характеристическое уравнение для $\left\{ \begin{array}{c} \tilde{x} \\ x \end{array} \right\}^2$:

$$\begin{vmatrix} (\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_1) - \left\{ \begin{array}{c} \tilde{x} \\ x \end{array} \right\}^2 (\varphi_1, \varphi_1); & (\nabla \varphi_2, \nabla \varphi_1) - \left\{ \begin{array}{c} \tilde{x} \\ x \end{array} \right\}^2 (\varphi_2, \varphi_1); & \dots & (\nabla \varphi_n, \nabla \varphi_1) - \left\{ \begin{array}{c} \tilde{x} \\ x \end{array} \right\}^2 (\varphi_n, \varphi_1); \\ (\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2) - \left\{ \begin{array}{c} \tilde{x} \\ x \end{array} \right\}^2 (\varphi_1, \varphi_2); & (\nabla \varphi_2, \nabla \varphi_2) - \left\{ \begin{array}{c} \tilde{x} \\ x \end{array} \right\}^2 (\varphi_2, \varphi_2); & \dots & (\nabla \varphi_n, \nabla \varphi_2) - \left\{ \begin{array}{c} \tilde{x} \\ x \end{array} \right\}^2 (\varphi_n, \varphi_2); \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_n) - \left\{ \begin{array}{c} \tilde{x} \\ x \end{array} \right\}^2 (\varphi_1, \varphi_n); & (\nabla \varphi_2, \nabla \varphi_n) - \left\{ \begin{array}{c} \tilde{x} \\ x \end{array} \right\}^2 (\varphi_2, \varphi_n); & \dots & (\nabla \varphi_n, \nabla \varphi_n) - \left\{ \begin{array}{c} \tilde{x} \\ x \end{array} \right\}^2 (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Наименьший из корней уравнения (8) равен минимуму выражения (4) при условии (5).

Для нахождения приближенного m -го собственного значения [2] необходимо искать минимум выражения (4) при дополнительных условиях

$$(u_m, u_m) = 1; \quad (u_m, u_k) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, m-1), \quad (9)$$

где u_k — приближенное значение k -ой нормированной собственной функции оператора Лапласа.

2. МАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

1. Первое собственное значение уравнения (1) при условии (2) для цилиндрического волновода является первым корнем уравнения $J'_1(x) = 0$, равным $1,84/a$, где a — внутренний радиус цилиндра. Этому собственному значению в круглом волноводе соответствуют две вырожденные магнитные волны H_{11} , одна с четной, другая с нечетной азимутальной зависимостью.

Будем строить приближенное решение (6) для волны квази- H_{11} крестообразного волновода (рис. 1a) в виде

$$\tilde{\psi}_1 = \sum_n a_n J_n(1,84 r/a) [\cos(n\varphi) - \sin(n\varphi)] \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

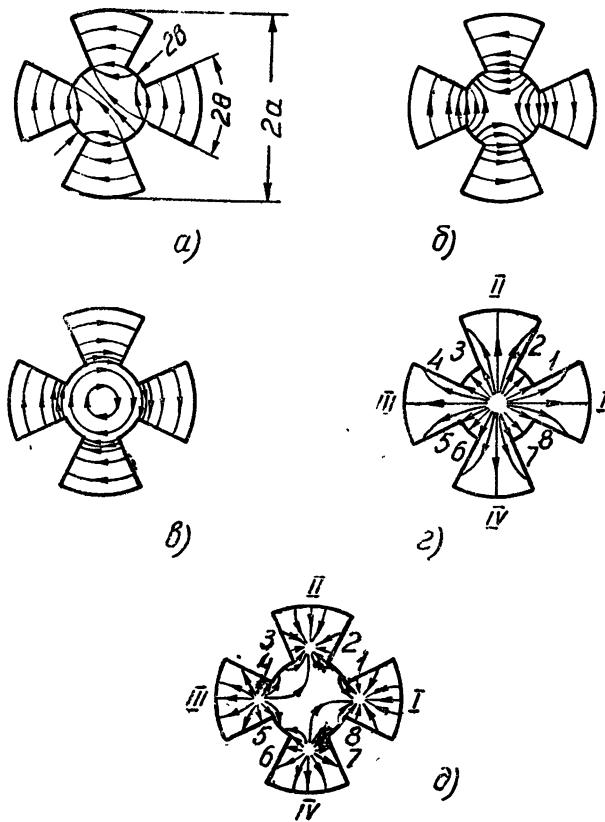


Рис. 1.

Функции $\cos(n\varphi)J_n(v_{ni}r)$ и $\sin(n\varphi)J_n(v_{ni}r)$, рассматриваемые для всех пар индексов, образуют ортогональную систему, т. е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi \int_0^1 r J_n(v_{ni}r) J_m(v_{mj}r) dr = 0, \quad (10)$$

где v_{ni} и v_{mj} являются различными неотрицательными корнями уравнения $J'_n(x) = 0$, либо $J_n(x) = 0$. При этом первый сомножитель (10) равен нулю при $m \neq n$, второй — при $m = n; j \neq i$. Аналогичная ситуация имеет место и в случае произведений, содержащих $\sin(n\varphi)\sin(m\varphi)$ или $\cos(n\varphi)\sin(m\varphi)$. Следовательно, детерминант (8) будет диагональным. В этом случае достаточно ограничиться первым приближением, положив $n = 1$. Тогда

$$\tilde{x}_1 = \sqrt{(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_1)/(\varphi_1, \varphi_1)};$$

$$(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_1) = 1,84^2 \left\langle (2\pi - 8\theta) \left\{ \frac{\mu^2}{2} [J_2^2(1,84\mu) - J_1(1,84\mu) J_3(1,84\mu)] - \right. \right. \\ \left. \left. - 1,77 \operatorname{sh}\left(\frac{1,84\mu}{3}\right) + 1,09\mu - 0,11 \cos(2,064\mu) \right\} + 0,084\theta + 0,695 \right\rangle; \\ (\varphi_1, \varphi_1) = a^2 \left\{ (2\pi - 8\theta) \frac{\mu^2}{2} [J_1^2(1,84\mu) - J_0(1,84\mu) J_2(1,84\mu)] + 0,956\theta \right\},$$

где $\mu = b/a$, 2θ — угол раствора сектора волновода. При $\mu = 1$ и $\mu = 0$ $\tilde{x}_1 = 1,84/a$ независимо от θ .

Зависимость \tilde{x}_1 от μ и θ представлена на рис. 2. Нормированный в соответствии с (5) коэффициент $a_1 a$ в зависимости от μ и θ приведен в таблице 1.

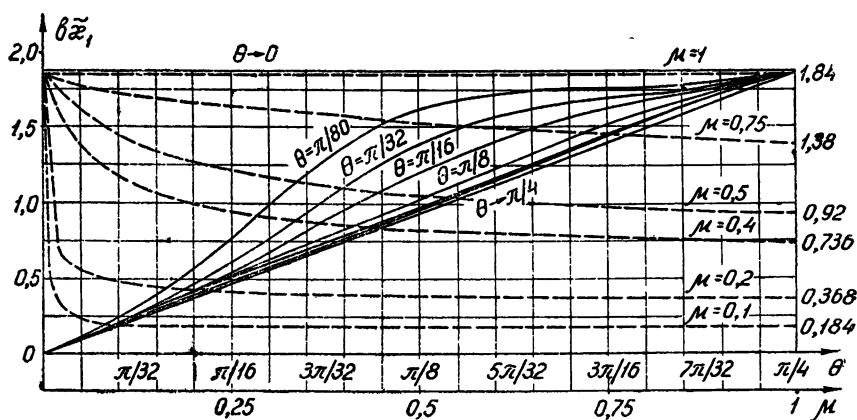


Рис. 2. Собственное значение \tilde{x}_1 волны квази- $(H'_{11} + H''_{11})$ в волноводе.

При переходе креста в круг ($\mu = 1$ или $\theta = 0$ при $\mu \neq 1$) магнитная волна переходит в суперпозицию двух волн H_{11} (одна с четной, другая с нечетной азимутальной зависимостью) с собственными значениями $\tilde{a}x_1 = 1,84$ или $\tilde{b}x_1 = 1,84$ соответственно,

Таблица 1

$\mu \backslash \theta$	$\pi/4$	$7\pi/32$	$6\pi/32$	$\pi/8$	$\pi/16$	$\pi/32$	$\pi/80$	0
1,0	1,153	1,153	1,153	1,153	1,153	1,153	1,153	1,153
0,75	1,153	1,198	1,250	1,375	1,545	1,662	1,745	1,805
0,50	1,153	1,225	1,310	1,558	2,035	2,530	3,085	3,755
0,40	1,153	1,229	1,320	1,600	2,177	2,880	3,860	5,680
0,20	1,153	1,232	1,330	1,630	2,300	3,230	5,025	21,89
0,00	1,153	1,232	1,330	1,632	2,310	3,265	5,155	∞

2. Второе собственное значение уравнения (1) при условии (2) для цилиндрического волновода является первым корнем уравнения $J_2'(x) = 0$, равным $3,054/a$, что соответствует волне H_{21} . Тогда приближенное решение (6) для волны квази- H_{21} крестообразного волновода (рис. 1б) при условии (9) удобно строить в виде:

$$\tilde{\psi}_2 = \sum_n a_n J_{n+1}(3,054 r/a) \{ \cos[(n+1)\varphi] - \sin[(n+1)\varphi] \} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Учитывая (10), снова получим диагональный детерминант (8), из которого в первом приближении ($n = 1$) найдем:

$$\tilde{x}_2 = \sqrt{(\nabla\varphi_1, \nabla\psi_1)/(\varphi_1, \varphi_1)},$$

где

$$(\nabla\varphi_1, \nabla\psi_1) = 3,054^2 \left\langle (2\pi - 8\theta) \left\{ \frac{\mu^2}{2} [J_2^2(3,054\mu) - J_0(3,054\mu)J_2(3,054\mu)] - \right. \right.$$

$$- 0,145 \cos(2,04\mu) + 0,048 \cos^3(2,04\mu) + 0,0935 \cos(1,715\mu) -$$

$$\left. \left. - 0,0312 \cos^3(1,715\mu) \right\} + 0,246\theta + 0,214 \right\rangle;$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = a^2 \left\{ (2\pi - 8\theta) \frac{\mu^2}{2} [J_2^2(3,054\mu) - J_1(3,054\mu)J_3(3,054\mu)] + \right.$$

$$\left. + 0,5408\theta \right\}.$$

Зависимость \tilde{x}_2 от μ и θ представлена на рис. 3.

Нормированный в соответствии с (5) коэффициент ($a_1 a$) в зависимости от μ и θ приведен в таблице 2.

Таблица 2

$\mu \backslash \theta$	$\pi/4$	$7\pi/32$	$6\pi/32$	$\pi/8$	$\pi/16$	$\pi/32$	$\pi/80$	0
1,0	1,533	1,533	1,533	1,533	1,533	1,533	1,533	1,533
0,75	1,533	1,618	1,685	1,900	2,220	2,455	2,700	2,787
0,40	1,533	1,670	1,750	2,110	2,830	3,665	4,730	6,360
0,20	1,533	1,670	1,770	2,170	3,064	4,325	6,800	15,75
0,0	1,533	1,670	1,770	2,170	3,070	4,340	6,860	∞

В предельном случае (когда $\mu = 1$ или $\theta = 0$ при $\mu \neq 1$) магнитная волна переходит в суперпозицию двух вырожденных волн H_{21} (одна с четной, другая с нечетной азимутальной зависимостью) с собственными значениями $\tilde{ax}_2 = 3,054$ или $\tilde{bx}_2 = 3,054$ соответственно.

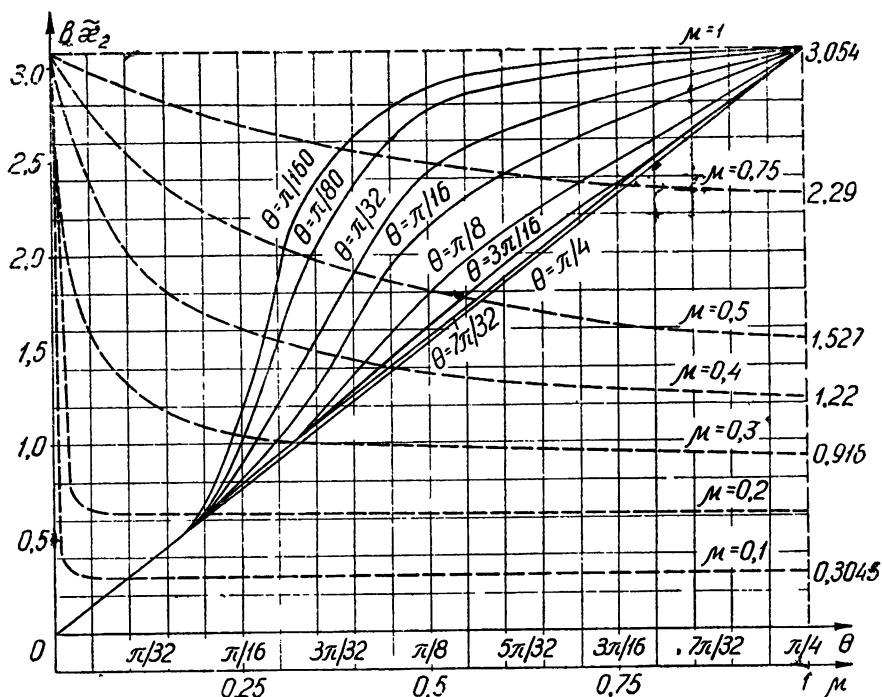


Рис. 3. Собственное значение $\tilde{\alpha}_2$ волны квази- $(H'_{21} + H''_{21})$ в волноводе.

3. Третье собственное значение уравнения (1) при условии (2) для цилиндрического волновода является первым корнем уравнения $J'_0(x) = 0$, равным $3,83/a$, что соответствует волне H_{01} . Приближенное решение (6) для волны квази- H_{01} крестообразного волновода (рис. 1в) при условии (9) можно строить в виде:

$$\tilde{\psi}_3 = \sum_n a_n J_n(3,83 r/a) [\cos(n\varphi) - \sin(n\varphi)] \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

В первом приближении ($n = 0$) получим:

$$\tilde{x}_3 = \frac{3,83}{a} \sqrt{\frac{(2\pi - 80)\mu^2 [J_1^2(3,83\mu) - J_0(3,83\mu)J_2(3,83\mu)] + 1,298\theta}{(2\pi - 80)\mu^2 [J_0^2(3,83\mu) + J_1^2(3,83\mu)] + 1,298\theta}}.$$

Отсюда следует, что при $\mu=0$, $\mu=1$ или при $3,83\mu = 2,405$ $\tilde{x}_3 = 3,83/a$ независимо от θ .

Зависимость \tilde{x}_3 от μ и θ представлена на рис. 4. Нормированный в соответствии с (5) коэффициент $(a_0 a)$ в зависимости от μ и θ приведен в таблице 3.

Таблица 3

$\mu \backslash \theta$	$\pi/4$	$7\pi/32$	$6\pi/32$	$\pi/8$	$\pi/16$	$\pi/32$	$\pi/80$	0
1,0	1,400	1,400	1,400	1,400	1,400	1,400	1,400	1,400
0,75	1,400	1,430	1,460	1,530	1,610	1,660	1,686	1,708
0,40	1,400	1,440	1,485	1,590	1,720	1,800	1,850	1,888
0,20	1,400	1,475	1,563	1,805	2,220	2,560	2,855	3,130
0,0	1,400	1,475	1,615	1,980	2,800	3,965	6,260	∞

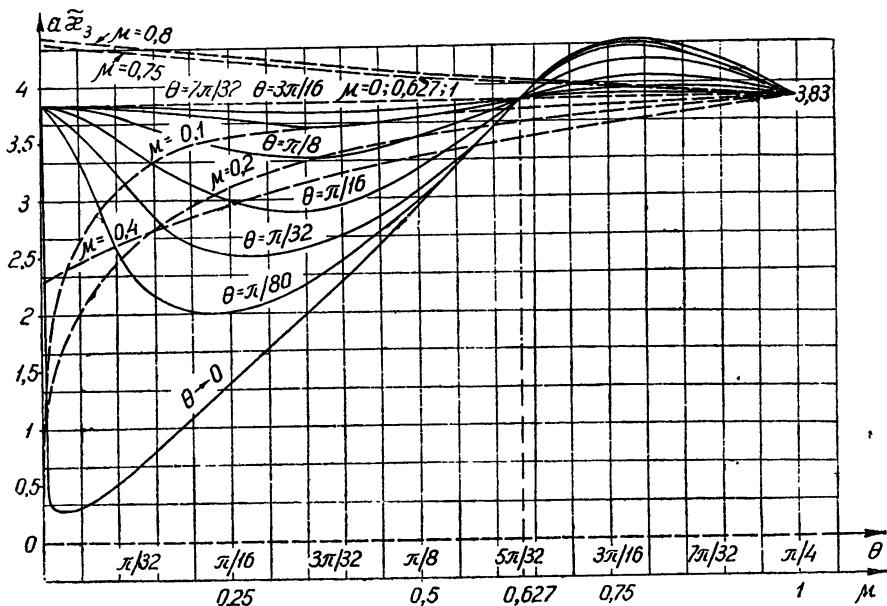


Рис. 4. Собственное значение $\alpha \tilde{x}_3$ волны квази- H_{01} в волноводе.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

1. Определение критической частоты основной электрической волны (квази- E_{01}) (рис. 1г) сводится к определению наименьшего отличного от нуля собственного значения уравнения (1) при условии (3).

В качестве координатных функций для данной задачи выбрана система функций, составленная из произведений функции $\omega(r, \varphi)$ на различные комбинации произведений тригонометрических функций и функций Бесселя:

$$\psi_1 = \omega(r, \varphi) \left\{ a_0 + \sum_n a_{n+1} J_n(2,405 r/a) [\cos(n\varphi) - \sin(n\varphi)] \right\} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

где функция $\omega(r, \varphi)$ — непрерывная, имеющая внутри области S_\perp ограниченные и непрерывные производные $\partial\omega/\partial r$ и $\partial\omega/\partial\varphi$ и удовлетворяющая условиям [3]: $\omega(r, \varphi) > 0$ внутри S_\perp ; $\omega(r, \varphi) = 0$ на контуре L .

Функция $\omega(r, \varphi)$ для любого сектора креста определена в виде

$$\omega(r, \varphi) = (a^2 - r^2) \{ |a^2\mu^2 - r^2| + (a^2\mu^2 - r^2) + r^2 [|a^2 - \varphi^2| + (a^2 - \varphi^2)] \}, \quad (11)$$

где $a = (i-1)\pi/2 + (-1)^{j+1}\theta$; i — номер сектора; j — номер грани креста. Ограничевшись $\psi_1 = a_0\omega(r, \varphi)$, получим из (8):

$$x_1 = V(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_1)/(\varphi_1, \varphi_1),$$

где

$$\begin{aligned} (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_1) &= 128 a^8 \left[\theta^3 \left(\frac{1}{72} - \frac{\mu^4}{3} + \frac{5\mu^6}{9} - \frac{2\mu^8}{9} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{45} \theta^5 + \frac{\pi}{4} \left(\frac{\mu^4}{4} - \frac{\mu^6}{6} + \frac{\mu^8}{12} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = 32a^{10} \left[\theta^3 \left(\frac{\mu^6}{9} - \frac{\mu^8}{9} + \frac{\mu^{10}}{30} \right) + \frac{2}{225} \theta^5 + \frac{\pi}{4} \left(\frac{\mu^6}{6} - \frac{\mu^8}{12} + \frac{\mu^{10}}{60} \right) \right].$$

Зависимость α_1 от μ и θ представлена на рис. 5. Коэффициент $a_0 a^5$ нормированной собственной функции в зависимости от μ и θ приведен в таблице 4.

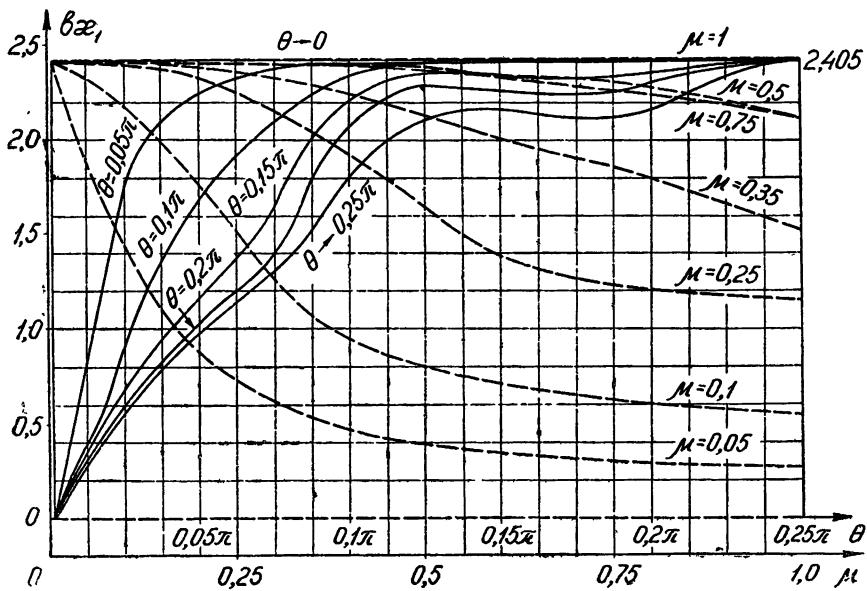


Рис. 5. Собственное значение $b\alpha_1$ волны квази- $(E'_01 + E''_01)$ в волноводе.

Таблица 4

$\theta \backslash \mu$	1,0	0,75	0,50	0,25	0,10	0,0
0,24 π	0,569	1,138	2,500	3,750	3,778	3,785
0,20 π	0,569	1,220	3,220	5,860	6,000	6,000
0,15 π	0,569	1,290	3,810	11,37	12,25	18,25
0,10 π	0,569	1,319	4,075	23,00	33,75	33,80
0,00	0,569	1,339	4,075	31,78	490,0	∞

В предельном случае (когда $\mu = 1$ либо $\theta = 0$ при $\mu \neq 1$) собственное значение становится равным $a\alpha_1 = 2,405$ или $b\alpha_1 = 2,405$ соответственно.

2. Второе собственное значение уравнения (1) при условии (3) для цилиндрического волновода равно $3,83/a$ (волна E_{11}). Тогда для волны квази- E_{11} крестообразного волновода (рис. 1д) приближение ко второй собственной функции, удовлетворяющее условиям (3) и (9), можно строить в виде:

$$\phi_2 = \omega(r, \varphi) \sum_n a_n J_n(3,83 r/a) [\cos(n\varphi) - \sin(n\varphi)] \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Ограничившись случаем $n = 1$, получим:

$$\alpha_2 = \sqrt{(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_1)/(\varphi_1, \varphi_1)},$$

где

$$(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_1) = 128 a^8 [0^3 (-0,0872 \mu^5 + 0,2 \mu^6 - 0,034 \mu^7 + 0,12 \mu^8 - 0,19 \mu^9 + 0,135 \mu^{10} + 0,024 \mu^{11} - 0,142 \mu^{12} - 0,173 \mu^{13} + 0,182 \mu^{14}) + 0,1805 \theta^5 +$$

$$+ \frac{\pi}{4} (-0,268 \mu^5 + 3,2 \mu^6 - 4,2 \mu^7 + 1,9 \mu^8 - 4,3 \mu^9 + 6,5 \mu^{10} - \\ - 4,8 \mu^{11} - 5,25 \mu^{12} - 1,3 \mu^{13} + 9,33 \mu^{14})];$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = 32 a^{10} [\theta^3 (-0,04 \mu^7 + 0,488 \mu^8 - 0,39 \mu^9 - 0,266 \mu^{10} + 0,91 \mu^{11} - \\ - 0,63 \mu^{12} + 0,32 \mu^{13} + 0,29 \mu^{14}) + 0,012 \theta^6 + \frac{\pi}{4} (-0,04 \mu^7 + 0,46 \mu^8 - \\ - 0,404 \mu^9 - 0,144 \mu^{10} + 0,41 \mu^{11} - 0,08 \mu^{12} - 0,1 \mu^{13} + 0,12 \mu^{14})].$$

Зависимость α_2 от μ и θ представлена на рис. 6. Коэффициент $a_1 a_5$ нормированной собственной функции в зависимости от μ и θ приведен в таблице 5.

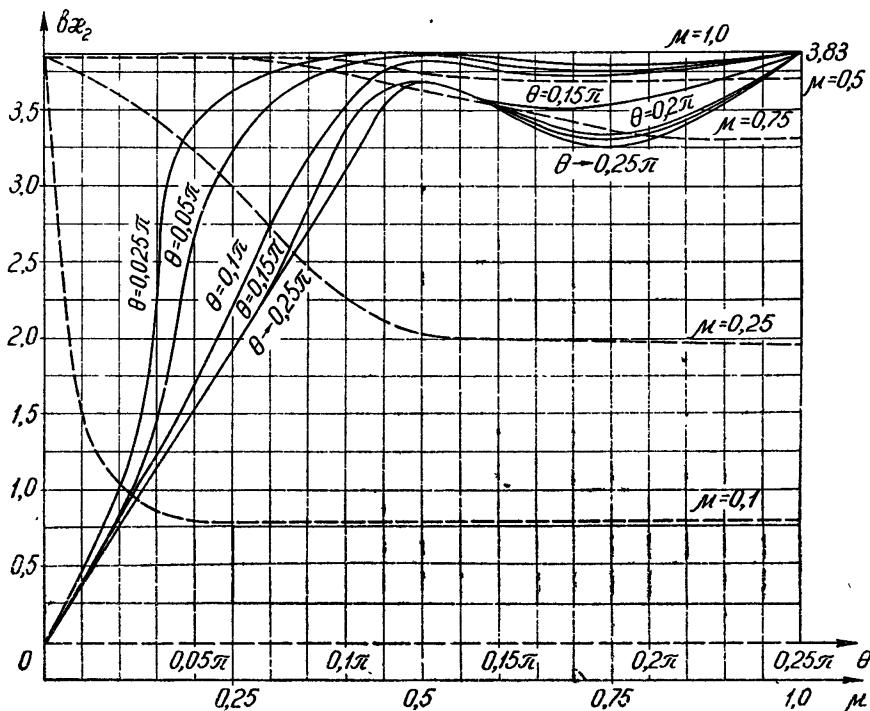


Рис. 6. Собственное значение $b\alpha_2$ волны квази- $(E_{11}' + E_{11}'')$ в волноводе.

Таблица 5

$\theta \backslash \mu$	1,0	0,75	0,50	0,25	0,10	0,0
0,24 π	0,424	1,035	2,840	3,250	3,260	3,260
0,20 π	0,424	1,195	3,990	5,150	5,160	5,160
0,15 π	0,424	1,373	5,750	10,50	10,58	10,58
0,10 π	0,424	1,490	7,000	28,30	29,20	29,20
0,0	0,424	1,542	7,375	114,5	146,2	∞

В предельном случае, когда $\mu = 1$ либо $\theta = 0$ при $\mu \neq 1$, собственное значение становится равным $\alpha_2 = 3,83$ либо $b\alpha_2 = 3,83$ соответственно.

Из рис. 4 и 6 следует, что в крестообразном волноводе отсутствует вырождение между волнами H_{01} и E_{11} . Это дает возможность эффективно использовать крестообразный волновод в изгибах для передачи волны H_{01} .

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
2. Ф. Франк, Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. II, Гл. ред. общетехн. лит., М.—Л., 1937.
3. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.

Центральный научно-исследовательский
институт связи, Москва.

Поступила в редакцию
15 апреля 1961 г.

**ELECTROMAGNETIC WAVES IN A CROSS-SHAPED
SECTORIAL WAVEGUIDE**

N. A. Kouzmin, T. V. Makarov

The eigenvalues and normal waves in perfectly conducting regular cross-shaped waveguide were found by variation method. The numerical results are given.

ИЗМЕРЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ МАЛЫХ ОБРАЗЦОВ В ДИАПАЗОНЕ СВЧ*

С. А. Песковацкий, Т. Г. Шеина

Описан способ измерения ϵ и $\operatorname{tg} \delta$ диэлектрических образцов малых размеров простой формы. Экспериментально найдено, что разница в определении ϵ указанным методом и обычным волноводным методом не превышает 4%. Показано, что требование малости образцов не очень критично.

Широко применяемые в диапазоне СВЧ методы измерения диэлектрической проницаемости ϵ —волноводный [1,2] и резонаторный [1,3]—требуют образцов довольно больших размеров (порядка длины волны). Иногда получение таких образцов невозможно или нежелательно. Поэтому интересно рассмотреть возможность измерения ϵ на очень малых образцах, когда максимальный размер образца $2a$ много меньше длины волны λ .

В работе [4] дано выражение для смещения частоты резонатора:

$$\frac{f_0^2 - f^2}{f_0^2} = \frac{1}{2W} [(PE) + (MH)], \quad (1)$$

где f_0 —резонансная частота невозмущенного резонатора, f —резонансная частота резонатора с образцом, W —полная энергия, запасенная в резонаторе, P , M —электрический и магнитный моменты возмущающего образца. Считая, что образец, имеющий форму эллипсоида вращения, помещен в электрическое поле E_0 , параллельное его наибольшей оси a , из (1) и выражения для P (см. [5]) получим:

$$\frac{f_0^2 - f^2}{f_0^2} = \frac{\Delta\epsilon}{1 + R\Delta\epsilon} \frac{\int E_0^2 v}{\int E_0^2 dv} = pF, \quad (2)$$

где $\Delta\epsilon = \epsilon/\epsilon_0 - 1$, ϵ —диэлектрическая постоянная образца, ϵ_0 —диэлектрическая постоянная среды, в которую помещен образец, v —объем образца,

$$p = \frac{\Delta\epsilon}{1 + R\Delta\epsilon}; \quad F = \frac{\int E_0^2 v}{\int E_0^2 dv};$$

$$R = \left(\frac{c}{a} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (c/a)^2}}{1 - \sqrt{1 - (c/a)^2}} - \right. \\ \left. - \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a} \right)^2} \right] \left[1 - \left(\frac{c}{a} \right)^2 \right]^{-3/2}; \quad (3)$$

* Доклад на конференции МВ и ССО СССР по радиоэлектронике, Харьков, 1960.

при $0,1 \leq c/a \leq 1$

$$R \simeq -0,03 + 0,46 (c/a) - 0,1 (c/a)^2, \quad (3a)$$

ϵ —малая ось эллипсоида, a —большая ось эллипсоида (ось вращения).
При наличии потерь в диэлектрике, т. е. при $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$

$$p = p' - jp'' = \frac{\Delta\epsilon'}{1 + R \Delta\epsilon'} - j \frac{\epsilon''}{(1 + R \Delta\epsilon')^2} \quad (\Delta\epsilon' = \epsilon' - 1).$$

Вводя комплексную частоту [6], получим из (1):

$$\frac{f_0^2 - f^2}{f_0^2} - \frac{j}{Q_\epsilon} = p' F - j p'' F \quad (4)$$

или

$$2\eta = \frac{f_0^2 - f^2}{f_0^2} = p' F; \quad (5)$$

$$1/Q_\epsilon = p'' F, \quad (6)$$

где $Q_\epsilon = \omega W_p / P_{cp}$ (W_p —запасенная в резонаторе энергия, P_{cp} —средняя за период СВЧ мощность потерь в диэлектрике),

$$1/Q_\epsilon = 1/Q_{0\epsilon} - 1/Q_0$$

($Q_{0\epsilon}$, Q_0 —ненагруженная добротность резонатора с образцом и без него). Из (5) и (6) легко найти ϵ' и ϵ'' :

$$\epsilon' = 1 + \frac{1}{F/2\eta - R}; \quad (7)$$

$$\epsilon'' = \frac{(1 + R \Delta\epsilon')^2}{Q_\epsilon F}. \quad (8)$$

R находится из выражения (3) или (3а) или определяется по графику рис. 1.

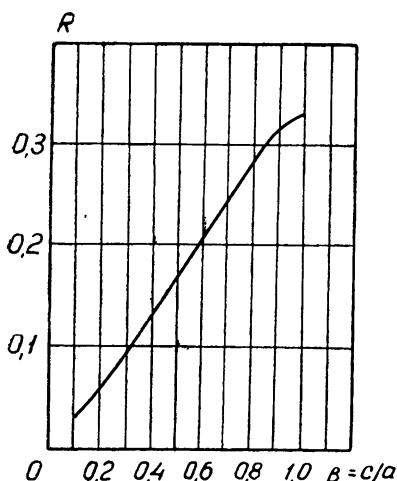


Рис. 1. График зависимости R от $\beta = \frac{c}{a}$ (уравнение (3)).

Погрешность в определении ϵ' при строго эллипсоидальных образцах будет определяться погрешностями в определении смещения частоты 2η и объема возмущенного тела v , а также величиной отброшенных „динамических“ членов в (1). Величины 2η и v могут быть измерены с большой точностью, так что обусловленной ими погрешностью можно пренебречь. Отброшенные члены должны давать вклад в смещение частоты, пропорциональный квадрату размеров образца. При $ka < 0,1$, т. е. для образцов с $2a < 2\text{ мм}$ на волне длиной $\lambda = 3\text{ см}$ это дает ошибку меньше 1%. Предлагаемый метод позволяет работать с меньшими значениями a . Поэтому можно пренебречь и этой погрешностью. Определяющей погрешностью будет ошибка, обуслов-.

ленная отклонениями образца от расчетной формы. Ниже она оценивается экспериментально.

При измерении ϵ'' по тем же соображениям основной погрешностью следует считать ошибку в определении изменения ненагруженной добротности резонатора.

Приготовление эллипсоидальных образцов малых размеров представляет большие трудности. Поэтому была измерена ошибка, вызванная заменой эллипсоидальных образцов образцами более простой формы. Все измерения проводились в прямоугольном резонаторе с резонансом на H_{01} моде. Из одного и того же диэлектрика приготавливались три образца: эллипсоид с $c/a = \beta = 0,4$, прямоугольный параллелепипед с ребрами, отношение которых $m/n = l/n = 0,4$, и прямой цилиндр с высотой h и диаметром d ($d/h = 0,4$). Вес всех образцов был одинаковым. Для образцов с $\epsilon' \approx 3$ при смещениях частоты резонатора ~ 100 мгц на $\lambda = 3$ см разница в смещении частоты различными образцами не превышала $3 \div 5$ мгц.

При $\epsilon' \rightarrow \infty$ выражение (5), как и следует ожидать, переходит в выражение для смещения частоты проводящим телом, полученное иным путем в работе [7]. Проверяя возможность работы с неэллипсоидальными образцами при больших ϵ' , мы измерили смещение частоты медными образцами в форме цилиндров различной высоты и диаметра. Изменения частоты сравнивались с расчетными данными, полученными из (5) при $\Delta\epsilon = \infty$ и $\beta = d/h$. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1

Диаметр образца d (мм)	Высота образца h (мм)	$\beta = \frac{d}{h}$	Смещение частоты		Ошибка (%)
			расчетное	измеренное	
0,2	2,0	0,1	11,9	13,0	+ 9
0,2	1,23	0,16	3,9	4,3	+ 10
0,5	1,25	0,4	7,6	7,8	+ 2,5
1,0	1,1	0,9	9,1	10,0	+ 9

По таблице видно, что ошибка в худшем случае не превышает 10%. В работе [7] при сравнении расчетных и экспериментальных данных для эллипсоидальных образцов погрешность достигала 30%. Авторы [7] связывают эти ошибки с отклонением от эллипсоидальности; однако наши результаты показывают, что неэллипсоидальность не вносит столь большой ошибки. В то же время на результат измерений может существенно повлиять наличие вблизи образца нити подвески. Так, при подвеске образца на тонкой (толщиной 0,03 мм) слюдяной ленточке смещение частоты увеличивалось в $1,5 \div 2$ раза. Приведенные в таблице 1 результаты получены при закреплении образцов на шелковой нити диаметром 0,04 мм. Один и тот же знак ошибки дает основание считать, что ошибка увеличена присутствием нити.

С целью сравнения было проведено измерение ϵ' одних и тех же материалов волноводным методом и методом малых возмущений. Результаты приведены в таблице 2. При измерении методом малых возмущений использовались образцы цилиндрической формы с $\beta = 0,4$.

Как видно из таблицы, разница в определении ϵ' такими методами не превышает 4%. Учитывая, что при измерении волноводным методом ошибка может достигать нескольких процентов, можно считать, что результаты измерений совпадают.

Формулы (7) и (8) получены при условии $ka \ll 1$, когда поле, индуцируемое цилиндрическим образцом, считается электростатическим.

Таблица 2

Диэлектрический материал	ϵ'		Различие в ϵ' (%)
	волноводный метод	метод малых возмущений	
Полистирол	2,47	2,57	+4
Плексиглас	2,56	2,64	+3
Капрон	2,60	2,90	+3,5
Гетинакс	3,96	4,00	+1
Текстолит	3,88	3,84	-1

Однако из расчетов не видно, насколько критичным является это условие. Поэтому мы экспериментально проверили, как велика погрешность при измерении ϵ' , если условие $ka \ll 1$ не выполняется. Для этого были измерены ϵ' образцов, имеющих различную длину и поперечное сечение. Образцы изготавливались из плексигласа в форме параллелепипедов и располагались в резонаторе вдоль электрического поля. Результаты измерений (см. таблицу 3) показали, что условие $ka \ll 1$ не является критичным как к поперечному сечению, так и к длине образцов.

Условие $ka \ll 1$ на длине волны $\lambda = 3 \text{ см}$ выполняется для поперечного сечения со стороной $a = 1 \text{ мм}$. Погрешность измерения ϵ' с $2a = 2 \text{ мм}, 4 \text{ мм}, 8 \text{ мм}$ параллелепипедов, имеющих одинаковую длину c , не превышала 4%. При изменении длины образцов с одинаковым поперечным сечением разброс значений ϵ' был меньше 1%. Ошибка измерений увеличивалась до $3 \div 4\%$, когда длина образца становилась равной высоте резонатора.

Последнее связано с тем, что выражение (1) строго справедливо для свободного пространства и для случая, когда возмущающее тело не изменяет распределения источников электромагнитного поля внутри некоторого объема. Это условие перестает выполняться, когда c равно узкой стенке резонатора.

Таблица 3

Размер образца (мм)	ϵ'	Размер образца (мм)	ϵ'
$1 \times 1 \times 2$	2,52	$2 \times 2 \times 2$	2,57
$1 \times 1 \times 2,5$	2,52	$2 \times 2 \times 2,5$	2,57
$1 \times 1 \times 3,5$	2,51	$2 \times 2 \times 3,5$	2,56
$1 \times 1 \times 5$	2,51	$2 \times 2 \times 5$	2,57
$1 \times 1 \times 8$	2,60	$2 \times 2 \times 8$	2,61
		$4 \times 4 \times 2$	2,60
		$4 \times 4 \times 5$	2,61

При малости поперечного размера и длине, равной высоте резонатора, вместо (1) легко получить для образца любой формы поперечного сечения правильное выражение

$$\frac{f_0^2 - f^2}{f_0^2} = \Delta \epsilon \frac{\int E_0^2 v}{V} \quad (9)$$

Формула (9) отличается от (1) множителем $(1 + R \Delta \epsilon)^{-1}$. Величина $R \Delta \epsilon$ определяет предельную ошибку из-за нарушения условия $ka \ll 1$ для размера a вдоль поля. В нашем случае эта ошибка для сильно вытянутых образцов с малым R должна составлять $3 \div 4\%$, что хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Предлагаемый метод позволяет измерять ϵ' с точностью такого же порядка, как и в широко используемом волноводном методе. Однако первый метод обладает тем преимуществом, что здесь требуются образцы малых размеров, процесс измерения значительно проще, а обработка результатов измерения не сложнее, чем при других методах. Для фиксированных размеров и форм образцов метод малых возмущений позволяет легко осуществить прибор со стрелочным индикатором, непосредственно градуированный в значениях ϵ' .

Авторы приносят благодарность А. Н. Чернцу за ценные советы и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. А. Валитов, В. Н. Сретенский, Радиоизмерения на сверхвысоких частотах, Воениздат, М., 1951.
2. Г. Д. Бурдун, ЖТФ, 20, 813 (1950).
3. К. Г. Кнорре, Изв. АН УССР, сер. физ., 10, 1171 (1946).
4. Н. В. Г. Casimir, Phys. Res. Rep., 6, 162 (1951).
5. А. Л. Микаэлян, Радиотехника, 10, 1, 23 (1956).
6. Дж. Слетеर, Электроника сверхвысоких частот, изд. Сов. радио, М., 1948.
7. L. C. Maier, J. C. Slater, J. Appl. Phys., 23, 68 (1952).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
3 февраля 1961 г.

DIELECTRIC CONSTANT MEASUREMENT OF SMALL PIECES AT MICROWAVE FREQUENCIES

S. A. Peskovatsky, T. G. Sheina

The method has been described available to measuring ϵ and $\operatorname{tg} \delta$ of small specimens of a simple form. It was experimentally found, that the difference of ϵ measured by the usual waveguide method and by proposed one does not exceed 4%. The restrictions on size of a specimen is not very strong.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ЭЛЕКТРОНОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ НЕРАЗРЕЗНОМ МАГНЕТРОНЕ В СТАТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

М. И. Кузнецов, Л. М. Грошков

Приводятся результаты экспериментального измерения траекторий электронов в цилиндрическом неразрезном магнетроне электронно-оптическим методом. Установлено, что в длинном цилиндрическом неразрезном магнетроне в статическом режиме имеет место бидромическое состояние пространственного заряда с двумя виртуальными катодами. Распределение потенциала в электронном облаке магнетрона близко к бриллюэновскому.

Сущность электронно-оптического метода измерения траекторий, предложенного Мюллером [1], состоит в следующем. В магнетрон вводится тонкий электронный луч (назовем его зондирующим) так, что при входе в магнетрон он параллелен оси лампы и касается поверхности катода. Пройдя через магнетрон, луч попадает на флюоресцирующий экран, поверхность которого перпендикулярна оси магнетрона, и создает на нем светящееся пятно. Это пятно отклоняется совместным действием электрического и магнитного полей магнетрона. Уравнения движения электронов и зондирующего луча в плоскости, перпендикулярной оси магнетрона, и соответствующие начальные условия—те же самые, что и для электронов, эмиттируемых катодом магнетрона. Поэтому точка пересечения зондирующего луча с некоторой фиксированной плоскостью, перпендикулярной оси магнетрона, имеет такие же азимутальные и радиальные координаты, как электрон, который вылетает из катода магнетрона в азимутальной плоскости, проходящей через начало зондирующего луча, и движется в межэлектродном пространстве в течение интервала времени, равного времени пролета электронов луча от точки входа их в магнетрон до вышеупомянутой плоскости. Если осевую скорость электронов луча менять с некоторой частотой, то на флюоресцирующем экране, представляющем собой такую плоскость, будет видна кривая, изображающая часть траектории электрона в магнетроне. Величина этой части траектории зависит от амплитуды напряжения, приложенного между электронной пушкой и катодом магнетрона (ускоряющего напряжения луча $V_{уск}$), которое определяет время пролета электронов луча в магнетроне, а также от режима магнетрона.

Первое измерение траекторий электронов в магнетроне электронно-оптическим методом было произведено Свенссоном [2]. По данным [2] траектории электронов в цилиндрическом магнетроне являются петлями, которые начинаются и оканчиваются на катоде. Однако работа [2] изложена чрезвычайно лаконично и не содержит сведений, которые позволили бы сопоставить результаты эксперимента с теоретическими данными.

Значительно более подробно описаны результаты измерения траекторий электронов в магнетроне электронно-оптическим методом в работе Вервилла [3], где на основании полученных данных утверждается,

что в магнетроне имеет место однопоточное состояние пространственного заряда (так называемое состояние Бриллюэна, рис. 1а). Но экспериментальные данные, полученные в работе [3], недостаточно убедительны. Дело в том, что экспериментальная лампа Вервилла сконструирована таким образом, что зондирующий луч значительную часть пути

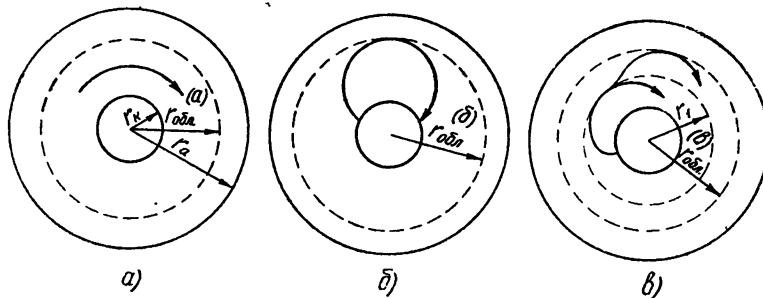


Рис. 1. Возможное состояние пространственного заряда в магнетроне:
а) — однопоточное (бриллюэнское) состояние; б) — бидромическое состояние с однопетлевыми траекториями (с одним виртуальным катодом); в) — бидромическое состояние с двухпетлевыми траекториями (с двумя виртуальными катодами),

проходит в областях краевых полей. Поэтому отклонение луча в существенной степени определяется не полями, имеющими место в пространственном заряде магнетрона, а полями на краях лампы. Следовательно, кривые, получаемые на экране такой экспериментальной лампы, должны значительно отличаться по форме от траекторий электронов магнетрона. Это отмечается и самим автором, который провел эксперимент по измерению траекторий электронов в магнетроне без пространственного заряда и обнаружил, что наблюдаемые кривые весьма существенно отличаются от траекторий электронов, которые в этом случае рассчитываются теоретически. Кроме того, автор [3] отмечает, что при наличии полного пространственного заряда в магнетроне след луча на экране оказывается чрезвычайно сильно размытым. Он объясняет это обстоятельство влиянием разброса начальных скоростей электронов зондирующего луча. Разброс начальных скоростей действительно должен приводить к размытию пятна на экране. Однако длина экспериментальных пятен, согласно [3], оказывается больше длины, рассчитанной теоретически в предположении однопоточного состояния. При наличии однопоточного состояния пространственного заряда в магнетроне пятно не должно отходить от точки, соответствующей месту входа луча в лампу. Однако в эксперименте [3] пятно заметно отходит от этой точки при относительно больших временах пролета луча в магнетроне. Отход пятна наиболее естественным образом может быть объяснен тем, что состояние пространственного заряда в магнетроне существенно отличается от однопоточного.

Таким образом, утверждение Вервилла о наличии однопоточного состояния пространственного заряда в неразрезном магнетроне основано на недостаточно убедительных экспериментальных данных и нуждается в экспериментальной проверке. Результаты такой проверки излагаются в настоящей статье.

1. КОНСТРУКЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ЛАМПЫ

Конструкция и внешний вид разборной, экспериментальной лампы показаны на рис. 2, 3 и 4. При конструировании лампы авторы стре-

мились прежде всего максимально избавиться от влияния на зондирующий луч краевых полей. Представлялось особенно важным, чтобы в момент влета в междуэлектродное пространство магнетрона элект-

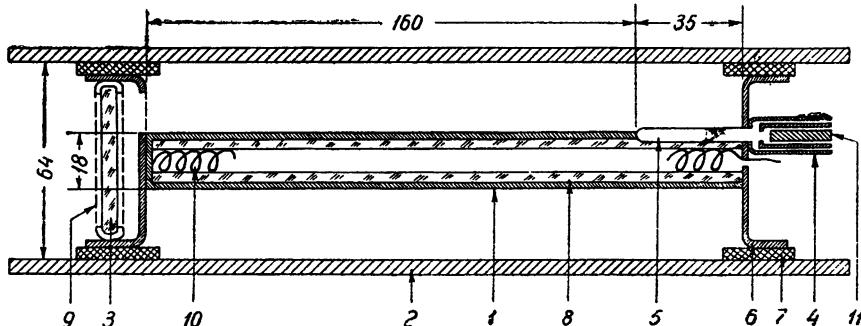


Рис. 2. Конструкция экспериментальной лампы:

1—катод магнетрона; 2—анод; 3—флюоресцирующий экран; 4—электронная пушка; 5—коллиматорная трубка; 6—катодная чашечка; 7—слюдяная прокладка; 8—кварцевая трубка; 9—сетка, обжимающая экран; 10—подогреватель; 11—катод электронной пушки.

роны зондирующего луча находились в тех же самых условиях, что и электроны, эмиттируемые катодом магнетрона. Точнее, необходимо было добиться выполнения следующих условий.

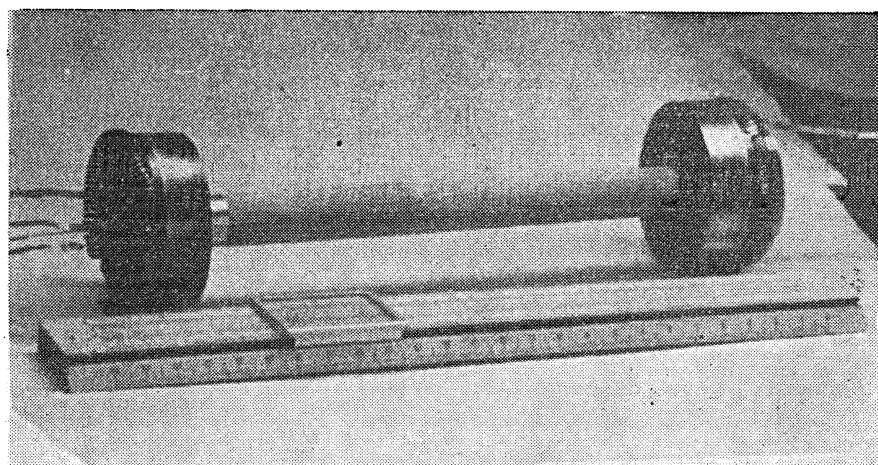


Рис. 3. Экспериментальная лампа без оболочки.

1) Зондирующий луч должен входить в междуэлектродное пространство магнетрона параллельно поверхности катода ($v_{r0}=v_{\theta 0}=0$, где v_r и v_θ — радиальная и азимутальная компоненты скорости электронов луча).

2) Начало луча должно находиться на самой поверхности катода ($r_0=r_k$, где r_k — радиус катода).

3) Начало луча должно быть настолько удалено от края лампы, чтобы краевые поля здесь были ничтожно малыми*.

* В дипломной работе Е. А. Ремизовой и Н. С. Хрулевой, выполненной под руководством одного из авторов, было экспериментально установлено, что в магнетроне с большими дисками на краях катода при наличии в нем полного пространственного заряда область краевых полей под ширине не более, чем $0.2 (r_a - r_k)$, где r_a — радиус анода.

Конструкцию электронно-оптической системы, которая обеспечивает указанные условия, можно видеть на рис. 2. Зондирующий луч вводится в междуэлектродное пространство через длинный коллиматор—никелевую трубку диаметром 0,5 *мм*, длиной 35 *мм* и толщиной стенок 0,05 *мм*, вмонтированную в катод так, что ее ось совпадает с образующей цилиндрического катода. Электроны луча попадают в магнетрон через верхнюю половину сечения трубки; нижняя половина трубки закрыта. Входное отверстие коллиматора находится на покрытой оксидным слоем части катода магнетрона и удалено от края оксидного покрытия на 17 *мм*. Оксидный слой покрывает и соответствующую часть наружной поверхности коллиматора.

Конструкция экспериментальной лампы предусматривает также значительное уменьшение влияния на точность измерений краевых полей, имеющих место на конце магнетрона, обращенном к флюоресцирующему экрану. Для этого длина магнетрона взята настолько большой, что она во много раз превосходит ширину области краевых полей—расстояние между обращенным к экрану краем электронного облака в магнетроне и экраном. Длина активной части катода составляет 170 *мм*, а расстояние от конца оксидного покрытия катода до экрана равно 14 *мм*.

Для увеличения точности измерений поперечные размеры магнетрона выбраны настолько большими, чтобы размеры пятна и толщина кривых на экране были достаточно малыми по сравнению с расстоянием катод—анод. Как мы увидим ниже, это позволило провести количественное измерение траекторий и вычислить по ним распределение потенциала в магнетроне.

Как видно на рис. 2, катод магнетрона имеет диаметр 18 *мм* и длину 195 *мм*. Керн катода изготовлен из никелевой трубы с толщиной стенок 0,1 *мм*. Внутрь катода плотно вставлена кварцевая трубка, которая выполняет три функции: обеспечивает механическую прочность и точность сборки лампы, изолирует катод от его подогревателя, создает большую тепловую инерционность катода. Последняя необходима для того, чтобы можно было избежать влияния магнитного поля тока накала на ход зондирующего луча путем выключения накала на время измерения. В нашем магнетроне необходимая для режима полного пространственного заряда температура катода сохранялась в течение более чем пяти минут после снятия напряжения накала.

Катод магнетрона закреплен в анодном цилиндре с помощью металлических чашечек, приваренных к концам катода и отделенных от анода слюдяной прокладкой. Таким образом, между катодом и анодом образуется значительная емкость, которая на коротко замыкает эти электроды по высокой частоте. Чашечка, приваренная к концу катода,

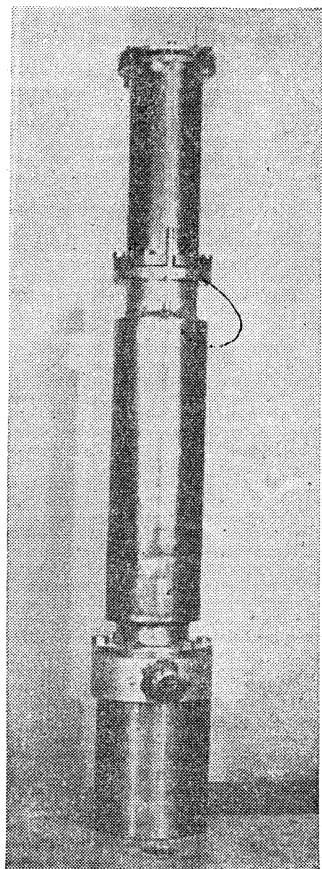


Рис. 4. Внешний вид экспериментальной лампы.

обращенному к экрану, имеет в своем донышке широкие секторные вырезы для выхода зондирующего луча, так что от катода по направлению к аноду проходят только три металлические полоски (траверзы). Описанный способ крепления катода обеспечивает, во-первых, хорошую соосность катода и анода и, во-вторых, предотвращает возникновение автоколебаний в цепях питания магнетрона.

Анодом магнетрона служит медная труба с внутренним диаметром (диаметр анода), равным 64 *мм*, которая одновременно выполняет роль и внешней оболочки всей экспериментальной лампы. К концам этой трубы припаяны фланцы, и лампа закрывается с одной стороны диском с трубкой для откачки, а с другой — плоским кварцевым стеклом. Сквозь это стекло и проводится визуальное наблюдение кривых на экране и их фотографирование.

Флюоресцирующий экран представляет собой стеклянный диск, покрытый виллемитом. Экран зажат между двумя сетками, приваренными к металлическому кольцу, которое вставляется в катодную чашечку.

Электронная пушка зондирующего луча (взятая от ЛБВ промышленного типа) жестко закреплена на катодной чашечке магнетрона. Отверстие ее выходной диафрагмы тщательно совмещено с коллиматорной трубкой (с тем, чтобы электроны из пушки в магнетрон попадали только через коллиматорную трубку).

Поскольку в лампе выделяется большая мощность (мощность накала магнетрона достигает 250 *вт*), применено охлаждение лампы проточной водой с помощью водяной рубашки, окружающей анодную трубу.

Лампа помещается в соленоид длиной в 500 *мм*, создающий продольное однородное магнитное поле.

2. ПРОВЕРКА ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛАМПЫ И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ЭКСПЕРИМЕНТА

Перед началом основного эксперимента были проведены предварительные измерения, которые имели целью установить, удовлетворяет ли электронно-оптическая система сформулированным выше требованиям. Для этого было измерено пятно на экране, создаваемое лучом при отсутствии магнитного поля *H* и анодного напряжения магнетрона *U_a*, при потенциале экрана, равном потенциалу катода магнетрона, и ускоряющем напряжении *V_{уск}*=1 *кв*. Пятно при этом имеет размеры не более 3 *мм* и своим краем, обращенным к поверхности катода, совпадает с проекцией катода на экран. Это означает, что луч входит в магнетрон, скользя по поверхности катода магнетрона параллельно его оси.

Результаты предварительных измерений позволяют оценить величину поперечных компонент скорости электронов луча *v_{попер}* при входе его в магнетрон. Так как

$$v_{\text{попер}} / v_{\text{прод}} = l/L = \sqrt{V_{\text{попер}}/V_{\text{уск}}},$$

где *v_{прод}* — скорость электронов луча вдоль оси магнетрона, *l* — размеры пятна на экране, *L*=167 *мм* — расстояние от коллиматора до экрана, *V_{попер}* — поперечная скорость электрона, выраженная в вольтах, то

$$V_{\text{попер}} = V_{\text{уск}} (l/L)^2 = 0,32 \text{ в.}$$

Следовательно, поперечные компоненты скорости электронов луча, вносимые фокусирующей системой лампы, не превышают скоростей вылета электронов из катода.

Юстировка лампы в соленоиде проводится таким образом, что при изменении магнитного поля H и ускоряющего напряжения луча $V_{\text{уск}}$ пятно на экране остается на одном и том же месте (которое соответствует началу исследуемых траекторий электронов магнетрона). При этом диаметр пятна остается постоянным (если H не близко к нулю) и не превышает 0,8 мм (рис. 5). Этим фактом подтверждается отмеченная ранее малая величина поперечных компонент скорости электронов луча.

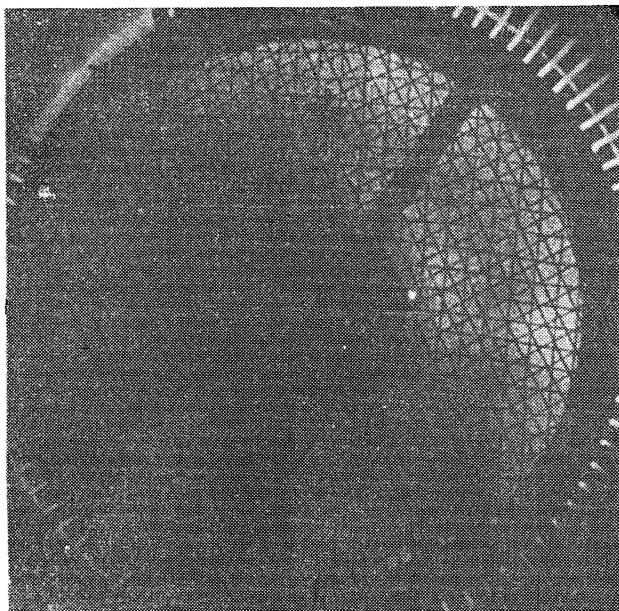


Рис. 5. След луча на экране при $V_a = 0$. Темный круг в центре — оптическая тень торца катода на экране. Диаметр этого круга почти в точности равен диаметру катода. Пятно, создаваемое лучом на экране, „лежит“ как раз на поверхности катода. Некоторый отход пятна от темной тени катода связан с тем, что в этом месте сечение торца катода несколько отличается от окружности.

Оценка погрешностей эксперимента производится путем сравнения измеренных в эксперименте траекторий с рассчитанными теоретически для случая, когда в магнетроне отсутствует пространственный заряд ($\rho=0$). В этом случае распределение потенциала в магнетроне $V(r)$ известно:

$$V(r) = \frac{V_a}{\ln(r_a/r_k)} \ln \frac{r}{r_k}.$$

Траектории рассчитываются с помощью численного интегрирования уравнений движения электрона:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2e V_a \ln(r/r_k)}{m \ln(r_a/r_k)} - \omega_H^2 r^2 \left(1 - \frac{r_k^2}{r^2}\right)^2};$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_H \left(1 - \frac{r_k^2}{r^2}\right).$$

Здесь r и θ — радиальная и азимутальная координаты электрона, $\omega_H = eH/2m$, e/m — удельный заряд электрона.

Результаты такого сравнения приведены на рис. 6—8. Из них следует, что расхождение экспериментальных траекторий с теоретиче-

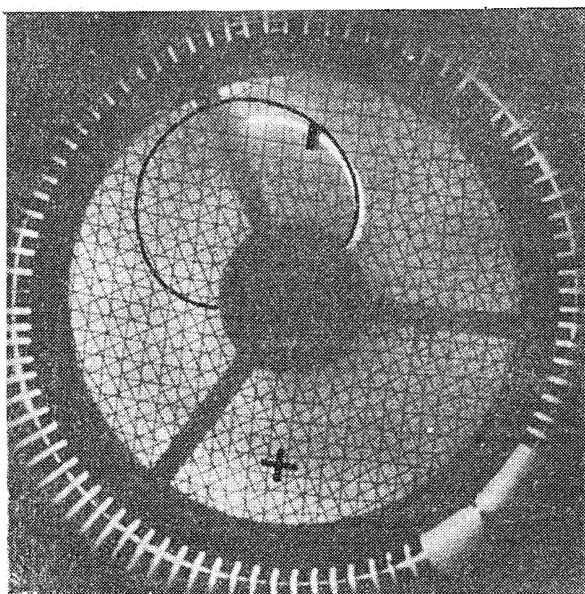


Рис. 6. Теоретические (черные) и экспериментальные (светлые) траектории при $\rho=0$ ($H=68,5$ эрстед, $V_a=6,0$ в).

скими по азимуту (по полному углу, охватываемому траекторией) меньше 2%. Расхождение по радиусу не больше 15% (по расстоянию

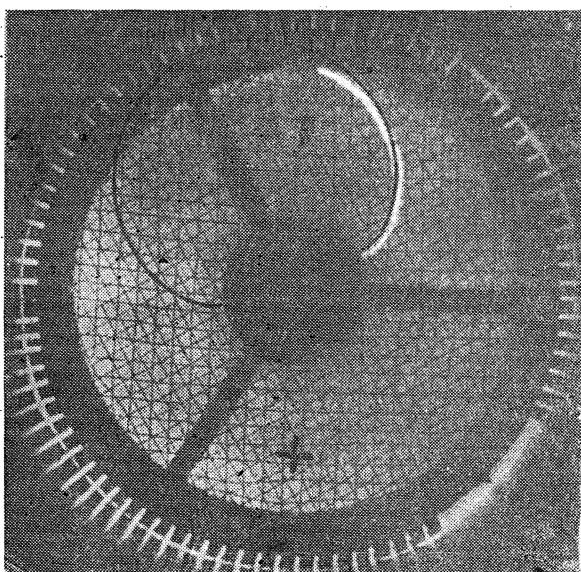


Рис. 7. То же, что и на рис. 6 ($H = 58$ эрстед, $V_a = 600$ в).

от катода—до 20%). Большее расхождение по r связано с краевыми полями при выходе луча из магнетрона, полностью избавиться от которых не удается. Однако из рисунков также видно, что отличие экспериментальных траекторий от теоретических заметно только в точках с большими r , где краевое поле оказывается более сильно. При расстояниях же от катода, меньших $1/3$ расстояния анод—катод, отличие экспериментальных траекторий от теоретических по r не превышает 10%.

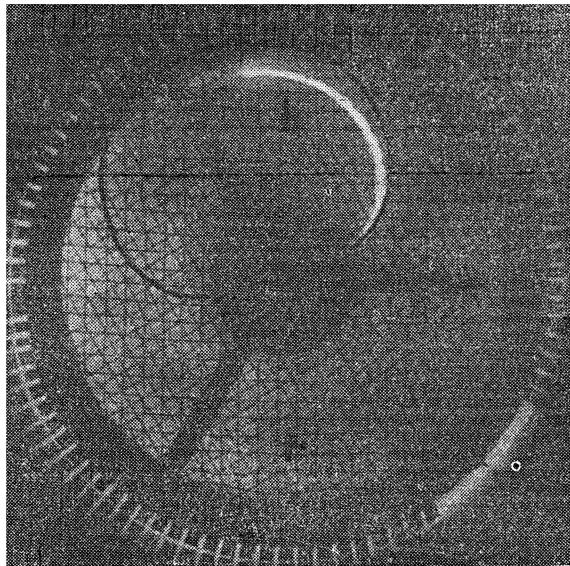


Рис. 8. То же, что и на рис. 6 ($H = 68,5$ эрстед, $V_a = 750$ в).

Таким образом, результаты сравнения экспериментальных кривых с рассчитанными теоретически для случая $\rho=0$ показывают, что с помощью данной лампы можно вести не только качественное, но и количественное измерение траекторий электронов в магнетроне с погрешностью, не превышающей $15 \div 20\%$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ

Фотографии кривых, изображающих траектории электронов в магнетроне в режиме полного пространственного заряда ($\rho \neq 0$), представлены на рис. 9. Приведенные фотографии показывают, прежде всего, что все кривые далеко отходят как по радиусу, так и по азимуту от точки входа зондирующего луча в магнетрон. Следовательно, однопоточное (бриллюэновское) состояние пространственного заряда в цилиндрическом магнетроне в статическом режиме (рис. 1а) не имеет места. Действительное состояние пространственного заряда может быть определено по полученным экспериментальным данным.

Прежде всего, по сфотографированным траекториям можно вычислить распределение потенциала $V(r)$ в магнетроне. Так как

$$\frac{mv^2}{2} = eV; \quad v = \frac{r\dot{\theta}}{\cos \alpha}; \quad \dot{\theta} = \omega_H \left(1 - \frac{r_k^2}{r^2}\right),$$

где v —скорость электрона в магнетроне в точке r , α —угол между направлением скорости и осью θ в той же точке, то

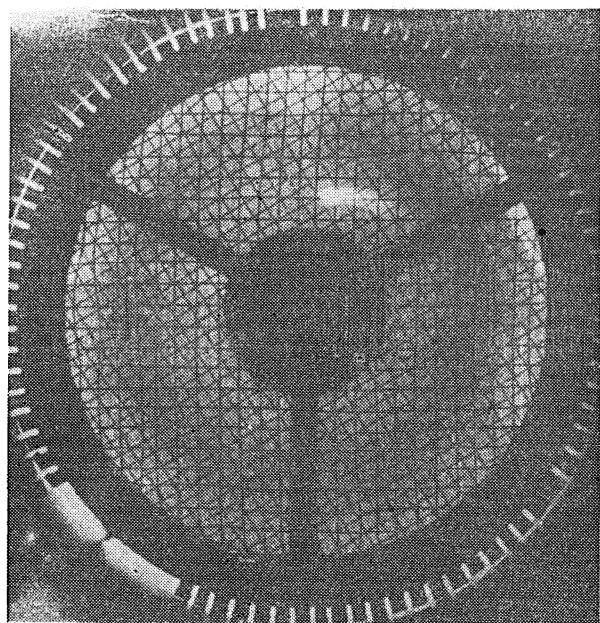
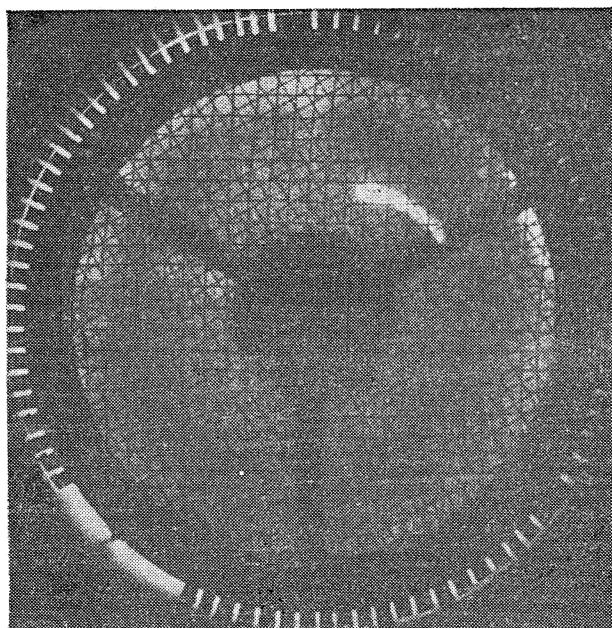


Рис. 9. Траектории электронов в магнетроне ($\rho \neq 0$) при
 $H=68,5$ эрстед:

а) $V_a = 750$ е.в; б) $V_a = 700$ е.в.

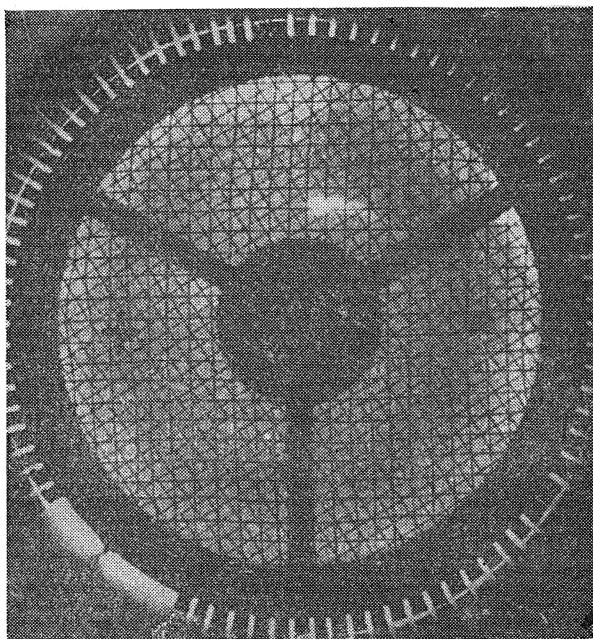


Рис. 9. Траектории электронов в магнетроне ($\rho \neq 0$) при
H=68,5 эрстед:
в) $V_a = 650$ в.

$$V = \frac{m\omega_H^2 r^2 (1 - r_k^2/r^2)^2}{2e \cos \alpha}. \quad (1)$$

Проводя касательную к траектории в какой-либо точке и измеряя угол α между ней и перпендикуляром к радиусу, восстановленным из этой точки, можно по формуле (1) найти потенциал V в этой точке. Таким образом можно вычислить распределение потенциала $V(r)$ в интервале значений r , охватываемом экспериментально снятой частью траектории.

На рис. 10 и 11 показаны полученные таким путем куский кривых распределения потенциала $V(r)$ для различных анодных напряжений V_a и одного и того же магнитного поля H . На этих же рисунках представлены кривые $V^{(a)}(r) = (m\omega_H^2/2e)r^2(1 - r_k^2/r^2)^2$ для бриллюэновского состояния пространственного заряда в магнетроне. Пересечение вычисленной кривой $V(r)$ с кривой $V^{(a)}(r)$ дает величину радиуса вершины петлеобразной траектории r_1 . На рис. 10 приведена также кривая распределения потенциала $V^{(\delta)}(r)$ (пунктирная кривая) для бидромического состояния пространст-

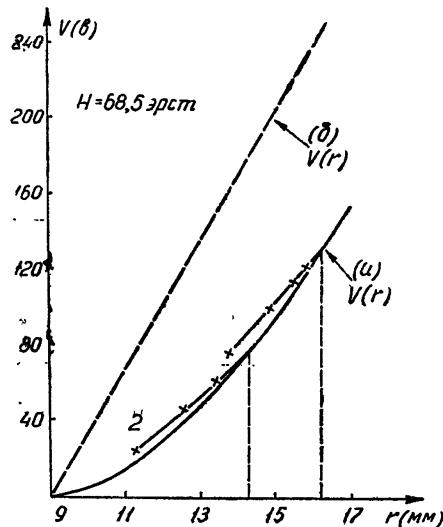


Рис. 10. Зависимость V от r
(H=68,5 эрстед):

1—кривая $V(r)$ для $V_a = 750$ в; 2—кривая $V(r)$
для $V_a = 600$ в.

венного заряда с однопетлевыми траекториями электронов (рис. 16) при $V_a = 750$ в. (Способ вычисления распределения потенциала и радиуса электронного облака $r_{\text{обл}}^{(6)}$ для этого случая описан в работе [4].)

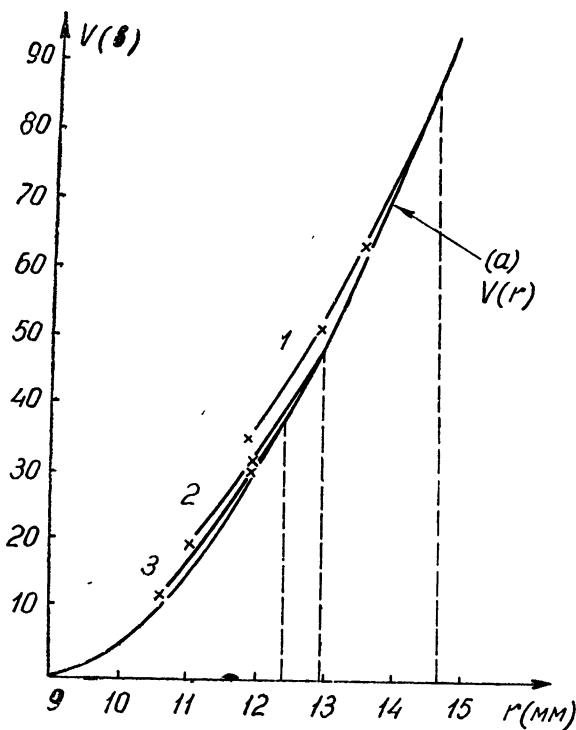


Рис. 11. Зависимость V от r ($H=68,5$ эрстед):
1—кривая $V(r)$ для $V_a = 700$ в; 2—кривая $V(r)$ для $V_a = 500$ в;
3—кривая $V(r)$ для $V_a = 450$ в.

В таблице 1 приведены значения r_1 для различных V_a и соответствующие значения радиуса бриллюэновского облака электронов $r_{\text{обл}}^{(a)}$. Приведено также вычисленное значение $r_{\text{обл}}^{(6)}$ при $V_a = 750$ в.

Таблица 1

$H=68,5$ эрстед			
V_a (в)	r_1 (мм)	$r_{\text{обл.}}^{(a)}$ (мм)	$r_{\text{обл.}}^{(6)}$ (мм)
750	16,2	23,3	28
700	14,8	21,8	
600	14,2	19,2	
500	12,9	17	
450	12,4	16	

Кривые рисунков 10 и 11 и данные таблицы 1 показывают, что в магнетроне в статическом режиме не существует и бидромического состояния пространственного заряда с однопетлевыми траекториями. Об этом говорит, во-первых, тот факт, что расстояние от катода до вершины траектории при бидромическом состоянии с однопетлевыми траекториями более чем вдвое превышает расстояние от катода до вершины измеренной траектории. Во-вторых, измеренное по экспериментально снятым траекториям распределение потенциала резко отличается от распределения, соответствующего бидромическому состоянию с однопетлевыми траекториями.

Тот же факт, что расстояние от катода до вершин измеренных траекторий во всех приведенных в таблице 1 случаях составляет почти ровно половину толщины бриллюэновского облака электронов и что рассчитанное по измеренным траекториям распределение потенциала близко к бриллюэновскому, позволяет предположить, что в магнетроне имеет место бидромическое состояние пространственного заряда с двумя петлями траектории, т. е. двумя виртуальными катодами (рис. 1в). Справедливость этого предположения может быть проверена путем сравнения экспериментальных результатов с теоретическими данными.

Задача о состоянии пространственного заряда в магнетроне в статическом режиме теоретически решалась несколькими авторами. Бриллюэн и Блох в работе [5], исходя из предположения о нулевых начальных скоростях электронов, эмиттируемых катодом, пришли к заключению, что в цилиндрическом магнетроне не может быть бидромического состояния пространственного заряда, в том числе и состояния с двумя петлями, если радиус петли меньше, чем $2,27 r_k$. Но Твисс показал, что если учесть распределение начальных скоростей электронов, то этот вывод Бриллюэна и Блоха оказывается несправедливым. Наш эксперимент подтверждает выводы Твисса: мы убедились, что электроны в магнетроне могут поворачивать обратно к катоду при $r < 2,27 r_k$.

Расчет траекторий электронов в магнетроне с учетом распределения их начальных скоростей чрезвычайно сложен. Однако если $eV_a \gg kT$, где k —постоянная Больцмана, а T —температура катода, то при расчете в первом приближении можно не учитывать начальных скоростей электронов и вести этот расчет, например, по соотношениям, полученным в работе [6]. Однако при этом, исходя из результатов эксперимента, следует учитывать, что на кольце соответствующего радиуса будет не квазивиртуальный катод, как это получается по Бриллюэну и Блоху, а именно виртуальный катод—место, где электроны при своем движении в магнетроне поворачивают обратно к катоду. Величина радиуса виртуального катода может быть взята из экспериментальных данных. Это обстоятельство существенно упрощает расчет траекторий.

Бриллюэн и Блох в работе [5] получили следующее уравнение движения электрона для радиальной координаты R :

$$\mu \frac{d^2 R}{d\Phi^2} = \frac{\Phi}{R} - R + \frac{1}{R^3}. \quad (2)$$

Здесь $R = r/r_k$; $\Phi = \sqrt{\mu} \omega_H t$; $\mu = (e/m)^2 I^2 / 4\pi^2 \epsilon_0^2 \omega_H^2 r_k^4$, I —ток на единицу длины магнетрона, $\epsilon_0 = (36\pi)^{-1} 10^{-9} \text{ ф}\cdot\text{м}^{-1}$. Что же касается азимутальной координаты θ , то она определяется известным уравнением

$$\dot{\theta} = \omega_H \left(1 - \frac{1}{R^2} \right). \quad (3)$$

Решая уравнение (2), авторы [5] получили следующее выражение для R :

$$R(\Phi) = R_0(\Phi) - \frac{\mu^{1/4}}{4\sqrt{2k}} \sin \psi, \quad (4)$$

где

$$R_0(\Phi) = \sqrt{\Phi/2 + \sqrt{\Phi^2/4 + 1}}; \quad (5)$$

$$k = \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{1 + \frac{1}{R_0^4}}; \quad (6)$$

$$\psi = \int_0^\Phi k d\Phi = \sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_0^\Phi \sqrt{1 + \frac{1}{\Phi/2 + V \Phi^2/4 + 1}} d\Phi. \quad (7)$$

Приравнивая радиус квазивиртуального катода к радиусу первой петли траектории r_1 , и учитывая, что значению радиуса квазивиртуального катода соответствует значение величины ψ , равное 2π , можно определить параметр μ и найти теоретическую траекторию по уравнениям (3) и (4). Из уравнения (7) для μ получаем следующее выражение:

$$\mu = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\Phi_1} \sqrt{1 + \frac{1}{\Phi/2 + V \Phi^2/4 + 1}} d\Phi. \quad (8)$$

Здесь

$$\Phi_1 = R_{01}^2 - 1/R_{01}^2; \quad R_{01} = r_1/r_k.$$

Таким образом, для нахождения параметра μ необходимо провести приближенное вычисление определенного интеграла (8). Определив таким способом μ , можно по уравнению (5) найти $R_0(\Phi)$, по уравнению (6)— $k(\Phi)$ и по уравнению (7)— $\psi(\Phi)$. Так может быть найдена зависимость $R(\Phi)$.

Из (3) и уравнения $\Phi = \sqrt{\mu} \omega_H t$ находим:

$$\frac{d\theta}{d\Phi} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(1 - \frac{1}{R^2} \right). \quad (3a)$$

Интегрируя численно это уравнение, можно найти зависимость $\theta(\Phi)$ и, следовательно, вычислить траекторию электрона в магнетроне. Описанным способом была вычислена траектория для следующего режима магнетрона: $H=68,5$ эрстед, $V_a=750$ в. Для этого режима эксперимент дает $r_1=16,2$ мм. Следовательно, $R_{01}=1,8$. По этой величине R_{01} найдены следующие значения Φ_1 и μ : $\Phi_1=2,93$, $\mu=0,58$. Результаты расчета траектории приведены в таблице 2. В той же таблице приведен резуль-

Таблица 2

r (мм)	θ (град)	V (в)	r (мм)	V (в)
9	0	0	16,24	130,28
9,03	0,06	0,17	16,32	132,71
9,19	0,19	1,38	16,47	138,13
9,53	1,07	4,79	16,77	147,91
10,06	3,4	11,30	17,11	160,37
10,79	7,3	21,54	17,63	181,09
11,64	12,8	34,90	18,27	204,92
12,55	19,5	50,50	19,01	232,5
13,44	27,3	66,87	19,78	262,06
14,26	36,0	83,17	20,54	290,88
14,92	45,3	97,26	21,24	317,71
15,45	55,0	109,36	21,82	340,20
15,81	65,0	118,31	22,27	358,52
16,04	75,3	124,37	22,57	371,02
16,15	85,6	127,53	22,73	378,02
16,20	96,0	129,02	22,79	380,51

тат расчета распределения потенциала для этого режима. Распределение потенциала рассчитано по формуле:

$$\frac{e}{mr_k^2 \omega_H^2} V = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dR}{d\Phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right)^2, \quad (9)$$

полученной в [5], где

$$\frac{dR}{d\Phi} = \frac{dR_0}{d\Phi} + \frac{\mu^{1/4}}{8\sqrt{2}k^{3/2}} \sin \psi - \frac{\mu^{1/4}}{4\sqrt{2}} \sqrt{k} \cos \psi;$$

$$\frac{dR_0}{d\Phi} = \frac{1}{2R_0(1+1/R_0^4)}.$$

На рис. 12 изображены экспериментальная и рассчитанная теоретически траектории. На рис. 13 приведены кривая распределения потенциала, рассчитанная по формуле (9), и несколько значений потен-

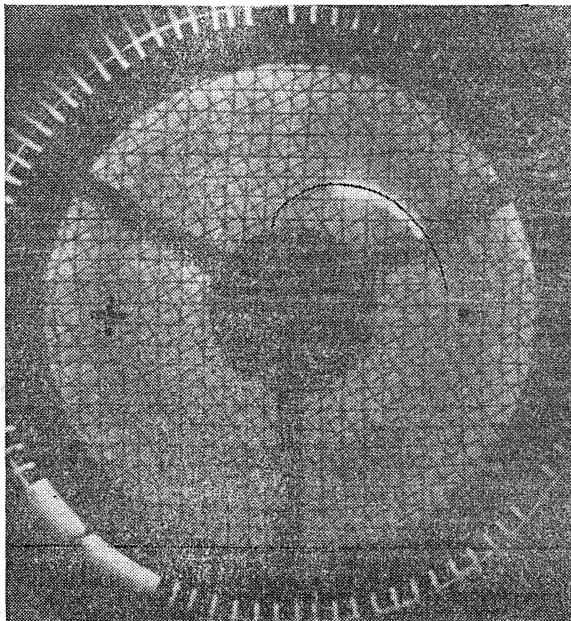


Рис. 12. Теоретическая (черная) и экспериментальная (светлая) траектории при $\rho \neq 0$.

циала, рассчитанных по экспериментальной траектории. Здесь же приведена кривая $V^{(a)}(r)$. Рисунки 12 и 13 показывают хорошее совпадение экспериментальных данных с результатами, рассчитанными теоретически в предположении бидромического состояния пространственного заряда с двухпетлевыми траекториями (с двумя виртуальными катодами).

Изложенные результаты эксперимента показывают, что в длинном цилиндрическом неразрезном магнетроне в статическом режиме

имеет место бидромическое состояние пространственного заряда с двумя виртуальными катодами.

Однако необходимо отметить следующее обстоятельство. Амплитуда переменной составляющей ускоряющего напряжения луча в наших экспериментах была почти равна постоянной составляющей этого напряжения. Очевидно, что при этих условиях время пролета электронов зондирующего луча через магнетрон в течение периода развертки

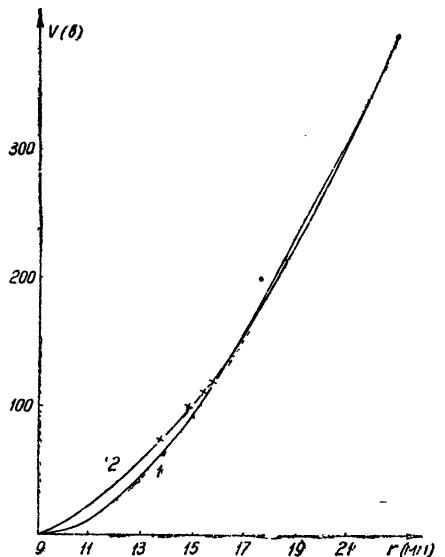


Рис. 13. 1—зависимость $V^{(a)}(r)$, 2—распределение потенциала, рассчитанное по Бриллюэну и Блоху. Крестиками отмечены точки, рассчитанные по экспериментальной траектории.

меняется в очень широких пределах, так что на экране должна быть получиться весьма большая часть траектории, включающая вторую петлю. Однако на приведенных выше фотографиях вторая петля не видна. Это можно объяснить тем, что вторая петля траектории должна вычерчиваться на экране электронами луча, имеющими большие времена пролета, т. е. малые скорости. При таких скоростях энергия электронов недостаточна для того, чтобы вызвать свечение экрана.

Для того, чтобы можно было наблюдать на экране относительно большую часть траектории, были проведены измерения при таком режиме магнетрона, когда время пролета его электронов по траектории существенно уменьшается. Такой режим был достигнут путем увеличения магнитного поля. К сожалению, повысить одновременно и анодное напряжение оказалось невозможным, так как при $V_a > 1000$ в начиналось интенсивное разрушение катода обратной электронной бомбардировкой. Поэтому траектории электронов в этих экспериментах сильно прижаты к катоду. Тем не менее, на фотографии рис. 14 ($H = 90$ эрстед, $V_a = 660$ в) отчетливо видно, что после прохождения через вершину электронны зондирующего луча возвращаются обратно к катоду. (На рис. 15 представлена траектория, снятая при тех же H и V_a , но при $\rho = 0$. Здесь видны две ветви траектории: возвращающаяся к катоду и вновь отходящая от него.)

Из факта, иллюстрируемого рис. 14, казалось бы, можно было заключить, что экспериментально наблюдаемая вершина кривой, вычер-

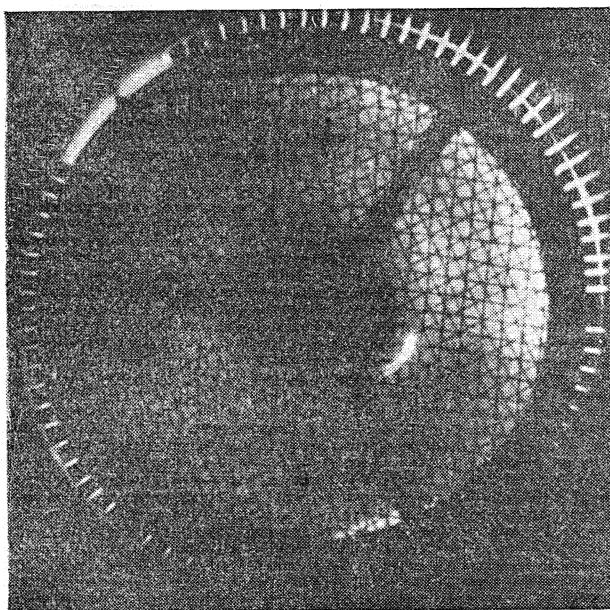


Рис. 14. Траектории электронов в магнетроне при $H=90$ эрстед, $V_a=660$ в, $\rho \neq 0$.

чиваемой на экране зондирующим лучом, определяет границу электронного облака в магнетроне. Однако такой вывод неправилен. Если это имело место, то в магнетроне реализовалось бы бидромическое состояние с однопетлевыми траекториями электронов (случай б на рис. 1). Но радиус электронного облака для этого случая, как известно, больше радиуса брилюзновского облака, т. е. более чем вдвое превышает радиус вершины кривой на экране.

По-видимому, результаты последних экспериментов можно объяснить следующим образом. В магнетроне, как известно, имеют место интенсивные флюктуации электрического поля*. В работах [7] и [8] показано, что среднеквадратичная величина флюктуаций напряженности электрического поля превосходит 1% от постоянной составляющей поля в лампе. При столь высоком уровне флюктуаций значительное число электронов может отдавать

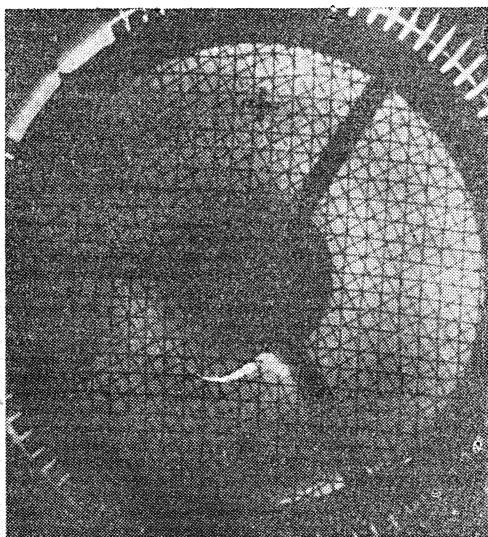


Рис. 15. Траектории электронов в магнетроне при $H=90$ эрстед, $V_a=660$ в, $\rho = 0$.

* Именно наличием интенсивных флюктуаций электрического поля в магнетроне объясняется тот факт, что кривые на экране для случая $\rho \neq 0$ значительно шире, чем в режиме отсутствия пространственного заряда в магнетроне.

флюктуационному полю существенную часть энергии, получаемой ими от постоянного поля. Такие электроны оказываются не в состоянии пройти через первый виртуальный катод. Поэтому в пространстве между первым виртуальным катодом и границей электронного облака должно происходить накопление пространственного заряда. Это накопление ограничивается благодаря тому, что величина потенциала на радиусе первого виртуального катода понижается настолько, что подавляющее большинство электронов, движущихся от катода по первым петлям траекторий, не может преодолеть этот потенциальный барьер и поворачивает обратно к катоду. Естественно, что так же ведут себя и электроны зондирующего луча.

Распределение потенциала во всем облаке пространственного заряда, очевидно, мало отличается от бриллюэновского. Это следует как из наших экспериментов (см. рис. 13), так и из измерений, проведенных ранее одним из авторов [4].

Траектории электронов в верхней части электронного облака, лежащей выше первого виртуального катода, по-видимому, весьма близки к бриллюэновским, так как при длительном пребывании в этой части облака электроны постепенно утрачивают энергию радиального движения.

Для более точного определения характера траекторий и распределения потенциала в верхней части электронного облака необходим специальный эксперимент, подготовка к которому ведется в настоящее время.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Müller, FTM, **1**, 9 (1942).
2. R. Gvensson, Proc. IRE, **39**, f38 (1951).
3. I. Verweel, Le Vide, **67**, 32 (1957).
4. Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 748 (1959).
5. L. Brillouin, F. Bloch, Adv. in Electronics, **3**, 145 (1951).
6. R. Twiss, Adv. in Electronics, **5**, 247 (1953).
7. В. А. Бербасов, М. И. Кузнецов, В. Е. Нечаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 102 (1960).
8. В. А. Бербасов, М. И. Кузнецов, В. Е. Нечаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 290 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 февраля 1961 г.

ELECTRON TRAJECTORIES EXPERIMENTAL MEASUREMENT IN CYLINDRICAL NON-SPLIT-ANODE MAGNETRON IN A STATIC REGIME

M. I. Kouznetsov, L. M. Groshkov

The results are given of electron trajectories experimental measurements in cylindrical non-split-anode magnetron by electron optical method. It was found, that in a long cylindrical non-split-anode magnetron in a static regime bidromical state of space charge takes place with two virtual cathodes. The potential distribution in an electron cloud concides approximately with the Brillouin's one.

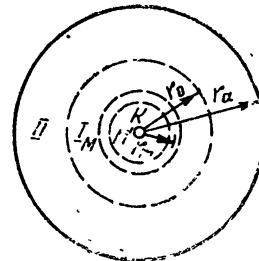
О ВЧ МОЩНОСТИ И ЭЛЕКТРОННОМ КПД ГЕНЕРАТОРНОЙ ЛАМПЫ С ДВУМЯ ТОРМОЗЯЩИМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

A. M. Максимова

Получено выражение для ВЧ мощности и электронного КПД лампы с двумя тормозящими электродами, плоской конструкции, при положительных потенциалах на первом тормозящем электроде. Оказалось, что максимальная ВЧ мощность, генерируемая исследуемой лампой при работе ее в зонах генерации с низкими номерами ($k \ll 3$), должна превышать максимальную ВЧ мощность, генерируемую этой лампой, поставленной в режиме отражательного кластрона и работающей также при малых пролетных углах и прочих равных условиях. Результаты экспериментального исследования лампы с двумя тормозящими электродами радиальной конструкции находятся в согласии с выводами теории для лампы плоской конструкции.

В работе [1] было проведено исследование отражательного кластрона с двумя тормозящими электродами (см. схему рис. 1). Согласно [1], наличие второго тормозящего электрода позволяет осуществить оптимальную фазовую фокусировку электронов для любого номера зоны

Рис. 1. Схема исследуемой лампы (К—катод; М, М'—сетки резонатора, I—первая зона торможения, II—вторая зона торможения).



генерации при меньших значениях коэффициентов использования напряжения ξ , чем в обычном отражательном кластроне. Это позволяет ожидать, что лампа с двумя тормозящими электродами в зонах генерации с малыми номерами может развивать значительно большую мощность, чем обычный отражательный кластрон с сопоставимыми параметрами. В данной работе получено выражение ВЧ мощности и электронного КПД лампы с двумя тормозящими электродами и произведен анализ полученных соотношений. Анализ энергетических соотношений, а также результаты эксперимента подтверждают указанное выше предположение.

Расчет мощности и КПД лампы выполнен при тех же упрощающих предположениях, что и кинематический расчет в работе [1]. Ввиду математических трудностей теоретический анализ проведен при следующих упрощающих предположениях: напряжение на первом тормозящем электроде u_0 положительно и велико по сравнению с амплитудой ВЧ напряжения на сетках резонатора u_1 . Лампа имеет квазиплоскую конструкцию, т. е. радиусы электродов удовлетворяют условиям $r_0/r_m < 1,1$ и $r_a/r_0 < 1,1$. Экспериментально исследовалась лампа, в которой эти соотношения не выполняются: $r_0/r_m = 2,1$ и $r_a/r_0 = 1,5$. ВЧ мощность этих ламп для наиболее характерных экспериментальных режимов была приближенно рассчитана путем графического интегрирования.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

В этом разделе приведены теоретические соотношения для лампы с двумя тормозящими электродами для указанного выше частного случая. Эти соотношения, краткий вывод которых отнесен в Приложение, получены путем применения теории одноконтурных СВЧ генераторов [2].

Ниже используются следующие обозначения: r_0 —радиус первого тормозящего электрода, r_a —радиус второго тормозящего электрода, r_{g_1} и r_{g_2} —радиусы сеток модулятора, $r_m = (r_{g_1} + r_{g_2})/2$ —средний радиус модулятора, θ —угол пролета электрона в пространстве торможения, θ_k —угол пролета невозмущенного электрона в пространстве торможения, φ —фаза вылета электронов из резонатора, u_0 —потенциал первого тормозящего электрода, u_a —потенциал второго тормозящего электрода, u_m —потенциал модулятора, $v_m = \sqrt{2(e/m) u_m}$, $x = u_0/u_m$, X_2 —параметр группировки, $n_1 = (1-x)/r_m \ln(r_0/r_m)$ —коэффициент торможения промежутка модулятор—первый тормозящий электрод (коэффициент торможения первой зоны), $n_2 = (x+|u_a|/u_m)/r_0 \ln(r_a/r_0)$ —коэффициент торможения промежутка первого тормозящий электрод—второй тормозящий электрод (коэффициент торможения второй зоны), u_1 —амплитуда переменного напряжения на сетке резонатора, $\xi = u_1/u_m$ —коэффициент использования напряжения, P_e —мощность, отдаваемая электронным потоком резонатору, δ —отклонение величины среднего пролетного угла от ее значения в центре зоны генерации, $U_{\text{экв}}$ —эквивалентная проводимость резонатора, i_0 —рабочий ток лампы, ω —циклическая частота.

Мощность, отдаваемая электронным потоком резонатору отражательного кластрона, может быть представлена соотношением

$$P_e = -i_0 u_m \xi L / 2\pi, \quad (1)$$

где

$$L = \int_0^{2\pi} \sin(\varphi + \theta) d\varphi \quad (2)$$

—интеграл мощности. Для лампы с двумя тормозящими электродами при указанных выше ограничениях

$$L = 2\pi \sin \theta_k J_1(X_2), \quad (3)$$

где

$$\theta_k = \frac{4\omega}{v_m} \left[\frac{1}{n_1} + \sqrt{x} \left(\frac{1}{n_2} - \frac{r_0}{r_m} \frac{1}{n_1} \right) \right]. \quad (4)$$

Параметр группировки X_2 , входящий в выражение (3), определяется выражением

$$X_2 = \frac{1}{2} \xi \frac{\theta_k}{D}, \quad (5)$$

где D —некоторая функция параметров и режима лампы:

$$D = \frac{1 + (n_1/n_2 - r_0/r_m) x^{1/2}}{1 + (n_1/n_2 - r_0/r_m) x^{-1/2}} = \quad (6)$$

$$= \frac{1 + x^{1/2} [(1-x)(x+|u_a|u_m^{-1})^{-1} d_2/d_1 - 1]}{1 + x^{-1/2} [(1-x)(x+|u_a|u_m^{-1} d_2/d_1) - 1]} = f\left(x, \frac{|u_a|}{u_m}, \frac{d_2}{d_1}\right);$$

$$d_1 = r_m \ln(r_0/r_m); \quad (7)$$

$$d_2 = r_0 \ln(r_a/r_0). \quad (8)$$

График функции D приведен на рис. 2.

Таким образом, мощность, отдаваемая резонатору электронным потоком, и электронный коэффициент полезного действия соответственно равны

$$P_e = \frac{i_0 u_m}{2\pi} \xi L = \frac{2i_0 u_m \cos \delta D X_2 J_1(X_2)}{\theta_k} = \frac{2i_0^2 \cos^2 \delta}{U_{\text{ЭКВ}}} [J_1(X_2)]^2; \quad (9)$$

$$\eta_e = \frac{1}{2\pi} \xi L = \frac{2 \cos \delta}{\theta_k} D X_2 J_1(X_2) = \frac{2i_0 \cos^2 \delta}{U_{\text{ЭКВ}} u_m} [J_1(X_2)]^2. \quad (10)$$

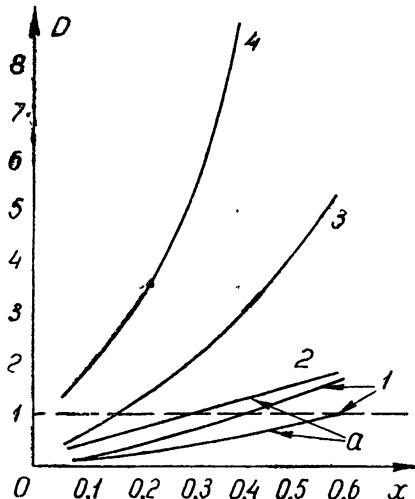
Рис. 2. График функции $D(x, |u_a| u_m^{-1}, d_2 d_1^{-1})$ для различных значений $|u_a| u_m^{-1}$ и $d_2 d_1^{-1}$:

1 — $|u_a| u_m^{-1} = 0$; 2 — $|u_a| u_m^{-1} = 0,5$;

3 — $|u_a| u_m^{-1} = 0,75$; 4 — $|u_a| u_m^{-1} = 1$,

кривые 2, 3, 4 соответствуют значению

$d_2 d_1^{-1} = 2$; для остальных кривых $d_2 d_1^{-1} = 0,8$.



Пользуясь выражением (9), можно легко рассчитать пусковой ток $i_{\text{пуск}}$ и амплитуду напряжения в резонаторе u_1 :

$$i_{\text{пуск}} = 2u_m D U_{\text{ЭКВ}} / \cos \delta \theta_k; \quad (11)$$

$$u_1 = (2u_m / \theta_k) D X_2 = (2i_0 \cos \delta / U_{\text{ЭКВ}}) J_1(X_2). \quad (12)$$

Для сравнения приведем аналогичные соотношения для отражательного кластрона:

$$L = 2\pi \sin \theta_k J_1(X); \quad (13)$$

$$\theta_k = 4\omega / v_m n_1; \quad (14)$$

$$X = \xi \theta_k / 2; \quad (15)$$

$$P_e = (2i_0 u_m \cos \delta / \theta_k) X J_1(X) = (2i_0^2 \cos^2 \delta / U_{\text{ЭКВ}}) [J_1(X)]^2; \quad (16)$$

$$\eta_e = (2 \cos \delta / \theta_k) X J_1(X) = (2i_0 \cos^2 \delta / u_m U_{\text{ЭКВ}}) [J_1(X)]^2; \quad (17)$$

$$i_{\text{пуск}} = 2u_m U_{\text{ЭКВ}} / \cos \delta \theta_k; \quad (18)$$

$$u_1 = (2u_m / \theta_k) X = (2i_0 \cos \delta / U_{\text{ЭКВ}}) J_1(X). \quad (19)$$

Из сопоставления соотношений (3)–(12) с (13)–(19) видно, что соотношения (13)–(19) могут быть получены как частный случай из (3)–(12) при $D=1$. Это объясняется тем, что при $n_1/n_2=r_0/r_m$ распределение тормозящего поля в лампе с двумя тормозящими электродами такое же, как и в отражательном кластроне с радиусом отражателя, равным r_α (см. [1]). Из соотношения (6) следует, что при выполнении

равенства $n_1/n_2=r_0/r_m$ функция D обращается в единицу. Следовательно, режим отражательного клистрона в исследуемой лампе характеризуется значением $D=1$.

Из графика рис. 2 следует, что функция D может быть как больше, так и меньше единицы. Режим $D>1$ соответствует более высокому значению коэффициента торможения второй зоны, чем первой ($n_2>n_1$); напротив, режим $D<1$ соответствует условию $n_1>n_2$. Действительно, из (6) ясно, что при $r_0/r_m \approx 1$ и $x=u_0/u_m < 1$ величина D больше единицы, если $n_1 < n_2$, и меньше единицы, если $n_1 > n_2$.

Таким образом, значение функции D может характеризовать степень отклонения режима лампы от режима отражательного клистрона. Поэтому представляет интерес выяснить влияние функции D на характер процесса фазовой группировки в исследуемой лампе. При этом наиболее важно выяснить влияние величины D на максимальное значение интеграла мощности L_{\max} и на величину коэффициента использования напряжения, при котором имеет место оптимальная группировка $\xi_{\text{опт}}$.

Из соотношения (3) следует, что интеграл мощности имеет максимальное значение, если выполняются следующие условия:

$$\sin \theta_k = 1; \quad (20)$$

$$X_2 = 1,84. \quad (21)$$

Соотношению (20) удовлетворяют центры зон генерации, для которых пролетные углы удовлетворяют условию максимумов:

$$\theta_k = (4k-1)\pi/2 \quad (22)$$

($k=1, 2, 3, \dots$ — номер зоны генерации; см., например, [3]). При этом $L_{\max} = 2\pi 0,58$ для любых D .

Значение коэффициента использования напряжения $\xi_{\text{опт}}$, при котором происходит оптимальная группировка электронов в лампе, работающей в центре зоны генерации, может быть найдено из уравнения

$$X_2 = \frac{1}{2} \xi_{\text{опт}} \frac{\theta_k}{D} = 1,84 \quad (23)$$

(см. (5) и (21)) и условия (22). Из (23) и (22) получаем:

$$\xi_{\text{опт}} = \frac{4 \cdot 1,84}{(4k-1)\pi} D. \quad (24)$$

Из соотношения (24) видно, что при $k=\text{const}$ оптимальное значение $\xi_{\text{опт}}$ лампы с двумя тормозящими электродами растет с ростом D ; оно может быть больше (при $D>1$) или меньше (при $D<1$) значения ξ_0 опт, соответствующего режиму отражательного клистрона ($D=1$).

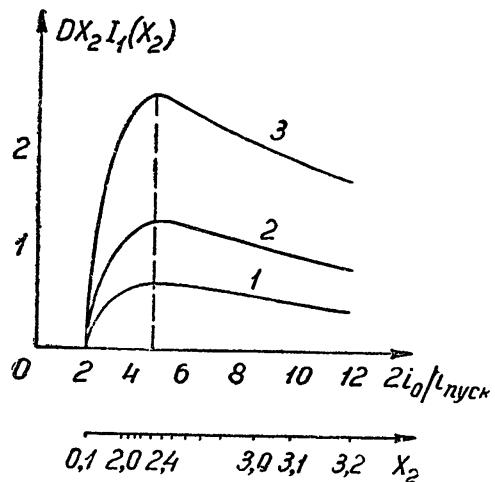
Необходимо подчеркнуть следующее обстоятельство: при малых номерах зоны генерации отражательного клистрона ($k \leq 3$) оптимальное значение коэффициента использования напряжения оказывается слишком близким к единице и практически не может быть достигнуто. Поэтому интеграл мощности при малых номерах зон генерации не достигает максимального значения $L_{\max} = 0,58 \cdot 2\pi$. Однако в лампе с двумя тормозящими электродами величина $\xi_{\text{опт}}$ может быть существенно уменьшена за счет уменьшения величины D .

Таким образом, особенностью процесса фазовой фокусировки электронов в лампе с двумя тормозящими электродами является возможность осуществлять оптимальную группировку электронов для любого номера оптимальной зоны генерации при малых значениях ξ .

При работе лампы с двумя тормозящими электродами на зонах генерации с малыми номерами максимальное значение интеграла мощности этой лампы, работающей в режиме $D < 1$, может быть больше, чем в режиме $D = 1$, за счет лучшей группировки электронов. Улучшение группировки электронов при уменьшении D , казалось бы, должно способствовать увеличению ВЧ мощности исследуемой лампы в этом режиме. Однако при малых D мало и $\xi_{\text{опт}}$, как это ясно из соотношения (24). Следовательно, величина максимальной высокочастотной мощности $P_{\text{макс}} = (i_0 u_m / 2\pi) \xi_{\text{опт}} L_{\text{макс}}^*$ может оказаться также малой. Поэтому необходим более подробный анализ влияния величины D на высокочастотную мощность и электронный КПД исследуемой лампы в различных рабочих режимах. Прежде всего, представляет интерес выяснить влияние величины D на величину максимальной ВЧ мощности при неизменном ускоряющем потенциале и при неизменном рабочем токе.

Рис. 3. Зависимость электронного КПД лампы с двумя тормозящими электродами в центре какой-либо зоны генерации от отношения рабочего тока лампы к ее пусковому току для различных значений D :

1 — $D=0,5$; 2 — $D=1$; 3 — $D=2$.



На рис. 3 приведено семейство кривых, изображающих зависимость функции $DX_2 J_1(X_2)$ от аргумента $X_2/J_1(X_2)$ для трех значений D ($D=0,5; 1; 2$), меняющихся как параметр. Кривые рис. 4 изображают зависимость функции $[J_1(X_2)]^2$ от аргумента $DX_2/J_1(X_2)$ для тех же значений D . На прямых, отложенных ниже оси абсцисс, отмечены соответствующие значения X_2 . Из соотношений (9), (10) и (11) следует, что

$$X_2/J_1(X_2) = \frac{i_0 \cos \delta \theta_k}{D u_m U_{\text{экв}}} = \frac{2i_0}{i_{\text{пуск}}}; \quad DX_2 J_1(X_2) = \frac{\theta_k}{2 \cos \delta} \eta_e.$$

Таким образом, кривые рис. 3 в некотором масштабе изображают зависимость электронного КПД от отношения рабочего тока лампы к ее пусковому току при пролетном угле θ_k и различных значениях параметра D . Далее, поскольку, согласно соотношениям (9) и (10),

* Согласно соотношению (9) (см. также рис. 4), при заданном рабочем токе и эквивалентной проводимости резонатора ВЧ мощность, генерируемая лампой, имеет максимальное значение для любых D при значении параметра группировки $X_2 = 1,84$ и значении $\delta = \theta - \theta_{k\text{опт}} = 0$, где $\theta_{k\text{опт}}$ удовлетворяет условию (22). При этом, как показано выше, интеграл мощности имеет также максимальное значение $L_{\text{макс}} = 2\pi \cdot 0,5$, а $\xi_{\text{опт}}$ удовлетворяет условию (24).

$$[J_1(X_2)]^2 = \frac{U_{\text{экв}} u_m}{2i_0 \cos^2 \delta} \eta_e = \frac{U_{\text{экв}}}{2i_0^2 \cos^2 \delta} P_e; \quad \frac{DX_2}{J_1(X_2)} = \frac{i_0 \cos \delta}{u_m U_{\text{экв}}} \theta_k,$$

то кривые рис. 4 изображают зависимость электронного КПД в центре зоны генерации исследуемой лампы от величины пролетного угла при постоянных ускоряющих потенциалах u_m , эквивалентной проводимости резонатора $U_{\text{экв}}$, рабочем токе и прочих равных условиях и различных значениях параметра D .

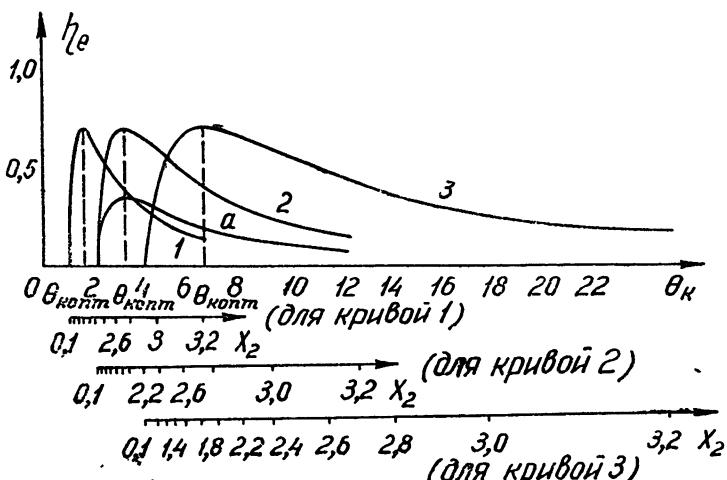


Рис. 4. Зависимость электронного КПД лампы с двумя тормозящими электродами от величины среднего пролетного угла при постоянных u_m , i_0 , $U_{\text{экв}}$ и $\cos \delta$ для различных значений D :

1 — $D=0,5$, 2 — $D=1$; 3 — $D=2$

По оси абсцисс отложено $\theta_k = U_{\text{экв}} u_m D X_2 / i_0 J_1(X_2)$, по оси ординат $\eta_e = (2i_0 \cos^2 \delta / u_m U_{\text{экв}}) [J_1(X_2)]^2$ при $U_{\text{экв}} u_m / i_0 = 1$ и $\cos \delta = 1$. Кривая 1 построена для режима $D=0,5$ и значения ускоряющего потенциала, в два раза большего, чем для остальных кривых. Ей соответствует

значение множителя $U_{\text{экв}} u_m / i_0 = 2$.

Выясним, как влияет изменение D на величину максимальной ВЧ мощности при постоянном ускоряющем потенциале.

Из рис. 3 ясно, что максимум электронного КПД для всех значений D имеет место при одном и том же значении параметра группировки $X_2=2,4$. Величина максимума тем больше, чем больше D . Следовательно, при неизменном ускоряющем потенциале с ростом D возрастает и максимальное значение ВЧ мощности, генерируемой в пределах данной зоны. Указанное увеличение максимума высокочастотной мощности объясняется зависимостью амплитуды установившихся колебаний от величины D .

Из уравнения (12) видно, что при $u_m=\text{const}$, $\theta_k=\text{const}$ и $X_2=\text{const}$ амплитуда установившихся колебаний будет пропорциональна величине D . Отсюда следует, что максимумам кривых рис. 3 ($X_2=2,4$, $\theta_k=\text{const}$) при $u_m=\text{const}$ соответствуют различные амплитуды установившихся колебаний. Это означает, что при малых значениях D необходимая степень группировки электронного потока ($X_2=2,4$) может быть осуществлена уже при незначительных амплитудах ВЧ напряжения на сетках резонатора; с увеличением D для осуществления заданной

степени группировки потока требуются и большие амплитуды ВЧ напряжения.

Ниже будет показано, что максимумам различных кривых рис. 3 соответствуют различные рабочие токи; они возрастают пропорционально величине D . Это означает, что увеличение максимума ВЧ мощности в пределах данной зоны генерации путем увеличения D можно осуществить при постоянном ускоряющем потенциале и прочих неизменных параметрах лишь посредством увеличения рабочего тока лампы. Легко убедиться, что при этих же условиях пусковой ток лампы зависит от величины D . Действительно, из соотношения (11) следует, что если лампа работает в центре какой-либо зоны генерации при фиксированном ускоряющем потенциале и заданной эквивалентной проводимости резонатора ($U_{\text{экв}} = \text{const}$), то ее пусковой ток пропорционален величине D . Так как максимумы кривых электронного КПД для всех D имеют место при одном и том же значении аргумента $2i_0/i_{\text{пуск}}$, а пусковой ток лампы при $u_m = \text{const}$ пропорционален величине D , то максимумам различных кривых рис. 3 соответствуют различные рабочие токи, которые возрастают пропорционально изменению D .

Приведенный анализ показывает, что если лампа с двумя тормозящими электродами работает при постоянном ускоряющем потенциале и фиксированном пролетном угле, то можно ожидать повышения ВЧ мощности, генерируемой лампой в пределах данной зоны, если поставить лампу в режим $D > 1$. Однако увеличение максимума ВЧ мощности в режиме $D > 1$ по сравнению с режимом $D = 1$ может быть достигнуто при вышеуказанных неизменных условиях лишь путем пропорционального увеличения рабочего тока. При этом пусковой ток также возрастает в D раз.

Проанализируем теперь, как влияет величина D на высокочастотную мощность и электронный КПД при неизменном рабочем токе.

Из рис. 4 видно, что максимумы кривых электронного КПД смещаются с ростом D в область больших пролетных углов, но величина их остается неизменной. Указанное смещение может быть объяснено указанной ранее зависимостью пускового тока лампы от величины D .

Амплитуда установившихся колебаний и пусковые токи, соответствующие оптимальным пролетным углам $\theta_k^{\text{опт}}$, при которых наблюдаются максимумы кривых рис. 4 при различных значениях D , не зависят от величины D . В самом деле, из уравнения (11) и (12) следует, что пусковой ток лампы в центре зоны генерации и величина амплитуды установившихся колебаний при заданной степени сгруппированности потока ($X_2 = \text{const}$), постоянном ускоряющем потенциале и неизменной эквивалентной проводимости резонатора пропорциональны величине D/θ_k . Значения же оптимальных пролетных углов $\theta_k^{\text{опт}}$ пропорциональны D . Последнее ясно из рис. 4: по оси абсцисс рис. 4 отложена функция

$$\theta_k = \frac{DX_2}{J_1(X_2)} \frac{U_{\text{экв}} u_m}{i_0},$$

пропорциональная при $X_2 = \text{const}$ и прочих равных условиях величине D , а оптимальным пролетным углам $\theta_k^{\text{опт}}$, как это видно из рис. 4, для всех D соответствует постоянное значение параметра группировки $X_2 = 1,84$.

Таким образом, с изменением D при $u_m = \text{const}$, $i_0 = \text{const}$ и прочих равных условиях отношение D/θ_k остается постоянным; постоянным будет и значение амплитуды установившихся колебаний в оптимальной зоне $u_{1\text{опт}} = 2u_m 1,84D/\theta_k^{\text{опт}}$. Пусковые токи лампы, соответствующие оптимальным пролетным углам и равные

$$i_{\text{пуск}} = \frac{2u_m}{\cos \delta} U_{\text{экв}} \frac{D}{\theta_k \text{опт}},$$

будут также одинаковы для различных значений D .

Итак, если генерация происходит при постоянном рабочем токе и неизменном ускоряющем потенциале, то с увеличением D происходит смещение максимума электронного КПД в область больших пролетных углов. Величина максимума электронного КПД, пусковые токи и амплитуды установившихся колебаний, соответствующие генерации на оптимальных пролетных углах, не зависят от D .

Номера зон генерации, соответствующих оптимальной группировке электронов ($X_2=1,84$) в режиме $D=\text{const}$, могут быть различны в зависимости от условий работы лампы (ее пускового тока, величины $U_{\text{экв}}$). Выше указывалось, что если номер оптимальной зоны генерации в режиме $D=1$ мал ($k \ll 3$), то группировка электронов неоптимальна, так как соответствующие значения величины $\xi_{\text{опт}}$ оказываются слишком большими. Это приводит к значительному снижению ВЧ мощности и электронного КПД в этих зонах. Уменьшить $\xi_{\text{опт}} = u_{1,\text{опт}}/u_m$ можно либо путем уменьшения амплитуды установившихся колебаний $u_{1,\text{опт}}$, либо путем повышения ускоряющего потенциала u_m . Первое можно осуществить, например, поставив лампу в режим $D < 1$ и снижая ее рабочий ток (см. выше). При этом нельзя ожидать значительного повышения ВЧ мощности за счет улучшения группировки электронов, так как этому препятствуют два фактора — уменьшение амплитуды ВЧ колебаний и снижение рабочего тока. Преимуществом такого режима работы лампы являются меньшие значения ее пускового тока. Можно сделать попытку сохранить оптимальной группировку электронов путем повышения ускоряющего потенциала. Известно, что повышение ускоряющего потенциала в режиме $D=1$ при прочих неизменных условиях смещает максимум электронного КПД в область больших пролетных углов. При этом максимальное значение электронного КПД падает, а максимальное значение ВЧ мощности остается неизменным (см. уравнения (16) и (17)). Все сказанное остается справедливым также для постоянных значений D , не равных единице.

Указанное смещение может быть иллюстрировано кривыми рис. 4. Оно обусловлено зависимостью пускового тока лампы от величины u_m .

Из рис. 4 и соотношений (11) и (12) следует, что пусковые токи и амплитуды установившихся колебаний, соответствующие максимумам кривых ВЧ мощности при различных u_m , при прочих равных условиях остаются постоянными. Действительно, максимумам различных кривых рис. 4 соответствует одно и то же значение параметра группировки $X_2=1,84$. По оси абсцисс рис. 4 отложена функция

$$\theta_k = \frac{U_{\text{экв}} u_m}{i_0} \frac{D(X_2)}{J_1(X_2)}.$$

При $X_2=1,84$ и неизменных значениях $U_{\text{экв}}$, i_0 и D отношение оптимального пролетного угла к ускоряющему потенциальному будет равно

$$\frac{\theta_k \text{опт}}{u_m} = \frac{U_{\text{экв}} D}{i_0} \frac{1,84}{0,58} = \text{const.}$$

Из соотношений (11) и (12) следует, что пусковой ток лампы и амплитуда установившихся колебаний пропорциональны при указанных выше неизменных условиях величине u_m/θ_k . Следовательно, при $X_2=1,84$ они также будут постоянны; будет постоянно и максимальное значение ВЧ мощности (см. уравнение (9)).

Повышение ускоряющего потенциала при $\lambda=\text{const}$ и прочих равных условиях приводит к снижению номера зоны генерации отражательного клистрона. Это следует из уравнения максимумов областей колебаний отражательного клистрона. С другой стороны, повышение ускоряющего потенциала в режиме $D=1$ требует для осуществления оптимальной группировки электронов, как показано выше, работы лампы при больших пролетных углах.

Таким образом, лампа в режиме $D=1$ при повышенном ускоряющем потенциале и при соответствующем этому потенциальну пролетном угле не сможет генерировать прежнюю волну.

Однако если одновременно с повышением ускоряющего потенциала поставить лампу в режим $D<1$, то можно, благодаря смещению максимума электронного КПД в этом режиме в область меньших пролетных углов, подобрать величину D такой, чтобы генерация при новом пролетном угле, соответствующем повышенному ускоряющему потенциальну и значению $D < 1$, происходила на той же волне. При этом, как ясно из предыдущего анализа, максимальное значение ВЧ мощности и амплитуды установившихся колебаний, а также величина пускового тока в режиме $D<1$ будут иметь такое же значение, какое имела бы лампа в режиме $D=1$ при более низком ускоряющем потенциале, если бы в этом режиме реализовалась оптимальная группировка электронов. Значение же коэффициента использования напряжения в режиме $D<1$ будет меньше, чем в режиме $D=1$.

Следовательно, если оптимальное значение ВЧ мощности лампы в режиме $D=1$ приходится на зоны с низкими номерами, то максимальное значение ВЧ мощности в режиме $D<1$ должно быть выше за счет сохранения в этом режиме оптимальной группировки электронов. При этом генерация указанной максимальной мощности в режиме $D<1$ потребует повышения ускоряющего потенциала.

Поставить лампу в режим $D<1$ при заданной величине ускоряющего потенциала можно посредством уменьшения потенциала первого отражателя. Из рис. 2 следует, что при заданных размерах лампы и постоянном отношении $|u_a|/u_m$ уменьшить величину D можно лишь путем уменьшения величины $x=u_0/u_m$. Последнее можно осуществить либо путем повышения u_m , либо путем снижения потенциала первого отражателя u_0 , либо одновременно и тем и другим.

Таким образом, проведенный анализ энергетических соотношений для лампы с двумя тормозящими электродами показывает, что надлежащим выбором потенциала первого отражателя и ускоряющего потенциала можно уменьшить оптимальное значение коэффициента использования напряжения исследуемой лампы по сравнению со значением этого коэффициента у лампы, работающей в режиме отражательного клистрона на той же волне, при неизменном рабочем токе и прочих равных условиях, для любого номера оптимальной зоны. При этом максимальное значение ВЧ мощности и пусковой ток лампы, работающей при малых $\xi_{\text{опт}}$, могут остаться неизменными.

Указанное обстоятельство позволяет ожидать, что при работе исследуемой лампы в зонах с низкими номерами можно получить увеличение ВЧ мощности за счет улучшения группировки электронов по сравнению с максимальной ВЧ мощностью, генерируемой этой лампой в режиме отражательного клистрона и работающей также при малых пролетных углах на той же волне при заданном рабочем токе и прочих равных условиях.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА. ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

Экспериментальное исследование лампы с двумя тормозящими электродами производилось на волне $\lambda=60 \text{ см}$ и $\lambda=89 \text{ см}$. Лампа возбуждалась в зонах с номерами $k=2$ и $k=3^*$. Наблюдаемые зоны генерации имели достаточную ширину по ускоряющему напряжению [1]. Так, для зоны с номером $k=3$ на волне $\lambda=60 \text{ см}$ ускоряющий потенциал менялся в пределах от 160 до 290 в; в зоне с номером $k=2$ ($\lambda=60 \text{ см}$) он изменялся в пределах от 170 до 270 в. Третья зона генерации на волне $\lambda=60 \text{ см}$ наблюдалась при сравнительно низких ускоряющих потенциалах: $55 \text{ в} \leq u_m \leq 85 \text{ в}$ (см. [1]). Последняя зона лежала целиком в области отрицательных потенциалов на первом тормозящем электроде. В этой зоне колебания возбуждались при эмиссионном токе, меньшем, чем ток насыщения. Низковольтная (по ускоряющему напряжению) зона колебаний наблюдалась также и на волне $\lambda=89 \text{ см}$; однако ускоряющий потенциал при этом настолько низок ($u_m < 50 \text{ в}$), что катодный ток очень мал и интенсивность колебаний незначительна. Наибольшая интенсивность колебаний во всех зонах генерации имела место в режиме $D < 1$ (см. таблицу 1). Самая большая интенсивность колебаний на обеих волнах наблюдалась в зонах с номером $k=2$ при небольших положительных потенциалах первого отражателя, близких к нулю. Интенсивность колебаний в режиме $D=1$ для всех областей колебаний была значительно меньше самой большой интенсивности в пределах каждой зоны при $D < 1$.

Таблица 1

u_m	u_0 (в)	u_a	λ (см)	k	ξ	$L/2\pi$	J_g (ма)	D	$u_1 \text{ мин}$	$u_1 \text{ макс}$	Примечания
210	1,5	-40	60	2	0,0071 0,0085 0,0357 0,044 0,14	0,435 0,325 0,56 0,554 0,353	100	0,087	1,5	7,5	
235	40	-15	60	3	0,23 0,0426	0,44 0,58	10	0,32	5,4	10	
110	5	-20	89	2	0,0228 0,037 0,038 0,0455	0,478 0,57 0,577 0,513	100	<1	2,5	4,2	
131	25	-32	89	2	0,079 0,143	0,44 0,58	35	1	10,2	18,8	
195	58	-16	60	3	0,051 0,094	0,44 0,58	6,2	1	9,97	18,3	

Режимы $D=1$ с самой большой интенсивностью колебаний при $D < 1$.

Для наиболее характерных режимов генерации был рассчитан интеграл мощности путем графического интегрирования для различных значений параметра ξ (см. Приложение). Результаты расчета приведены в таблице 1. В таблице приведены также показания индикаторного гальванометра J_g , характеризующие ВЧ мощность в данном режиме, а также $u_1 \text{ мин}$ и $u_1 \text{ макс}$, представляющие теоретические значения амплитуды ВЧ напряжения, которая должна обеспечить минимальную и оптимальную группировку в данном режиме. Из таблицы 1

* Об определении номера зоны генерации говорилось ранее (см. [1]).

следует, что максимальное значение интеграла мощности лампы с двумя тормозящими электродами близко к $2\pi \cdot 0,58$, т. е. совпадает с максимальным значением этого интеграла для отражательного кристалла.

На волне $\lambda=60 \text{ см}$ значения $\xi_{2\text{опт}}$ и $\xi_{2\text{мин}}$, соответствующие самой большой интенсивности колебаний в зоне с номером $k=2$, меньше соответствующих значений $\xi_{3\text{опт}}$ и $\xi_{3\text{мин}}$ (зоны с номером $k=3$): $\xi_{2\text{опт}} = -0,036 < \xi_{3\text{опт}} = 0,043$, $\xi_{2\text{мин}} = 0,0071 < \xi_{3\text{мин}} = 0,023$. Значения $\xi_{0\text{опт}}$ и $\xi_{0\text{мин}}$, соответствующие самой большой интенсивности колебаний в режиме отражательного кристалла ($D=1$), больше соответствующих значений $\xi_{\text{опт}}$ и $\xi_{\text{мин}}$ в режиме $D < 1$ для всех зон генерации.

Приближенная оценка амплитуды установившихся колебаний * показала, что значения u_1 в зоне с номером $k=2$, соответствующие наибольшей интенсивности, как на волне $\lambda=60 \text{ см}$, так и на волне $\lambda=89 \text{ см}$ имеют один порядок с наблюдаемыми амплитудами. Теоретические значения u_1 , обеспечивающие фазовую группировку в зоне с номером $k=3$, так же, как и теоретические значения u_1 , соответствующие режиму $D=1$, во всех зонах колебаний превосходят по порядку величины наблюдаемые амплитуды установившихся колебаний. По-видимому, в режимах самой большой интенсивности колебаний в зоне с номером $k=2$ фазовая фокусировка наиболее близка к оптимальной.

Оптимальная группировка в режиме $D=1$ в зоне с наиболее низкими значениями ускоряющего потенциала ($55 \text{ в} \leq u_m \leq 85 \text{ в}$) невозможна в силу слишком большого значения величины $\xi_{0\text{опт}}$ **.

Максимумы ВЧ мощности на обеих волнах в режиме $D < 1$ наблюдались в зонах с более высокими значениями ускоряющих потенциалов ($k=2$, $u_m=210 \text{ в}$ на $\lambda=60 \text{ см}$ и $k=2$, $u_m=110 \text{ в}$ на $\lambda=89 \text{ см}$). Как показало сопоставление теоретических и экспериментальных значений $\xi_{\text{опт}}=u_{1\text{опт}}/u_m$, генерация на оптимальных пролетных углах в этих зонах в режиме $D=1$ на заданной волне также невозможна (см. выше).

Из вышеизложенного следует, что при возбуждении лампы с двумя тормозящими электродами в режиме $D < 1$ в зонах с малыми номерами генерации наблюдалось повышение ВЧ мощности по сравнению с ВЧ мощностью, генерируемой лампой в режиме отражательного кристалла, работающей также в зонах с малыми номерами, на той же волне и при прочих равных условиях, за счет улучшения условий фазовой фокусировки.

Таким образом, приведенные соображения о величине электронного КПД и высокочастотной мощности для лампы плоской конструкции, работающей при $u_0 \gg u_1$, оказываются, по-видимому, справедливыми и для лампы с двумя тормозящими электродами радиальной конструкции, работающей как в режиме $u_0 \gg u_1$, так и при $u_1/u_0 \sim 1$.

В результате исследования отражательного кристалла с двумя тормозящими электродами было установлено, что для любого номера оптимальной зоны можно путем подбора отношения коэффициентов торможения $n_1/n_2 > 1$ осуществить оптимальную группировку электронов и при малых значениях коэффициента использования напряжения, много меньших единицы ($\xi_{\text{опт}} \ll 1$).

Как показал анализ теоретических соотношений для лампы плоской

* Для этого была изготовлена специальная лампа с измерительным диодом, позволяющая оценивать амплитуду ВЧ напряжения методом компенсации.

** Теоретическое значение $\xi_{\text{опт}}$, соответствующее самой большой интенсивности колебаний для режима $D=1$ в этой зоне ($u_m = 66 \text{ в}$, $u_0 = -12 \text{ в}$, $u_a = -50 \text{ в}$, $J_e = 14 \text{ ма}$, $\lambda = 60 \text{ см}$), равно 0,16.

конструкции, максимальное значение амплитуды колебаний и максимальная ВЧ мощность, генерируемая такой лампой при малых ξ , может быть не меньше, чем в режиме отражательного клистрона. Последнее можно осуществить путем повышения ускоряющего потенциала. При этом следует поставить лампу в режим $n_1/n_2 > 1$, что легко достигается изменением потенциала первого отражателя. Возбуждение заданной волны при повышенном ускоряющем потенциале может быть осуществлено в режиме $n_1/n_2 > 1$ ($D < 1$) на оптимальном пролетном угле благодаря зависимости пускового тока лампы от отношения n_1/n_2 .

Генерация при малых $\xi_{\text{опт}}$ в режиме $n_1/n_2 > 1$ позволяет сохранять оптимальной группировку электронов и при работе лампы на зонах с малыми номерами ($k \leq 3$), что должно привести к увеличению ВЧ мощности в этих режимах. Отсюда следует, что при работе исследуемой лампы на зонах с малыми номерами ВЧ мощность, генерируемая этой лампой в режиме $n_1/n_2 > 1$, должна превышать при прочих равных условиях максимальную ВЧ мощность этой лампы в режиме отражательного клистрона ($n_1/n_2 = 1$).

Анализ результатов экспериментального исследования отражательного клистрона с двумя тормозящими электродами радиальной конструкции показал, что максимум ВЧ мощности, генерируемой указанной лампой при работе ее на зонах с малыми номерами ($k = 2, 3$), наблюдался в режиме $n_1/n_2 > 1$ ($D < 1$) для всех зон генерации. Самая большая интенсивность колебаний в режиме $n_1/n_2 > 1$ наблюдалась в зонах с более высокими значениями ускоряющего потенциала. При этом оптимальное значение коэффициента использования напряжения, рассчитанное для экспериментальных режимов, которым соответствует самая большая ВЧ мощность в режиме $n_1/n_2 > 1$, оказалось меньше, чем в режиме $n_1/n_2 = 1$, для любых номеров зон генерации. Оценка интеграла мощности для указанных режимов, произведенная путем графического интегрирования, показала, что максимальное значение этого интеграла равно $2\pi \cdot 0,58$, т. е. совпадает с максимальным его значением для отражательного клистрона. Увеличение же максимума ВЧ мощности исследуемой лампы, наблюдаемое на опыте при работе ее на зонах с малыми номерами, по сравнению с максимумом ВЧ мощности этой лампы, работающей в режиме отражательного клистрона также на зонах с малыми номерами и при прочих равных условиях, может быть объяснено улучшением группировки электронов в режимах $n_1/n_2 > 1$. Таким образом, результаты экспериментального исследования лампы с двумя тормозящими электродами радиальной конструкции находятся в согласии с выводами, полученными для лампы плоской конструкции.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Интеграл мощности лампы с двумя тормозящими электродами. Высокочастотная мощность и электронный КПД. Пусковой ток

Известно [3], что мощность, отдаваемая электронным потоком резонатору отражательного клистрона в среднем за период, может быть представлена соотношением:

$$P_e = -i_0 u_m \xi \frac{1}{2\pi} L, \quad (1)$$

где

$$L = \int_0^{2\pi} \sin(\varphi + \theta) d\varphi \quad (2)$$

—так называемый интеграл мощности. Вводя функцию

$$y = \theta - \theta_k + \varphi, \quad (3)$$

получим:

$$L = \int_0^{2\pi} \sin(y + \theta_k) d\varphi. \quad (4)$$

Пролетный угол электронов в зонах торможения лампы с двумя тормозящими электродами радиальной конструкции определяется выражением (см. [1]):

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{4\omega}{v_m} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} \left(\frac{1}{r_m} \right)^p \left(\frac{1}{n_1} \right)^{p+1} \left(\sqrt{1+\xi \sin \varphi} \right)^{2p+1} + \right. \\ & \left. + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} \left(\frac{1}{r_0} \right)^p \left(\sqrt{x+\xi \sin \varphi} \right)^{2p+1} \left[\left(\frac{1}{n_2} \right)^{p+1} - \left(\frac{r_0}{r_m} \frac{1}{n_1} \right)^{p+1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для лампы, размеры радиусов электродов которой удовлетворяют условиям $r_0/r_m < 1,1$ и $r_a/r_0 < 1,1$, пролетный угол электронов, имеющих поверхности возврата во второй зоне торможения, равен

$$\theta = \frac{4\omega}{v_m} \left\{ \frac{1}{n_1} + \sqrt{\frac{u_0}{u_m} + \xi \sin \varphi} \left(\frac{1}{n_2} - \frac{r_0}{r_m} \frac{1}{n_1} \right) + \frac{1}{2} \xi \frac{1}{n_1} \sin \varphi \right\}. \quad (6)$$

Рассмотрим частный случай

$$u_0 \gg u_1 > 0, \quad (7)$$

когда напряжение на первом отражателе положительно и значительно больше амплитуды ВЧ напряжения на сетках резонатора. При выполнении условия (7) выражение

$$\left(\frac{u_0}{u_m} + \xi \sin \varphi \right)^{1/2} = \sqrt{x} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\xi}{x} \sin \varphi - \frac{1}{8} \left(\frac{\xi}{x} \sin \varphi \right)^3 + \dots \right]$$

может быть заменено приближенным соотношением

$$\left(\frac{u_0}{u_m} + \xi \sin \varphi \right)^{1/2} \simeq \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\xi}{x} \sin \varphi \right), \quad (8)$$

где $\xi' x = u_1/u_0 \ll 1$. Подставляя (8) и (6) в (2), получим:

$$\begin{aligned} L = & \int_0^{2\pi} \sin \left\{ \varphi + \frac{4\omega}{v_m} \left[\frac{1}{n_1} + \left(\frac{1}{n_2} - \frac{r_0}{r_m} \frac{1}{n_1} \right) \sqrt{x} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{4\omega}{v_m} \frac{1}{2} \xi \left[\frac{1}{n_1} + \left(\frac{1}{n_2} - \frac{r_0}{r_m} \frac{1}{n_1} \right) \frac{1}{\sqrt{x}} \right] \sin \varphi \right\} d\varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Если ввести обозначения:

$$\begin{aligned} a = & \frac{4\omega}{v_m} \left[\frac{1}{n_1} + \left(\frac{1}{n_2} - \frac{r_0}{r_m} \frac{1}{n_1} \right) \sqrt{x} \right]; \\ b = & \varphi + \frac{1}{2} \xi \frac{4\omega}{v_m} \sin \varphi \left[\frac{1}{n_1} + \left(\frac{1}{n_2} - \frac{r_0}{r_m} \frac{1}{n_1} \right) \frac{1}{\sqrt{x}} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

и представить подынтегральное выражение как синус суммы двух углов: $\sin(a+b)=\sin a \cos b + \cos a \sin b$, то

$$L = \sin a \int_0^{2\pi} \cos b d\varphi + \cos a \int_0^{2\pi} \sin b d\varphi. \quad (11)$$

Подставляя в (11) a и b из (10) и учитывая известные соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + X_2 \cos \varphi) d\varphi &= 2\pi J_1(X_2); \\ \int_0^{2\pi} \sin(\varphi + X_2 \sin \varphi) d\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Получим окончательно:

$$L = 2\pi \sin \theta_k J_1(X_2), \quad (13)$$

где

$$X_2 = \xi \theta_k / 2D \quad (14)$$

—параметр группировки,

$$\theta_k = \frac{4\omega}{v_m} \left[\frac{1}{n_1} + \sqrt{x} \left(\frac{1}{n_2} - \frac{r_0}{r_m} \frac{1}{n_1} \right) \right]; \quad (15)$$

$$D = \frac{1 + (n_1/n_2 - r_0/r_m)x^{1/2}}{1 + (n_1/n_2 - r_0/r_m)x^{-1/2}}. \quad (16)$$

Выражение для ВЧ мощности исследуемой лампы получим, подставив (13) в (1):

$$P_e = -i_0 u_m \xi \sin \theta_k J_1(X_2). \quad (17)$$

При этом КПД электроники

$$\eta_e = \xi \sin \theta_k J_1(X_2) \quad (18)$$

и, согласно (14),

$$\xi = 2X_2 D / \theta_k. \quad (19)$$

Подставив (19) в (17) и (18) и вводя угол $\delta = \theta_k - \theta_{k0}$ *, характеризующий отклонение среднего пролетного угла от его оптимального значения, получим:

$$P_e = 2i_0 u_m \cos \delta D X_2 J_1(X_2) / \theta_k; \quad (20)$$

$$\eta_e = 2 \cos \delta D X_2 J_1(X_2) / \theta_k. \quad (21)$$

Сопоставляя соотношения (13), (20) и (21) с известными в литературе [2] соотношениями для отражательного кристалла, а также учитывая, что амплитуда активной составляющей первой гармоники наведенного тока равна

$$I_1 = (i_0/\pi) L, \quad (22)$$

убеждаемся, что все соотношения для исследуемой лампы с двумя тормозящими электродами, являющиеся следствием соотношений (22) и (21), а также общих для всех автогенераторов соотношений, могут быть получены автоматически из соотношений для отражательного кристалла путем замены в них θ_k на θ_k/D и параметра группировки X на X_2 . Таким образом, для лампы с двумя тормозящими электродами: пусковой ток

$$i_{\text{пуск}} = 2u_m U_{\text{акв}} D / \theta \cos \delta, \quad (23)$$

* Здесь $\theta_{k0} = (4k-1)\pi/2$ ($k=1, 2, 3, \dots$ — номер зоны генерации).

амплитуда установившихся колебаний

$$u_1 = (2i_0 \cos \delta / U_{\text{акв}}) J_1(X_2). \quad (24)$$

Выражения (20) и (21) можно преобразовать. Из (19) имеем

$$DX_2/\theta_k = \xi/2 = u_1/2u_m. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (20) и (21), а также учитывая (24), получим:

$$P_e = 2i_0 u_m \cos \delta DX_2 J_1(X_2)/\theta_k = (2i_0^2 \cos^2 \delta / U_{\text{акв}}) [J_1(X_2)]^2; \quad (26)$$

$$\eta_e = (2 \cos \delta / \theta_k) DX_2 J_1(X_2) = (2i_0 \cos^2 \delta / u_m U_{\text{акв}}) [J_1(X_2)]^2. \quad (27)$$

2. Кривые прибытия для лампы с двумя тормозящими электродами. Расчет интеграла мощности для наиболее характерных экспериментальных режимов

Функция $y = \theta - \theta_k + \varphi$ для исследуемой лампы радиальной конструкции

$$\begin{aligned} y = \varphi + \frac{2\omega}{v_m} \frac{1}{n_1} \xi \sin \varphi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{2p} p!}{(2p)!} \left(\frac{4,21}{n_1} \right)^p + \\ + \frac{4\omega}{v_m} \frac{1}{n_1} \sqrt{x} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} \left[\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{p+1} - (2,1)^{p+1} \right] \times \\ \times \left[\left(\sqrt{1 + \frac{\xi}{x} \sin \varphi} \right)^{2p+1} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

В экспериментальной лампе $r_m = 0,475 \text{ см}$, $r_0 = 1 \text{ см}$, $r_a = 1,5 \text{ см}$, $p = 0, 1, 2, 3, \dots$. Наибольшая интенсивность колебаний наблюдалась в ре-

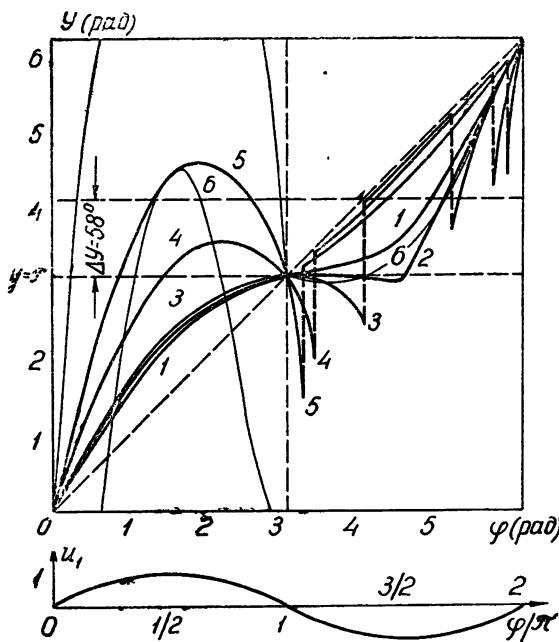


Рис. 5. Кривые прибытия для исследуемой лампы в режиме $u_m = 210 \text{ в}$, $i_0 = 1,5 \text{ в}$, $u_a = -40 \text{ в}$, $\lambda = 60 \text{ см}$, эмиссионный ток $I_e = 18 \text{ ма}$, для различных значений ξ :

1 — $\xi = 0,006$; 2 — $\xi = 0,0071$; 3 — $\xi = 0,085$;

4 — $\xi = 0,019$; 5 — $\xi = 0,057$; 6 — $\xi = 0,14$.

жиме $u_m=210$ в, $u_0=1,5$ в, $u_a=-40$ в на волне $\lambda=60$ см и в режиме $u_m=110$ в, $u_0=5$ в, $u_a=-20$ в на волне $\lambda=89$ см. Кривые прибытия для этих режимов представлены на рис. 5 и рис. 7 для различных

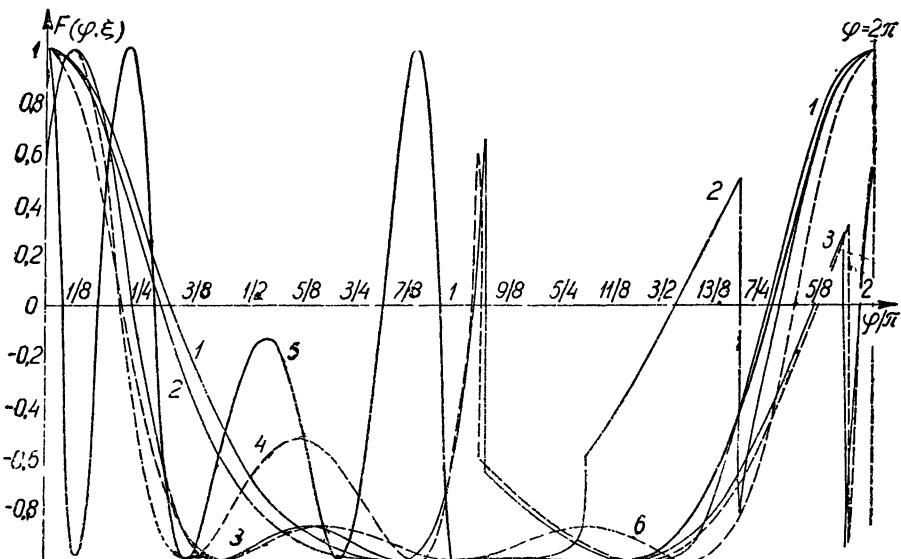


Рис. 6. Влияние величины ξ на функцию $F(\varphi, \xi) = \cos(y - \Delta y)$. Кривые построены для режима:

$$u_m = 210 \text{ в}, u_0 = 1,5 \text{ в}, u_a = -40 \text{ в}, I_e = 18 \text{ ма}, \lambda = 60 \text{ см}: \\ 1 - \xi = 0,0071; \quad 2 - \xi = 0,0085; \quad 3 - \xi = 0,0357; \\ 4 - \xi = 0,044; \quad 5 - \xi = 0,14.$$

Кривая 6 соответствует режиму отражательного кlyстрона при значении параметра группировки $X=1,84$.

значений ξ , меняющихся как параметр. На рис. 6 и рис. 8 приведены графики функции $F(\varphi, \xi) = \cos(y - \Delta y)$. Здесь Δy — разность фаз при-

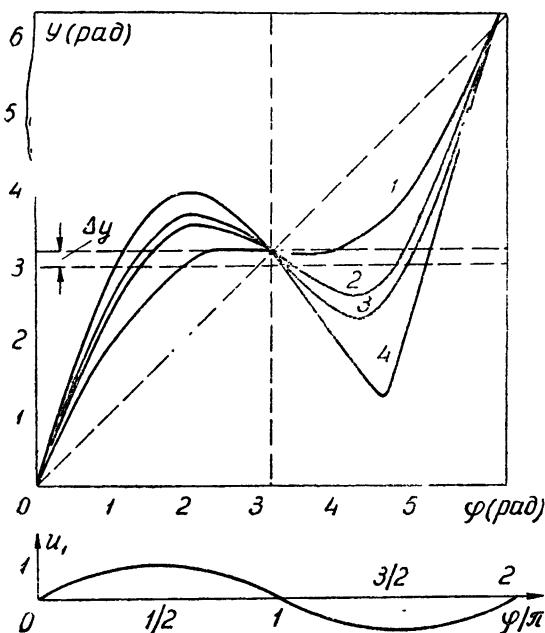


Рис. 7. Кривые прибытия исследуемой лампы в режиме:

$$u_m = 110 \text{ в}, u_0 = 5 \text{ в}, u_a = -20 \text{ в}, \lambda = 89 \text{ см}, I_e = 18 \text{ ма}, \text{ для различных значений } \xi: \\ 1 - \xi = 0,0228; \quad 2 - \xi = 0,034; \quad 3 - \xi = 0,038; \\ 4 - \xi = 0,0455.$$

бытия к резонатору электронов с фазой выхода $\varphi = \pi$ и с фазой выхода φ_1 ($\varphi_1 = \pi + \Delta\varphi$ — фаза выхода электронов, прибывающих к резонатору в момент наибольшего тормозящего ВЧ поля; здесь $|\Delta\varphi| < \pi$). Так как при выполнении „условия фаз“ для электронов с фазой выхода φ_1 :

$$y_1 = \theta - \theta_k + \varphi_1 = (4k+1) \frac{\pi}{2} - \theta_k = \pi + \Delta y$$

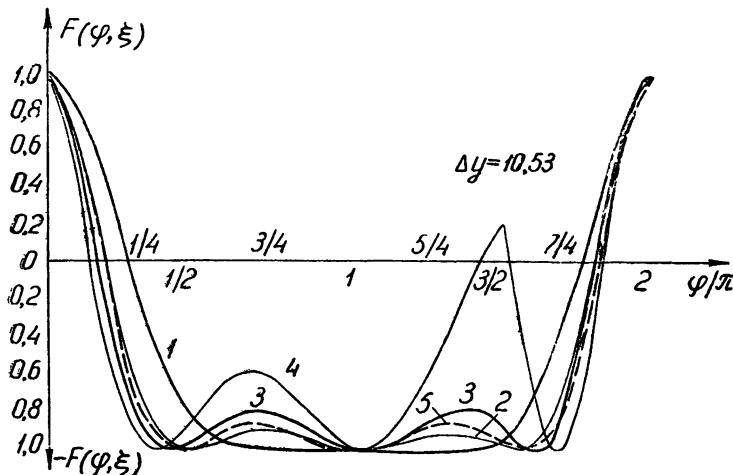


Рис. 8. Влияние величины ξ на функцию $F(\varphi, \xi) = \cos(y - \Delta y)$ (для режима:

$u_m = 110$ в, $u_n = 5$ в, $u_a = -20$ в, $\lambda = 89$ см, $I_e = 18$ мА; кривая 5 соответствует режиму отражательного кlyстрона при значении параметра группировки $X = 1,84$;
 1 — $\xi = 0,0228$; 2 — $\xi = 0,034$; 3 — $\xi = 0,038$; 4 — $\xi = 0,0455$.

(см. рис. 7 и 8), то $\theta_k = (4k-1)\pi/2 - \Delta y$ и, следовательно, $\sin(y + \theta_k) = \cos(y - \Delta y) = F(\varphi, \xi)$. Таким образом, площадь, ограниченная кривой $F(\varphi, \xi) = \cos(y - \Delta y)$, осью абсцисс и прямыми $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$, будет равна интегралу мощности $L = \int_0^{2\pi} \sin(y + \theta_k) dy$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Максимова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 111 (1959).
2. С. Д. Гвоздовер, Теория электронных приборов сверхвысоких частот, Гостехиздат, М., 1956.
3. В. И. Калинин, Генерирование дециметровых и сантиметровых волн, Связьиздат, М., 1948.

Челябинский политехнический институт

Поступила в редакцию
2 января 1959 г.,
после переработки
2 мая 1961 г.

ON H-F POWER AND ELECTRON EFFICIENCY OF ELECTRON GENERATOR TUBE WITH TWO DECELERATING ELECTRODES

A. M. Maksimova

The expressions have been obtained of h-f power and electron efficiency of a tube with two decelerating plate electrodes when the first one being positive. It was found that maximum available h-f oscillating power at the operation in the generations regions with low number ($k < 3$) must be over the maximum oscillating power of the same tube, in the reflex klystron regime with small transit angles and under other equal conditions. The experimental results for the tube with radial two decelerating electrodes agree with the theory developed for the tube with plate electrodes.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ ТЕОРИИ АВТОКОЛЕБАНИЙ

И. Е. Средний, Е. П. Маслов

Исследуется нелинейное дифференциальное уравнение, общее для некоторого ряда систем. Устанавливается период, форма и размах автоколебаний, а также условие самовозбуждения колебаний и условие разрывности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В радиотехнических устройствах встречаются системы, в которых при определенных условиях могут иметь место как непрерывные, так и разрывные автоколебания. Такими системами являются ламповый генератор с индуктивной обратной связью (рис. 1), мультивибратор с положительной обратной связью в цепи катодов ламп (рис. 2), мультивибратор с индуктивностями в цепях анодов (рис. 3), динатронный генератор (рис. 4) и др. Сюда относится и так называемая „универсальная“ схема, описанная в [1].

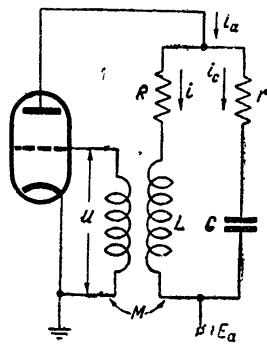


Рис. 1. Схема лампового генератора с индуктивной обратной связью.

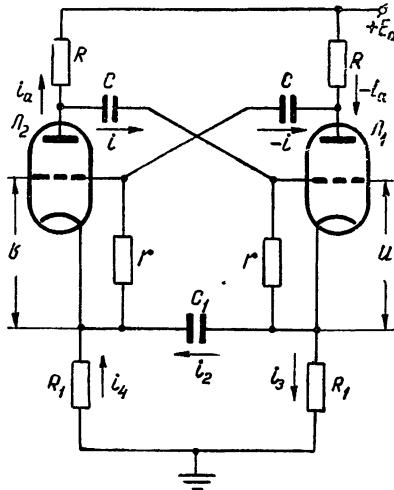


Рис. 2. Схема мультивибратора с положительной обратной связью в цепи катодов ламп.

Задачей настоящей статьи является установление условий существования непрерывных и разрывных автоколебаний, а также определение их формы и периода.

Остановимся сначала на выводе дифференциальных уравнений для указанных схем. Для лампового генератора с индуктивной обратной связью и раздельным учетом потерь в ветвях контура (рис. 1) можно записать:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \frac{1}{C} \int i_c dt + ri_c;$$

$$i_a = i + i_c = \frac{1}{M} \int u dt + i_c;$$

исключая из уравнений токи i , i_c и обозначая через

$$s = di_a/du = f(u),$$

получим:

$$u'' \left(1 - \frac{rMs}{L} \right) + u' \left(\frac{r+R}{L} - \frac{Ms}{LC} - \frac{rM}{L} \frac{ds}{du} u' \right) + \frac{u}{LC} = 0. \quad (1)$$

Из этого уравнения следует, что учет сопротивления R в индуктивной цепи контура не является существенным. Если положить $R = 0$, то структура уравнения не нарушится и, следовательно, в качественном отношении описание процесса не изменится. Наоборот, если приравнять нуль сопротивление в емкостной ветви контура ($r = 0$) и отнести все

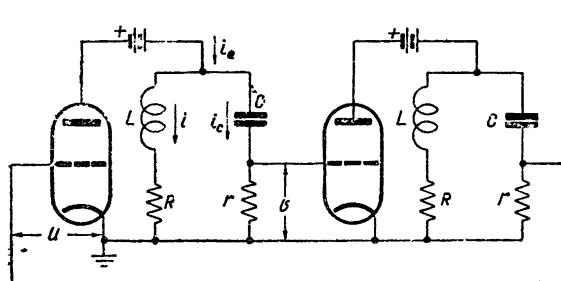


Рис. 3. Схема мультивибратора с индуктивностями в цепях анодов.

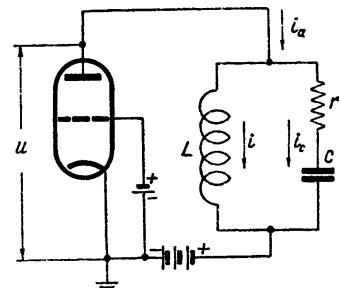


Рис. 4. Схема динатронного генератора.

потери к индуктивной ветви, то структура дифференциального уравнения претерпевает изменение. Следовательно, роль сопротивлений R и r принципиально неодинакова, и учет сопротивления r представляет интерес прежде всего в качественном отношении.

Если пренебречь сеточными токами и реакцией анодной нагрузки, а также всеми паразитными параметрами схемы, и аппроксимировать характеристику триода полиномом третьей степени, симметричным относительно рабочей точки:

$$i_a = S_0 (u - u^3/3V_s^2),$$

то уравнение (1) приводится к виду:

$$x'' (x^2 - \beta^2) + x' (x^2 + 2\delta_2 x^2 - 2\delta_0) + \omega_0^2 x = 0 \quad (2)$$

при следующих обозначениях:

$$\begin{aligned} x &= u/V_s; \quad \omega_0^2 = 1/rCMS_0; \quad 2\delta_0 = [MS_0 - C(r+R)]/rCMS_0; \\ \beta^2 &= 1 - L/rMS_0; \quad 2\delta_2 = 1/rC. \end{aligned} \quad (3)$$

При $r = 0$ и принятой аппроксимации характеристики уравнение (1) переходит в уравнение Ван-дер-Поля.

Для схемы мультивибратора с положительной обратной связью в цепи катодов ламп, описанной в [2], также получается дифференциальное уравнение вида (2), если обозначить

$$\begin{aligned} x = u/V_s; \quad \omega_0^2 = 1/2R_1r(R + R_1)CC_1S_0; \quad 2\delta_2 = 1/2C_1R_1; \\ \beta^2 = 1 - (R + R_1 + r)/S_0r(R + R_1); \\ 2\delta_0 = 1/2R_1C_1 - [(R + R_1)C + rC + 2C_1R_1]/2R_1r(R + R_1)CC_1S_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Дифференциальное уравнение (2) справедливо и для мультивибратора с индуктивностями в цепях анодов (рис. 3) при следующих коэффициентах:

$$\begin{aligned} x = u/V_s; \quad \omega_0^2 = 1/LCrS_0; \quad \beta^2 = 1 - 1/rS_0; \\ 2\delta_0 = [rRS_0 - (r + R)]/LrS_0; \quad 2\delta_2 = R/L. \end{aligned} \quad (5)$$

Интересно, что для мультивибратора с индуктивностями в цепях анодов вообще невозможно из (2) получить уравнение Ван-дер-Поля, так как при упрощении уравнения ($r = 0$) исчезают нелинейные члены (а в схеме—обратная связь) и единственным периодическим решением является тривиальное $u \equiv 0$. Наконец, уравнение (2) получается и для динатронного генератора (рис. 4), если аппроксимировать падающий участок характеристики полиномом

$$i_a = -S_0(u - u^3/3V_s^2)$$

и принять следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x = u/V_s; \quad \omega_0^2 = 1/LCrS_0; \\ \beta^2 = 1 - 1/rS_0; \quad 2\delta_0 = (LS_0 - rC)/LCrS_0; \quad 2\delta_2 = 1/rC. \end{aligned} \quad (6)$$

Из вышеизложенного видно, что уравнение (2) описывает процессы в самых разнообразных схемах и является не менее общим и распространенным, чем уравнение Ван-дер-Поля. В зависимости от соотношения между параметрами схемы уравнение (2) описывает разрывные либо непрерывные колебания.

2. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Периодическое решение нелинейного дифференциального уравнения вида (2) можно приближенно найти путем разложения его в линейно-степенной ряд

$$x(t) = x(t_k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{(n)}(t_k) \Psi^n \Phi^n, \quad (7)$$

описание которого приводится в [3]. Здесь $\Phi = \Phi(t)$ —разрывно-периодическая функция периода $l_1 + l_2$:

$$\cdot \Phi(t) = \begin{cases} t & (-l_1/2 < t < l_1/2); \\ l - t & (l_1/2 < t < l); \\ -l - t & (-l < t < -l_1/2), \end{cases}$$

состоящая из отрезков прямых, проходящих под углом 45° к оси t (рис. 5). Разрывно-периодическая функция $\Psi(t)$ определяется как производная по времени функции $\Phi(t)$. Коэффициентами ряда являются дуальные числа

$$\begin{aligned}x(t_k) &= x_c + \Psi x_v; \\x'(t_k) &= x'_c + \Psi x'_v; \\&\dots \\x^{(n)}(t_k) &= x_c^{(n)} + \Psi x_v^{(n)},\end{aligned}$$

состоящие из неизменных ($x_c, x'_c, \dots, x_c^{(n)}$) и переменных ($\Psi x_v, \Psi x'_v, \dots, \Psi x_v^{(n)}$) частей. Значения коэффициентов ряда определяются либо из условия непрерывности разлагаемой функции, либо по заданным значениям функции слева и справа от точек разрыва.

Ряд (7) отличается от ряда Тейлора тем, что выполняет разложение $x(t)$ в окрестности множества точек $t_k = \pm kl = \pm k(l_1 + l_2)/2$, а не в окрестности одной какой-либо точки. Вследствие этого уже первые члены ряда (7), аппроксимируя $x(t)$, представляют собой периодическую функцию времени, чего нельзя сказать о частичной сумме ряда Тейлора. Ряд (7) не менее удобен, чем ряд Фурье для описания периодических функций.

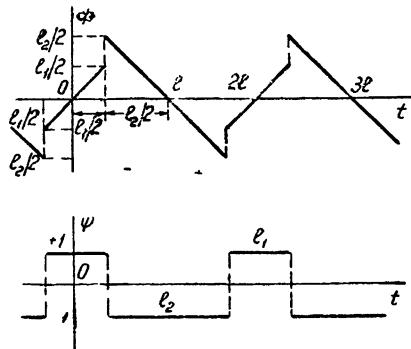


Рис. 5. Графики функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$.

3. РАЗРЫВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ, ОПИСЫВАЕМЫЕ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Начнем изучение разрывных колебаний с рассмотрения предельного цикла.

Для схемы лампового генератора с индуктивной обратной связью непрерывно изменяющимися величинами являются ток в индуктивности и напряжение на конденсаторе контура. Обозначая непрерывную переменную через

$$y = \frac{1}{rS_0V_s} \left[(R+r)i - \frac{1}{C} \int i_c dt \right],$$

из равенств (3) находим:

$$y = \beta^2 x - x^3/3. \quad (8)$$

Зависимость $x = f(y)$ представляет собою предельный цикл разрывных колебаний на плоскости xOy (рис. 6). Точно такой же вид имеет зависимость $x = f(y)$ и для остальных рассматриваемых схем. Различие состоит лишь в определении непрерывной переменной y .

Для схемы мультивибратора с положительной обратной связью в цепи катодов ламп непрерывно изменяющимися величинами являются напряжения на емкостях C и C_1 и здесь

$$y = \frac{1}{(R+R_1)S_0V_s} \left[\frac{1}{C} \int idt + \frac{1}{2C_1} \int i_2 dt \right].$$

В схеме (рис. 3) непрерывно изменяются ток в индуктивности и напряжение на емкости, и, следовательно,

$$y = -\frac{1}{LS_0V_s} \left[R \int idt - \frac{1}{C} \int \left[\int i_c dt \right] dt - r \int i_c dt \right].$$

Наконец, для динатронного генератора, также учитывая ток в индуктивности и напряжение на емкости, получаем:

$$y = \frac{1}{CrS_0V_s} \int i_c dt - \frac{i}{S_0V_s}.$$

Прежде всего изучим предельный цикл. Дифференцируя уравнение (8), определяем экстремальные значения x :

$$x_{1,2} = \pm \beta.$$

Подставляя эти значения в (8), находим максимальные значения y :

$$y_0 = \pm \frac{2}{3} \beta^3.$$

Наконец, подставляя y_0 в уравнение (8), получаем кубическое уравнение относительно переменной x :

$$x^3 - 3\beta^2 x \pm 2\beta^3 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \pm \beta, \\ x_3 &= \mp 2\beta \end{aligned} \quad (9)$$

представляют собой значения функции $x(t)$ слева и справа от точек разрыва. Из равенств (9) следует, что разрывы функции имеют место, если $\beta^3 > 0$. Отсюда условия существования разрывных колебаний для схем, представленных на рис. 1, 2, запишутся соответственно в виде

$$S_0 > L/rM; \quad S_0 > 1/r + 1/(R + R_1),$$

а для схем на рис. 3, 4—в виде

$$S_0 > 1/r.$$

Как видно из предельного цикла, размах автоколебаний для всех схем равен 4β , и, следовательно, наибольшее отклонение от нуля $U_{\max} = 2V_s\beta$.

Решение уравнения (2) отыскивается путем разложения функций $x(t)$ и $y(t)$ в ряд (7) по степеням элементарных разрывно-периодических функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$:

$$x(t) = x_c + \Psi x_v + (x'_c + \Psi x'_v) \frac{\Psi \Phi}{1!} + (x''_c + \Psi x''_v) \frac{\Psi^2 \Phi^2}{2!} + \dots; \quad (10)$$

$$y(t) = y_c + \Psi y_v + (y'_c + \Psi y'_v) \frac{\Psi \Phi}{1!} + (y''_c + \Psi y''_v) \frac{\Psi^2 \Phi^2}{2!} + \dots. \quad (11)$$

Подставляя значения функции $x(t)$ слева и справа от точек разрыва (9), получим четыре уравнения:

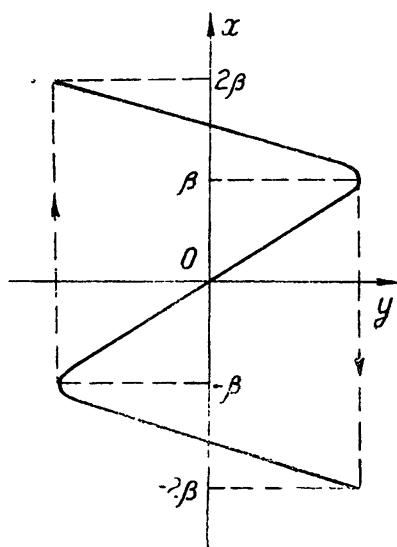


Рис. 6. Предельный цикл разрывных автоколебаний.

$$\begin{aligned}
 & x\left(\frac{l_1}{2} - 0\right) = \beta, \\
 & \beta = x_c + x_v + (x'_c + x'_v) \frac{l_1}{2} + \frac{1}{2!} (x''_c + x''_v) \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + \dots; \\
 & x\left(\frac{l_1}{2} + 0\right) = -2\beta, \\
 & -2\beta = x_c - x_v - (x'_c - x'_v) \frac{l_2}{2} + \frac{1}{2!} (x''_c - x''_v) \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + \dots; \\
 & x\left(-\frac{l_1}{2} + 0\right) = 2\beta, \\
 & 2\beta = x_c + x_v - (x'_c + x'_v) \frac{l_1}{2} + \frac{1}{2!} (x''_c + x''_v) \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + \dots; \\
 & x\left(-\frac{l_1}{2} - 0\right) = -\beta, \\
 & -\beta = x_c - x_v + (x'_c - x'_v) \frac{l_2}{2} + \frac{1}{2!} (x''_c - x''_v) \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + \dots.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Из этой системы уравнений вытекает равенство полупериодов колебаний $l_1 = l_2 = l$ и

$$x_c = x'_c = x''_c = \dots = 0.$$

Ограничиваая решение первыми членами ряда (10) и производя преобразования, из системы уравнений (12) получаем два равенства:

$$\begin{aligned}
 3\beta/2 &= x_v + (1/2!) x''_v (l/2)^2; \\
 \beta/2 &= -x'_v l/2.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Рассмотрим теперь функцию $y(t)$. Ранее было показано, что она может изменяться лишь непрерывно. Условие отсутствия скачка $y(t)$ в точках, где $x(t)$ терпит разрыв, может быть выражено следующими равенствами:

$$\begin{aligned}
 y\left(\frac{l_1}{2} - 0\right) &= y\left(\frac{l_1}{2} + 0\right); \\
 y\left(-\frac{l_1}{2} - 0\right) &= y\left(-\frac{l_1}{2} + 0\right).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя первые члены ряда (11) в (14) и принимая во внимание, что $x_c = x'_c = x''_c = \dots = 0$, после несложных преобразований получим:

$$y_v + (1/2!) y''_v (l/2)^2 = 0. \tag{15}$$

Учитывая (8) и выражая производные старших порядков с помощью исходного дифференциального уравнения (2) через x и x' , получим систему уравнений относительно величины x_v :

$$\frac{3}{2} \beta = x_v - \frac{1}{2!} \left(\frac{l}{2} \right)^2 \frac{\omega_0^2 x_v + x'_v [2x_v x'_v + 2\delta_2 x_v^2 - 2\delta_0]}{x_v^2 - \beta^2};$$

$$\frac{\beta}{2} = -x'_v \frac{l}{2};$$

$$\beta^2 x_v - \frac{x_v^3}{3} + \frac{1}{2!} \left(\frac{l}{2} \right)^2 [\omega_0^2 x_v + (2\delta_2 x_v^2 - 2\delta_0) x'_v] = 0.$$
(16)

Из этой системы нетрудно получить кубическое уравнение относительно x_v :

$$8x_v^3 - 18\beta x_v^2 - 3\beta^2 x_v + 18\beta^3 = 0. \quad (17)$$

Это уравнение имеет три корня:

$$x_{v_1} = 1,68\beta; \quad x_{v_2} = 1,47\beta; \quad x_{v_3} = -0,91\beta.$$

При дальнейшем уточнении решения увеличением числа членов рядов (10) и (11), естественно, будет увеличиваться и степень полинома (17). Однако число действительных корней его не может превышать трех, как это следует из рассмотрения предельного цикла. Выберем в качестве решения корень $x_{v_1} = 1,68\beta = a\beta$ как ближайший к корню уравнения

$$\beta^2 x - x^3/3 = 0.$$

Из этой же системы (16) можно получить выражение и для периода колебаний

$$2l = \frac{3(\delta_2 a^2 \beta^2 - \delta_0) - \sqrt{9(\delta_2 a^2 \beta^2 - \delta_0)^2 - 24\beta^2 \omega_0^2 a^2 (3-a^2)}}{1,5\omega_0^2 a}. \quad (18)$$

Выражая с помощью (2) x''_v через x'_v и x_v и учитывая, что $x'_v = -\beta/l$, находим уравнение для формы генерируемых разрывных колебаний:

$$x = \Psi a\beta - \frac{\beta}{l} \Phi - \frac{1}{2!} \Psi \Phi^2 \frac{\omega_0^2 a - \frac{1}{l} \left[2\delta_2 a^2 \beta^2 - 2\delta_0 - 2a \frac{\beta^2}{l} \right]}{\beta^2 (a^2 - 1)}. \quad (19)$$

Чтение формулы (19) не представляет труда: на П-импульсы (первое слагаемое) накладываются отрезки прямых (второе слагаемое) и отрезки парабол (третье слагаемое). В результате форма колебаний выглядит так, как это показано на рис. 7.

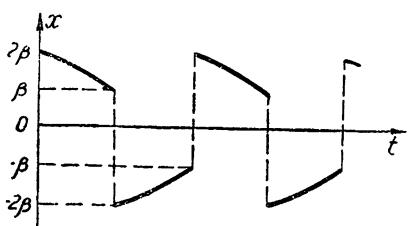


Рис. 7. Форма разрывных колебаний.

Рассмотренный случай интересен тем, что разрывные колебания описываются дифференциальным уравнением не первого, а второго порядка. Иначе говоря, здесь мы встречаемся с примером существования разрывных колебаний в невырожденных системах.

4. РАЗРЫВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ, ОПИСЫВАЕМЫЕ УРАВНЕНИЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

При определенных соотношениях между параметрами схемы наступает вырождение системы, вследствие чего порядок дифференциального уравнения понижается на единицу. Перепишем уравнение (2) в виде:

$$x''(x^2 - \beta^2) + x' \left(x^{2'} + \frac{\omega_0^2}{2\delta_2} \right) + x' \left(2\delta_2 x^2 - 2\delta_0 - \frac{\omega_0^2}{2\delta_2} \right) + \omega_0^2 x = 0. \quad (20)$$

Если выполнить условие вырождения системы

$$\beta^2 = \delta_0/\delta_2 + \omega_0^2/4\delta_2^2 \quad (21)$$

и обозначить через

$$z = x' (x^2 - \beta^2) + (\omega_0^2/2\delta_2) x, \quad (22)$$

то из исходного уравнения (2) получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно переменной z :

$$z' + 2\delta_2 z = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) периодических ненулевых решений не имеет, так как

$$z = z_0 e^{-2\delta_2 t} \quad (e = 2,7182).$$

При $t \rightarrow \infty$ $z \rightarrow 0$ и колебания в системе описываются дифференциальным уравнением первого порядка:

$$x' (x^2 - \beta^2) + (\omega_0^2/2\delta_2) x = 0. \quad (24)$$

Анализ и решение этого уравнения приведены в [3], и поэтому на этом вопросе мы здесь не останавливаемся. Однако необходимо выяснить, что представляет собой условие вырождения (21) для каждой из рассматриваемых схем. Подставляя в (21) значение соответствующих коэффициентов, находим условие вырождения в виде: а) $R_1 = 0$ или $C_1 = 0$ для мультивибратора с обратной положительной связью в цепи катодов ламп; б) $S_0 \rightarrow \infty$ или $r \rightarrow \infty$ для динатронного генератора; в) $Rr = L/C$ для лампового генератора с индуктивной обратной связью, а также для мультивибратора с индуктивностями в цепях анодов. Условием существования разрывных колебаний и в данном случае является наличие разрывного предельного цикла.

5. НЕПРЕРЫВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В силу того, что паразитные параметры схемы в уравнении (2) не учтены, переход от разрывных колебаний к непрерывным происходит при $\beta^2 = 0$, так как при этом разрывный предельный цикл на плоскости исчезает. При этом может существовать предельный цикл, соответствующий непрерывным колебаниям [1].

Если условие возбуждения непрерывных колебаний будет выполнено, то периодическое решение может быть найдено путем разложения его в ряд (7). Естественно, что при этом функция $x(t)$ будет непрерывной функцией времени. Из уравнения (2) можно найти

$$x' = \frac{\text{const} + 2\delta_0 x - \omega_0^2 \int x dt - (2\delta_2/3) x^3}{x^2 - \beta^2}. \quad (25)$$

Так как при $\beta^2 < 0$ знаменатель дроби положителен, а $x(t)$ и $\int x dt$ являются непрерывными величинами, то $x'(t)$ также является непре-

рывной функцией времени. Непрерывность функций $y(t)$ была установлена ранее.

Далее представим $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$ первыми членами линейно-степенного ряда (7):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_c + \Psi x_v + (x'_c + \Psi x'_v) \frac{\Psi\Phi}{1!} + (x''_c + \Psi x''_v) \frac{\Psi^2\Phi^2}{2!} + \dots; \\ x'(t) &= x'_c + \Psi x'_v + (x''_c + \Psi x''_v) \frac{\Psi\Phi}{1!} + (x'''_c + \Psi x'''_v) \frac{\Psi^2\Phi^2}{2!} + \dots; \\ y(t) &= y_c + \Psi y_v + (y'_c + \Psi y'_v) \frac{\Psi\Phi}{1!} + (y''_c + \Psi y''_v) \frac{\Psi^2\Phi^2}{2!} + \dots. \end{aligned} \quad (26)$$

Пользуясь свободой в выборе начала координат, положим

$$x'_c + \Psi x'_v = 0.$$

Это значит, что разложение осуществляется в окрестности точки экстремума функции $x(t)$. В силу непрерывности разлагаемых функций должны выполняться равенства:

$$\begin{aligned} x\left(\frac{l_1}{2} - 0\right) &= x\left(\frac{l_1}{2} + 0\right); \quad x'\left(\frac{l_1}{2} - 0\right) = x'\left(\frac{l_1}{2} + 0\right); \\ y\left(\frac{l_1}{2} - 0\right) &= y\left(\frac{l_1}{2} + 0\right); \\ x\left(-\frac{l_1}{2} - 0\right) &= x\left(-\frac{l_1}{2} + 0\right); \quad x'\left(-\frac{l_1}{2} - 0\right) = x'\left(-\frac{l_1}{2} + 0\right); \\ y\left(-\frac{l_1}{2} - 0\right) &= y\left(-\frac{l_1}{2} + 0\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Выражая с помощью уравнения (2) производные высших порядков через x , x' и подставляя предельные значения рядов (26) слева и справа от точек разрыва в равенства (27), после несложных преобразований получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{(x_c + x_v)[2\delta_2(x_c + x_v)^2 - 2\delta_0]}{[(x_c + x_v)^2 - \beta^2]^2} + \frac{(x_c - x_v)[2\delta_2(x_c - x_v)^2 - 2\delta_0]}{[(x_c - x_v)^2 - \beta^2]^2} &= 0; \\ \frac{(x_c + x_v)[2\delta_2(x_c + x_v)^2 - 2\delta_0]}{[(x_c + x_v)^2 - \beta^2]^2} - \frac{(x_c - x_v)[2\delta_2(x_c - x_v)^2 - 2\delta_0]}{[(x_c - x_v)^2 - \beta^2]^2} &= 0; \\ \frac{x_c + x_v}{\beta^2 - (x_c + x_v)^2} + \frac{x_c - x_v}{\beta^2 - (x_c - x_v)^2} &= 0; \\ \frac{(x_c + x_v)[2\delta_2(x_c + x_v)^2 - 2\delta_0]}{(x_c + x_v)^2 - \beta^2} + \frac{(x_c - x_v)[2\delta_2(x_c - x_v)^2 - 2\delta_0]}{(x_c - x_v)^2 - \beta^2} &= 0; \\ 2x_v + \frac{\omega_0^2 l^2}{8} \left[\frac{x_c + x_v}{\beta^2 - (x_c + x_v)^2} - \frac{x_c - x_v}{\beta^2 - (x_c - x_v)^2} \right] &= 0; \\ 2\beta^2 x_v - \frac{1}{3} [(x_c + x_v)^3 - (x_c - x_v)^3] + \omega_0^2 x_v \frac{l^2}{4} &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Совместное решение уравнений (28) дает целый ряд значений для коэффициентов x_c , x_v и полупериода l :

$$x_c = x_v = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\delta_0}{\delta_2}}; \quad l = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0} \sqrt{\frac{\delta_0}{\delta_2} - \beta^2}; \quad (29)$$

$$l = \frac{2\sqrt{6}}{3\omega_0} \sqrt{\frac{\delta_0}{\delta_2} - 3\beta^2};$$

$$x_c = \frac{\sqrt{3\beta^2}}{2}; \quad x_v = -\frac{\sqrt{3\beta^2}}{2}; \quad l = 4 \sqrt{-\frac{\beta^2}{\omega^2}}; \quad (30)$$

$$x_c = 0; \quad x_v = \pm \sqrt{\frac{\delta_0}{\delta_2}}; \quad l = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0} \sqrt{\frac{\delta_0}{\delta_2} - \beta^2}; \quad (31)$$

$$l = \frac{2\sqrt{6}}{3\omega_0} \sqrt{\frac{\delta_0}{\delta_2} - 3\beta^2}.$$

Критерием отбора коэффициентов в данном случае является непрерывность и вещественность решения для $x(t)$. Этому критерию удовлетворяют лишь коэффициенты

$$x_c = 0; \quad x_v = \pm \sqrt{\delta_0/\delta_2}; \quad l = (2\sqrt{2}/\omega_0) \sqrt{\delta_0/\delta_2 - \beta^2} \quad (32)$$

при $\delta_0 > 0$.

Последнее неравенство является условием возбуждения непрерывных колебаний в системе. Раскрывая значение δ_0 , окончательно получаем:

а) для генератора с индуктивной обратной связью:

$$S_0 > C(R + r)/M; \quad (33)$$

б) для динатронного генератора:

$$S_0 > rC/L; \quad (34)$$

в) для мультивибратора с индуктивностями в цепях анодов:

$$S_0 > 1/R + 1/r; \quad (35)$$

г) для мультивибратора с положительной обратной связью в цепи катодов ламп:

$$S_0 > 1/r + 1/(R + R_1) + 2C_1R_1/rC(R + R_1). \quad (36)$$

Найдем форму колебаний, генерируемых рассматриваемыми системами. Подставляя значение x_v в ряд для $x(t)$, из (26) получаем:

$$x = \Psi \sqrt{\frac{\delta_0}{\delta_2}} \left(1 - \frac{4\Phi^2}{l^2} \right). \quad (37)$$

Согласно выражению (37), форма непрерывных колебаний представляет собой квазикосинусоиду с амплитудой $\sqrt{\delta_0/\delta_2}$ (рис. 8), составленную из обрывков парабол, так что $x(t)$ является функцией, непрерывной вместе с первой производной, с разрывной второй производной и с третьей производной, равной нулю.

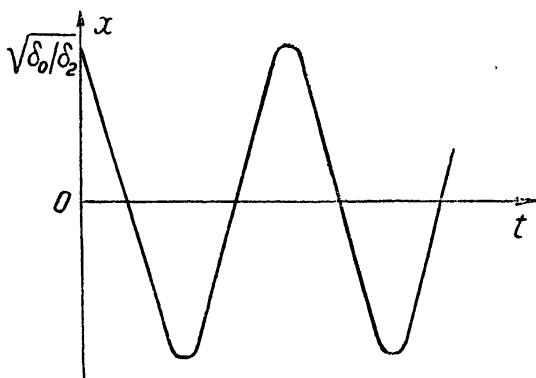


Рис. 8. Форма непрерывных колебаний.

1) Установлено, что свойством универсальности обладают многие известные схемы генераторов, в которых ранее эта особенность не отмечалась. В таких схемах помимо условия самовозбуждения необходимо отыскивать условия существования разрывных колебаний. Этим условием является неравенство

$$\beta^2 > 0.$$

2) Разрывные колебания могут существовать как в невырожденных, так и в вырожденных системах, т. е. описываться уравнениями как второго, так и первого порядка. Условие вырождения системы дается равенством:

$$\beta^2 = \delta_0/\delta_2 + \omega_0^2/4\delta_2^2.$$

3) Непрерывные колебания описываются в первом приближении почти синусоидальной функцией времени, что, как известно, справедливо для слабо нелинейных систем.

4) Применение метода разложения решения нелинейного дифференциального уравнения в линейно-степенной ряд (7) оправдывает себя, так как дает удовлетворительные результаты при описании формы колебаний на всей оси t первыми членами ряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
2. Дж. Маркус, В. Целюф, сб. Схемы промышленной электроники, ИЛ, М., 1959, стр. 265.
3. И. Е. Средний, Труды ОЭИС, 4 (14), 7 (1956).

Одесский электротехнический
институт связи

Поступила в редакцию
21 октября 1960 г.,
после переработки
26 января 1961 г.

ON ONE PROBLEM IN THE THEORY OF AUTOOSCILLATIONS

I. E. Sredny, E. P. Maslov

The nonlinear differential equation which is general for certain systems is investigated. The period, form and amplitude of autooscillations have been established as well as self-excitation and breaking conditions.

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРАНЗИСТОРНЫХ СХЕМ

Н. И. Ашбель и Л. В. Постников

Из диффузионного уравнения, описывающего нестационарные процессы в транзисторе, операторным методом получены линеаризованные уравнения для комплексных амплитуд токов и напряжений коллектора и эмиттера. Эти уравнения удобно использовать для исследования устойчивости транзисторных схем методом D -разбиения. В качестве примера рассмотрена схема блокинг-генератора на транзисторе.

1. ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРАНЗИСТОРА

Нестационарные процессы распределения носителей заряда в полупроводнике описываются системой уравнений в частных производных [1]. Как показано в работе [2], при некоторых идеализациях эта система сводится к трем одномерным диффузионным уравнениям для каждой из областей проводимости и граничным условиям на $p - n$ переходах. Если, кроме того, предположить, что концентрация примесей в эмиттере и в коллекторе значительно превышает концентрацию примесей в базе, то динамику транзистора можно описать одним диффузионным уравнением, определяющим движение неосновных носителей заряда в базе:

$$\tau_1 \frac{\partial y}{\partial t} + y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} y &= u_1, \quad I_0 \frac{\partial y}{\partial x} = -I_1 \quad (\text{при } x = 0); \\ y &= u_2, \quad I_0 \frac{\partial y}{\partial x} = I_2 \quad (\text{при } x = w). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь y — относительное отклонение концентрации дырок от равновесного значения, x — координата, t — время, τ_1 — время жизни дырки, w — безразмерная ширина базы, равная отношению ширины базы w_1 к диффузионной длине $V D_p \tau_1$ (D_p — постоянная диффузии), $I_0 = sqp_0 D_p$ (s — площадь базы, q — заряд электрона, p_0 — величина равновесной концентрации дырок), u_1 и u_2 — значения y соответственно на эмиттерном и коллекторном переходах: $u_1 = e^{qv_1/kT} - 1$, $u_2 = e^{qv_2/kT} - 1$ (k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура), v_1 и v_2 — напряжения на эмиттере и коллекторе относительно базы.

Переходя при нулевых начальных условиях к преобразованным по Лапласу в уравнении (1) и граничных условиях (2) величинам \bar{y} , \bar{u}_i и \bar{I}_i ($i = 1, 2$), получим:

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} - (1 + \tau_1 p_1) \bar{y} = 0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\bar{y} = \bar{u}_1, \quad I_0 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = -\bar{I}_1 & \quad (\text{при } x=0); \\ \bar{y} = \bar{u}_2, \quad I_0 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = \bar{I}_2 & \quad (\text{при } x=w).\end{aligned}\tag{4}$$

Интегрируя уравнение (3) при граничных условиях (4), имеем:

$$\begin{aligned}\bar{I}_1 &= g\bar{u}_1 - \alpha g\bar{u}_2; \\ \bar{I}_2 &= g\bar{u}_2 - \alpha g\bar{u}_1,\end{aligned}\tag{5}$$

где $g = I_0 v_1 \operatorname{ctn} w v_1$, $\alpha = 1/\operatorname{ch} w v_1$, $v_1 = \sqrt{1 + \tau_1 p_1}$. Полагая $v_e = v_{10} + v_e$, $v_k = v_{20} + v_k$, где v_e и v_k достаточно малые отклонения напряжений на эмиттерном и коллекторном переходах от равновесных значений v_{i0} ($i = 1, 2$), и ограничиваясь линейным приближением в разложении по v_e и v_k выражений для u_i , после подстановки их в уравнения (5) получим в изображениях уравнения отклонений токов коллектора и эмиттера от равновесных значений:

$$\begin{aligned}\bar{I}_k &= g_k \bar{v}_k - \alpha g_e \bar{v}_e; \\ \bar{I}_e &= g_e \bar{v}_e - \alpha g_k \bar{v}_k.\end{aligned}\tag{6}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}g_k &= \frac{qI_0}{kT} e^{qv_{20}/kT} v_1 \operatorname{ctn} w v_1 = g_{k0} v_1 \operatorname{ctn} w v_1; \\ g_e &= \frac{qI_0}{kT} e^{qv_{10}/kT} v_1 \operatorname{ctn} w v_1 = g_{e0} v_1 \operatorname{ctn} w v_1.\end{aligned}\tag{7}$$

Нетрудно видеть, что при $p_1 = 0$ уравнения (6) переходят в статические уравнения триода [3].

Уравнения (6) можно использовать для исследования динамики полупроводниковых схем в линейном приближении, которое, однако, осложняется трансцендентным характером зависимости от p_1 , вследствие чего обратный переход к оригиналам сопряжен с необходимостью использования специальных функций. Вместе с тем, исследование устойчивости различных систем с транзисторами может быть проведено регулярными методами, из которых наиболее удобным в данном случае является D -разбиение [4,5].

2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ БЛОКИНГ-ГЕНЕРАТОРА

В качестве примера рассмотрим устойчивость блокинг-генератора на полупроводниковом плоскостном триоде, схема которого приведена на рис. 1.

Уравнения (6) вместе с законами Кирхгофа составляют систему уравнений:

$$\begin{aligned}\bar{I}_k &= g_k \bar{v}_k - \alpha g_e \bar{v}_e; \\ \bar{I}_e &= g_e \bar{v}_e - \alpha g_k \bar{v}_k; \\ L_1 p_1 \bar{I}_e + M p_1 \bar{I}_k + \bar{v}_e &= 0; \\ L_2 p_1 \bar{I}_k + M p_1 \bar{I}_e + \bar{v}_k &= 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Характеристическое уравнение системы (8) имеет вид:

$$(L_1 L_2 - M^2)(1 - \alpha^2) g_k g_e p_1^2 + [L_1 g_e + L_2 g_k - \alpha M(g_k + g_e)] p_1 + 1 = 0. \quad (9)$$

После подстановки значений g_k и g_e из (7) и введения новых параметров

$$\begin{aligned} p &= p_1 \sqrt{g_k g_e L_1 L_2}, \quad \tau = \frac{\tau_1}{\sqrt{g_k g_e L_1 L_2}}, \quad v = \sqrt{1 + p\tau} = v_1, \\ \gamma &= 1 - k^2, \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad h = \sqrt{L_1/L_2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{g_e}{g_k}}, \\ \lambda_1 &= k \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right), \quad \lambda_2 = h \beta + \frac{1}{h \beta} \end{aligned} \quad (10)$$

уравнение (9) примет вид:

$$\gamma v^2 \sinh w v p^2 + (\lambda_2 \cosh w v - \lambda_1) v p + \sinh w v = 0. \quad (11)$$

Заметим, что в случае пренебрежения инерционностью носителей заряда ($|p\tau| \ll 1$) условием самовозбуждения генератора является неравенство

$$\lambda_2 < \alpha_0 \lambda_1,$$

величина $\alpha_0 = 1/\cosh w$ в котором служит коэффициентом усиления по току.

Запишем уравнение (11) в виде:

$$\lambda_1 - \lambda_2 \cosh w v = \left(\frac{1}{p v} + \gamma p v \right) \sinh w v \quad (12)$$

и рассмотрим условие возбуждения автоколебаний при произвольном τ . Положив $p = j\omega$, будем иметь:

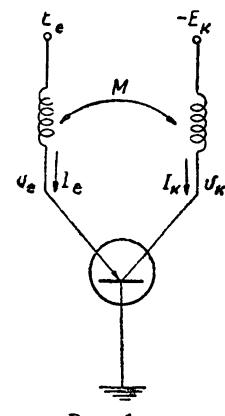


Рис. 1.

$$v = \sqrt{1 + j\omega\tau} = a + jb,$$

где

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2} + 1}{2}}, \quad b = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2} - 1}{2}} \quad (13)$$

(знак плюс берется при $\omega > 0$, знак минус — при $\omega < 0$), и подставим в уравнение (12). Приравнивая коэффициенты при действительных и мнимых частях, получим систему уравнений:

$$\lambda_1 - \lambda_2 \cosh wa \cos wb = -A \cosh wa \sin wb - B \sinh wa \cos wb; \quad (14)$$

$$-\lambda_2 \sinh wa \sin wb = A \sinh wa \cos wb - B \cosh wa \sin wb,$$

где

$$A = -\left[\frac{\tau}{2b(a^2 + b^2)} - \frac{2\gamma}{\tau} a^2 b \right], \quad B = \frac{\tau}{2a(a^2 + b^2)} + \frac{2\gamma}{\tau} a b^2.$$

Определитель системы (14)

$$\Delta = -\sinh wa \sin wb. \quad (15)$$

Обозначим кроме того через Δ_1 и Δ_2 детерминанты

$$\Delta_1 = A \sinh wa \cosh wa - B \sinh wb \cos wb; \quad (16)$$

$$\Delta_2 = A \sinh wa \cos wb - B \cosh wa \sin wb. \quad (17)$$

Из выражений (15)–(17) следует, что особых границ D -разбиение не имеет, если $\tau \neq 2\sqrt{2}(n\pi/w)^3\sqrt{\gamma}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Разрешая систему (14) относительно λ_1 и λ_2 , получим параметрическое уравнение неособой границы

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

или

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \left[\frac{\tau}{2b(1+2b^2)} - \frac{2\gamma}{\tau} b(1+b^2) \right] \frac{\operatorname{ch} w\sqrt{1+b^2}}{\sin wb} + \\ &+ \left[-\frac{\tau}{2(1+2b^2)\sqrt{1+b^2}} + \frac{2\gamma}{\tau} b^2 \sqrt{1+b^2} \right] \frac{\cos wb}{\operatorname{sh} w\sqrt{1+b^2}}; \\ \lambda_2 &= \left[\frac{\tau}{2b(1+2b^2)} - \frac{2\gamma}{\tau} b(1+b^2) \right] \frac{\cos wb}{\sin wb} + \\ &+ \left[\frac{\tau}{2(1+2b^2)\sqrt{1+b^2}} + \frac{2\gamma}{\tau} b^2 \sqrt{1+b^2} \right] \frac{\operatorname{ch} w\sqrt{1+b^2}}{\operatorname{sh} w\sqrt{1+b^2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Параметром уравнений (18) служит величина b , через которую a и w , согласно формулам (13), выражаются так:

$$a = \sqrt{1+b^2}, \quad w = \frac{2\sqrt{1+b^2}b}{\tau}.$$

Условимся штриховать ту сторону границы, которая имеет больший порядок неустойчивости, т. е. при $\Delta > 0$ штрихуем правую сторону, при $\Delta < 0$ – левую.

Как явствует из выражений (18), λ_1 и λ_2 неограниченно нарастают при $b \rightarrow n\pi/w$ ($n = 0, 1, 2, \dots$); уравнения асимптот для $\lambda_1(b)$ и $\lambda_2(b)$ имеют вид:

$$\lambda_2 = a\lambda_1 - \tau w^3/12 \quad (n = 0); \quad (19)$$

$$\lambda_2 \simeq \frac{(-1)^n}{\operatorname{ch} n\pi} \lambda_1 + \frac{4\gamma}{\tau} \left(\frac{n\pi}{w} \right)^3 \operatorname{th} n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (20)$$

(с большой степенью точности при $w \ll 1$). Значениями $b = n\pi/w$ граница D -разбиения делится на отдельные ветви, причем первая ветвь одним концом опирается на асимптоту (19), вторым – на асимптоту (20) при $n = 1$. Вторая ветвь одним концом опирается на асимптоту (20) при $n = 1$, вторым – на асимптоту (20) при $n = 2$ и т. д. D -разбиение будет иметь различный вид в зависимости от параметра τ , бифуркационные значения которого

$$\tau = 2\sqrt{2} \left(\frac{n\pi}{w} \right)^3 \sqrt{\gamma}. \quad (21)$$

При этих значениях τ для $b = n\pi/w$ определители (15)–(17) равны нулю, и, следовательно, D -разбиение имеет особую границу, уравнение которой находится из соотношений (14) и при $w \ll 1$ имеет вид:

$$\lambda_2 \simeq \frac{(-1)^n}{\operatorname{ch} n\pi} \lambda_1 + \sqrt{2\gamma} \operatorname{th} n\pi. \quad (22)$$

Уравнение (22) совпадает с уравнением (20), если в последнем заменить τ по формуле (21). Это совпадение, как нетрудно убедиться, имеет место при любых значениях w .

Координаты точек пересечения неособой границы с особой можно определить из уравнений (18), если подставить в них бифуркационные значения τ и сделать предельный переход при $b \rightarrow n\pi/w$:

$$\lambda_1 = (-1)^n \sqrt{2\gamma} \left(\frac{1}{\sinh n\pi} - \frac{3 \operatorname{ch} n\pi}{n\pi} \right);$$

$$\lambda_2 = \sqrt{2\gamma} \left(\coth n\pi - \frac{3}{n\pi} \right).$$

На рис. 2 качественно показаны границы D -разбиения на плоскости λ_2 , λ_1 для $\tau < 2\sqrt{2\gamma}\pi^3/w^3$ (а), $\tau = 2\sqrt{2\gamma}\pi^3/w^3$ (б) и $\tau > 2\sqrt{2\gamma}\pi^3/w^3$ (в).

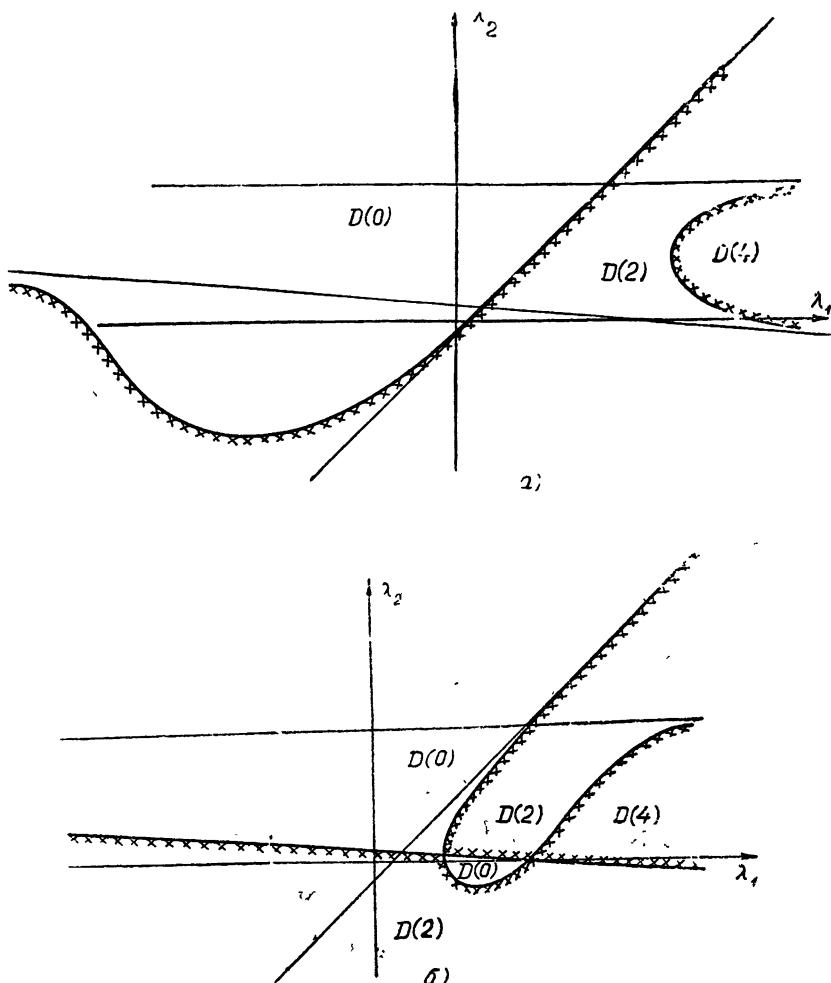


Рис. 2.

Ветви более высокого порядка ($n > 1$) на рисунках не изображены, поскольку они расположены далеко за пределами значений λ_1 и λ_2 , представляющих практический интерес.

Анализ D -разбиения позволяет сделать следующие выводы.

1) Для достаточно малых τ условие возбуждения колебаний мало отличается от такового для генератора со статическими характеристиками, т. е. от случая, когда инерционность носителей заряда не учитывается.

2) С ростом τ условие самовозбуждения блокинг-генератора при положительной обратной связи ухудшается.

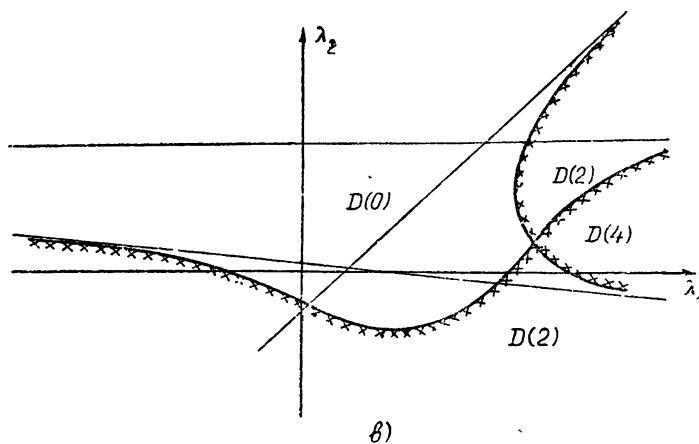


Рис. 2.

3) При заданном τ условие возбуждения автоколебаний улучшается с ростом отношения проводимостей эмиттерного и коллекторного переходов и величины коэффициента усиления по току σ_0 . Оптимальное значение коэффициента обратной связи получается, когда произведение коэффициента трансформации на корень квадратный из отношения проводимости эмиттерного перехода к коллекторному равно единице (см. (10)).

4) Блокинг-генератор может возбудиться и при отрицательной обратной связи; однако для этого τ должно быть порядка 10^4 , что возможно только при малых значениях индуктивностей. Заметим, что для триода П-16 индуктивности имеют порядок 1 микрогенри, вследствие чего в проведенном эксперименте на обычном высокочастотном трансформаторе автоколебаний при отрицательной обратной связи возбудить не удалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Губанов, Теория выпрямляющего действия полупроводников, Гостехиздат, М., 1956.
2. В. Шокли, Теория электронных полупроводников. Приложения к теории транзисторов, ИЛ, М., 1953.
3. Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 766 (1959).
4. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, ЛКВВИА, Л., 1949.
5. Ю. И. Неймарк, Ю. И. Городецкий, Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 967 (1959).

TO THE QUESTION OF THE TRANSISTOR CIRCUITS STABILITY

N. I. Ashbel and L. V. Postnikov

Linearized equations for the complex current and voltage amplitudes of collector and emitter have been obtained from the diffusional equation for the transistor non-stationary processes by the operational method. It is convenient to use these equations for the stability investigation of transistor circuits by means of D-mapping. As an example, the circuit of a transistor blocking oscillator has been examined.

ДИНАМИКА МУЛЬТИВИБРАТОРА НА ПЛОСКОСТНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ТРИОДАХ

В. Г. Аранович, Л. В. Постников

Методы, предложенные в работе [1], применяются к исследованию мультивибратора, собранного на двух плоскостных полупроводниковых триодах. Выяснено поведение фазовых траекторий в подпространствах «быстрых» и «медленных» движений, найдены условия мягкого и жесткого режимов возбуждения мультивибратора. Показано существование, единственность и устойчивость предельного цикла в случае мягкого режима возбуждения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Динамика симметричного мультивибратора на электронных лампах достаточно хорошо описана в литературе [2–5]. Мультивибратор на полупроводниковых триодах ведет себя аналогично мультивибратору на электронных лампах; однако механизм его работы требует дополнительного рассмотрения. В работах [6–8] даются довольно простые и удобные методы исследования автоколебаний мультивибратора, определения периода и амплитуды. Предлагаемая статья несколько дополняет перечисленные выше работы и ставит перед собой две задачи: 1) рассмотреть все возможные движения в схеме, представленной на рис. 1, при различных параметрах; 2) на конкретном примере показать возможность формализации расчета довольно широкого класса схем на полупроводниковых элементах. Конечно, нельзя сказать, что обе поставленные задачи решены полностью, но то, что сделано, по нашему мнению, представляет интерес.

Рассмотрим симметричный мультивибратор, собранный на двух плоскостных полупроводниковых триодах по схеме рис. 1.

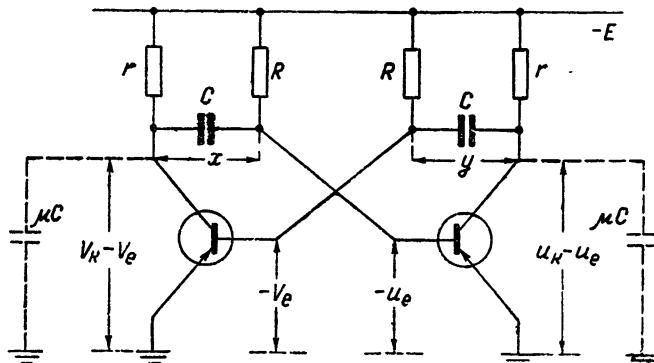


Рис. 1.

В обозначениях рис. 1, принимая, аналогично [9], уравнения триодов в виде:

$$\begin{aligned} J_k^* &= g_m^* v_k^* - \alpha g_n^* v_e^*; & J_e^* &= g_n^* v_e^* - \beta g_m^* v_k^*; \\ (-1)^m v_k^* &\leq 0; & (-1)^n v_e^* &\leq 0; \\ I_k^* &= g_\xi^* u_k^* - \alpha g_v^* u_e^*; & I_e^* &= g_v^* u_e^* - \beta g_\xi^* u_k^*; \\ (-1)^\xi u_k^* &\leq 0; & (-1)^\nu u_e^* &\leq 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

и вводя безразмерные координаты и параметры

$$v_j = v_j^*/E; \quad u_j = u_j^*/E; \quad x = x^*/E; \quad y = y^*/E; \quad t = t^*/rc; \quad g_i = g_i^* r; \quad \lambda = r/R \quad (i = m, \xi, n, \nu; \quad j = k, e), \quad (1.2)$$

получим уравнения движения:

$$\begin{aligned} \dot{x} + g_\xi(1 - \beta) u_k + [\lambda + g_\nu(1 - \alpha)] u_e &= \lambda; \\ \dot{y} + g_m(1 - \beta) v_k + [\lambda + g_n(1 - \alpha)] v_e &= \lambda; \\ \mu \dot{v}_e + g_m(1 - \beta) v_k - (1 + g_\xi) u_k + [\lambda + g_n(1 - \alpha)] v_e + (1 + \alpha g_\nu) u_e &= \lambda + 1; \\ \mu \dot{u}_e - (1 + g_m) v_k + g_\xi(1 - \beta) u_k + (1 + \alpha g_n) v_e + [\lambda + g_\nu(1 - \alpha)] u_e &= \lambda + 1; \\ v_k - v_e + u_e &= x; \\ u_k + v_e - u_e &= y; \\ G_{m\xi n\nu} \{(-1)^m v_k \leq 0, \quad (-1)^\xi u_k \leq 0, \quad (-1)^n v_e \leq 0, \quad (-1)^\nu u_e \leq 0\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Таким образом, задача сводится к изучению поведения траекторий системы (1.3) в четырехмерном фазовом пространстве. При $\mu \ll 1$, аналогично [10], в этом фазовом пространстве можно выделить подпространства „быстрых“ и „медленных“ движений.

2. ПОДПРОСТРАНСТВО «БЫСТРЫХ» ДВИЖЕНИЙ

Для исследования подпространства „быстрых“ движений в (1.3) перейдем к новому времени $\tau = t/\mu$ и рассмотрим „вырожденную“ систему при $\mu \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \dot{v}_e + g_m(1 - \beta) v_k - (1 + g_\xi) u_k + [\lambda + g_n(1 - \alpha)] v_e + (1 + \alpha g_\nu) u_e &= \lambda + 1; \\ \dot{u}_e - (1 + g_m) v_k + g_\xi(1 - \beta) u_k + (1 + \alpha g_n) v_e + [\lambda + g_\nu(1 - \alpha)] u_e &= \lambda + 1; \\ v_k + u_e - v_e &= x_0; \\ u_k - u_e + v_e &= y_0; \quad x_0 = \text{const}; \quad y_0 = \text{const}; \\ G_{m\xi n\nu} \{(-1)^m v_k \leq 0, \quad (-1)^\xi u_k \leq 0, \quad (-1)^n v_e \leq 0, \quad (-1)^\nu u_e \leq 0\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где x_0, y_0 можно считать параметрами, которые могут изменяться в пределах $-\infty$ до $+\infty$.

При фиксированных x_0, y_0 подпространство „быстрых“ движений представляет собой плоскость v_e, u_e в исходном фазовом пространстве. Состояние равновесия системы (2.1) в обозначениях работы [1] записывается в виде:

$$v_e = \frac{B_n^3 x_0 + B_n^4 y_0 + (\lambda + 1)(B_n^1 + B_n^2)}{B},$$

$$u_{e_0} = \frac{B_v^3 x_0 + B_i^4 y_0 + (\lambda + 1)(B_i^1 + B_i^2)}{B}, \quad (2.2)$$

где B есть детерминант матрицы, составленной из коэффициентов левых частей системы уравнений (2.1) при $v_e = u_e = 0$. Это состояние равновесия находится в области $G_{m\xi n}$ исходного фазового пространства, если выполняются неравенства

$$(-1)^i B [B_i^3 x_0 + B_i^4 y_0 + (\lambda + 1)(B_i^1 + B_i^2)] \leq 0 \quad (i = m, \xi, n, v). \quad (2.3)$$

Если теперь непрерывно изменять параметры x_0, y_0 в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, то получим всю совокупность плоскостей „быстрых“ движений v_e, u_e , или, иными словами, полное четырехмерное фазовое пространство v_e, u_e, x, y . При этом совокупность всех состояний равновесия „быстрого“ движения представляет собой некоторую поверхность F в четырехмерном фазовом пространстве v_e, u_e, x, y , которая, очевидно, тоже разбивается на области линейности согласно неравенствам (2.3).

Из неравенства (2.3) видно, что прямая

$$B_i^3 x_0 + B_i^4 y_0 + (\lambda + 1)(B_i^1 + B_i^2) = 0 \quad (i = m, \xi, n, v) \quad (2.4)$$

одновременно принадлежит и поверхности F , и фазовой плоскости x, y ; поэтому разбиение на области линейности $G_{m\xi n}$, поверхности F одновременно является и разбиением фазовой плоскости x, y . Кроме того, если B имеет один и тот же знак для соседних областей, то эти области лежат с разных сторон от прямой (2.4), так как B_i^j не зависит от g_i . В противном случае обе области лежат с одной стороны от прямой (2.4).

Характеристическое уравнение системы (2.1) имеет вид:

$$p^2 + (B_n^1 + B_v^2)p + B = 0, \quad (2.5)$$

где

$$B_n^1 = \lambda + 1 + g_\xi(1 - \beta) + g_m + g_v(1 - \alpha);$$

$$B_v^2 = \lambda + 1 + g_m(1 - \beta) + g_\xi + g_n(1 - \sigma);$$

$$B = (\lambda + 1)^2 + [(2 - \beta)(g_m + g_\xi) + (1 - \alpha)(g_n + g_v)](\lambda + 1) + \\ + (1 - \beta + \alpha\sigma)(g_m g_v + g_\xi g_n) + (1 - \sigma\beta)(g_m g_n + g_\xi g_v) + (1 - 2\alpha)g_n g_v.$$

Состояние равновесия v_{e_0}, u_{e_0} будет неустойчивым (седло) лишь в том случае, если $B < 0$, что выполняется только для области G_{001} , при

$$(1 - 2\alpha)g_1 + 2(2 - \beta)g_0 + \lambda + 1 < 0. \quad (2.6)$$

В остальных областях величина $B > 0$ и состояние равновесия v_{e_0}, u_{e_0} будет устойчивым узлом. Таким образом, кусочно-линейная поверхность F при $B < 0$ относительно координат v_e и u_e имеет область трехзначности. В этом случае область G_{001} поверхности F является средним листом и неустойчива по „быстрым“ движениям. Остальные области этой поверхности локально устойчивы.

Выражение

$$\frac{\partial}{\partial v_e} \left[\frac{dv_e}{dt} \right] + \frac{\partial}{\partial u_e} \left[\frac{du_e}{dt} \right] = - [2(\lambda + 1) + (2 - \beta)(g_m + g_\xi) + (1 - \alpha)(g_n + g_v)]$$

отрицательно для всей поверхности, и, согласно критерию Бендиксона [6], уравнения (2.1) не могут иметь замкнутых фазовых траекторий в плоскостях \dot{v}_e, u_e . Следовательно, поведение траекторий „быстрых“ движений определяется особыми точками системы (2.1) и их сепаратрисами (для области G_{0011}). Поверхность F всюду, кроме области G_{0011} , устойчива в большом.

3. ПОДПРОСТРАНСТВО «МЕДЛЕННЫХ» ДВИЖЕНИЙ

Для исследования подпространства „медленных“ движений рассмотрим „вырожденную“ систему уравнений (1.3) при $\mu \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} g_m(1-\beta)v_k - (1+g_\xi)u_k + [\lambda + g_n(1-\alpha)]v_e + (1+\alpha g_v)u_e &= \lambda + 1; \\ -(1+g_m)v_k + g_\xi(1-\beta)u_k + (1+\alpha g_n)v_e + [\lambda + g_v(1-\alpha)]u_e &= \lambda + 1; \\ v_k - v_e + u_e &= x; \\ u_k + v_e - u_e &= y; \\ g_\xi(1-\beta)u_k + [\lambda + g_v(1-\alpha)]u_e + \dot{x} &= \lambda; \\ g_m(1-\beta)v_k + [\lambda + g_n(1-\alpha)]v_e + \dot{y} &= \lambda; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$G_{m\xi n}, \{(-1)^m v_k \leq 0, \quad (-1)^\xi u_k \leq 0, \quad (-1)^n v_e \leq 0, \quad (-1)^u u_e \leq 0\}. \quad (3.2)$$

В (3.1) первые четыре уравнения вместе с неравенствами (3.2) определяют подпространство „медленных“ движений (поверхность F), а последние два являются уравнениями движения на этой поверхности. Разрешая систему (3.1) относительно \dot{x} и \dot{y} , получим дифференциальные уравнения „медленных“ движений:

$$\begin{aligned} A\dot{x} &= A_x^3x + A_x^4y + \sum_k b_k A_x^k; \\ A\dot{y} &= A_y^3x + A_y^4y + \sum_k b_k A_y^k, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $k = 1, 2, 5, 6$, $b_1 = b_2 = \lambda + 1$, $b_5 = b_6 = \lambda$, A — детерминант, составленный из коэффициентов левых частей уравнений (3.1)*. Разрешая систему (3.1) относительно v_k , u_k , v_e , u_e и подставляя их в неравенства, определяющие области $G_{m\xi n}$, получим разбиение фазовой плоскости x , y на области линейности:

$$(-1)^i A [A_i^3x + A_i^4y + \sum_k b_k A_i^k] \leq 0 \quad (i = m, \xi, n, v). \quad (3.4)$$

Разбиение фазовой плоскости на области линейности. Обозначим границу областей $G_{m\xi n}$ и $G_{m\xi \bar{n}}$.

$$A_n^3x + A_n^4y + \sum_k b_k A_n^k = 0$$

через Γ_n , границу областей $G_{m\xi n}$ и $G_{m\xi \bar{n}}$ через Γ_ξ и т. д. Обозначая угол области (точку пересечения границ Γ_i и Γ_j) через δ_{ij} , выясним, какие углы имеет область $G_{m\xi n}$. Координаты угла δ_{ij} получим, решая

* Нетрудно усмотреть, что $A=B$.

совместно уравнения двух границ Γ_i и Γ_j и пользуясь формулами обращения детерминантов (см. [1])

$$x = \sum_k \frac{A_{ij}^{4k}}{A_{ij}^{34}} b_k; \quad y = - \sum_k \frac{A_{ij}^{3k}}{A_{ij}^{34}} b_k. \quad (3.5)$$

Этот угол будет принадлежать области $G_{m\xi n\nu}$, если выполняются неравенства

$$\frac{(-1)^{l_1}}{A_{ij}^{34}} \sum_k b_k A_{i,lj}^{34k} \leq 0, \quad \frac{(-1)^{l_1}}{A_{ij}^{34}} \sum_k b_k A_{l,ij}^{34k} \leq 0 \quad (3.6)$$

или

$$\delta_{mn} \begin{cases} (-1)^\xi [1 - \lambda + g_\nu(2\alpha - 1)] \leq 0 \\ (-1)^\nu \leq 0 \end{cases}; \quad \delta_{m\nu} \begin{cases} (-1)^\xi [1 - \lambda + g_n(2\alpha - 1)] \geq 0 \\ (-1)^\nu \leq 0 \end{cases};$$

$$\delta_{m\xi} \begin{cases} (-1)^n \{(2\alpha - 1)g_n g_\nu + [\alpha - \lambda(1 - \alpha)](g_n + g_\nu) + 1 - \lambda^2\} \times \\ \times [1 - \lambda + g_\nu(2\alpha - 1)] \leq 0 \\ (-1)^\nu \{(2\alpha - 1)g_n g_\nu + [\alpha - \lambda(1 - \alpha)](g_n + g_\nu) + 1 - \lambda^2\} \times \\ \times [1 - \lambda + g_n(2\alpha - 1)] \leq 0 \end{cases}; \quad (3.7)$$

$$\delta_{\xi\nu} \begin{cases} (-1)^m [1 - \lambda + g_n(2\alpha - 1)] \leq 0 \\ (-1)^n \leq 0 \end{cases}; \quad \delta_{\xi n} \begin{cases} (-1)^m [1 - \lambda + g_\nu(2\alpha - 1)] \geq 0 \\ (-1)^\nu \leq 0 \end{cases};$$

$$\delta_{n\nu} \begin{cases} (-1)^m \geq 0 \\ (-1)^\xi \geq 0 \end{cases}.$$

На рис. 2 приведено разбиение плоскости параметров $H = 1/r g_1$ и $h = 1/R g_1$ на области, соответствующие различной структуре разбиения фазовой плоскости на области линейности; границы последних при $\lambda_0 = g_0/g_1$ имеют вид:

$$\begin{aligned} H^2 - h^2 + [\alpha H - (1 - \alpha)h](\lambda_0 + 1) + (2\alpha - 1)\lambda_0 &= 0; \\ H - h + \lambda_0(2\alpha - 1) &= 0; \\ H - h + (2\alpha - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

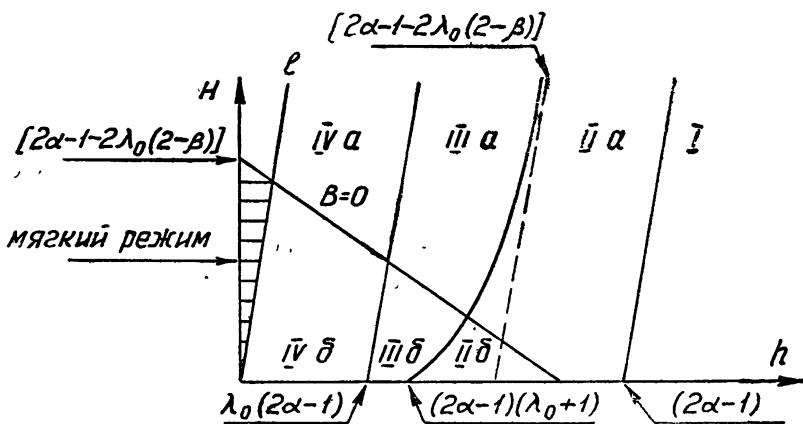


Рис. 2.

Тонкой чертой на рис. 2 проведена граница $B = 0$ (см. (2.6)), ниже которой область G_{0011} будет неустойчива по „быстрым“ движениям. На рис. 3 показаны разбиения фазовой плоскости на области линейности для различных значений параметров.

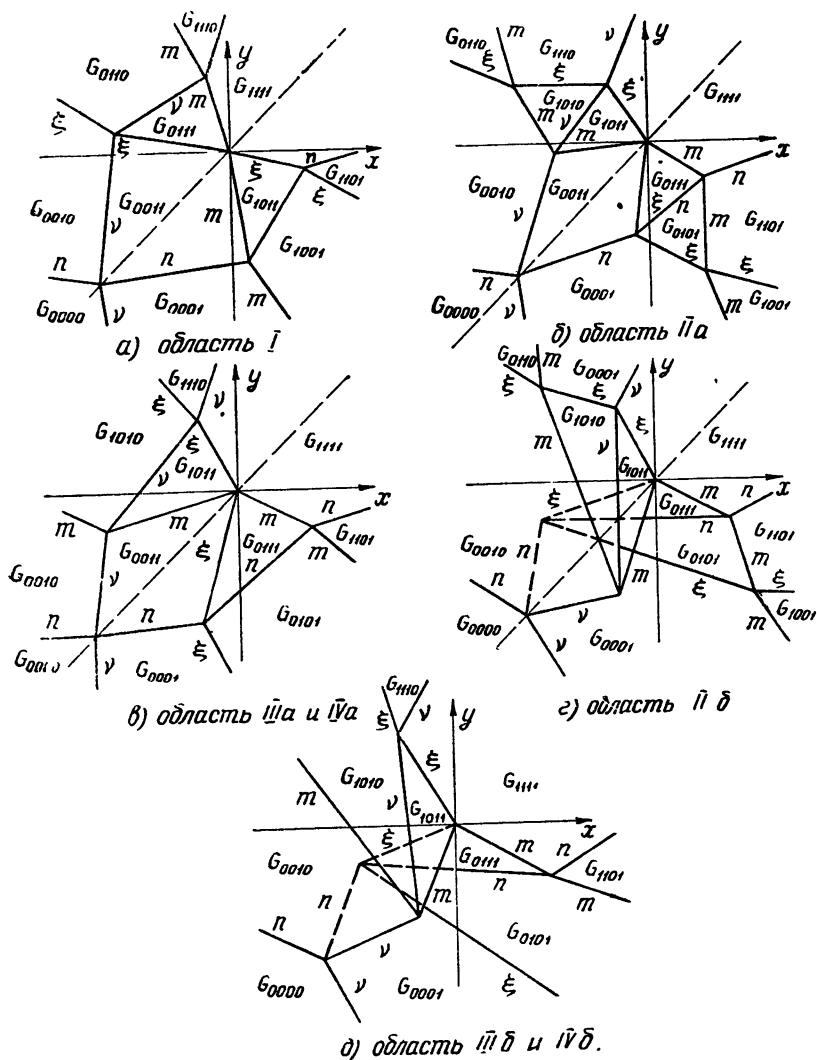


Рис. 3.

Состояния равновесия. Координаты состояния равновесия системы (3.3) даются выражениями

$$x_0 = \sum_k b_k \frac{A_{xy}^{4k}}{A_{xy}^{34}}, \quad y_0 = - \sum_k b_k \frac{A_{xy}^{3k}}{A_{xy}^{34}}. \quad (3.9)$$

Состояние равновесия будет находиться в области $G_{m \in nv}$, если выполняются неравенства

$$(-1)^j A_{xy}^{34} \sum_k b_k A_{xyj}^{34k} \leq 0 \quad (j = m, \xi, n, v) \quad (3.10)$$

или для конкретных значений j

$$\begin{aligned} (-1)^m [\alpha\lambda - (1-\alpha)] &\leq 0, \quad (-1)^\xi [\alpha\lambda - (1-\alpha)] \leq 0, \\ (-1)^n &\leq 0, \quad (-1)^\nu \leq 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Неравенства (3.11) показывают, что состояние равновесия единственно и может находиться или в области G_{1111} при $\lambda > (1-\alpha)/\alpha$ или в области G_{0011} при $\lambda < (1-\alpha)/\alpha$.

Характеристическое уравнение „медленных“ движений находится аналогично (2.5) и имеет вид:

$$Ap^2 - (A_x^3 + A_y^4)p + A_{xy}^{34} = 0. \quad (3.12)$$

Поскольку $A_x^3 + A_y^4 < 0$ и $A_{xy}^{34} > 0$, то при $A > 0$ состояние равновесия устойчиво, а при $A < 0$ оно устойчиво в случае $\lambda > (1-\alpha)/\alpha$ и неустойчиво в случае $\lambda < (1-\alpha)/\alpha$. Конкретизируя уравнения (3.9), нетрудно усмотреть, что состояние равновесия находится на биссектрисе координатного угла. Предполагаемый предельный цикл, который должен охватывать состояние равновесия [3], при $A > 0$ не существует, так как фазовые траектории в этом случае симметричны относительно биссектрисы координатного угла и не пересекают ее. Предельный цикл может существовать только при $A < 0$ и должен пересекать или границы Γ_m области G_{1011} и Γ_ξ области G_{0111} , или границы Γ_n области G_{0010} и Γ_ν области G_{0001} , т. е. иметь участки „быстрых“ движений.

Исследование расположения точек контакта. Координаты точки контакта \tilde{x}_i , \tilde{y}_i фазовой траектории с границей Γ_i даются совместным решением уравнения этой границы и условия, что скалярное произведение вектора фазовой скорости на вектор, перпендикулярный к границе, равно нулю:

$$(A_x^3 A_i^3 + A_y^4 A_i^4) \tilde{x}_i + (A_x^4 A_i^3 + A_y^3 A_i^4) \tilde{y}_i + \sum_k b_k (A_i^3 A_x^k + A_i^4 A_y^k) = 0.$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i &= \sum_k \frac{A_i^3 A_{ix}^{4k} + A_i^4 A_{iy}^{4k}}{A_i^3 A_{ix}^{34} + A_i^4 A_{iy}^{34}} b_k; \\ \tilde{y}_i &= - \sum_k \frac{A_i^3 A_{ix}^{3k} + A_i^4 A_{iy}^{3k}}{A_i^3 A_{ix}^{34} + A_i^4 A_{iy}^{34}} b_k. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Точки контакта находятся на границе Γ_j области $G_{m\xi nv}$, если выполняются неравенства

$$\begin{aligned} (-1)^j \sum_k \frac{A_i^3 A_{jix}^{34k} + A_i^4 A_{jiy}^{34k}}{A_i^3 A_{ix}^{34} + A_i^4 A_{iy}^{34}} b_k &\leq 0 \\ (i; j = m, \xi, n, \nu). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из условий (3.13) и (3.14) следует, что точки контакта на границе, разделяющей смежные области, совпадают и в каждой области на каждой границе может быть не более одной точки контакта. Для исследования поведения фазовых траекторий вблизи точек контакта найдем условие, при котором траектории входят в область $G_{m\xi nv}$. Компоненты внутренней нормали к границе Γ_i этой области имеют вид:

$$--(-1)^i A_i^3 / A, \quad --(-1)^i A_i^4 / A.$$

компоненты вектора фазовой скорости

$$\frac{1}{A} \left\{ A_x^3 x + A_x^4 y + \sum_k b_k A_x^k \right\}, \quad \frac{1}{A} \left\{ A_y^3 x + A_y^4 y + \sum_k b_k A_y^k \right\}.$$

Траектория будет входить в область G_{mkn} , если скалярное произведение этих векторов больше нуля:

$$-(-1)^i \left\{ (A_x^3 A_i^3 + A_y^3 A_i^4) x + (A_x^4 A_i^3 + A_y^4 A_i^4) y + \sum_k b_k (A_x^k A_i^3 + A_y^k A_i^4) \right\} > 0. \quad (3.15)$$

Подставляя в неравенство (3.15) координаты угла δ_{ij} , определяемые выражением (3.5), получим:

$$(-1)^i \frac{A}{A_{ij}^{34}} \sum_k (A_i^3 A_{ijx}^{34k} + A_i^4 A_{ijy}^{34k}) b_k \leq 0. \quad (3.16)$$

Если координаты точек пересечения границы Γ_i с границами Γ_{j_1} и Γ_{j_2} удовлетворяют этому неравенству, то на всем участке границы траектории входят в область. Если эти координаты не удовлетворяют неравенству (3.16), то фазовые траектории выходят из области. Если неравенству (3.16) удовлетворяет только одна из них, то на границе Γ_i есть точка контакта и траектории входят в область на отрезке Γ_i между этими точками и выходят с другой стороны точки контакта. Бифуркационное значение λ_i^* , при котором пропадает точка контакта на границе Γ_i области G_{mkn} , находится как наименьший действительный положительный корень равенства (3.16) нулю.

Пользуясь неравенством (3.16), качественно построим ход фазовых траекторий на плоскости x, y для наиболее интересного здесь случая $\lambda < 1$, при котором мультивибратор возбуждается (рис. 4). Разбиение

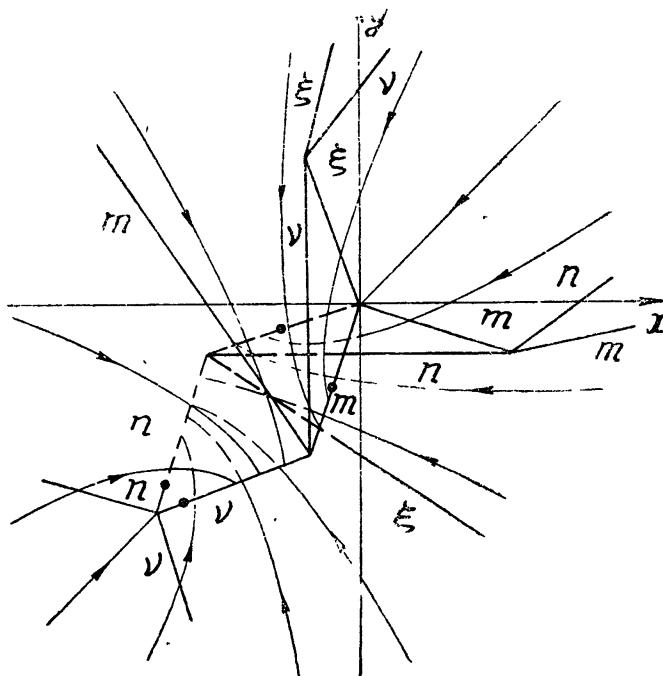


Рис. 4а.

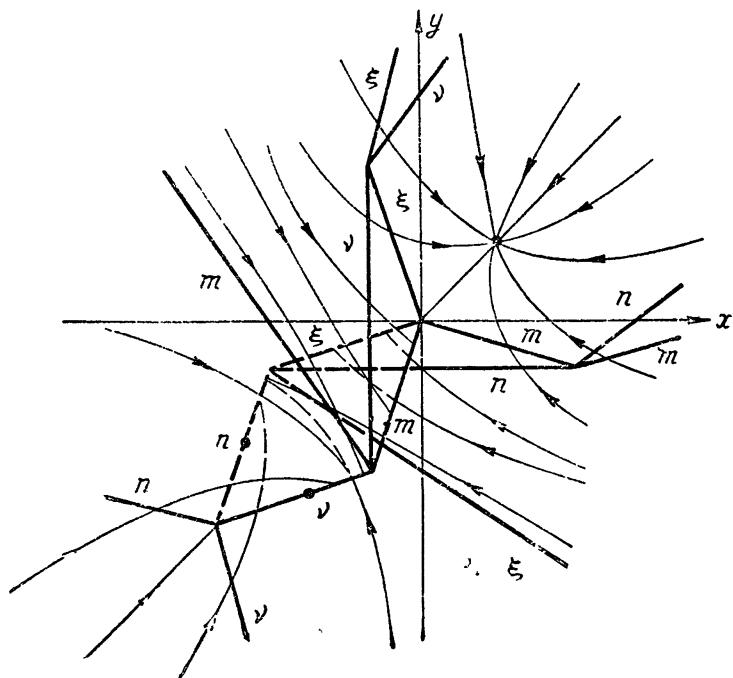


Рис. 46.

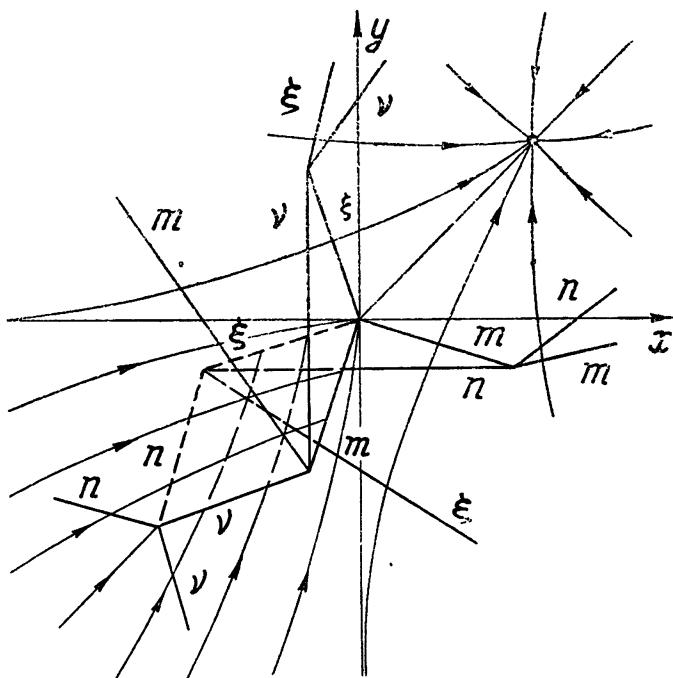


Рис. 4в

фазовой плоскости на области линейности в этом случае аналогично разбиению, построенному на рис. 3д. На рис. 4а показано поведение фазовых траекторий для $\lambda < \lambda_m^* = \lambda_\xi^*$, на рис. 4б—для $\lambda_\xi^* = \lambda_m^* < \lambda < \lambda_n^* = \lambda_\nu^*$. В первом случае существует неустойчивое состояние равновесия (седло), расположенное на биссектрисе третьего квадранта в области G_{0011} , и единственный устойчивый предельный цикл, пересекающий границы Γ_n (в G_{0001}) и Γ_ν (в G_{0010}); при этом имеет место мягкий режим возбуждения автоколебаний. Во втором случае существует устойчивое состояние равновесия (узел), расположенное в области G_{1111} , и два предельных цикла, первый из которых пересекает границы Γ_m (в G_{1011}) и Γ_ξ (в G_{0111}) и является неустойчивым, второй — пересекает границы Γ_ν (в G_{0010}) и Γ_n (в G_{0001}) и является устойчивым. В этом случае имеем жесткий режим возбуждения автоколебаний. Граница жесткого режима возбуждения мультивибратора определяется из неравенства (3.16), написанного для границы Γ_m области G_{0010} и угла δ_m , или для границы Γ_ξ области G_{0001} и угла $\delta_{\xi n}$.

Следует, конечно, иметь в виду, что фазовые траектории „медленных“ движений при пересечении указанных выше границ поверхности F в исходном фазовом пространстве системы переходят в фазовые траектории „быстрых“ движений, которые направлены нормально к плоскости x, y и в проекциях на эту плоскость на рис. 4 не показаны. На рис. 4в показан фазовый портрет для $\lambda_n^* = \lambda_\nu^* < \lambda \ll 1$. В этом случае все фазовые траектории стремятся к устойчивому состоянию равновесия, расположенному в области G_{1111} , и автоколебания отсутствуют. На рис. 5а и 5б качественно показано установление разрывных автоколебаний мультивибратора соответственно при мягком и жестком режимах возбуждения. Здесь AB и B_1B — устойчивые предельные циклы, $B_1\Gamma_1$ — неустойчивый предельный цикл. На рис. 6 показано разбиение плоскости параметров r, R на области, соответствующие различным режимам работы рассматриваемой схемы.

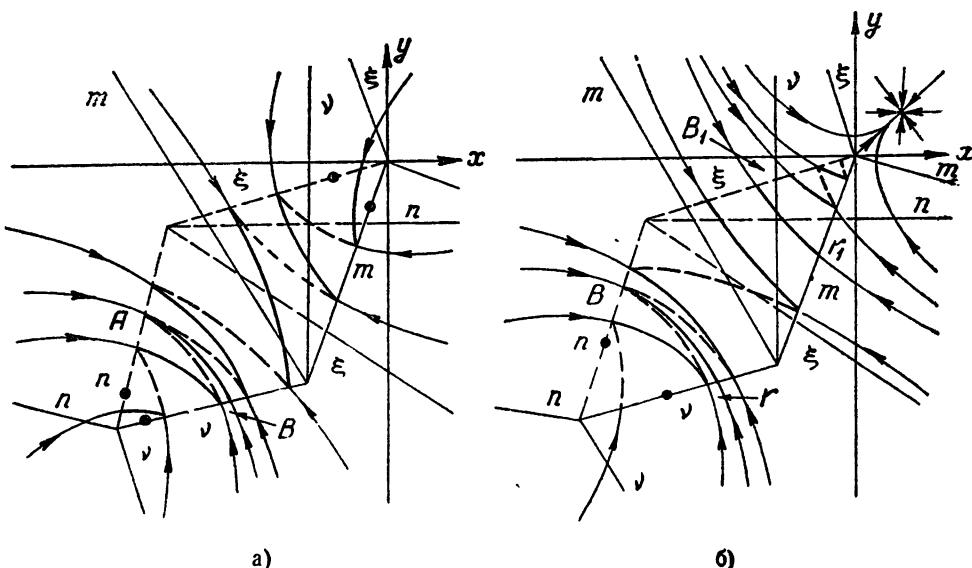


Рис. 5.

Исследование точечных преобразований. Поскольку „медленное“ движение существует в тех областях поверхности F , где $A > 0$, перейдем в уравнениях (3.3) для каждой области к новому масштабу времени

$$t_n = t_{ct}/A \quad (3.17)$$

и перенесем начало координат в точку, отвечающую состоянию равновесия той области, для которой пишутся уравнения. Тогда система (3.2) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_x^3 x + A_x^4 y; \\ \dot{y} &= A_y^3 x + A_y^4 y; \\ G_{m \in n} \{(-1)^j A(A_j^3 x + A_j^4 y + A \gamma_j) &\leq 0\}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где

$$\gamma_j = \frac{\sum_k b_k A_{xyj}^{34k}}{A_{xy}^{34}}.$$

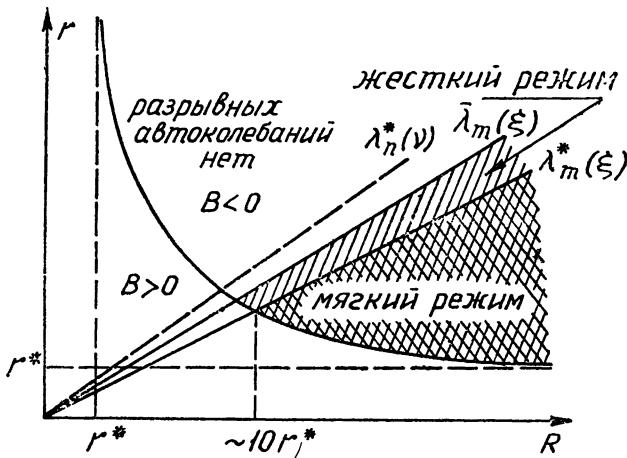


Рис. 6.

Выразим уравнение границы Γ_j в параметрическом виде:

$$x_j = \tilde{x}_j + A_j^4 s_j, \quad y_j = \tilde{y}_j - A_j^3 s_j \quad (3.19)$$

(\tilde{x}_j , \tilde{y}_j — координаты точек контакта, s_j — параметр) и перейдем к нормальным координатам с помощью преобразования

$$z = a_1 x + b_1 y, \quad \xi = a_2 x + b_2 y, \quad (3.20)$$

в котором величины a_1 , b_1 , a_2 , b_2 для каждой области выберем так, чтобы уравнения (3.18) для нее имели вид:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \lambda_1 z; \\ \dot{\xi} &= \lambda_2 \xi; \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$G_{m \in n} \{(-1)^i (\eta_{ij} + A_{ij}^{34} s_j) \leq 0\}.$$

Здесь

$$\eta_{ij} = \sum_k b_k \frac{A_j^3 A_{ijx}^{34k} + A_j^4 A_{ify}^{34k}}{A_i^3 A_{ix}^{34} + A_i^4 A_{iy}^{34}},$$

а λ_1 , λ_2 — корни характеристического уравнения (3.12), в котором $p = \lambda/A$.

Переходя к координатам z и ξ в уравнениях границ (3.19), получим:

$$z_j = \tilde{z}_j - C_j^1 s_j, \quad (3.22)$$

$$\zeta_j = \tilde{\zeta}_j - C_j^2 s_j,$$

где \tilde{z}_j , $\tilde{\zeta}_j$ — координаты точек контакта, а

$$C_j^1 = -a_1 A_j^4 + b_1 A_j^3, \quad C_j^2 = -a_2 A_j^4 + b_2 A_j^3.$$

Выделим на границе Γ , области G_{0010} полупрямую без контакта (рис. 7а) S_v :

$$z_v = \tilde{z}_v - C_v^1 s_v, \quad \zeta_v = \tilde{\zeta}_v - C_v^2 s_v, \quad s_v > 0 \quad (3.23)$$

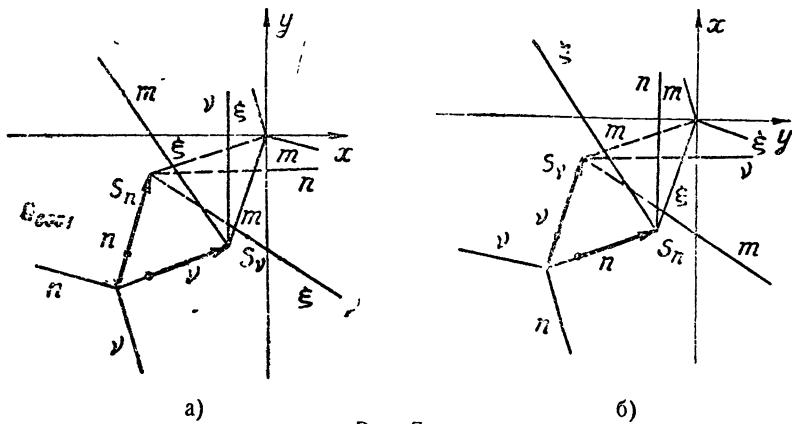


Рис. 7.

и симметричную ей* полупрямую S_n :

$$z_n = \tilde{z}_n - C_n^2 (s_n + 2Q), \quad \zeta_n = \tilde{\zeta}_n - C_n^1 (s_n + 2Q), \quad s_n + 2Q > 0, \quad (3.24)$$

где

$$Q = \frac{(\tilde{z}_n - \tilde{z}_v) + (\tilde{\zeta}_v - \tilde{\zeta}_n)}{2(C_v^1 - C_n^2)} \quad (3.25)$$

—расстояние от точки контакта \tilde{z}_n , $\tilde{\zeta}_n$ до угла δ_{nv} , и рассмотрим точечное преобразование Π_{nv} полупрямой S_n в положительную полупрямую S_v :

$$s_v = \Pi_{nv}(s_n),$$

осуществляемое траекториями системы в области G_{0010} . В силу симметрии фазового пространства вместо обратного преобразования S_v в S_n можно использовать биссектрису координатного угла. Интегрируя уравнения (3.21) и принимая во внимание выражения (3.23) и (3.24) для S_v и S_n , получим преобразование Π_{nv} в виде:

* Вследствие симметрии разбиения фазовой плоскости x , y на области линейности $G_{m\xi nv}$ уравнение полупрямой S_n получается из уравнения полупрямой S_v , заменив x на y и y на x (или C_n^1 на C_v^2 , C_n^2 на C_v^1 , γ_n на γ_v) и перенесением точки контакта \tilde{z}_n , $\tilde{\zeta}_n$ из области G_{0001} в область G_{0010} , что эквивалентно добавлению к S_n двоенного значения Q .

$$s_v = - \frac{\left(C_v^2 \tilde{\zeta}_n - C_v^1 \tilde{z}_n \right) e^{\sigma\tau} - C_v^2 \tilde{\zeta}_v e^{\omega\tau} + C_v^1 \tilde{z}_v e^{-\omega\tau}}{(C_v^2)^2 e^{\omega\tau} - (C_v^1)^2 e^{-\omega\tau}}; \quad (3.26)$$

$$s_n = \frac{\left(C_v^1 \tilde{\zeta}_v - C_v^2 \tilde{z}_v \right) e^{-\sigma\tau} + C_v^2 \tilde{z}_n e^{\omega\tau} - C_v^1 \tilde{\zeta}_n e^{-\omega\tau}}{(C_v^2)^2 e^{\omega\tau} - (C_v^1)^2 e^{-\omega\tau}},$$

где $\sigma = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, $\omega = (\lambda_1 - \lambda_2)/2$. Подставляя в (3.26) выражения для точек контакта

$$\tilde{z}_v = \lambda_2 A_y^3 \gamma_v A / C_v^2, \quad \tilde{\zeta}_v = \lambda_1 A_y^3 \gamma_v A / C_v^1, \quad \tilde{z}_n = \lambda_2 A_y^3 \gamma_n A / C_v^1, \quad (3.27)$$

$$\tilde{\zeta}_n = \lambda_1 A_y^3 \gamma_n A / C_v^2$$

и вводя новые параметры

$$\frac{\sigma}{\omega} = z, \quad \Delta = -\ln \frac{C_v^1}{C_v^2}, \quad \tau_n = \omega \tau_{ct} + \Delta, \quad s_n = \frac{C_v^1 C_v^2}{\omega A_y^3 \gamma_v A} s_{ct}, \quad (3.28)$$

получим преобразование Π_{nv} в виде:

$$s_v = - \frac{e^{x(\tau-\Delta)} - \operatorname{ch} \tau - z \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{sh} \tau};$$

$$s_n = \frac{e^{-x(\tau-\Delta)} - \operatorname{ch} \tau - z \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{sh} \tau}, \quad (3.29)$$

где s_v и s_n должны удовлетворять неравенствам

$$(-1)^i \left\{ \eta_{ij} + A_{ij}^{34} \frac{\omega A_y^3 \gamma_i A}{C_v^1 C_v^2} s_j \right\} \leq 0 \quad (3.30)$$

$$(i = m, \xi; \quad j = n, v).$$

Заметим, что преобразование Π_{nv} для области G_{0001} (рис. 7б) может быть получено из Π_{nv} заменой S_v на $-S_n$, Δ на $-\Delta$, z на $-z$, τ на $-\tau$, т. е.

$$s_n = - \frac{e^{x(\tau-\Delta)} - \operatorname{ch} \tau - z \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{sh} \tau}; \quad (3.31)$$

$$s_v = \frac{e^{-x(\tau-\Delta)} - \operatorname{ch} \tau - z \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{sh} \tau},$$

где s_v и s_n также должны удовлетворять неравенствам (3.30).

Для удобства исследования полученных преобразований введем вспомогательную функцию [6]

$$\varphi(\tau, z, \Delta) = 1 - e^{x(\tau-\Delta)} (\operatorname{ch} \tau - z \operatorname{sh} \tau), \quad (3.32)$$

график которой для фиксированного x представлен на рис. 8. Производная

$$\frac{ds_v}{ds_n} = - \frac{\varphi(\tau, z, \Delta)}{\varphi(\tau, -z, \Delta)} > 0$$

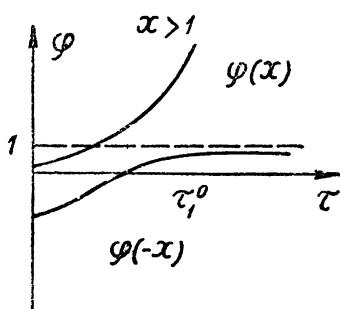


Рис. 8

при $0 < \tau < \tau_1^0$ и изменяется от $e^{-x\Delta} < 1$ при $\tau = 0$ до $+\infty$ при $\tau = \tau_1^0$, имея точку перегиба при $\tau = \tau^1$, так как

$$\frac{d^2 s_v}{ds_n^2} = -\frac{2(x^2 - 1) \operatorname{sh}^3 \tau [\operatorname{sh} x(\tau - \Delta) - x \operatorname{sh} \tau]}{[\varphi(\tau, -x, \Delta)]^3}$$

меньше нуля при $0 < \tau < \tau^1$ и больше нуля при $\tau^1 < \tau < \tau_1^0$. Здесь τ_1^0 определяется из уравнения

$$1 - e^{-x(\tau - \Delta)} (\operatorname{ch} \tau + x \operatorname{sh} \tau) = 0,$$

а τ^1 определяется из уравнения

$$\operatorname{sh} x(\tau - \Delta) - x \operatorname{sh} \tau = 0.$$

При изменении τ от 0 до τ_1^0 s_v изменяется от $+\infty$ до 0, а s_n изменяется от $+\infty$ до $-x$. Кривая $s_v = \Pi_{vv}(s_n)$ (3.29) имеет асимптоту при $\tau \rightarrow 0$:

$$s_v = e^{-x\Delta} s_n - 2x. \quad (3.33)$$

На рис. 9 приведены графики функций соответствия преобразований Π_{vv} и Π_{vn} . Точечное преобразование $\Pi = \Pi_{vv} \cdot \Pi_{vn}$ имеет единственную устойчивую инвариантную точку \tilde{s}_n , \tilde{s}_v . Пренебрегая длительностью „быстрых“ движений и принимая во внимание (1.2), (3.17) и (3.28), получим выражение для периода разрывных автоколебаний

$$T = 2rcA \frac{\bar{\tau} - \Delta}{\omega},$$

где $\bar{\tau}$ — значение τ в неподвижной точке, определяемое уравнением

$$\operatorname{ch} x(\bar{\tau} - \Delta) - \operatorname{ch} \bar{\tau} - x \operatorname{sh} \bar{\tau} = 0.$$

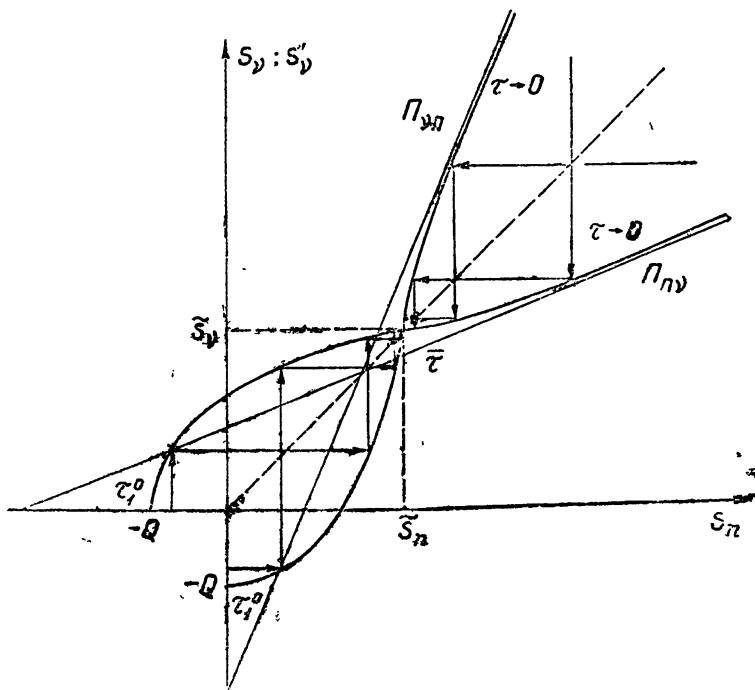


Рис. 9.

Для отыскания неустойчивого предельного цикла, а также более строгих условий его существования по сравнению с теми, которые были найдены из анализа расположения точек контакта, необходимо рассмотреть преобразование границ Γ_ξ в Γ_y , Γ_z в Γ_m для областей G_{1010} и G_{1011} и Γ_m в Γ_n , Γ_n в Γ_ξ для областей G_{0101} и G_{0111} . Однако это преобразование сложнее рассмотренного выше и в данной работе не исследовалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ашбель и Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 319 (1961).
2. Н. А. Железцов и Л. В. Родыгин, ДАН СССР, 81, 391 (1951).
3. Н. А. Железцов, ЖТФ, 20, 778 (1950).
4. Н. А. Железцов и М. И. Фейгин, Радиотехника и электроника, 2, 751 (1957).
5. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
6. С. П. Маслов, К. С. Ржевкин и К. Я. Сенаторов, Радиотехника и электроника, 9, 1110 (1957).
7. В. В. Червецов, Диссертация, Львов, 1959.
8. В. В. Червецов, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 3, 294 (1958).
9. Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 766 (1959).
10. Н. А. Железцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 67 (1958).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 марта 1961 г.

DINAMIC PROPERTIES OF TRANSISTORS MULTIVIBRATOR

V. G. Aranovitch, L. V. Postnikov

Methods proposed in [1] are used for the investigation of plate transistors multivibrator. The behaviour of phase trajectories was cleared up in subspaces of "fast" and "slow" motions. The conditions were found of the multivibrator "hard" and "soft" self-excitation. The existence, singularity and stability of a limit cycle were shown in the case of "soft" self-excitation.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

ФОРМУЛЫ ФРЕНЕЛЯ НА ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров

1. В ряде работ [1,2] рассматривалось взаимодействие электромагнитных волн с движущимися объектами. Но во всех этих работах исследовалось, в основном, влияние движения границы раздела на свойства отраженной волны. Однако определенный интерес представляет рассмотрение взаимодействия электромагнитной волны с учетом также и преломленной волны, которая отбирает часть энергии. Этот интерес обусловлен рядом предложений [1,3] по использованию отражения электромагнитных волн от границ, движущихся с релятивистскими скоростями, для генерации микрорадиоволн. Практическое значение рассматриваемого вопроса связано также с возможностью применения его для экспериментального исследования (зондирования) движущихся объектов (сгустков плазмы, пучков релятивистских частиц и т. п.).

Ниже получены формулы Френеля для случая, когда граница раздела и среды по обе стороны от нее движутся с одинаковой скоростью u , нормальной к плоскости границы. В частном случае, когда одной из сред является вакуум, можно, очевидно, одну из сред (вакуум) считать неподвижной, а вторую — движущейся со скоростью u .

2. Пусть на границе раздела двух сред, движущихся со скоростью u , падает слева плоская монохроматическая волна. Обозначим волновой вектор и частоту падающей волны через k_0 и ω_0 , те же величины для отраженной и преломленной волн — через k_1 , ω_1 и k_2 , ω_2 соответственно. Из условия сопряжения волн на границе раздела получим:

$$\begin{aligned} k_{0r} &= k_{1r} = k_{2r} = I_1; \\ k_1 u - \omega_1 &= k_2 u - \omega_2 = k_3 u - \omega_3 = I_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где индекс r означает компоненту в плоскости границы. Связь между k и ω в каждой волне определяется дисперсионным уравнением [4]

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 + \frac{x}{c^2} \frac{(k\mathbf{u} - \omega)^2}{1 - u^2/c^2} = 0, \quad (2)$$

где для среды слева от границы $x = x_1 = \epsilon_1 \mu_1 - 1$, а для среды справа $x = x_2 = \epsilon_2 \mu_2 - 1$. Аргументом ϵ и μ является частота, равная $(\omega - k\mathbf{u})/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ (условие Доплера).

Зная k_0 и ω_0 , можно с помощью (1) и (2) определить частоту и волновой вектор для отраженной (ω_1 и k_1) и для преломленной (ω_2 и k_2) волн. Эти соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} k_{1r} &= k_{2r} = I_1; \\ k_{iz} &= -\frac{I_2}{c} \frac{\beta \mp \sqrt{1 + x_i - (cI_1/I_2)^2(1 - \beta^2)}}{1 - \beta^2}; \\ \frac{1}{c} \omega_i &= -\frac{I_2}{c} \frac{1 \mp \beta \sqrt{1 + x_i - (cI_1/I_2)^2(1 - \beta^2)}}{1 - \beta^2}; \\ \operatorname{tg} \alpha_i &= \frac{k_{ir}}{k_{iz}} = -\frac{cI_1}{I_2} \frac{1 - \beta^2}{\beta \mp \sqrt{1 + x_i - (cI_1/I_2)^2(1 - \beta^2)}} \\ &\quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (3)$$

Два знака перед корнем в (3) соответствуют в первой среде падающей и отраженной волне. Во второй среде из двух решений выбирается то, которое соответствует отводу энергии от границы,

3. Для определения амплитуды отраженной и преломленной волн используем граничные условия электродинамики движущихся сред [6]:

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] &= \frac{u}{c} (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1); & B_{n1} &= B_{n2}; \\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] &= -\frac{u}{c} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1); & D_{n1} &= D_{n2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где \mathbf{n} — нормаль к границе раздела. Связь \mathbf{H} и \mathbf{E} с \mathbf{B} и \mathbf{D} дается материальными уравнениями Мinkовского:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} + \frac{1}{c} [\mathbf{uH}] &= \epsilon \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{uB}] \right); \\ \mathbf{B} + \frac{1}{c} [\mathbf{Eu}] &= \mu \left(\mathbf{H} + \frac{1}{c} [\mathbf{Du}] \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Используя граничные условия (4), материальные уравнения (5) и уравнения Мак-Свella

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \partial \mathbf{D} / \partial t; & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \partial \mathbf{B} / \partial t; & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

получим выражение для амплитуд отраженной и преломленной волн: а) свет поляризован перпендикулярно плоскости падения:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\omega_1 \mu_2 k_{0z} - \mu_1 k_{2z} + (\mu_2 - \mu_1) \beta I_2 / c (1 - \beta^2)}{\omega_0 (\mu_1 k_{2z} - \mu_2 k_{1z}) - (\mu_2 - \mu_1) \beta I_2 / c (1 - \beta^2)} E_0; \\ E_2 &= \frac{\omega_2}{\omega_0 (\mu_1 k_{2z} - \mu_2 k_{1z}) - (\mu_2 - \mu_1) \beta I_2 / c (1 - \beta^2)} E_0; \end{aligned} \quad (7)$$

б) свет поляризован в плоскости падения:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\omega_1 (\varepsilon_2 k_{0z} - \varepsilon_1 k_{2z}) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \beta I_2 / c (1 - \beta^2)}{\omega_0 (\varepsilon_1 k_{2z} - \varepsilon_2 k_{1z}) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \beta I_2 / c (1 - \beta^2)} H_0; \\ H_2 &= \frac{\omega_2}{\omega_0 (\varepsilon_1 k_{2z} - \varepsilon_2 k_{1z}) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \beta I_2 / c (1 - \beta^2)} H_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Эти же формулы могут быть получены с помощью преобразований Лоренца из формул Френеля для покоящейся границы раздела. При этом необходимо учесть, что четырехмерный волновой вектор k_i электромагнитной волны в среде ($k_i = \mathbf{k}, \omega/c$) не является нулевым вектором (в отличие от вакуума).

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Файнберг, Диссертация, ФИАН, 1960. Там же, см. ссылки на более ранние работы автора и сотрудников.
2. M. A. Lampert, Phys. Rev., 102, 299 (1956).
3. K. Landeskog, Phys. Rev., 83, 852 (1952).
4. Б. М. Болотовский и А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 37, 1346 (1959).
5. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957.