сеяние на угол θ). Выражение (4) справедливо для достаточно большого объема V, такого, что можно пренебречь усреднением спектра турбулентности по объему $8\pi^3/V$ [3].

Мощность, рассеиваемая в единичный телесный угол в направлении n единицей объема, равна

$$P(n) = \frac{2\pi\rho_0 k^4}{c} \cos^2\theta\, \overline{(ne^L)^2}\, E^L(K). \tag{5}$$

Поперечник рассеяния имеет вид

$$d\sigma^L(\theta) = \frac{2\pi k^4}{c^2} E^L\,[2k\sin(\theta/2)]\cos^2\theta\, \overline{(ne^L)^2}.$$

При выводе формулы (4) было использовано выражение для спектрального тензора энергии в сжимаемом турбулентном потоке [5]:

$$\Phi_{ik}(q) = \{E^L(q) - E^T(q)\}\frac{q_i q_k}{q^2} + \delta_{ik}E^T(q), \tag{6}$$

где смысл функций $E^L(q)$ и $E^T(q)$ определяется соотношениями

$$\frac{1}{2}\overline{(u^L)^2} = \frac{1}{2}\int E^L(q)\,dq, \qquad \frac{1}{2}\overline{(u^T)^2} = \int E^T(q)\,dq. \tag{7}$$

Имея в виду, что

$$\overline{(ne^L)^2} = \sin^2(\theta/2),$$

получим*:

$$d\sigma^L(\theta) = \frac{2\pi k^4}{c^2} E^L\,[2k\sin(\theta/2)]\cos^2\theta\sin^2(\theta/2) \tag{8}$$

Полученный результат следует учитывать в тех случаях, когда существенна сжимаемость газа. В атмосферной турбулентности при $u/c \ll 1$ сжимаемостью газа можно пренебречь. Энергия вихревой части турбулентности значительно превосходит энергию потенциальной части, и учет (8) теряет смысл**. Однако возможны случаи, когда энергия потенциальной части турбулентности сравнима или превосходит энергию вихревой компоненты. При этом существенным является тот факт, что вихревая и потенциальная части турбулентности практически развязаны и величины $\operatorname{div}\boldsymbol{u}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$ выступают как независимые параметры.

Автор признателен М. А. Миллеру за обсуждение данной заметки

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. И. Блохинцев, Акустика неоднородной движущейся среды, ГИТТЛ, М.—Л., 1946
2. R. H. Kraichnan, J. Acoust. Soc. America, 25, 1096 (1953).
3. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 25, 74 (1953).
4. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
5. А. М. Яглом, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 12, 501 (1948).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 4 марта 1961 г.

О ФЛЮКТУАЦИЯХ В ДЛИННОЙ ЛИНИИ

В. П. Милантьев

Тепловые флюктуации в длинной линии рассматривались в работах [1—3]. Однако в литературе не приводились общие формулы для флюктуаций тока и напряжения в произвольных точках линии и при произвольных нагрузках на концах линии. Так,

---

* В соответствующей формуле в [4] вместо множителя $\cos^2\theta\sin^2(\theta/2)$ стоит $\cos^2(\theta/2)$.

** Это замечание принадлежит В. И. Татарскому.

в работе [2] найдено выражение для спектральной плотности флюктуаций напряжения лишь на конце линии при произвольных нагрузках, а в работе [3] выведены формулы для флюктуаций в произвольных точках линии, когда линия либо разомкнута, либо коротко замкнута на концах. Поэтому представляет интерес вывести указанные общие формулы, не ограничиваясь при этом классическим случаем, когда $\hbar\omega/kT \ll 1$.

Поскольку мы интересуемся лишь собственными тепловыми шумами линии, будем считать, что линия нагружена на концах на реактивные импедансы Z_1 и Z_2 (о шумах нагрузок см [1,2]). Решим поставленную задачу, придавая уравнениям длинной линии стохастический смысл путем введения в эти уравнения „сторонней“ случайной ЭДС $E(x, t)$ (на единицу длины линии)

$$L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri + \frac{\partial u}{\partial x} = E(x, t); \qquad C\frac{\partial u}{\partial t} + Gu + \frac{\partial i}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

Согласно методу Гиббса [4,5], для спектральной плотности тока имеем формулу

$$(\overline{i(x)\, i(\xi)})_\omega = 2E(\Theta, \omega)\ \mathrm{Re}\ \{i\omega \bar{i}^1(\omega; \xi, x)\}, \tag{2}$$

где $E(\Theta, \omega)$—энергия квантового осциллятора, $\bar{i}^1$—среднее значение тока. когда в линии „действует“ „ступенчатая“ ЭДС (при этом средний ток $\bar{i}^1$ определяется усредненной системой уравнений длинной линии (1), в которой вместо случайной ЭДС $E(x, t)$ „действует“ сила $\eta(t)\,\delta(x-\xi)$, где

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

и $\delta(x)$—дельта-функция.

Из второго уравнения системы (1) для спектральной плотности флюктуаций напряжения получим выражение

$$(\overline{u(x)\, u(\xi)})_\omega = \frac{1}{|i\omega C + G|^2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi}(\overline{i(x)\, i(\xi)})_\omega . \tag{3}$$

Вычислив средний ток $\bar{i}^1$ указанным выше способом, найдем с помощью формул (2), (3) искомые флюктуации тока и напряжения:

$$(\overline{i(x)\, i(\xi)})_\omega = 2E(\Theta, \omega)\ \mathrm{Re}\ A(\omega; \xi, x); \tag{4}$$

$$(\overline{u(x)\, u(\xi)})_\omega = 2E(\Theta, \omega)\ \mathrm{Re}\ Z(\omega; \xi, x); \tag{5}$$

$$(\overline{u(x)\, i(\xi)})_\omega = 2E(\Theta, \omega)\ \mathrm{Re}\ B(\omega; \xi, x). \tag{6}$$

Здесь

$$A(\omega; \xi, x) = \frac{1}{2\pi\Delta}\{(\rho + Z_1)(\rho + Z_2)\, e^{(l-x-\xi)\gamma} + (\rho - Z_1)(\rho - Z_2)\, e^{-(l-x-\xi)\gamma} + (\rho - Z_1)(\rho + Z_2)\, e^{(l-|x-\xi|)\gamma} + (\rho + Z_1)(\rho - Z_2)\, e^{-(l-|x-\xi|)\gamma}\};$$

$$Z(\omega; \xi, x) = \frac{1}{2\pi\Delta}\{\gamma^2[(\rho + Z_1)(\rho + Z_2)\, e^{(l-x-\xi)\gamma} + (\rho - Z_1)(\rho - Z_2)\, e^{-(l-x-\xi)\gamma} - (\rho - Z_1)(\rho + Z_2)\, e^{(l-|x-\xi|)\gamma} - (\rho + Z_1)(\rho - Z_2)\, e^{-(l-|x-\xi|)\gamma}] - 2\gamma\delta(x-\xi)\,[(\rho - Z_1)(\rho + Z_2)\, e^{(l-|x-\xi|)\gamma} - (\rho + Z_1)(\rho - Z_2)\, e^{-(l-|x-\xi|)\gamma}]\};$$

$$B(\omega, \xi, x) = \frac{\rho}{2\pi\Delta}\{(\rho + Z_1)(\rho + Z_2)\, e^{(l-x-\xi)\gamma} - (\rho - Z_1)(\rho - Z_2)\, e^{-(l-x-\xi)\gamma} + [(\rho - Z_1)(\rho + Z_2)\, e^{(l-|x-\xi|)\gamma} - (\rho + Z_1)(\rho - Z_2)\, e^{-(l-|x-\xi|)\gamma}]\ \mathrm{sgn}\,(x-\xi)\};$$

$$\Delta = 4\rho\,[(\rho^2 - Z_1 Z_2)\,\mathrm{sh}\, l\gamma - \rho\,(Z_1 - Z_2)\,\mathrm{ch}\, l\gamma];$$

$\rho = \sqrt{(i\omega L + R)(i\omega C + G)^{-1}}$ — характеристическое сопротивление линии, $\gamma = \sqrt{(i\omega L + R)(i\omega C + G)}$ — коэффициент распространения волны.

Формулами (4), (5), (6) и решается в общем виде задача о флюктуациях в длинной линии. Аналогично можно рассмотреть флюктуации в полуограниченной линии.

Рассмотрим теперь линию, коротко замкнутую на концах ($Z_1 = Z_2 = 0$). Считая флюктуации классическими ($E(\Theta, \omega) \to \Theta \equiv kT$) и принимая $i\omega = p$ за лапласову переменную, вычислим автокорреляционную функцию тока $\overline{i(x, 0)\, i(\xi, 0)}$.

$$\overline{i(x, 0)\, i(\xi, 0)} = \frac{2\Theta}{lL} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \frac{\pi s x}{l} \cos \frac{\pi s \xi}{l}.$$

Если $i(x) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} b_s \cos(\pi s x/l)$, то отсюда сразу следует в согласии с [3] закон равнораспределения для длинной линии $\overline{b_s^2} = 2\Theta/lL$. Аналогично можно показать, что среднее значение квадрата амплитуды напряжения $\overline{g_s^2} = 2\Theta/lC$ Такой же результат можно получить для линии, разомкнутой на концах.

ЛИТЕРАТУРА

1. В С Троицкий, ЖТФ, 25, 1426 (1955).
2 А М Стародубцев, Труды ГИФТИ и радиофизического фак-та ГГУ, сер. физ, 35, 38 (1957).
3. C. W. McCombie, Phys. Rev., 100, 414 (1955)
4 Я П Терлецкий, Вестник МГУ, 4, 119 (1957)
5. В П Милантьев, Вестник МГУ, 4, 71 (1960).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
19 января 1961 г

ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СТРУКТУРОЙ В ВИДЕ ТОНКОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

В И Юрьев

Исследование взаимодействия электронного потока с диэлектрической структурой в [1] соответствовало случаю, когда

$$|\gamma_0^2| \sim |\omega^2 \mu_2 \varepsilon_2|, \tag{1}$$

где γ_0—постоянная распространения волны в отсутствие электронного потока, ω—частота сигнала, μ_2—магнитная проницаемость среды (полагается равной μ_0), ε_2—диэлектрическая проницаемость. При этом $|\gamma_0^2| < |\omega^2 \mu_2 \varepsilon_2|$.

В этом случае удельное усиление G оказалось низким ($1 - 2$ *дб·см*$^{-1}$), так как электромагнитная энергия канализируется в основном в диэлектрике и лишь незначительная часть—в области канала, пронизываемого электронами. Однако было отмечено, что уменьшение параметра $P = R/a$ (где R—радиус диэлектрической структуры, a—радиус осевого канала), имеющего при условии (1) величину в несколько единиц, приводит к росту G. С уменьшением P при $\varepsilon_r = \varepsilon_2/\varepsilon_0 \sim 10^2$ фазовая скорость волны в системе сильно растет. Чтобы получить практически реализуемые значения $v_ф/c$, необходимо значительно увеличить ε_r. Последнее возможно при использовании титанатов бария, у которых $\varepsilon_r \sim (1 \div 8)\, 10^3$ [2].

В этом случае $|\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0| \ll |\gamma_0^2| \ll |\omega^2 \mu_2 \varepsilon_2|$ и справедливы соотношения

$$G \simeq 7{,}5\,\gamma_0 \sqrt[3]{k} = 7{,}5\,\gamma_0 \left[\frac{\varepsilon_r \omega_e^2/\omega^2}{2(\varepsilon_r \gamma_0 a)^2 f_0'(T_{20}a)\, \gamma_0 a/T_{20}a}\right]^{1/3} дб\ м^{-1}; \tag{2}$$

$$(T_{20}a)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \varepsilon_r a^2 - (\gamma_0 a)^2\ м^{-2}; \tag{3}$$

$$\omega_e^2 = \frac{e\rho_0}{m\varepsilon_0}\ сек^{-2}; \qquad \gamma_0 = \frac{\omega}{v_ф}\ м^{-1},$$

полученные в [1], остаются в силе.