ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

*Том IV, № 5* *РАДИОФИЗИКА* *1961*

# МАГНИТОЗВУКОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ В РЕЗОНАТОРАХ

*Ю. Ф. Филиппов*

Найдено дисперсионное уравнение для собственных колебаний цилиндрических резонаторов, помещенных во внешнее магнитное поле и заполненных проводящей средой Получена зависимость коэффициента поглощения от частоты колебаний, параметров резонатора и среды.

## 1. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

В этом разделе проводится исследование собственных колебаний цилиндрических резонаторов с идеально проводящими стенками, заполненных средой и помещенных во внешнее постоянное магнитное поле $H_0$. Среду будем считать идеальной в том смысле, что эффектами диссипации в ней можно пренебречь. Цилиндрический резонатор представляет собой область пространства, ограниченную цилиндрическим волноводом произвольного поперечного сечения и двумя проводящими стенками, перпендикулярными его оси и расположенными на расстоянии $l$ одна от другой. Поставленная задача сводится к исследованию нелинейной системы магнитогидродинамических уравнений:

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho (\boldsymbol{v}\nabla)\, \boldsymbol{v} = -\nabla p - \frac{1}{4\pi} [\boldsymbol{H} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}];$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]; \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \boldsymbol{v}) = 0,$$

дополненных уравнением состояния среды

$$p = p\,(\rho).$$

Предположим, что отклонения от состояния равновесия малы, т. е.

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}';$$

$$\rho' \ll \rho_0; \quad p' \ll p_0; \quad |\boldsymbol{H}'| \ll H_0;$$

компоненты скорости $\boldsymbol{v}'$ также малы. После линеаризации система уравнений приводится к виду*

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{u_0^2}{\rho_0} \nabla \rho - \frac{1}{4\pi\rho_0} [\boldsymbol{H}_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{H}];$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}_0]; \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{1}$$

Исключая из первого уравнения $\boldsymbol{H}$ и $\rho$, получим уравнение для $\boldsymbol{v}$:

* Здесь для краткости опущены штрихи у $\rho'$, $v'$ и $H'$.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - u_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} v + u_a^2 \left[v (n\nabla)(nv) - (n\nabla)(n\nabla) v + \right.$$
$$\left. + n (n\nabla) \operatorname{div} v\right] = 0. \tag{2}$$

Здесь $u_a = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$ — скорость волны Альфвена, $u_0 = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}$ — скорость звука, $n = H_0/H_0$, $u_1^2 = u_a^2 + u_0^2$, $s$—энтропия.

Уравнение (2) справедливо, когда малые отклонения от состояния равновесия связаны только с изменением плотности (адиабатический процесс):

$$\nabla p = u_0^2 \nabla \rho.$$

Предположим далее, что внешнее магнитное поле направлено по оси резонатора $z$. В компонентах уравнение (2) в выбранной из соображений симметрии ортогональной криволинейной системе координат приводится к виду:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - u_a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) h_1 v_1 - u_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_2 v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_1 v_2\right) -$$
$$- u_0^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x_1 \partial z} = 0; \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - u_a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) h_2 v_2 - u_1^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_2 v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_1 v_2\right) -$$
$$- u_0^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x_2 \partial z} = 0; \tag{3а}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - u_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v_z - u_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_2 v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_1 v_2\right) = 0, \tag{3б}$$

где $x_1$ и $x_2$—координаты поперечного сечения волновода, $h_1$ и $h_2$ — коэффициенты Ляме, $v_1$ и $v_2$—проекции скоростей на координатные оси криволинейной системы координат. Уравнения (3)—(3б) справедливы только для тех ортогональных систем координат, у которых $h_3 = 1$, а $h_1 = h_1(x_1 x_2)$ и $h_2 = h_2(x_1 x_2)$ не зависят от $z$.

Дифференцируя (3) по $x_2$, а (3а) по $x_1$ и вычитая, получим связь между $v_1$ и $v_2$ вида:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - u_a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} h_1 v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} h_2 v_2\right) = 0. \tag{4}$$

Обращение в нуль первой скобки уравнения (4) соответствует альфвеновским колебаниям, исследованием которых мы заниматься не будем*. Поэтому уравнение (4) тождественно удовлетворяется функцией $\varphi$, определенной соотношениями:

$$h_1 v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \qquad h_2 v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}. \tag{5}$$

---

* См примечание при корректуре.

Подставляя (5) в системы (3)—(3б) и исключая $v_z$, получим уравнение для $\varphi$:

$$\left(u_1^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - u_0^2 u_a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - u_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - u_a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = 0, \tag{6}$$

решение которого ищем в виде

$$\varphi (x_1, x_2, z, t) = R (x_1, x_2)\, Z (z, t), \tag{7}$$

где $R$ и $Z$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial R}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial R}{\partial x_2} + h_1 h_2 \chi^2 R = 0; \tag{8}$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - u_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - u_a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \chi^2 \left(u_1^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - u_0^2 u_a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right] Z = 0. \tag{9}$$

Здесь $\chi^2$—постоянная разделения. Решая (8) и удовлетворяя соответствующим граничным условиям на боковых стенках, получим выражение для $\chi^2$, зависящее от параметров резонатора.

Считая $\chi^2$ известным, обратимся к рассмотрению уравнения (9), решение которого для гармонических колебаний $e^{i\omega t}$ имеет вид:

$$Z = (A_1 \cos \gamma_1 z + B_1 \sin \gamma_1 z + A_2 \cos \gamma_2 z + B_2 \sin \gamma_2 z)\, e^{i\omega t}, \tag{10}$$

где $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$—постоянные, а

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}\, u_0 u_a} \left\{\left(\omega^2 u_1^2 - \chi^2 u_0^2 u_a^2\right) \pm \pm \sqrt{\left[\omega^2 (u_a - u_0)^2 + \chi^2 u_0^2 u_a^2\right]\left[\omega^2 (u_a + u_0)^2 + \chi^2 u_0^2 u_a^2\right]}\right\}^{1/2}. \tag{11}$$

Поле скоростей и напряженности магнитного поля легко теперь могут быть выражены через $\varphi$:

$$H_1 = \frac{H_0}{i\omega h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \quad H_z = \frac{\chi^2 H_0}{i\omega} \varphi;$$
$$H_2 = \frac{H_0}{i\omega h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}; \quad v_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1};$$
$$v_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}; \quad v_z = \sum_{i=1}^{2} \delta_i (A_i \sin \gamma_i z - B_i \cos \gamma_i z)\, R e^{i\omega t}; \tag{12}$$
$$\rho = \frac{\rho_0}{i\omega} \sum_{i=1}^{2} \sigma_i (A_i \cos \gamma_i z + B_i \sin \gamma_i z)\, R (x_1, x_2)\, e^{i\omega t},$$

где

$$\delta_i = \frac{1}{\gamma_i u_0^2} \left(\gamma_i^2 u_a^2 + \chi^2 u_1^2 - \omega^2\right); \quad \sigma_i = \frac{1}{u_0^2} \left[\left(\gamma_i^2 + \chi^2\right) u_a^2 - \omega^2\right]. \tag{13}$$

Постоянные $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$ и собственные частоты находим, удовлетворяя граничным условиям на идеально проводящих стенках, перпендикулярных оси резонатора, где должны обращаться в нуль нормальные компоненты скорости и напряженности магнитного поля и тангенциальные компоненты электрического поля

$$E = -\frac{1}{c}\,[vH_0]; \tag{14}$$

$$v_z \Big|_{\substack{z=0\\ z=l}} = 0; \tag{15}$$

$$H_z \Big|_{\substack{z=0\\ z=l}} = 0; \tag{15а}$$

$$E_{\text{tg}} \Big|_{\substack{z=0\\ z=l}} = 0 \tag{15б}$$

($l$—длина резонатора).

Подставляя (12) в (15)—(15б), получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{q_1^2+q_2^2}{2q_1q_2}\sin(\gamma_1 l)\sin(\gamma_2 l) = 1-\cos(\gamma_1 l)\cos(\gamma_2 l), \tag{16}$$

где

$$q_i = \frac{1}{\gamma_i}\left(\gamma_i^2 u_a^2 + \chi^2 u_1^2 - \omega^2\right) \quad (i=1,\ 2). \tag{17}$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Внешнее магнитное поле равно нулю: $u_a \equiv H_0/\sqrt{4\pi\rho_0} = 0$. Компоненты напряженности магнитного ($\boldsymbol{H}$) и электрического ($\boldsymbol{E}$) полей обращаются в нуль, поэтому условия (15а) и (15б) выполняются тождественно. Уравнение (9) переходит в уравнение вида

$$u_0^2\frac{d^2Z}{dz^2} + \left(\omega^2-\chi^2u_0^2\right)Z = 0, \tag{18}$$

решением которого, удовлетворяющим граничному условию (15а), является $\sin(r\pi z/l)$. Поэтому

$$\varphi = R(x_1,\ x_2)\sin\left(\frac{r\pi}{l}\,z\right)e^{i\omega t} \tag{19}$$

и частота колебаний равна

$$\omega = u_0\sqrt{\chi^2 + r^2\pi^2/l^2}. \tag{20}$$

б) Тепловыми эффектами пренебрегаем: $u_0 = 0$. Из уравнений (3)—(3б) видно, что компонента скорости $v_z$ обращается в нуль, т. е. условие (15а) выполняется тождественно. Уравнение (9) и в этом случае переходит в уравнение второго порядка:

$$u_a^2\frac{d^2Z}{dz^2} + \left(\omega^2-\chi^2u_a^2\right)Z = 0. \tag{21}$$

Решением его, удовлетворяющим (15а) и (15б), является $\cos(r\pi z/l)$. Поэтому

$$\varphi = R(x_1,\ x_2)\cos\left(\frac{r\pi}{l}z\right)e^{i\omega t}, \tag{22}$$

а частота колебаний в этом случае равна

$$\omega = \left(H_0/\sqrt{4\pi\rho_0}\right)\sqrt{\chi^2 + r^2\pi^2/l^2}. \tag{23}$$

в) Пусть $\gamma_1 \gg \gamma_2$. Тогда нетрудно показать, что это неравенство тождественно условию

$$\frac{q_1^2 + q_2^2}{2q_1q_2} \gg 1.$$

Приближенными решениями уравнения (16) при этом являются либо

$$\gamma_1 l \simeq r\pi, \tag{23а}$$

либо

$$\gamma_2 l \simeq s\pi, \tag{23б}$$

где $r$ и $s$—целые числа.

При больших частотах (верхняя граница частот определяется применимостью уравнений магнитной гидродинамики) и больших магнитных полях, когда

$$H_0/\sqrt{4\pi\rho_0} \gg u_0, \quad \chi u_0/\omega \ll 1,$$

собственные частоты резонатора равны

$$\omega = \frac{r\pi}{l} u_0 \tag{24}$$

в случае (23а) и

$$\omega = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}\sqrt{\frac{s^2\pi^2}{l^2} + \chi^2} \tag{24а}$$

в случае (23б).

При больших частотах и малых магнитных полях, когда

$$\frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \ll u_0, \qquad \frac{\chi u_a}{\omega} \ll 1,$$

собственные частоты равны соответственно

$$\omega = \frac{r\pi}{l}\frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}; \tag{25}$$

$$\omega = u_0\sqrt{\frac{s^2\pi^2}{l^2} + \chi^2}. \tag{25а}$$

В отличие от случаев, в которых или внешнее магнитное поле равно нулю, или пренебрегается тепловыми эффектами (случаи а и б), здесь появляется новая ветвь колебаний, частоты которых определяются выражениями (24) и (25).

В полученные выше решения входит параметр $\chi^2$, зависящий от геометрии поперечного сечения резонатора. Этот параметр полностью определяется граничными условиями на боковых стенках резонатора для решений уравнения (8). Проиллюстрируем это на прямоугольном резонаторе и торе.

*Прямоугольный резонатор.* В прямоугольной системе координат $x$, $y$ $(h_1 = h_2 = 1)$ (8) сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \chi^2 R = 0, \tag{26}$$

решением которого, удовлетворяющим граничным условиям, является

$$R = \text{const} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right); \quad \chi^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \tag{27}$$

где $a$ и $b$—линейные размеры стенок волновода в поперечном сечении. Подставляя (26) в (24)—(25а), получим явную зависимость частот от параметров задачи.

*Тор прямоугольного сечения.* Этот резонатор получается ограничением идеально проводящими стенками коаксиальной линии с обоих концов. В цилиндрической системе координат $r$, $\theta$ $(h_1 = 1,\ h_2 = r)$ уравнение (8) сводится к уравнению типа Бесселя, решением которого, удовлетворяющего граничным условиям при $r = a$, $b$, является

$$R = \text{const}\left[J_m(\chi r) - \frac{J'_m(\chi b)}{N'_m(\chi b)} N_m(\chi r)\right] e^{im\theta}. \tag{28}$$

Здесь штрих означает производную по аргументу, а $\chi$ определяется из уравнения:

$$J'_m(\chi b)\, N'_m(\chi a) - J'_m(\chi a)\, N'_m(\chi b) = 0, \tag{29}$$

где $J_m$ и $N_m$—функции Бесселя и Неймана порядка $m$. При $\chi a \gg 1$, $\chi b \gg 1$ (29) принимает более простой вид:

$$\chi\,(b - a) = n\pi. \tag{30}$$

Пусть нам удалось создать конфигурацию плазменного сгустка в виде прямоугольного тора, при $r = a$ и $r = b$ граничащего с вакуумом (или средой с диэлектрической постоянной $\varepsilon$), а при $z_1 = 0$, $z_2 = l$ ограниченного двумя идеально проводящими плоскостями. В качестве граничного условия при $r = a$ и $r = b$ примем постоянство давления, непрерывность напряженности магнитного поля и равенство нулю нормальной компоненты тока. Исходя из уравнений магнитной гидродинамики, можно показать [1], что первое условие сводится к равенству нулю тангенциальных составляющих скорости:

$$v_{\text{tg}}\Big|_{\substack{r=a\\ r=b}} = 0. \tag{31}$$

Решением уравнения Бесселя, удовлетворяющего этим граничным условиям, является

$$R = \text{const}\left[J_m(\chi r) - \frac{J_m(\chi b)}{N_m(\chi b)} N_m(\chi r)\right] e^{im\theta}, \tag{32}$$

где $\chi$ определяется соотношением

$$N_m(\chi a)\, J_m(\chi b) - N_m(\chi b)\, J_m(\chi a) = 0. \tag{33}$$

При $\chi a \gg 1$, $\chi b \gg 1$ (33) переходит в $\chi\,(b - a) = n\pi$. Последнее уравнение совпадает с (30), т. е. в этом предельном случае $\chi$ не зависит от вида граничного условия на боковой поверхности.

*Тор круглого сечения.* Строгое решение для этого типа резонатора не может быть получено способом, использованным выше. Рассмотрим круглый цилиндр, причем внешнее магнитное поле $H_0$ вдоль оси резонатора создадим постоянными азимутальными токами $j_\theta$, текущими по его поверхности $r=b$. Исходя из уравнений $\operatorname{rot} \mathbf{H}_0=(4\pi/c)\,\mathbf{j}$, $\operatorname{div} \mathbf{H}_0=0$ и граничного условия $H_n=0$ при $r=b$, можно показать, что внешнее магнитное поле будет однородным по сечению.

Для получения приближенного решения [2] деформируем этот прямой цилиндр так, чтобы его ось превратилась в окружность радиуса $d$ и оба конца соединились. Тогда $z=d\theta$, где $\theta$—угол вращения вокруг тора, полученного таким образом. Введем полярные координаты $\rho$ и $\varphi$ на окружности радиуса $d$. В случае, когда на длине, равной нескольким длинам волны, тор может быть отождествлен с прямым цилиндром, в нем возможны те же собственные волны, что и в прямом цилиндре, если положить $z=d\theta$. Условие однозначности при изменении угла на $2\pi$ $f(\theta)=f(\theta+2\pi)$ налагает ограничения на $\gamma$:

$$\gamma d=p \qquad (p=\pm 1,\ \pm 2,\ldots). \tag{34}$$

Условие применимости рассмотренного приближения, как нетрудно убедиться [2], имеет вид: $p \gg 1$.

Полагая в (20)—(24а) $z=d\theta$ и $\gamma=p/d$ и используя (27), получим явные выражения для поля скоростей и напряженности магнитного поля. Подставляя (34) в (11), получим, что собственные частоты тора равны

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\chi^2+\frac{p^2}{d^2}\right)\left(u_0^2+u_a^2\right)} \times \left[1 \pm \sqrt{1-\frac{4u_0^2u_a^2}{\left(u_0^2+u_a^2\right)\left(1+\frac{\chi^2d^2}{p^2}\right)}}\right], \tag{35}$$

где $\chi^2$ определяется из (26) или (29).

## 2. УЧЕТ ЭФФЕКТОВ ДИССИПАЦИИ

Все результаты, полученные выше, справедливы, когда эффектами диссипации можно пренебречь. Если они малы, то наличие вязкости, теплопроводности и проводимости приводит к уменьшению амплитуды колебаний, которое может быть легко подсчитано. Для простоты ниже предположим, что в резонаторе имеется одна $mn$-гармоника.

*Поглощение колебаний в среде.* Определим коэффициент поглощения собственных колебаний в вязкой проводящей среде отношением

$$q_1=\frac{\overline{|\partial E/\partial t|}^t}{2\overline{E}^t}, \tag{36}$$

где $\overline{\partial E}^t/\partial t$—энергия, диссипируемая в рассматриваемом объеме и усредненная по периоду колебаний, $\overline{E}^t$ — средняя энергия собственных колебаний в этом объеме. Используя уравнения магнитной гидродинамики, можно показать, что [3]

$$\left|\frac{\partial E}{\partial t}\right|=\frac{\varkappa}{T_0}\int(\nabla T)^2\,d\Omega+\eta/2\int\overline{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\,\delta_{ik}\,\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^t}\,d\Omega+$$

$$+\xi\int\overline{(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2}^t\,d\Omega+\frac{c^2}{16\pi^2\sigma}\int\overline{(\operatorname{rot}\boldsymbol{H})^2}^t\,d\Omega;\tag{37}$$

$$E=\int\left(\frac{u_0^2}{2\rho_0}\rho^2+\rho_0\frac{v^2}{2}+\frac{H^2}{8\pi}\right)d\Omega.\tag{38}$$

Здесь индексы $i$, $k$, $l$ соответствуют координатам $x$, $y$, $z$, а $x_x\equiv x$, $x_y\equiv y$, $x_z\equiv z$ (подразумевается, что по одинаковым индексам производится суммирование), $\varkappa$, $\eta$ и $\xi$, $\sigma$—коэффициенты теплопроводности, вязкости и проводимости, $T_0$—равновесная температура. Интегрирование в (37) и (38) производится по объему, ограниченному стенками резонатора.

При малых эффектах диссипации в первом приближении в (37), (38) вместо $\rho$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{H}$ можно подставить решение системы магнитогидродинамических уравнений для идеальной среды (20)—(24а). Кроме того, из термодинамических соотношений следует, что

$$T=\left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}\right)^{1/2}\frac{u_0\sqrt{T_0}}{\rho_0}\rho.\tag{39}$$

Для определенности найдем коэффициент поглощения для данной $mn$-гармоники колебания в прямоугольном волноводе. Выражения для плотности, поля скоростей и напряженности магнитного поля при этом имеют вид:

$$v_x=-\frac{n\pi}{a}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\cos(\omega t)\,\psi;$$

$$v_y=-\frac{m\pi}{b}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\cos(\omega t)\,\psi;$$

$$H_x=-\frac{n\pi}{a}\frac{H_0}{\omega}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin(\omega t)\frac{d\psi}{dz};$$

$$H_y=-\frac{m\pi}{b}\frac{H_0}{\omega}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin(\omega t)\frac{d\psi}{dz};$$

$$H_z=\chi^2\frac{H_0}{\omega}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin(\omega t)\,\psi;\tag{40}$$

$$v_z=\varphi_0\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\delta_i\,(\mu_1\sin\gamma_i z+$$

$$+\lambda_i\mu_2\cos\gamma_i z)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin(\omega t);$$

$$\rho=\frac{\rho_0\varphi_0}{\omega}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\sigma_i\,(\mu_1\cos\gamma_i z-\lambda_i\mu_2\sin\gamma_i z)\times$$

$$\times\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin(\omega t),$$

где

$$\lambda_1=1;\qquad\lambda_2=\delta_1/\delta_2;$$

$$\mu_1=\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\lambda_i\sin\gamma_i l;\qquad\mu_2=\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\lambda_i\cos\gamma_i l;\tag{41}$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} \varphi_0 (\mu_1 \cos \gamma_i z - \mu_2 \lambda_i \sin \gamma_i z),$$

а $\gamma_i$ и $\delta_i \sigma_i$ определяются соответственно выражениями (11) и (12).

Подставляя (39) и (40) в (36), производя усреднение по периоду колебаний и интегрирование по объему резонатора, получим выражение для $q_1$, которое в общем случае имеет громоздкий вид. Поэтому ниже ограничимся рассмотрением резонаторов большой длины, для которых $\gamma_1 l \gg 1$, $\gamma_2 l \gg 1$ ($l$—длина резонатора). В этом предельном случае выражение для $q_1$ может быть приведено к виду:

$$q_1 = \frac{1}{A_0} \sum_{i,j=1}^{2} \mu_j^2 \lambda_{ij} \left\{ \frac{\varkappa u_0^2}{\omega^2} \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{c_p} \right) \sigma_j^2 (\chi^2 + \gamma_j^2) + \right.$$
$$+ \eta \left[ 2\chi^4 + 2\delta_j^2 \gamma_j^2 + \chi^2 (\gamma_i - \delta_i)^2 \right] + \left( \xi - \frac{4}{3} \eta \right) \sigma_j^2 + \tag{42}$$
$$\left. + \frac{c^2 u_a^2}{4\pi\sigma\omega^2} \chi^2 (\chi^2 - \gamma_j^2)^2 \right\},$$

где

$$\lambda_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix};$$

$$A_0 = \sum_{i,j=1}^{2} \mu_i^2 \left[ (1 + \lambda_i^2) \chi^2 \left( 1 + \frac{\chi^2 u_a^2}{\omega^2} \right) + \right. \tag{43}$$
$$\left. + \lambda_{ij} \left( \delta_j^2 + \frac{u_0^2}{\omega^2} \sigma_j^2 + \frac{\chi^2 u_a^2}{\omega^2} \gamma_j^2 \right) \right].$$

Для больших частот и больших напряженностей магнитного поля, когда

$$u_0/u_a \ll 1, \qquad \chi u_a/\omega \ll 1, \qquad \omega l/u_a \gg 1, \tag{44}$$

выражение для $q_1$ принимает более обозримый вид:

$$q_1 = \frac{\omega^2}{2Au_0^2} \left\{ \left[ \varkappa \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) + \xi + \frac{4}{3} \eta \right] (\theta_1^2 + \theta_2^2) + \right.$$
$$\left. + \eta \theta_2^2 \frac{\chi^2 u_a^2}{\omega^2} \frac{u_a^6}{u_0^6} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\chi^2 u_0^2}{\omega^2} \frac{u_0^2}{u_a^2} \left[ \theta_1^2 + \left( 1 + \frac{\omega^4}{\chi^4 u_a^4} \frac{u_0^2}{u_a^2} \right) \theta_2^2 \right] \right\}, \tag{45}$$

где

$$A = \theta_1^2 + \left( \frac{3}{2} + \frac{\omega^2}{\chi^2 u_a^2} \frac{u_0^4}{u_a^4} \right) \theta_2^2;$$

$$\theta_1 = \sin \gamma_1 l - \frac{\omega^2}{\chi^2 u_0 u_a} \sin \gamma_2 l; \qquad \theta_2 = \cos \gamma_1 l - \cos \gamma_2 l.$$

*Поглощение в пограничном слое.* Наличие диссипативных эффектов не только меняет общий характер дифференциальных уравнений магнитной гидродинамики, повышая их порядок, но и приводит к изменению граничных условий на стенках резонатора: на них должны обращаться в нуль не только нормальная, но и тангенциальные компоненты скорости. Это требование приводит к возникновению пограничного слоя, где наличие градиентов касательной составляющей скорости вызывает дополнительное поглощение колебаний.

Приведенное выше определение поглощения, очевидно, справедливо, когда потери в пограничном слое малы, т. е. отношение $\delta/a$, где $\delta$—толщина пограничного слоя, $a$—линейный размер резонатора, не слишком велико. Для малых $\delta/a$ можно положить для простоты $d(H/\rho)/dt = 0$, так как в пограничном слое задача существенно одномерная; с другой стороны, нормальная компонента напряженности магнитного поля в этом слое практически равна нулю. Уравнение движения тогда сводится к обычному уравнению движения гидродинамики вязкой жидкости с измененным давлением. Оценка толщины пограничного слоя, как известно, дает: $\delta = \sqrt{\nu/\omega}$, где $\nu = \eta/\rho_0$—кинематическая вязкость, $\omega$—собственная частота резонатора. Оценка членов $\partial v/\partial t$ и $(v\nabla)\,v$ показывает, что при частотах $\omega \gg v_0^2/\nu$ ($v_0$—максимальная амплитуда колебаний резонатора) можно при грубой оценке пренебречь влиянием нелинейных эффектов.

Используя полученные выше решения, можно показать, что отклонение температуры $T'$ от равновесной не равно нулю на стенках резонатора. Поэтому вблизи твердой стенки существует периодически меняющаяся по времени разность температур между средой и стенкой, даже если средняя температура среды равна температуре стенки. Наличие же градиентов температуры в пограничном слое приводит к дополнительному поглощению энергии вследствие теплопроводности. Так как на торцах резонатора $z = 0,\, l$ все компоненты скорости обращаются в нуль, то проводящая среда полностью „прилипает" к ним. Поэтому пограничный слой на торцах возникает только за счет теплопроводности $(T'|_{z=0,l} \neq 0)$.

Учитывая сделанные выше замечания, способом, рассмотренным в [2], найдем коэффициент поглощения $q_2$, определяемый как отношение энергии, диссипируемой в единицу времени на поверхности стенок резонатора, к удвоенной энергии данного колебания. Опуская громоздкие промежуточные выкладки, можно показать, что выражение для $q_2$ имеет вид:

$$q_2 = \frac{2\sqrt{2\omega}}{ablA_0}\left\{\sum \mu_i^2\lambda_{ij}\left[\left(\sqrt{\chi_0}\,\frac{u_0^2}{\omega^2}\,\sigma_j^2 + \sqrt{\nu}\,\delta_j^2\right)(a+b)\,l + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{n^2\pi^2}{a} + \frac{m^2\pi^2}{b}\right) l\right] + \sqrt{\chi_0}\,\frac{(\gamma_1^2-\gamma_2^2)^2}{\omega^2 u_0^2}\,\mu_1^2 ab\right\} \tag{46}$$

при $\gamma_1 l \gg 1$, $\gamma_2 l \gg 1$ и

$$q_2 = \frac{\sqrt{2\omega}}{ablA}\left\{\sqrt{\chi_0}\,\left[(\mu_1^2+\mu_2^2)\,(a+b)\,l + \mu_1^2 ab\right] + \right.$$
$$\left. + l\sqrt{\nu}\,\left[(\mu_1^2+2\mu_2^2)\,(a+b)\right] + \frac{\omega^2}{\chi^2 u_a^2}\,\frac{u_0^4}{u_a^4}\,\frac{\mu_2^2}{\chi^2}\left(\frac{n^2\pi^2}{a} + \frac{m^2\pi^2}{b}\right)\right. \tag{47}$$

при $u_0/u_a \ll 1$; $\chi u_a/\omega \ll 1$, $\omega l/u_a \gg 1$, где

$$\chi_0 = \frac{\varkappa}{\rho_0 c_p}\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right); \qquad \mu = \eta/\rho_0.$$

Сравнивая выражения (45) с (46), (47), можно убедиться в том, что поглощение в пограничном слое может превышать поглощение в среде.

*Омические потери на стенках.* Выше мы предполагали, что стенки резонатора идеально проводящие. Наличие малого импеданса

$$\xi = \frac{1}{2c}\sqrt{\frac{4\pi\omega}{\sigma'}}\,(1-i)$$

приводит к дополнительному поглощению энергии магнитозвуковых колебаний. Введем коэффициент поглощения, усредненный по периоду колебаний, как отношение средней энергии, диссипируемой на стенке из-за конечной проводимости последних, к удвоенной средней энергии поля резонатора:

$$q_3 = \frac{c}{8\pi}\,\frac{\oint \xi'\,\overline{|H|^2}^t\,dS_p}{2\overline{E}^t} \tag{48}$$

($\xi'$ — вещественная часть импеданса).

Предполагая импеданс малым, в первом приближении подставим в (48) поле скоростей и напряженность магнитного поля, получающиеся из решения исходной задачи при $\xi = 0$. При $\gamma_1 l \gg 1$, $\gamma_2 l \gg 1$ выражение для $q_3$ легко приводится к виду:

$$q_3 = \frac{2c^2\xi' u_a^2}{\omega^2 A_0 abl}\left\{\sum_{i,j=1}^{2}\left[\left(\frac{n^2\pi^2}{a}+\frac{m^2\pi^2}{b}\right)\gamma_j^2 + \chi^4\,(a+b)\right]\lambda_{ij}\mu_i^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\chi^2 ab}{2}\left[\mu_2^2\,(\gamma_1-\lambda_2\gamma_2)^2\right]\right\}, \tag{49}$$

которое при больших частотах и напряженностях внешнего магнитного поля (44) переходит в формулу

$$q_3 = \frac{c^2\xi'}{\chi^4 abl}\,\frac{u_0^4}{u_a^4}\left\{\left[\frac{n^2\pi^2}{a}+\frac{m^2\pi^2}{b}\right] + 2\chi^4\,\frac{u_0^2}{\omega^2}\,(a+b)\,\frac{\chi^4 u_a^4}{\omega^2}\,\theta_1^2 l + \right.$$
$$\left. + \left[\left(\frac{n^2\pi^2}{a}+\frac{m^2\pi^2}{b}\right)\frac{\omega^2 l}{u_a^2} + \chi^4\,(a+b)\,l + \frac{\chi^2 ab}{2}\,\frac{\omega^2}{u_a^2}\right]\theta_2^2\right\}. \tag{50}$$

Полный коэффициент поглощения данной $mn$-гармоники определяется суммой коэффициентов $q_1$, $q_2$, $q_3$. В линейной теории магнитозвуковых колебаний при наличии в резонаторе нескольких гармоник полный коэффициент поглощения равен сумме коэффициентов поглощения каждой гармоники.

В заключение автор выражает благодарность В. Л. Герману за предложенную тему.

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. Gajewski, Phys. Fluids, **2**, 633 (1959)
2. Луи де Бройль, Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах, ИЛ, М, 1948
3. Л Д Ландау и Е М Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М, 1957

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
20 сентября 1960 г.

# MAGNETO-SOUND OSCILLATIONS IN RESONATORS

*Yu. F. Filippov*

The dispersive equation for the self-oscillations of the cylindrical resonators, placed in the external magnetic field and filled with conducting medium has been found. The dependence of the absorption coefficient on the oscillations frequency, resonator parameters and medium has been obtained.

*Примечание при корректуре.* Это исследование проведено в работе Гаевского и Маварди (Phys. Fluids, **3**, 820 (1960)), которая стала известна автору после направления в печать настоящей статьи.