

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С МАЛЫМИ ПОТЕРЯМИ

Л. А. Островский

Рассматривается распространение плоской электромагнитной волны в нелинейной диссипативной среде, неоднородной в направлении распространения волны. В предположении, что параметры среды изменяются достаточно медленно, найдены решения уравнений Максвелла, соответствующие бегущим волнам. Исследовано влияние неоднородности среды и потерь в ней на образование ударной волны. В качестве примера рассмотрено формирование крутого фронта импульса в искусственной линии задержки, состоящей из неодинаковых ячеек с нелинейными индуктивными элементами.

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее время было исследовано распространение электромагнитных волн в однородной нелинейной среде и, в частности, образование электромагнитных ударных волн [1,3,5,6]. В настоящей работе рассматриваются волны в неоднородной нелинейной среде, обладающей малыми электрическими и магнитными потерями. При этом естественно выделить два крайних случая: а) параметры среды меняются достаточно резко (скачком), б) параметры среды изменяются медленно по сравнению с полями распространяющейся в среде волны. Некоторые задачи первого типа (например, падение ударной волны на границу раздела двух однородных сред) могут быть решены методами, развитыми в газодинамике [2,3]. Ниже рассматривается второй случай, до некоторой степени аналогичный случаю выполнения условий геометрической оптики для линейных неоднородных сред, в особенности сред, параметры которых меняются в пространстве и времени [4]. Однако существенные особенности данной задачи, обусловленные нелинейностью среды (в частности, возможность образования разрывов непрерывности полей), делают эту аналогию весьма ограниченной. В связи с этим применяемый здесь метод решения отличается от обычных методов геометрической оптики линейных сред.

Рассмотрим распространение плоской линейно поляризованной волны ( $E = E_x$ ,  $H = H_y$ ) в нелинейной среде, неоднородной в направлении распространения волны (ось  $z$ ). Нелинейная связь между магнитной индукцией  $B$  и напряженностью магнитного поля  $H$  в такой среде дается функцией  $B = B(H, z)$ . Связь между электрической индукцией  $D$  и напряженностью электрического поля  $E$  будем считать линейной\*:  $D = \epsilon(z) E$ . Тогда уравнения Максвелла запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\epsilon(z)}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma E &= 0; \\ \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\mu(H, z)}{c} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \kappa H &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

\* Совершенно аналогично можно рассмотреть случай  $D = D(E, z)$ ,  $B = \mu(z) H$ .

где  $\mu(H, z) = \partial B(H, z)/\partial H$ ,  $\sigma$ —проводимость,  $\kappa$ —величина, характеризующая магнитные потери в среде,  $c$ —скорость света в вакууме.

В соответствии со сказанным выше величины  $\varepsilon$  и  $\mu$  изменяются вдоль оси  $z$  (при фиксированном  $H$ ) медленно по сравнению с полями  $E$  и  $H$ . Следовательно, можно положить, что  $\varepsilon = \varepsilon(mz)$ ,  $\mu = \mu(H, mz)$ , где  $m$ —малый постоянный параметр. Величины  $\sigma$  и  $\kappa$  будем считать малыми порядка  $m$ . При этих предположениях, исключая из (1) все производные  $E$ , получим (заменяя  $\sigma \rightarrow m\sigma$ ,  $\kappa \rightarrow m\kappa$  и обозначая  $\eta = mz$ ) следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = & \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial\mu}{\partial H} \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)^2 + m \left\{ \frac{4\pi}{c^2} (\varepsilon\kappa + \mu\sigma) \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta} \frac{\partial H}{\partial z} \right\} + \\ & + m^2 \left\{ \left( \frac{4\pi}{c} \right)^2 \sigma\kappa H + \frac{4\pi}{c} \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta} E \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

В дальнейшем будут исследоваться приближенные решения уравнения (2) для случаев, когда известно решение при  $m = 0$ .

### 1. КВАЗИПРОСТЫЕ ВОЛНЫ

Как показано в [1], для однородной нелинейной среды без диссипации ( $m = 0$ ) уравнения (1) (или (2)) имеют частные решения вида

$$H = \Phi \left( t \mp \frac{z \sqrt{\varepsilon\mu(H)}}{c} \right) \quad (3)$$

( $\Phi$  здесь и далее обозначает произвольную функцию). Эти решения, называемые по аналогии с газодинамикой простыми волнами, имеют вид деформирующихся бегущих волн и, как легко убедиться непосредственно, удовлетворяют уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial H}{\partial z} \pm \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Естественно предположить, что при достаточно малом  $m$  в среде могут существовать бегущие волны, аналогичные (3). Не ограничиваясь определенным видом решения, будем считать, что оно удовлетворяет уравнению первого порядка, мало отличающемуся от (4), а именно:

$$\frac{\partial H}{\partial z} \pm \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = m\varphi(H, \eta), \quad (5)$$

где  $\varphi$ —неизвестная функция. Дифференцируя (5) поочередно по  $z$  и  $t$  и исключая из полученных уравнений величины  $\partial H/\partial z$  и  $\partial^2 H/\partial z\partial t$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = & \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial\mu}{\partial H} \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)^2 \mp \frac{m}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\partial\mu}{\partial H} \varphi + \right. \\ & \left. + 2 \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial H} + \frac{\partial \sqrt{\varepsilon\mu}}{\partial\eta} \right\} + m^2 \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial H} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Сравнивая уравнения (2) и (6), видим, что они отличаются только членами порядка  $m$  и  $m^2$ . Пренебрегая величинами порядка  $m^2$ , получим линейное уравнение для  $\varphi$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial H} + \frac{1}{4\mu} \frac{\partial \mu}{\partial H} \varphi + Q(H, \eta) = 0, \quad (7)$$

где

$$Q(H, \eta) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \rho \pm \frac{4\pi}{c} (\sigma\rho + \kappa/\rho) \right\}, \quad \rho = \sqrt{\mu/\varepsilon}.$$

Интеграл (7) имеет вид:  $\varphi = \mu^{-1/4} \left\{ F(\eta) - \int_0^H Q\mu^{1/4} dH \right\}$ , где  $F(\eta)$  —

произвольная функция. Поскольку должно быть  $\varphi \equiv 0$  при  $Q \equiv 0$  (случай (4)), а также при  $H \equiv 0$  (иначе не удовлетворяется (5)), то следует положить  $F(\eta) \equiv 0$ , после чего, заменяя снова  $\eta \rightarrow mz$ ,  $m\sigma \rightarrow \sigma$ ,  $m\kappa \rightarrow \kappa$ , получим окончательно:

$$\frac{\partial H}{\partial z} \pm \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \frac{\partial H}{\partial t} + \mu^{-1/4} \int_0^H Q\mu^{1/4} dH = 0. \quad (8)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию уравнения первого порядка в частных производных или соответствующей характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dt}{dz} = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}, \quad \frac{dH}{dz} = -\mu^{-1/4} \int_0^H \mu^{1/4} Q dH. \quad (9)$$

С помощью (9) находим общий интеграл уравнения (8) в неявном виде:

$$f(H, z) = \Phi \left\{ t \mp \frac{1}{c} \int_0^z \sqrt{\varepsilon(z)\mu[z, H(z, C_1)]} dz \right\}. \quad (10)$$

Здесь  $f(H, z) = C_1$  — интеграл второго уравнения (9), определяющий функцию  $H(z, C_1)$  в правой части (10). Если известно решение (10), то из (1) найдем в том же приближении:

$$\pm E = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(z)}} \int_0^H \sqrt{\mu(z, H)} dH + O(m). \quad (11)$$

Полученные решения имеют вид бегущих волн, которые можно назвать квазипростыми. В отличие от случая простой волны (4), характеристики уравнения (8) не являются прямыми линиями, а значение  $H$  не остается постоянным вдоль характеристик.

Отметим, что для волн в линейной неоднородной среде без дисперсии применяемый здесь метод эквивалентен обычному приближению геометрической оптики. Действительно, полагая  $\mu$  не зависящим от  $H$ , а также  $\sigma = \kappa = 0$ , получим из (10) в явном виде:

$$H = \rho^{-1/2} \Phi \left( t \mp \frac{1}{c} \int_0^z \sqrt{\varepsilon\mu} dz \right),$$

что совпадает с известным решением в приближении геометрической оптики. Таким же способом можно рассмотреть и волны в линейной

недиспергирующей среде с переменными во времени и пространстве параметрами. Для диспергирующих же сред решение оказывается более сложным [4].

## 2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ. СЛУЧАЙ $Q = 0$

Рассмотрим некоторые частные случаи решения (10). Положим сначала, что в среде отсутствуют потери ( $\sigma = \kappa = 0$ ), а магнитная проницаемость меняется по закону

$$\mu = \mu_1(H) \mu_2(z). \quad (12)$$

Тогда система (9) интегрируется в квадратурах, и общий интеграл (10) имеет вид\*:

$$\left(\frac{\mu_2}{\varepsilon}\right)^{1/4} \int_0^H \mu_1^{1/4} dH = \Phi \left\{ t - \frac{1}{c} \int_0^z \sqrt{\varepsilon \mu_2 \mu_1} [H(z, C_1)] dz \right\}. \quad (13)$$

Особым является случай, когда волновое сопротивление среды не зависит от  $z$ :

$$\sqrt{\mu_2/\varepsilon} = \rho_0 = \text{const.} \quad (12a)$$

При этом из (13) получаем:

$$H = \Phi \left( t - \frac{\mu_1^{1/2}}{c\rho_0} \int_0^z \mu_2 dz \right). \quad (14)$$

Нетрудно показать, что (14) является точным решением исходной системы (1), справедливым при любых скоростях изменения  $\varepsilon(z)$  и  $\mu_2(z)$ . Из (14) следует, что величины  $H$  и  $E$  остаются постоянными на характеристиках и, в частности, постоянна амплитуда распространяющегося в среде импульса.

Заметим, что  $H$  остается постоянным на характеристиках во всех случаях, когда в уравнении (8)  $Q \equiv 0$ . При  $\sigma = \kappa = 0$  условие  $Q \equiv 0$  сводится к (12a); при наличии потерь из этого условия получаем:

$$\rho = \sqrt{\kappa/\sigma} \operatorname{tg} \left\{ \frac{4\pi}{c} \sqrt{\sigma\kappa} [\Phi(H) - z] \right\} \quad \text{при } \kappa \neq 0, \quad (15)$$

$$1/\rho = \frac{4\pi}{c} \sigma [z - \Phi(H)] \quad \text{при } \kappa = 0.$$

Таким образом, при наличии потерь принципиально всегда возможно изменением  $\rho$  в пространстве получить постоянную амплитуду волны магнитного поля. Однако, в отличие от случая (14), поле  $E$  при этом всегда убывает, а соответствующее решение не является точным.

## 3. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

Как известно, распространение простой волны (3) может привести (в предположении, что связь  $B$  и  $H$  не зависит от времени) к образованию разрывов непрерывности полей, т. е. электромагнитных ударных

\* Далее всюду рассматривается волна, бегущая в  $+z$ -направлении.

волн. Место  $z_1$  и момент  $t_1$  возникновения разрыва определяются совместным решением уравнений\* [2]:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial H}\right)_{z_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 t}{\partial H^2}\right)_{z_1} = 0. \quad (16)$$

Эти условия справедливы и для квазипростой волны (10).

Рассмотрим сначала среду с малой нелинейностью. Будем считать, что

$$\varepsilon = \varepsilon(z), \quad \mu = \mu_0(z)(1 - \gamma H), \quad (17)$$

где  $\gamma$ —постоянная\*\*, причем  $\gamma H \ll 1$ , а зависимость  $\mu$  от более высоких степеней  $H$  можно пренебречь. В этом случае система (9) легко интегрируется, и решение (10) можно записать в виде:

$$t - \frac{1}{c} \int_0^z V_{\varepsilon\mu_0} dz + \frac{\gamma H}{2c} \rho_0^{1/2} e^{\psi(z)} \int_0^z V_{\varepsilon\mu_0} \rho_0^{-1/2} e^{-\psi(z)} dz = \\ = t_0 [H\rho_0^{1/2} e^{\psi(z)}]. \quad (18)$$

Здесь  $\rho_0(z) = \sqrt{\mu_0/\varepsilon}$ ,  $\psi(z) = (2\pi/c) \int_0^z (\sigma\rho_0 + \kappa/\rho_0) dz$ ,  $t_0$  — произвольная функция, определяемая из условия в плоскости  $z=0$  (обратная функции  $H(0, t)$ ). Отметим, что при  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\mu_0 = \text{const}$ ,  $\sigma = 0$  формула (18) совпадает с соотношением, полученным Р. В. Хохловым для однородной линии передачи без дисперсии с малыми потерями, если погонная емкость линии зависит от напряжения по закону, аналогичному (17) [3].

С помощью (16) и (18) нетрудно показать, в частности, что при линейной зависимости  $H(t)$  в плоскости  $z=0$  разрыв образуется одновременно для всех значений  $H$ , т. е. характеристики (18) пересекаются в одной точке. Если же поле при  $z=0$  синусоидально:

$$H(0, t) = H_0 \sin(\omega t),$$

то разрыв возникает при  $H=0$ , причем координата точки, где образуется разрыв, определяется уравнением:

$$\int_0^{z_1} V_{\varepsilon\mu_0} \rho_0^{-1/2} e^{-\psi(z)} dz = 2c\rho_0^{-1/2}(0)/\gamma H_0\omega. \quad (19)$$

Если, например,  $\rho_0 = \text{const}$ ,  $\mu_0 = \mu_0(0) e^{-\lambda z}$  ( $\lambda$ —постоянная), то из (19) получим:

$$1 - e^{-kz_1} = 2kc/\omega \sqrt{\varepsilon\mu_0(0)} \gamma H_0; \quad k = \lambda + (4\pi/c)(\sigma\rho_0 + \kappa/\rho_0). \quad (20)$$

Следовательно, при  $k > 0$  ударная волна образуется только для достаточно большой амплитуды  $H_0$ :

$$\gamma H_0 > \frac{2ck}{\omega \sqrt{\varepsilon\mu_0(0)}}. \quad (21)$$

\* Если ударная волна возникает в месте разрыва производной  $dt/dH$ , что может быть, например, на границе с областью  $H \equiv 0$ , то второе уравнение (17) заменяется условием  $H(z_1, t_1) = 0$  [2]. Такие случаи встречаются ниже.

\*\* Нетрудно рассмотреть и более общий случай  $\gamma = \gamma(z)$ . При  $\gamma = \text{const}$  закон (17) является частным случаем (12).

Таким образом, наличие диссипации в среде препятствует образованию разрыва (см. также [5]). Влияние неоднородности среды на формирование разрыва зависит от знака  $\lambda$ . В частности, при  $\lambda > 0$  даже в отсутствие потерь для выполнения условия (21) необходима амплитуда тем большая, чем сильнее неоднородность среды. Физически это объясняется, очевидно, расплыванием волны из-за уменьшения величины  $\sqrt{\varepsilon\mu_0}$  вдоль оси  $z$ .

Аналогичные выводы можно сделать и для среды с сильной нелинейностью. Ограничимся здесь одним частным законом изменения параметров, когда

$$\mu^{1/2} = \rho_0 \varepsilon^{1/2} = \mu_0^{1/2} (1 + p e^{-\delta H})$$

( $\rho_0, \mu_0, p, \lambda, \delta > 0$  — постоянные), а поле при  $z = 0$  растет линейно:

$$H(0, t) = H_0 t / t_0 \quad (0 \leq t \leq t_0').$$

Подставляя соответствующее решение в (16), найдем, что разрыв возникает при  $H = 0$ , на расстоянии от начала координат, определяемом равенством:

$$1 - e^{-\lambda z_1} = c \lambda t_0 / \delta H_0 p \sqrt{\varepsilon \mu_0}.$$

Следовательно, и в этом случае при  $\lambda > 0$  неоднородность среды приводит либо к замедлению формирования ударной волны, либо (при  $\delta H_0 < c t_0 / p \sqrt{\varepsilon \mu_0}$ ) последняя вообще не образуется.

После образования разрыва волна позади него уже не описывается, вообще говоря, уравнением (9), так что необходимо решать исходную систему (1) совместно с граничными условиями на разрыве [1]:

$$V/c = \frac{E_2 - E_1}{B_2 - B_1} = \frac{H_2 - H_1}{D_2 - D_1}, \quad (22)$$

где  $V$  — скорость перемещения разрыва, а индексы 1 и 2 отвечают значениям полей перед разрывом и за ним.

Только в случае, если поле настолько мало, что выполняется условие (17), по обе стороны разрыва справедливо решение (19); за движением разрыва можно проследить, подставляя в (22) найденные из (18) значения полей, как это сделано в [1] для однородной среды. Если же амплитуда поля достаточно велика, то с ростом величины разрыва условие (17) перестанет выполняться. В этом случае полное решение задачи представляет большие трудности. Поэтому, как и в [1], мы рассмотрим только вопрос о существовании стационарных волн, конфигурация которых не меняется со временем. Как показано в [1], в однородной нелинейной среде с конечной проводимостью может существовать волна, в которой все величины зависят от  $\eta = z - Vt$  ( $V = \text{const}$ ). Эта волна имеет вид разрыва, поле за которым монотонно возрастает. В случае  $\kappa \neq 0$  нетрудно получить решение системы (1), обладающее аналогичными свойствами.

В неоднородной среде, как легко видеть, стационарных волн, распространяющихся с постоянной скоростью, не существует. Поэтому

будем искать решение, зависящее от  $\xi = t - \int_0^z \frac{dz}{V(z)}$ . С помощью (1)

можно убедиться, что такое решение возможно только в случае (12а), т. е. когда  $\rho_0 = \text{const}$ ,  $\sigma = \kappa = 0$  и имеет вид перепада постоянных зна-

чений полей  $E$  и  $H$  ( $B$  и  $D$ , очевидно, зависят при этом от  $z$ ), движущегося с переменной скоростью  $V(z)$ , определяемой условиями (24).

#### 4. ФОРМИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСОВ В ИСКУССТВЕННОЙ ЛИНИИ

В качестве примера применения полученных результатов рассмотрим увеличение крутизны переднего фронта импульса в искусственной линии задержки с нелинейными индуктивностями  $L_n(J)$  (рис. 1)\*. Как известно, при условии, что ток  $J$  и напряжение  $V$  незначительно меняются за

время  $\tau_{он} = \sqrt{C_n L_{n\max}(J)}$ , такая линия эквивалентна непрерывной, и процессы в ней приближенно описываются уравнениями, аналогичными (1):

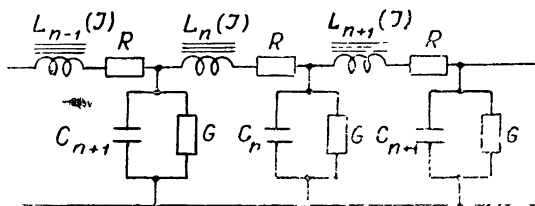


Рис. 1.

$$\frac{\partial J}{\partial z} + \frac{C(z)}{z_0} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{G}{z_0} V = 0; \tag{23}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{L(z, J)}{z_0} \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{R}{z_0} J = 0,$$

где  $R, G, C(z) = C_n, L(z, J) = L_n(J)$  — соответственно сопротивление, проводимость, емкость и индуктивность ячейки, а  $z_0 = z/n$  — произвольно выбираемая постоянная, имеющая смысл эквивалентной длины ячейки.

Мы не будем здесь интересоваться изменением амплитуды импульса; поэтому примем, что параметры ячейки изменяются по закону (12а), т. е.  $L(z, J) = L_1(J) L_2(z), \sqrt{L_2/C} = R_0 = \text{const}, R = G = 0$ \*\* . Система (23) имеет при этом решение, аналогичное (14), которое можно записать также в виде:

$$t = \frac{L_1^{1/2}(J)}{R_0 z_0} \int_0^z L_2(z) dz + t_0(J) \tag{14a}$$

( $t_0$  — функция, имеющая тот же смысл, что и в (18)). С помощью (14а) легко определить изменение длительности фронта импульса\*\*\*:

$$\tau(z) = \tau(0) - \frac{1}{R_0 z_0} \left[ \sqrt{L_1(0)} - \sqrt{L_1(J_{\max})} \right] \int_0^z L_2 dz, \tag{24}$$

где  $\tau(0)$  — длительность фронта при  $z = 0, J_{\max}$  — амплитуда импульса.

Как видно из (24), уменьшение  $\tau$  происходит тем быстрее, чем больше  $\tau_0(z) = \sqrt{CL_2 L_1(0)}$ . С другой стороны, при уменьшении  $\tau$  отно-

\* Именно в такой линии были впервые получены ударные волны [6]

\*\* Зависимость вида (12) или (12а) осуществляется, например, если индуктивности состоят из одинаковых ферритовых сердечников с различным числом витков намотанного на них провода

\*\*\* Предполагается, что  $L_1(J)$  — убывающая функция, что является условием уменьшения длительности переднего фронта [1].

шение  $\tau(z)/\tau_0(z) = a(z)$  не может стать меньше единицы вследствие свойств линии как фильтра нижних частот. (Разумеется, при близких к единице значениях  $a$  решение (14а) неприменимо.) В связи с этим потребуем, чтобы величина  $a$  оставалась постоянной вдоль линии, считая, что при  $z=0$  эта величина выбрана оптимальным образом. Тогда с помощью (24) (приравнявая  $\tau_0 a$  и дифференцируя по  $z$ ) получим:

$$-\left[\sqrt{L_1(0)} - \sqrt{L_1(J_{\max})}\right] \frac{L_2}{z_0} = a \sqrt{L_1(0)} \frac{\partial L_2}{\partial z},$$

откуда найдем требуемый закон изменения  $L_2$ :

$$L_2(z) = L_2(0) \exp \left\{ - \left( 1 - \sqrt{\frac{L_1 J_{\max}}{L_1(0)}} \right) \frac{z}{az_0} \right\}$$

или, переходя к параметрам дискретной линии:

$$L_{2n} = L_{21} \exp \left( - \frac{An}{a} \right), \quad A = 1 - \sqrt{\frac{L_1 J_{\max}}{L_1(0)}}, \quad (25)$$

причем  $\tau$  изменяется по тому же закону. Полученный экспоненциальный закон изменения параметров линии является оптимальным в том смысле, что требует минимального числа ячеек для формирования заданной длительности фронта  $\tau$  при условии, что величина  $\tau$  не ограничивается электрическими размерами ячейки. Все сказанное справедливо вплоть до образования ударной волны, т. е. пока  $\tau$  не уменьшится настолько, что не зависящая от времени связь  $L_2(J)$  перестанет быть справедливой.

В заключение отметим, что если в формуле (20) величина  $\lambda$  выбрана в соответствии с (25), то условие (21) всегда выполняется. Действительно, в этом случае  $\lambda = \gamma H_0 / 2az_0$ ,  $a = \tau(0)/\tau_0(0) = \pi c / 2\omega z_0 \sqrt{\epsilon \mu_0}$ , так что правая часть (21) равна  $(2/\pi) \gamma H_0$ , а из (21) находим, что ударная волна образуется в точке  $\lambda z_1 = \ln \frac{1}{1-2/\pi} \approx 1$ .

Автор выражает признательность А. В. Гапонову за внимание к работе и ценные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, **36**, 957 (1959); Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **3**, 79 (1960).
- 2 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954.
- 3 А. В. Гапонов, Л. А. Островский, Г. И. Фрейдман, Доклад на юбилейной сессии, посвященной 100-летию со дня рождения А. С. Попова, М., 1959.
- 4 Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **4**, 293 (1961).
- 5 Р. В. Хохлов, Доклад на IV Всесоюзной конференции МВ и ССО по радиоэлектронике, Харьков, 1960.
- 6 И. Г. Катаев, Вопросы радиоэлектроники, серия VI, радиоизмерительная техника, № 2, 61 (1959).



---

**ELECTROMAGNETIC WAVES IN AN INHOMOGENEOUS  
NONLINEAR MEDIUM WITH SMALL ABSORPTION LOSSES***L. A. Ostrovsky*

The plane electromagnetic wave propagation is examined in a nonlinear dissipating medium, which is inhomogeneous in the direction of wave propagation. Assuming that the medium parameters change sufficiently slowly, Maxwell's equations solutions were found, describing the traveling waves. The influence was investigated of the inhomogeneity of the medium and losses in it on the formation of a shock wave. As an example, the formation is examined of a steep pulse front in an artificial delay line, consisting of different cells with nonlinear inductive elements

---