НЕКОТОРЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ФОРМЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ КОЛЕБАНИЯ

А. Н. Малахов

Рассматривается искажение формы спектральной линии колебания благодаря корреляции между флюктуациями амплитуды и частоты Методом моментов анализируется форма спектральной линии колебания при различных спектрах флюктуаций частоты

Как известно, колебание любого реального автогенератора обладает флюктуациями амплитуды и частоты, причем между ними в общем случае [1] имеется определенная корреляция. Представляет интерес определение влияния этой корреляции на форму спектральной линии колебания. В настоящей статье рассматривается это влияние и показывается, что упомянутая корреляция искажает форму спектральной линии, делая ее несимметричной относительно средней частоты колебания.

В литературе уже неоднократно обсуждалась форма спектральной линии колебания, обязанная флюктуациям частоты (см., например, [2-4]). При этом, в частности, было получено (в предположении нормального распределения флюктуаций частоты), что для случая достаточно малого индекса модуляции m, определяемого как отношение интенсивности флюктуаций частоты к ширине спектра флюктуаций частоты, форма линии получалась резонансной (естественная форма линии), а для случая достаточно большого m—гауссовой (техническая форма линии).

Анализ показывает также (см., например, [5]). что обе эти формы, строго говоря, получаются лишь в предельных случаях $m = 0$ и $m = \infty$. Если брать просто $m \ll 1$ и $m \gg 1$, то формы спектральных линий будут лишь приближенно резонансной и гауссовой, отклоняясь от последних по мере удаления от центра линии. В настоящей статье предлагается метод моментов, которым достаточно просто можно анализировать форму спектральной линии и ее „близость“ к той или иной форме, основываясь лишь на некоторых простых характеристиках спектра флюктуаций частоты.

1. ОБЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ФОРМЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим колебание вида

$$z(t) = R_0 [1 + \alpha(t)] \cos [\omega_0 t + \varphi(t)];$$
$$\varphi(t) \equiv \int \nu(t)\, dt, \quad \overline{\alpha^2} \ll 1, \quad \overline{\nu^2} \ll \omega_0^2, \quad \overline{\alpha} = \overline{\nu} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\alpha(t)$ и $\nu(t)$ — флюктуации амплитуды и частоты колебания. Черта сверху означает статистическое усреднение.

Форма спектральной линии этого колебания есть не что иное, как спектральная плотность $W_z(\omega - \omega_0)$ случайного процесса $z(t)$, отсчитываемая от среднего значения частоты ω_0, и она известным образом связана с функцией корреляции $\Phi_z(\tau) = \widetilde{z(t)\, z(t+\tau)}$ процесса $z(t)$, где волнистая черта сверху означает временное усреднение.

Считая, что случайные процессы $\alpha(t)$ и $\nu(t)$ являются стационарными и стационарно связанными, из (1) можно найти:

$$\Phi_z(\tau) = A^0(\tau)\cos\omega_0\tau - A^1(\tau)\sin\omega_0\tau, \tag{2}$$

где

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2}\,\overline{[1 + \alpha(t) + \alpha(t+\tau) + \alpha(t)\,\alpha(t+\tau)]\cos\Delta\varphi}\,; \tag{3}$$

$$A^1(\tau) = \frac{R_0^2}{2}\,\overline{[1 + \alpha(t) + \alpha(t+\tau) + \alpha(t)\,\alpha(t+\tau)]\sin\Delta\varphi}\,; \tag{4}$$

$$\Delta\varphi = \int\limits_t^{t+\tau} \nu(\xi)\,d\xi. \tag{5}$$

Здесь $A^0(\tau)$ и $A^1(\tau)$ соответственно четная и нечетная функции аргумента. Вводя частоту $\Omega = \omega - \omega_0$, можно получить из (2), пренебрегая, как обычно, членами с $\cos[(\omega + \omega_0)\tau]$ и $\sin[(\omega + \omega_0)\tau]$, форму спектральной линии колебания:

$$W_z(\Omega) = W_z^0(\Omega) + W_z^1(\Omega); \tag{6}$$

$$W_z^0(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A^0(\tau)\cos\Omega\tau d\tau, \qquad W_z^1(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A^1(\tau)\sin\Omega\tau d\tau. \tag{7}$$

Из формулы (6) видно, что в общем случае форма линии является несимметричной, так как она имеет как четную, так и нечетную части. Несимметричность линии обязана нечетной функции $A^1(\tau)$. Если $A^1(\tau) \equiv 0$, то, очевидно, форма спектральной линии имеет симметричный вид. Анализируя формулу (4), легко видеть следующее. При статистической независимости между $\alpha(t)$ и $\nu(t)$ (а, следовательно, и между $\alpha(t)$ и $\Delta\varphi$) имеем:

$$A^1(\tau) = \frac{R_0^2}{2}\,[1 + \Phi_\alpha(\tau)]\,\overline{\sin\Delta\varphi}.$$

Если теперь вероятностное распределение $\nu(t)$ симметрично, то $\overline{\sin\Delta\varphi}=0$ и мы получаем $A^1(\tau) \equiv 0$. Если же имеет место несимметричность распределения $\nu(t)$, то она через посредство $A^1(\tau)$, даже при статистической независимости $\alpha(t)$ и $\nu(t)$, приводит к несимметричности $W_z(\Omega)$.

Если предположить симметричность вероятностных распределений для $\alpha(t)$ и $\nu(t)$ (практически наиболее вероятный случай), то лишь корреляция между $\alpha(t)$ и $\nu(t)$ фактически может привести к $A^1(\tau) \neq 0$, а следовательно, и к несимметричности формы линии.

Формулы (3) и (4) для $A^0(\tau)$ и $A^1(\tau)$ записаны в самой общей форме, они справедливы при любых законах распределения α и ν, и поэтому достаточно трудно сделать какие-либо конкретные заключения о функциях $A^0(\tau)$ и $A^1(\tau)$. Анализ $A^0(\tau)$ и $A^1(\tau)$, а следовательно, и $W_z(\Omega)$ удается провести до конца лишь для некоторых немногих частных случаев. Некоторые из них мы рассмотрим ниже.

2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Рассмотрим случай частотных флюктуаций ($\alpha(t) \neq 0$), обладающих симметричным вероятностным распределением ($\overline{\sin\Delta\varphi} = 0$). Вместо (3) и (4) будем иметь:

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2}\overline{\cos\Delta\varphi}; \qquad A^1(\tau) \equiv 0. \tag{8}$$

Пусть теперь флюктуации частоты представляют собой сколь угодно медленный процесс, закон распределения которого описывается плотностью вероятности $f(\nu)$. В этом случае

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2}\overline{\cos\nu\tau} = \frac{R_0^2}{2}\int f(\nu)\cos\nu\tau\, d\nu.$$

Отсюда видно, что $A^0(\tau)$ пропорциональна косинус-трансформации $f(\nu)$. Поскольку, с другой стороны, $W_z(\Omega)$ пропорциональна косинус-трансформации $A^0(\tau)$ (см. формулы (6), (7)), то нетрудно понять, что $W_z(\Omega)$ пропорциональна $f(\nu)$. Вычисление показывает, что

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} f(\Omega). \tag{9}$$

Таким образом, форма спектральной линии колебания совпадает с формой плотности вероятности флюктуации частоты.

Этот случай может быть назван случаем технических флюктуаций частоты, поскольку медленные квазистатические флюктуации частоты обычно порождаются в генераторах медленными флюктуациями параметров. В обычном предположении нормального закона распределения флюктуаций частоты мы получаем известную гауссову (техническую) форму спектральной линии $W_z(\Omega)$.

Обратимся теперь ко второму частному случаю, когда по-прежнему справедлива формула (8). Пусть теперь флюктуации частоты представляют собой сколь угодно быстрый (дельта-коррелированный) случайный процесс с функцией корреляции

$$\Phi_\nu(\tau) = 2B\delta(\tau),$$

где $\delta(\tau)$—дельта-функция. При этом закон распределения флюктуаций частоты может оставаться произвольным. Рассмотрим набег фазы $\Delta\varphi$ за время τ (формула (5)). Поскольку $\nu(t)$ дельта-коррелирована, $\Delta\varphi$ представляет собой сумму бесконечно большого числа независимых случайных величин и вследствие этого имеет нормальное распределение. Кроме того, легко показать, что

$$\overline{\Delta\varphi^2} = 2B\tau, \tag{10}$$

т. е. независимо от закона распределения флюктуаций частоты для дисперсии фазы имеет место диффузионный закон. Учитывая нормальное распределение для $\Delta\varphi$ и соотношение (10), нетрудно получить:

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2}\overline{\cos\Delta\varphi} = \frac{R_0^2}{2}\exp(-B\tau).$$

Вычисляя с помощью (6) и (7) спектральную плотность $W_z(\Omega)$, найдем:

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi}\frac{B}{B^2+\Omega^2}. \tag{11}$$

Форма линии (11) является известной естественной (называемой также лоренцовой или резонансной) формой спектральной линии. Как следует из вышеизложенного, для ее реализации достаточно лишь предположение о дельта-коррелированности флюктуаций частоты.

Рассмотренные два частных случая и являются упомянутыми предельными случаями, которые, как уже отмечалось и как это будет подробнее рассмотрено ниже, в действительности никогда точно не реализуются.

Рассмотрим, наконец, третий частный случай, когда существуют как амплитудные, так и частотные флюктуации, распределенные по нормальному закону. Подобный случай рассматривался в литературе [6]; однако изложенные там результаты даны в форме, практически непригодной для дальнейшего анализа.

Рассмотрим формулы (3) и (4). Пусть, кроме функций корреляции амплитуды $\Phi_\sigma(\tau)$ и частоты $\Phi_\nu(\tau)$, дана совместная функция корреляции

$$\Phi_{\alpha\nu}(\tau) \equiv \overline{\sigma(t)\,\nu(t+\tau)} = \Phi^0_{\alpha\nu}(\tau) + \Phi^1_{\alpha\nu}(\tau), \tag{12}$$

имеющая четную $\Phi^0_{\alpha\nu}(\tau)$ и нечетную $\Phi^1_{\alpha\nu}(\tau)$ части. Принимая во внимание, что распределение для α, ν (а следовательно, и для $\Delta\varphi$) является симметричным, получим вместо (3) и (4)

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2}\left[\overline{\cos\Delta\varphi} + \overline{(\alpha+\sigma')\cos\Delta\varphi} + \overline{\sigma\sigma'\cos\Delta\varphi}\right]; \tag{13}$$

$$A^1(\tau) = \frac{R_0^2}{2}\left[\overline{(\alpha+\alpha')\sin\Delta\varphi} + \overline{\sigma\sigma'\sin\Delta\varphi}\right], \tag{14}$$

где $\alpha = \alpha(t)$, $\alpha' = \alpha(t+\tau)$. Как показано в Приложении, для нормального распределения σ и $\Delta\varphi$ справедливо:

$$\overline{\cos\Delta\varphi} = \exp\left[-\frac{1}{2}\chi(\tau)\right];$$

$$\overline{(\alpha+\alpha')\cos\Delta\varphi} = 0;$$

$$\overline{\alpha\alpha'\cos\Delta\varphi} = \left[\Phi_\alpha(\tau) - \Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau)\,\Phi_{\alpha'\Delta\varphi}(\tau)\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\chi(\tau)\right]; \tag{15}$$

$$\overline{(\sigma+\alpha')\sin\Delta\varphi} = \left[\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau) + \Phi_{\alpha'\Delta\varphi}(\tau)\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\chi(\tau)\right];$$

$$\overline{\sigma\alpha'\sin\Delta\varphi} = 0,$$

где $\chi(\tau) \equiv \overline{\Delta\varphi^2}$ — четная функция τ. Для $\tau > 0$

$$\chi(\tau) = 2\int_0^\tau (\tau-\xi)\,\Phi_\nu(\xi)\,d\xi. \tag{16}$$

Функция корреляции между $\alpha(t)$, $\alpha(t+\tau)$ и $\Delta\varphi$ равны:

$$\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau) = \int_t^{t+\tau}\overline{\alpha(t)\,\nu(\xi)}\,d\xi = \int_t^{t+\tau}\Phi_{\sigma\nu}(\xi-t)\,d\xi = \int_0^\tau \Phi_{\alpha\nu}(x)\,dx; \tag{17}$$

$$\Phi_{\alpha'\Delta\varphi}(\tau) = \int_t^{t+\tau}\overline{\alpha(t+\tau)\,\nu(\xi)}\,d\xi = \int_t^{t+\tau}\Phi_{\alpha\nu}^{-}(\xi-t-\tau)\,d\xi = \int_{-\tau}^{0}\Phi_{\alpha\nu}(x)\,dx. \tag{18}$$

Разложив функцию корреляции $\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau)$ на четную и нечетную части, легко получить:

$$\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau) = \Phi^0_{\alpha\Delta\varphi}(\tau) + \Phi^1_{\alpha\Delta\varphi}(\tau); \tag{19}$$

$$\Phi^0_{\alpha\Delta\varphi}(\tau) = \int\limits_0^\tau \Phi^1_{\alpha\nu}(x)\,dx; \tag{20}$$

$$\Phi^1_{\alpha\Delta\varphi}(\tau) = \int\limits_0^\tau \Phi^0_{\alpha\nu}(x)\,dx. \tag{21}$$

Используя (17)—(21), можно легко найти, что

$$\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau) + \Phi_{\alpha'\Delta\varphi}(\tau) = 2\Phi^1_{\alpha\Delta\varphi}(\tau); \tag{22}$$

$$-\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau)\,\Phi_{\alpha'\Delta\varphi}(\tau) = \Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau)\,\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(-\tau) = \left[\Phi^0_{\alpha\Delta\varphi}(\tau)\right]^2 - \left[\Phi^1_{\alpha\Delta\varphi}(\tau)\right]^2. \tag{23}$$

С помощью формул (22), (23), (15) вместо (13) и (14) будем иметь:

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2}\left\{1 + \Phi_\alpha(\tau) + \left[\Phi^0_{\alpha\Delta\varphi}(\tau)\right]^2 - \left[\Phi^1_{\alpha\Delta\varphi}(\tau)\right]^2\right\}\exp\left[-\frac{1}{2}\chi(\tau)\right]; \tag{24}$$

$$A^1(\tau) = \frac{R_0^2}{2}\left\{2\Phi^1_{\alpha\Delta\varphi}(\tau)\right\}\exp\left[-\frac{1}{2}\chi(\tau)\right]. \tag{25}$$

Эти окончательные формулы показывают, во-первых, что только четная часть функции корреляции $\Phi_{\alpha\nu}(\tau)$ может вносить несимметричность в форму спектральной линии и, во-вторых, что в общем случае корреляция между α и ν вносит также вклад и в четную часть формы спектральной линии.

Для иллюстрации использования формул (24) и (25) рассмотрим колебание, обладающее следующими функциями корреляции:

$$\begin{aligned} &\Phi_\alpha(\tau) = Ce^{-p|\tau|}; \qquad \Phi^0_{\alpha\nu}(\tau) = -\frac{Dp}{2}\,e^{-p|\tau|};\\ &\Phi_\nu(\tau) = 2B\delta(\tau); \qquad \Phi^1_{\alpha\nu}(\tau) = \frac{Dp}{2}\,e^{-p|\tau|}\operatorname{sgn}\tau, \end{aligned} \tag{26}$$

где C и D—некоторые безразмерные параметры, а B и p—параметры, имеющие размерность частоты. Такие функции корреляции могут иметь место для некоторых генераторов [1]. На основании (20), (21) получим:

$$\Phi^0_{\alpha\Delta\varphi}(\tau) = -\frac{D}{2}\left(e^{-p\tau} - 1\right) = -\Phi^1_{\alpha\Delta\varphi}(\tau) \qquad (\tau > 0). \tag{27}$$

Подставляя (26) и (27) в (16), (24) и (25), будем иметь ($\tau > 0$):

$$\begin{aligned} A^0(\tau) &= \frac{R_0^2}{2}\left(1 + Ce^{-p\tau}\right)e^{-B\tau};\\ A^1(\tau) &= \frac{R_0^2}{2}\,D\left(e^{-p\tau} - 1\right)e^{-B\tau}. \end{aligned} \tag{28}$$

Используя (6) и (7) и принимая во внимание, что для реальных генераторов $B \ll p$ (см. [1]), получим следующее выражение для формы спектральной линии колебания:

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi}\left[\frac{B}{B^2+\Omega^2} - \frac{D\Omega}{B^2+\Omega^2} + \frac{Cp}{p^2+\Omega^2} + \frac{D\Omega}{p^2+\Omega^2}\right]. \tag{29}$$

Первые два слагаемых (четное и нечетное) дают собственно контур спектральной линии, определяемый флюктуациями частоты и имеющий ширину $\approx B$ и высоту $R_0^2/2\pi B$. Третье и четвертое слагаемые (четное и нечетное) представляют собой пьедестал линии, обязанный флюктуациям амплитуды, имеющий ширину $\approx p$ и высоту $R_0^2 C/2\pi p$. Как контур, так и пьедестал являются несимметричными кривыми разного знака. Эта несимметрия определяется величиной D, входящей в смешанные функции корреляции $\Phi_{\alpha\nu}(\tau)$.

Мы здесь не накладывали почти никаких ограничений (кроме требования $B \ll p$) на параметры C, D, B, p. Разумеется, для каждой реальной физической системы эти параметры между собой определенным образом связаны. Эта связь должна быть, в частности, такой, чтобы зависимость $W_z(\Omega)$ была положительной для всех рассматриваемых Ω (обычно рассматриваются $\Omega \ll \omega_0$).

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ КОЛЕБАНИЯ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Рассмотрим колебание, обладающее флюктуациями частоты ($\alpha(t) \equiv 0$), вероятностное распределение которых симметрично. Согласно (3)—(7), форма спектральной линии имеет вид:

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\cos \Delta\varphi} \cos \Omega\tau \, d\tau.$$

Нормируем ее так, чтобы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_z(\Omega)\, d\Omega = 1.$$

Для этого, как легко проверить, следует положить $R_0^2 = 2$. Тогда

$$W_z(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\cos \Delta\varphi} \cos \Omega\tau \, d\tau. \tag{30}$$

Будем рассматривать $W_z(\Omega)$ как некоторую плотность вероятностного распределения. Введем моменты этого распределения, обозначаемые через $\langle \Omega^m \rangle_z$:

$$\langle \Omega^m \rangle_z \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Omega^m W_z(\Omega)\, d\Omega. \tag{31}$$

Поскольку $W_z(\Omega) = W_z(-\Omega)$, то отличны от нуля только четные моменты $m = 2n$, которые можно вычислить на основании (30) и (31):

$$\langle \Omega^{2n} \rangle_z = (-1)^n \left[\frac{d^{2n}}{d\tau^{2n}} \overline{\cos \Delta\varphi}\right]_{\tau=0}. \tag{32}$$

Рассмотрим теперь нормированную спектральную плотность флюктуаций частоты

$$S_\nu(\Omega) = \widetilde{S}_\nu(\Omega)/\overline{\nu^2},$$

такую, что

$$\overline{\nu^2} \equiv \sigma^2 = \int\limits_{\infty}^{+\infty} \widetilde{S}_\nu(\Omega)\, d\Omega. \tag{33}$$

Аналогично предыдущему, введем моменты функции $S_\nu(\Omega)$ $(m = 2n)$:

$$\langle \Omega^m \rangle_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega^m S_\nu(\Omega)\, d\Omega. \tag{34}$$

Возникает вопрос, имеется ли какая-либо связь между $\langle \Omega^m \rangle_z$ и $\langle \Omega^m \rangle_\nu$. Если эти моменты связаны, то, определяя (например, из эксперимента) моменты спектра флюктуаций частоты $\langle \Omega^m \rangle_\nu$, можно найти $\langle \Omega^m \rangle_z$. Последнее позволяет сделать определенные выводы о $W_z(\Omega)$, в то время как анализ $W_z(\Omega)$ на основании (30) представляется весьма затруднительным даже для простейших случаев спектров флюктуаций частоты.

С другой стороны, вычисление $\langle \Omega^m \rangle_z$ по формуле (32) является значительно более простой операцией, нежели вычисление (30), так как даже тогда, когда среднее значение $\cos\Delta\varphi$ неизвестно, удается иногда найти $\left[\frac{d^m}{d\tau^m}\overline{\cos\Delta\varphi}\right]_{\tau=0}$.

Рассмотрим частный случай нормально распределенных флюктуаций частоты. На основании (15) и (16) имеем (см. также [7]):

$$\begin{aligned}\overline{\cos\Delta\varphi} &= \exp\left\{-\int_0^\tau (\tau-\xi)\,\Phi_\nu(\xi)\,d\xi\right\} = \\ &= \exp\left\{-2\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^2\frac{\Omega\tau}{2}\,\tilde{S}_\nu(\Omega)\,\frac{d\Omega}{\Omega^2}\right\} \qquad (\tau>0).\end{aligned} \tag{35}$$

Дифференцируя (35), на основании (32)—(34) получим:

$$\begin{aligned}\langle \Omega^2 \rangle_z &= \sigma^2;\\ \langle \Omega^4 \rangle_z &= 3\sigma^4 + \langle \Omega^2 \rangle_\nu \sigma^2;\\ \langle \Omega^6 \rangle_z &= 15\sigma^6 + 15\langle \Omega^2 \rangle_\nu \sigma^4 + \langle \Omega^4 \rangle_\nu \sigma^2;\\ \langle \Omega^8 \rangle_z &= 105\sigma^8 + 210\langle \Omega^2 \rangle_\nu \sigma^6 + 28\langle \Omega^4 \rangle_\nu \sigma^4 + \langle \Omega^2 \rangle_\nu^2 \sigma^4 + \langle \Omega^6 \rangle_\nu \sigma^2;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \tag{36}$$

Эти формулы показывают, что действительно моменты формы спектральной линии $\langle \Omega^m \rangle_z$ однозначно определяются моментами спектра флюктуаций частоты $\langle \Omega^m \rangle_\nu$.

Рассмотрим связь моментов $\langle \Omega^n \rangle_k$ какой-либо четной функции $S_k(\Omega)$, обладающей свойством плотности вероятностей, с поведением самой функции $S_k(\Omega)$. Пусть, например, при достаточно больших Ω закон спадания крыльев $S_k(\Omega)$ определяется соотношением

$$S_k(\Omega) \sim \Omega^{-N}, \qquad N > 1,$$

где $N > 1$ и для простоты предполагается четным*. Нетрудно видеть, что для такой функции все четные моменты $\langle \Omega^n \rangle_k$ с $n \leqslant N-2$ будут конечны, а момент $\langle \Omega^N \rangle_k$ и все последующие будут расходящимися**.

* Аналогично можно рассмотреть нечетное N. Тогда следует писать $S_k(\Omega) \sim |\Omega|^{-N}$.

** В этом же случае легко показать, что абсолютный момент $\langle |\Omega|^{N-1} \rangle_k$ будет иметь логарифмическую расходимость

Отсюда, кстати, следует, что для того, чтобы у функции все моменты были конечны, она должна убывать при $\Omega \to \infty$ быстрее, чем Ω^{-N}, где N сколь угодно велико. Такими функциями являются, например, все функции с ограниченной областью изменения аргумента, за пределами которой $S_k(\Omega) \equiv 0$, а также, например, функции, убывающие по закону $\exp\{-|F_p(\Omega)|\}$, где $F_p(\Omega)$ — полином степени p. К последним относятся, в частности, нормальное распределение

$$S_{\text{н}}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, a} \exp\left[-\frac{\Omega^2}{2a^2}\right] \tag{37}$$

и экспоненциальное распределение

$$S_{\text{э}}(\Omega) = \frac{1}{2a} \exp\left[-\frac{|\Omega|}{a}\right]. \tag{38}$$

Рассмотрим теперь взаимоотношение моментов $\langle \Omega^{2n} \rangle_k$ между собой. Пусть

$$S_k(\Omega) = \frac{1}{a} S'_k\left(\frac{\Omega}{a}\right),$$

где Ω/a и S'_k безразмерны, а Ω может иметь любую размерность. Тогда

$$\langle \Omega^2 \rangle_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Omega^2 \frac{1}{a} S'_k\left(\frac{\Omega}{a}\right) d\Omega = a^2 P_2, \tag{39}$$

где P_2—некоторое число. Аналогично

$$\langle \Omega^{2n} \rangle_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Omega^{2n} \frac{1}{a} S'_k\left(\frac{\Omega}{a}\right) d\Omega = a^{2n} P_{2n}, \tag{40}$$

где P_{2n} — некоторые числа. Сравнивая (40) и (39), видим, что

$$\langle \Omega^{2n} \rangle_k = L_k(n) \langle \Omega^2 \rangle_k^n, \tag{41}$$

где $L_k(n)$—некоторые числа ($n = 1, 2, 3, ..$), полностью характеризующие данную функцию $S_k(\Omega)$, причем всегда $L_k(1) = 1$.

С введением чисел $L_k(n)$ анализ формы спектральной линии методом моментов сводится фактически к отысканию $L_k(n)$. Рассмотрим, например, нормальную (37) и экспоненциальную (38) функции. Вычисление показывает, что

n	1	2	3	4 ...	l	
$L_{\text{н}}(n)$	1	3	15	105	$(2l-1)!!$	(42)
$L_{\text{э}}(n)$	1	6	90	2520	$(2l-1)!!\, l!$	

Отсюда видно, что $L_{\text{э}}(n)$ при $n > 1$ всегда больше $L_{\text{н}}(n)$ и тем больше, чем выше n. Этот факт связан с тем, что экспоненциальная функция спадает значительно медленнее нормальной, и с точки зрения спадания крыльев экспоненциальная функция гораздо шире нормальной.

Если мы получим, например, три функции $S'(\Omega)$, $S''(\Omega)$, $S'''(\Omega)$ с коэффициентами $L'(n)$, $L''(n)$, $L'''(n)$, такими, что

$$L'(n) < L_{\text{н}}(n), \qquad L_{\text{н}}(n) < L''(n) < L_{\text{э}}(n), \qquad L_{\text{э}}(n) < L'''(n)$$

для всех значений n, то отсюда однозначно следует, что функция $S'(\Omega)$ спадает быстрее нормальной, функция $S''(\Omega)$ спадает медленнее нормальной, но быстрее экспоненциальной, и, наконец, функция $S'''(\Omega)$ спадает медленнее экспоненциальной.

На основании (36) и (41) можем найти коэффициенты $L_z(n)$ для формы спектральной линии исходного колебания, обладающего флюктуациями частоты:

$$L_z(1) = 1;$$

$$L_z(2) = 3 + \frac{\langle \Omega^2 \rangle_\nu}{\sigma^2};$$

$$L_z(3) = 15 + 15\,\frac{\langle \Omega^2 \rangle_\nu}{\sigma^2} + \frac{\langle \Omega^4 \rangle_\nu}{\sigma^4}; \tag{43}$$

$$L_z(4) = 105 + 210\,\frac{\langle \Omega^2 \rangle_\nu}{\sigma^2} + 28\,\frac{\langle \Omega^4 \rangle_\nu}{\sigma^4} + \left[\frac{\langle \Omega^2 \rangle_\nu}{\sigma^2}\right]^2 + \frac{\langle \Omega^6 \rangle_\nu}{\sigma^6};$$

. . . .

Совершенно ясно, что L_z должны зависеть от характеристик флюктуаций частоты. Этими характеристиками, как видно из (43), являются безразмерные величины $\langle \Omega^m \rangle_\nu / \sigma^m$.

4. ПРИМЕРЫ

1. Проиллюстрируем метод моментов, доказав упомянутое выше утверждение, что форма спектральной линии реального колебания никогда не может быть в точности ни гауссовой, ни резонансной. Форма линии будет гауссовой, если $L_z(n) = L_н(n)$. Сравнивая (43) с (42), видим, что для этого необходимо соблюдение равенства $\langle \Omega^m \rangle_\nu / \sigma^m = 0$ для всех m. Если считать, что $\sigma < \infty$, то это приводит к равенству $\langle \Omega^m \rangle_\nu = 0$ $(m = 2, 4, 6,\ldots)$ и далее к $S_\nu(\Omega) = \delta(\Omega)$ или к $\nu=\mathrm{const}=0$, т. е. к отсутствию флюктуаций частоты. Если же брать даже достаточно медленные и достаточно большие флюктуации частоты, то $\langle \Omega^m \rangle_\nu / \sigma^m > 0$. Это приведет к тому, что для $n > 1$ $L_z(n) > L_н(n)$. Это означает, что форма линии реального колебания спадает медленнее гауссовой формы и тем медленнее, чем дальше мы удаляемся по крыльям линии от ее центра.

Пусть теперь форма спектральной линии колебания $W_z(\Omega)$ будет иметь в точности резонансную форму (11). Легко видеть, что в этом случае $\langle \Omega^2 \rangle_z$ и все последующие моменты $\langle \Omega^{2n} \rangle_z$ обращаются в бесконечность. Обращаясь к (36), видим, что для этого необходимо, чтобы $\sigma^2 = \overline{\nu^2} = \infty$, т. е. чтобы полная мощность флюктуаций частоты была бесконечной. Сюда относится, в частности, случай дельта-коррелированности флюктуаций частоты, рассмотренный выше. В действительности, однако, полная мощность флюктуаций частоты $\overline{\nu^2}$ всегда конечна. Следовательно, конечно также $\langle \Omega^2 \rangle_z$, и лоренцова форма спектральной линии в действительности никогда не реализуется; реальная форма линии $W_z(\Omega)$ всегда спадает быстрее, чем (11).

2. Пусть спектр флюктуаций частоты имеет резонансную форму

$$S_\nu(\Omega) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2}. \tag{44}$$

Такой спектр порождается функцией корреляции флюктуаций частоты $\Phi_\nu(\tau) = \sigma^2 e^{-\lambda|\tau|}$. Как уже упоминалось, для (44) $\langle \Omega^{2n} \rangle_\nu = \infty$ $(n = 1, 2, 3,\ldots)$. Следовательно, на основании (36) имеем:

$$\langle \Omega^{2n} \rangle_z = \begin{cases} \sigma^2 & (n=1) \\ \infty & (n>1) \end{cases}.$$

Можно также показать, что $\langle |\Omega^3| \rangle_z$ расходится логарифмически. Следовательно, крылья спектральной линии $W_z(\Omega)$ в этом случае будут спадать как Ω^{-4} при возрастании Ω. Это, в частности, подтверждает известное соотношение

$$W_z(\Omega) \sim \tilde{S}_\nu(\Omega)/\Omega^2,$$

справедливое при достаточно больших Ω [5].

3. Рассмотрим спектральную плотность флюктуаций частоты, равную

$$S_\nu(\Omega) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|\Omega|}{\lambda}\right). \qquad (45)$$

Отсюда легко найти моменты

$$\langle \Omega^{2n} \rangle_\nu = (2n)!\, \lambda^{2n}. \qquad (46)$$

Подставляя (46) в (43) и вводя обозначение $m = \sigma^2\lambda^{-2}$ (значение $\sigma^2\lambda^{-2}$ можно принять за индекс модуляции), получим:

$$L_z(1) = 1;$$

$$L_z(2) = 3 + \frac{2}{m};$$

$$L_z(3) = 15 + \frac{30}{m} + \frac{24}{m^2};$$

$$L_z(4) = 105 + \frac{420}{m} + \frac{676}{m^2} + \frac{720}{m^3}; \quad \cdot$$

. . . .

Рассмотрим три конкретных значения $m = 1/10,\ 1,\ 10$. Вычисляя $L_z(n)$, получим:

$$L_z(n) = \begin{cases} 1 & 23 & 2715 & 791905 & \ldots & (m = 1/10); \\ 1 & 5 & 69 & 1921 & \ldots & (m = 1); \\ 1 & 3{,}2 & 18{,}24 & 154{,}57 & \ldots & (m = 10). \end{cases}$$

Сравнение этих значений с (42) показывает, что при $m = 1/10$ кривая $W_z(\Omega)$ спадает медленнее экспоненты, проявляя тенденцию к образованию крыльев типа Ω^{-N}. При $m = 1$ $W_z(\Omega)$ спадает, по-видимому, быстрее экспоненты, но существенно медленнее гауссовой кривой. При $m = 10$ форма спектральной линии $W_z(\Omega)$ вначале (при малых Ω) идет близко к гауссовой, а затем удаляется от нее, спадая медленнее. Таким образом, значение индекса модуляции $m = \sigma^2\lambda^{-2}$ оказывает существенное влияние на форму спектральной линии колебания.

В заключение следует отметить, что метод моментов может быть удобен для получения информации о $W_z(\Omega)$ при экспериментально определенной $S_\nu(\Omega)$, для которой, например, графически можно оценить величины $\langle \Omega^m \rangle_\nu$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим три нормально распределенные случайные величины x, y, z, такие, что $\overline{x} = \overline{y} = \overline{z} = 0$. Пусть заданы их вторые моменты $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$, $\overline{z^2}$, $\overline{xy}$, $\overline{xz}$, $\overline{yz}$, определяющие совместные плотности вероятностей $W(x, y)$, $W(x, y, z)$. Требуется вычислить $\overline{y\,f(x)}$ и $\overline{zy\,\psi(x)}$, где $f(x)$ и $\psi(x)$—некоторые функции.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \overline{y\,f(x)} &= \iint y\,f(x)\,W(x, y)\,dxdy; \\ \overline{zy\,\psi(x)} &= \iiint zy\,\psi(x)\,W(x, y, z)\,dxdydz. \end{aligned} \tag{1}$$

Вычисление по формулам (1) бывает подчас весьма громоздким и неудобным. Поэтому приведем один простой метод вычисления $\overline{y\,f(x)}$, $\overline{zy\,\psi(x)}$, не требующий многократного интегрирования.

Введем новые переменные ξ, η, ζ с помощью следующего аффинного преобразования:

$$\begin{aligned} \xi &= x, & x &= \xi, \\ \eta &= x + ay, & y &= (\eta - \xi)/a, \\ \zeta &= x + by + cz, & z &= \left[\zeta - b\eta/a - \xi\left(1 - \frac{b}{a}\right)\right] \Big/ c. \end{aligned}$$

Постоянные a, b, c выберем так, чтобы $\overline{\xi\eta} = \overline{\xi\zeta} = \overline{\eta\zeta} = 0$. Тогда переменные ξ, η, ζ будут статистически независимыми, причем $\overline{\xi} = \overline{\eta} = \overline{\zeta} = 0$. В этом случае легко получить:

$$\overline{y\,f(x)} = \frac{1}{a}\,\overline{(\eta - \xi)\;f(\xi)} = -\frac{1}{a}\,\overline{\xi\,f(\xi)}; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \overline{zy\,\psi(x)} &= \frac{1}{ca}\,\overline{\left[\zeta - \frac{b}{a}\,\eta - \left(1 - \frac{b}{a}\right)\xi\right]\,[\eta - \xi]\;f(\xi)} = \\ &= \frac{1}{ca}\left[-\frac{b}{a}\,\overline{\eta^2}\;\overline{\psi(\xi)} + \left(1 - \frac{b}{a}\right)\overline{\xi^2\,\psi(\xi)}\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь интегрирование является уже однократным*.

Легко получить следующие значения для постоянных a, b, c:

$$a = -\frac{\overline{x^2}}{\overline{y^2}}, \quad b = \frac{\overline{xz}\,\overline{xy} - \overline{x^2}\,\overline{yz}}{\overline{yz}\,\overline{xy} - \overline{xz}\,\overline{y^2}}, \quad c = \frac{\overline{x^2}\,\overline{y^2} - \overline{xy}^2}{\overline{yz}\,\overline{xy} - \overline{xz}\,\overline{y^2}}. \tag{4}$$

Вычисляя $\overline{\eta^2}$ и подставляя (4) в (2) и (3), окончательно получаем:

$$\overline{y\,f(x)} = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}}\,\overline{x\,f(x)};$$

---

* Можно ввести и другие новые переменные ξ', η', ζ', например, с помощью ортогонального преобразования, такого, что квадратичная форма в $W(x, y, z)$ приводится к сумме квадратов в новых переменных Это также приведет к вычислению одномерных интегралов, однако, более сложных, чем предлагаемые (например, $f(x)$ будет зависеть уже от всех трех переменных ξ', η', ζ').

$$\overline{zy\,\psi(x)} = \frac{1}{\overline{x^2}}\,(\overline{x^2}\,\overline{yz} - \overline{xz}\,\overline{xy})\,\overline{\psi(x)} + \frac{\overline{xy}\,\overline{xz}}{(\overline{x^2})^2}\,\overline{x^2\,\psi(x)}.$$

Полагая, в частности, $f(x)$ и $\psi(x)$ равными $\cos x$ и $\sin x$ и принимая во внимание, что

$$\overline{\cos x} = \exp\left[-\frac{1}{2}\,\overline{x^2}\right]; \quad \overline{\sin x} = 0;$$

$$\overline{x\cos x} = 0; \quad \overline{x\sin x} = \overline{x^2}\exp\left[-\frac{1}{2}\,\overline{x^2}\right];$$

$$\overline{x^2\cos x} = \overline{x^2}\,(1 - \overline{x^2})\exp\left[-\frac{1}{2}\,\overline{x^2}\right]; \quad \overline{x^2\sin x} = 0,$$

получим

$$\overline{y\sin x} = \overline{xy}\exp\left[-\frac{1}{2}\,\overline{x^2}\right];$$

$$\overline{y\cos x} = 0;$$

$$\overline{zy\sin x} = 0; \tag{5}$$

$$\overline{zy\cos x} = (\overline{yz} - \overline{xy}\,\overline{xz})\exp\left[-\frac{1}{2}\,\overline{x^2}\right].$$

Для доказательства соотношений (15) основного текста достаточно в (5) положить $z = \alpha$, $y = \sigma'$, $x = \Delta\varphi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А Н Малахов, В Н Никонов, Изв высш уч зав—Радиофизика, **4**, 104 (1961)
2. D. Middleton, Phil. Mag., **42**, 189 (1951).
3 А Н Малахов, ЖЭТФ, **30**, 884 (1956).
4. J. L Stewart, Proc. IRE, **42**, 1539 (1954)
5. J. A Mullen, D Middleton, Proc. IRE, **45**, 874 (1957)
6. D. Middleton, Quart Appl Math, **10**, 35 (1952).
7 В С Троицкий, Радиотехника и электроника, **1**, 818 (1956)

Научно исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
8 февраля 1961 г

SOME INVESTIGATIONS OF A SPECTRAL LINE FORM OF OSCILLATION

A. N. Malakhov

The distortion of a spectral line form of oscillation is considered due to the correlation between fluctuations of an amplitude and frequency. The spectral line form of oscillation is analysed by momenta method in the cases of different spectra of frequency fluctuations.