ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IV, № 5 РАДИОФИЗИКА 1961

О ПОГЛОЩЕНИИ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДАХ

Ю. Ф. Филиппов

Получена зависимость коэффициента поглощения магнитозвуковых волн от частоты сигнала, параметров волновода, среды и величины внешнего магнитного поля

Работа Гаевского [1] посвящена распространению волн в волноводе, заполненном идеально проводящей средой, находящейся во внешнем магнитном поле H_0, которое направлено вдоль оси волновода. Представляет интерес учесть влияние малых эффектов диссипации в проводящей среде и конечной проводимости стенок волновода на распространение магнитозвуковых волн. Это влияние сводится к уменьшению амплитуды волны и может быть найдено способом, использованным в работах [2,3].

1. ПОГЛОЩЕНИЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ

Определим коэффициент поглощения волны q_1 при распространении ее в вязкой проводящей среде как отношение

$$q = \frac{\overline{|\partial E/\partial t|}^t}{2u\overline{E}^t}, \tag{1}$$

где $\overline{\partial E}^t/\partial t$ — усредненная по периоду колебаний энергия, теряемая волной в волноводе, $\overline{E}^t$ — средняя энергия волны в этом же объеме, u — фазовая скорость магнитозвуковой волны:

$$u_{\pm} = \sqrt{2}\,u_0 u_a \left\{u_0^2 + u_a^2 - \frac{\chi^2 u_0^2 u_a^2}{\omega^2} \pm \left[(u_a - u_0)^2 + \frac{\chi^2 u_0^2 u_a^2}{\omega^2}\right]^{1/2} \times \right.$$
$$\left. \times \left[(u_a + u_0)^2 + \frac{\chi^2 u_0^2 u_a^2}{\omega^2}\right]^{1/2}\right\}^{-1/2} \tag{2}$$

(u_0 — скорость звука, $u_a = H_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$, параметр χ^2 определен ниже). Используя систему уравнений магнитной гидродинамики, можно показать, что

$$\frac{\overline{\partial E}^t}{\partial t} = -T_0 \int \overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho s)}^t\, d\Omega = -\varkappa T_0 \int \frac{\overline{(\nabla T)^2}^t}{T^2}\, d\Omega -$$
$$-\frac{\eta T_0}{2}\int \overline{\frac{1}{T}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial V_e}{\partial x_e}\right)^2}^t_{d\Omega} - \xi T_0 \int \frac{\overline{(\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2}^t}{T}\, d\Omega - \tag{3}$$
$$-\frac{c^2 T_0}{16\pi^2\sigma}\int \frac{\overline{(\operatorname{rot} \boldsymbol{H})^2}^t}{T}\, d\Omega;$$

$$\bar{E}^t = \int \left(\frac{u_0^2}{2\rho_0} \overline{\rho^2}^t + \frac{\rho_0 \overline{v^2}^t}{2} + \frac{\overline{H^2}^t}{8\pi} \right) d\Omega,$$

где T_0 — равновесная температура, $\varkappa$, η, ξ — коэффициенты теплопроводности и вязкости, σ — проводимость, c — скорость света.

Предполагая малость диссипативных эффектов, для получения коэффициента поглощения q_1 в первом приближении подставим в (1) решения уравнений магнитной гидродинамики для идеальной среды, имеющие вид [1,4]:

$$v_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \qquad v_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}; \qquad H_1 = -\frac{\gamma H_0}{\omega} v_1;$$

$$v_z = \frac{i\gamma u_0^2 \chi^2}{\gamma^2 u_0^2 - \omega^2} \varphi; \qquad H_2 = -\frac{\gamma H_0}{\omega} v_2; \qquad H_3 = \frac{i\chi^2 H_0}{\omega} \varphi; \tag{4}$$

$$\rho = \frac{i\omega\rho_0}{\gamma^2 u_0^2 - \omega^2} \chi^2 \varphi; \qquad \varphi = R e^{i(\omega t - \gamma z)},$$

где h_1, h_2 — коэффициенты Ляме, ρ_0 — равновесная плотность, R — решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial R}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial R}{\partial x_2} + h_1 h_2 \chi^2 R = 0, \tag{5}$$

удовлетворяющее соответствующим граничным условиям на стенках волновода. Так, если стенки волновода идеально проводящие, то на них должны обращаться в нуль нормальные компоненты магнитного поля и скорости. Из (4) замечаем, что в этом случае на границе должна обращаться в нуль нормальная производная от φ. Параметр χ^2 определяется геометрией поперечного сечения волновода и находится при удовлетворении решений уравнения (5) граничным условиям.

Подставляя (3), (4) в (1), производя усреднение по времени и интегрирование по объему, получим зависимость коэффициента поглощения магнитозвуковой волны от параметров задачи. Для определенности ниже рассмотрим прямоугольный волновод, ограниченный идеально проводящими стенками. В этом случае

$$R = R_{mn} = \mathrm{const} \cos(n\pi x/a) \cos(m\pi y/b); \tag{6}$$

$$\chi_{mn}^2 = n^2\pi^2/a^2 + m^2\pi^2/b^2, \tag{7}$$

где m, n — целые числа, a и b — линейные размеры стенок волновода в поперечном сечении.

Опуская промежуточные выкладки и, для краткости записи, индексы m и n, приведем окончательное выражение для коэффициента поглощения mn-гармоники:

$$q = \chi^2 \left\{ \frac{\varkappa}{\rho_0} \frac{u_0^2}{u^2} \left(1 + \frac{\chi^2 u^2}{\omega^2}\right) + \frac{\eta}{\rho_0} \left[\left(2 + \frac{\omega^2}{\chi^2 u^2}\right) \left(1 - \frac{u_0^2}{u^2}\right)^2 + \frac{u_0^2}{u^2} \left(1 + \frac{\chi^2 u_0^2}{\omega^2}\right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho_0} \left(\xi - \frac{2}{3}\eta\right) + \frac{c^2 u_a^2 \omega^2}{4\pi\sigma\chi^2 u^4} \left(1 + \frac{\chi^2 u^2}{\omega^2}\right) \left(1 - \frac{u_0^2}{u^2}\right)^2 \right\} \times \tag{8}$$

$$\times u^{-1} \left\{ \left(1 - \frac{u_0^2}{u^2}\right) \left[1 + \frac{u_a^2}{u^2} \left(1 + \frac{\chi^2 u^2}{\omega^2}\right)\right] + \frac{\chi^2 u_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{u_0^2}{u^2}\right) \right\}^{-1}$$

(u — фазовая скорость данной mn-гармоники одной из волн (2)). Выражение (8) полностью определяет зависимость коэффициента поглощения q_1 от частоты сигнала ω, свойств среды $\varkappa$, ξ, η, ρ_0, σ, величины внешнего магнитного поля H_0 и параметров волновода a и b. В предельном случае $m = n = 0$, когда дисперсные волны переходят в звуковую, коэффициент поглощения совпадает с найденным в [1]. Пренебрегая влиянием вязкости и теплопроводности, приведем выражения для коэффициента поглощения в предельных случаях.

Если $\chi u_0 u_a/\omega(u_0 + u_a) \gg 1$ (малые частоты), то

а) при $u_0^2 \gg H_0^2/4\pi\rho_0$

$$q(u = u_+) \simeq \chi^2 \rho_0 c^2/2H_0^2 \sigma; \tag{9}$$

б) при $u_0^2 \ll H_0^2/4\pi\rho_0$

$$q(u = u_+) \simeq 0. \tag{10}$$

Если же $\chi u_0 u_a/\omega|u_0 - u_a| \ll 1$ (большие частоты), то

а) при $u_0^2 \gg H_0^2/4\pi\rho_0$

$$q_1(u = u_+) \simeq \sqrt{\pi}\, c^2 \rho_0^{3/2}/H_0^3 \sigma, \tag{11}$$

$$q_1(u = u_-) \simeq \frac{c^2}{8\pi\sigma} \frac{\chi^4 H_0^4}{16\pi^2 \rho_0 u_0^5} \frac{\sqrt{1 - \chi^2 u_0^2/\omega^2}}{1 + (\chi^2 u_0^2/\omega^2)(1 - \chi^2 u_0^2/\omega^2)}; \tag{12}$$

б) при $u_a^2 \ll H_0^2/4\pi\rho_0$

$$q_1(u = u_+) \simeq 0, \tag{13}$$

$$q_1(u = u_-) \simeq \frac{\omega^2 c^2}{4\pi\sigma} \left(\frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}\right)^{3/2} \frac{(1 - \chi^2 H_0^2/4\pi\omega^2\rho_0)^{3/2}}{2 - \chi^2 H_0^2/4\pi\omega^2\rho_0}. \tag{14}$$

Здесь $q_1(u = u_\pm)$ обозначает коэффициент поглощения волны, распространяющееся с фазовой скоростью $u = u_\pm$. Выражениями (9)—(14) определяется в явном виде зависимость коэффициента поглощения волны от параметров задачи.

2. ПОГЛОЩЕНИЕ ВОЛНЫ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

При распространении звуковой волны вдоль плоскости волна сильно затухает. Причиной является возникновение в пристеночном слое больших градиентов тангенциальной составляющей скорости и температуры. Аналогичное поглощение должно наблюдаться и при распространении магнитозвуковых волн в волноводах, заполненных проводящей средой.

Определим коэффициент поглощения волны q_0 отношением энергии, диссипируемой в единицу времени на поверхности стенок, на удвоенный поток энергии через поперечное сечение волновода единичной длины. Ниже ограничимся рассмотрением прямоугольного волновода. Вычисления, проведенные способом, предложенным в [2], приводят к следующему выражению для q_0:

$$q_0 = \frac{2\sqrt{2\omega}}{\chi^2 abu} \frac{\sqrt{\nu}\{(n^2\pi^2/a + m^2\pi^2/b)(1 - u_0^2/u^2)^2 + (\chi^4 u_0^4/\omega^2 u^2)(a+b)\} + \sqrt{\chi_0}\chi^4 u_0^2/\omega^2}{(1 - u_0^2/u^2)^2[1 + (u_a^2/u^2)(1 + \chi^2 u^2/\omega^2)] + (\chi^2 u_0^2/\omega^2)(1 + u_0^2/u^2)}. \tag{15}$$

Здесь u — фазовая скорость волны, $\chi_0 = (\varkappa/\rho_0 c_p)(c_p/c_v - 1)^2$, $\nu = \eta/\rho_0$.

В рассмотренных выше предельных случаях выражение для q_0 принимает более простой вид. Если $\chi u_0 u_a/\omega(u_0 + u_a) \gg 1$ (малые частоты), то при $u_0^2 \gg H_0^2/4\pi\rho_0$

$$q_0(u = u_+) \simeq \frac{a+b}{ab}\,\frac{\sqrt{2\omega}}{u_0}\left\{\sqrt{\nu} + \sqrt{\chi_0}\right\} \tag{16}$$

и при $u_0^2 \ll H_0^2/4\pi\rho_0$

$$q_0(u = u_+) \simeq \frac{\sqrt{2\omega}\, u_a(a+b)}{\chi^2 ab u_0^2}\left\{\sqrt{\nu}\,\frac{u_0^2}{u_a^2} + \sqrt{\chi_0}\right\}. \tag{17}$$

Если же $\chi u_0 u_a/\omega\,|u_0 - u_a| \ll 1$ (большие частоты), то при $u_0^2 \gg H_0^2/4\pi\rho_0$

$$\begin{gathered} q_0(u = u_+) \simeq \frac{2\sqrt{2\omega}}{\chi^2 ab u_a}\left\{\sqrt{\nu}\left[\left(\frac{n^2\pi^2}{a} + \frac{m^2\pi^2}{b}\right) + \frac{\chi^2 u_a^2}{\omega^2}(a+b)\right] + \right.\\ \left. + \sqrt{\chi_0}\,(a+b)\,\frac{\chi^2 u_a^2}{\omega^2}\right\}; \end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered} q_0(u = u_-) \simeq \frac{2\sqrt{2\omega}}{\chi^2 ab u_0}\left\{\sqrt{\nu}\left[\left(\frac{n^2\pi^2}{a} + \frac{m^2\pi^2}{b}\right) + \frac{\omega^2}{u_0^2}\left(1 - \frac{\chi^2 u_0^2}{\omega^2}\right)(a+b)\right] + \right.\\ \left. + \sqrt{\chi_0}\,\frac{a+b}{u_0^2}\,\omega^2\right\}\frac{\left(1 - \frac{\chi^2 u_0^2}{\omega^2}\right)^{1/2}}{1 + (\chi^2 u_0^2/\omega^2)\,(1 - \chi^2 u_0^2/\omega^2)} \end{gathered} \tag{19}$$

и при $u_0^2 \ll H_0^2/4\pi\rho_0$

$$q_0(u = u_+) \simeq \frac{2\sqrt{2\omega}}{ab u_0}\,(a+b)\left\{\sqrt{\nu} + \sqrt{\chi_0}\right\}; \tag{20}$$

$$\begin{gathered} q_0(u = u_-) \simeq \frac{\sqrt{2\omega}\sqrt{1 - \chi^2 u_a^2/\omega^2}}{\chi^2 ab u_a}\left\{\sqrt{\nu}\left(\frac{n^2\pi^2}{a} + \frac{m^2\pi^2}{b}\right) + \right.\\ \left. + \sqrt{\chi_0}\,\frac{\chi^4 u_0^2}{\omega^2}\right\}. \end{gathered} \tag{21}$$

Выражения (15)—(21) показывают, что потерями волны в пограничном слое пренебрегать нельзя.

3. УЧЕТ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ СТЕНОК

Если стенки волновода имеют конечную, но большую по величине проводимость, то условие равенства нулю нормальной составляющей магнитного поля на боковой границе волновода должно быть заменено приближенным условием Леонтовича $E_{tg} = \xi\,[\boldsymbol{H}_{tg}\boldsymbol{n}]$, где $\boldsymbol{E}_{tg}$, $\boldsymbol{H}_{tg}$ — тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей, $\boldsymbol{n}$—нормаль к боковой поверхности, ξ — комплексный импеданс [3]:

$$\xi = \frac{1}{2c}\sqrt{\frac{4\pi\omega}{\sigma'}}\,(1 - i). \tag{22}$$

Это приводит к дополнительному затуханию волны. Для его определения введем коэффициент поглощения как отношение потока энергии через боковую поверхность между двумя выбранными поперечными сечениями z_1 и z_2 волновода к удвоенной энергии поля в этом объеме [3]:

$$\delta = \frac{c}{8\pi} \int \xi' \overline{H^{2t}}\, ds_p/u \int \left(\frac{u_0^2}{2\rho_0} \overline{\rho^{2t}} + \rho_0 \frac{\overline{v^{2t}}}{2} + \frac{\overline{H^{2t}}}{8\pi} \right) d\Omega. \tag{23}$$

Здесь δ — усредненный по периоду колебаний коэффициент поглощения волны из-за конечной проводимости стенок, ξ' — действительная часть импеданса (22). Подставляя выражения для полей прямоугольного волновода (4), (6) в (23), проводя усреднение и интегрирование, получим:

$$\delta_{mn} = \frac{cH_0^2 \sqrt{\omega/\pi\sigma'}}{8abu^4} \times \frac{(n^2\pi^2/a + m^2\pi^2/b) + (\chi^4 u_a^2/\omega^2)(a+b)}{(1 - u_0^2/u^2)^2 \left[1 + (u_a^2/u^2)(1 + \chi^2 u^2/\omega^2)\right] + (\chi^2 u_0^2/\omega^2)(1 + u_0^2/u^2)]}, \tag{24}$$

где m и n — целые числа,

$$\chi^2 = \chi_{mn}^2 = n^2\pi^2/a^2 + m^2\pi^2/b^2, \tag{25}$$

σ' — проводимость стенок волновода.

Выражение для δ имеет более обозримый вид в рассмотренных ранее предельных случаях. Если $\chi u_0 u_a/\omega(u_0 + u_a) \gg 1$ (малые частоты), то при $u_a \gg u_0$

$$\delta(u = u_+) = \frac{c^2 \xi'}{8\pi} \frac{H_0^2 \chi(a+b)}{2\,abu_0^2} \tag{26}$$

и при $u_a \ll u_0$

$$\delta(u = u_+) = \frac{c^2 \xi'}{16\pi} \frac{\chi^2(a+b)\, u_a H_0^2}{u_0^3}. \tag{27}$$

Если же $\chi u_0 u_a/\omega\, |u_0 - u_a| \ll 1$ (большие частоты), то при $u_0 \gg u_a$

$$\delta(u = u_+) = \frac{c^2 \xi'}{16\,\pi ab} \frac{H_0^2 u_a}{u_0^4} \left(\frac{m^2\pi^2}{b} + \frac{n^2\pi^2}{a} \right); \tag{28}$$

$$\delta(u = u_-) = \frac{c^2 \xi'}{8\,\pi ab} \frac{H_0^2}{\chi^2 u_0^5} \left[\frac{\omega^2}{u_0^2} \left(\frac{n^2\pi^2}{a} + \frac{m^2\pi^2}{b} \right) + \chi^2 \left(\frac{n^2\pi^2 b}{a^2} + \frac{m^2\pi^2 a}{b^2} \right) \right] \tag{29}$$

$$(\chi u_0/\omega \ll 1)$$

и при $u_0 \ll u_a$

$$\delta(u = u_+) = \frac{c^2 \xi'}{16\,\pi ab} \frac{1}{\chi^2 u_0^5} \left(\frac{n^2\pi^2}{a} + \frac{m^2\pi^2}{b} \right); \tag{30}$$

$$\delta(u = u_-) = \frac{c^2 \xi' H_0^2}{16\pi abu_a} \left[\left(\frac{n^2\pi^2}{a} + \frac{m^2\pi^2}{b} \right) \frac{1}{u_a^2} + \frac{\chi^2}{\omega^2} \left(\frac{n^2\pi^2 b}{a^2} + \frac{m^2\pi^2 a}{b^2} \right) \right] \tag{31}$$

$$(\chi u_a/\omega \ll 1).$$

В (26) — (31), как и раньше, под $\delta(u = u_\pm)$ подразумевается коэффициент поглощения волны, распространяющейся с фазовой скоростью $u_\pm$.

Выражения (24) — (31) определяют зависимость коэффициента поглощения волны за счет конечной проводимости стенок от параметров волновода среды, величины внешнего магнитного поля и частоты сигнала. Так как в этой работе рассматривается линейная теория распространения волн в проводящей среде, то полный коэффициент поглощения данной mn-гармоники волны равен сумме коэффициентов $q + q_0 + \delta$, определяемых выражениями (8), (15) и (24). Для получения полного коэффициента поглощения при распространении в волноводе нескольких гармоник или волн необходимо рассчитать методом, использованным выше, коэффициент поглощения для каждой гармоники или волны и затем сложить их.

Метод учета малых эффектов диссипации, использованный в этой работе для прямоугольного волновода, может быть применен для нахождения поглощения волн, распространяющихся в цилиндрическом волноводе любого поперечного сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1 R. Gajewski, Phys Fluids., 2, 633 (1959).
2 Л. Д Ландау и Е. М Лифшиц, Механика сплошных сред, ГИТТЛ, М, 1954.
3 Л Д Ландау и Е М Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М, 1957.
4 Ю. Ф Филиппов, Изв высш уч зав—Радиофизика, 4, 924 (1961)

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
20 сентября 1960 г.

ON ABSORPTION OF MAGNETO-SOUND WAVES IN WAVEGUIDES

Yu. F. Filippov

The dependence of the absorption coefficient of the magneto-sound waves on the signal frequency, waveguide parameters, medium and the magnitude of external magnetic field has been obtained.