

## К ТЕОРИИ СПОНТАННОГО РАСПАДА КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Ф. В. Бункин

Рассматривается спонтанный распад произвольной изолированной квантовой системы, заданной своим гамильтонианом. Общая постановка задачи о распаде потребовала, во-первых, уточнения самого понятия распада и, во-вторых, специального рассмотрения способов описания (задания) начального состояния распадающейся системы. Получены выражения для вероятности распада произвольной системы, обобщающие известную теорему Фока—Крылова, которая относится к частному типу распада—распаду  $\downarrow$ -состояния. Эти выражения могут представить интерес для квантовой радиофизики в связи с вопросом о спонтанном излучении.

## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время появилось значительное число работ, посвященных последовательной квантовой теории распада. С одной стороны, это работы по распаду нестабильных элементарных частиц [1–7], выполненные в рамках аксиоматической квантовой теории поля. Одним из основных результатов развитых здесь общих построений в применении к конкретным моделям распадающейся системы (главным образом, нестабильной  $V$ -частицы в модели Ли) является доказательство неэкспоненциальности закона распада при  $t \rightarrow \infty$  [2, 3, 5, 7]. В ряде работ вычислены поправки к экспоненциальному закону. В статье [8], где дано систематическое исследование нестационарной теории возмущений методом резольвенты, показано, что известный метод Вайскопфа—Вигнера в теории естественной ширины атомных линий [9, 10] перестает быть обоснованным при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, получаемый этим методом экспоненциальный закон распада атомных уровней оказывается справедливым лишь на временах  $t$ , не сильно превышающих время жизни возбужденного состояния\*.

Другим циклом работ являются работы Халфина [11], отличающиеся от предыдущих более общей постановкой задачи о распаде и завершенностью ее решения. Автор рассматривает распад произвольной изолированной системы с гамильтонианом  $\hat{H}$ , начальное состояние (при  $t = 0$ ) которой задано волновой функцией  $\psi(x, 0)$ \*\* . Основой для такого подхода послужила теорема Фока—Крылова [12], устанавливающая соотношение между вероятностью  $L(t)$  обнаружить в момент  $t$  систему в нераспавшемся состоянии (т. е. в состоянии  $\psi(x, 0)$ ) и плотностью распределения  $w(E)$  энергии для начального состояния системы (а в силу ее изолированности—для произвольного момента времени  $t \geq 0$ ). Эта теорема имеет вид:

$$L(t) = |p(t)|^2, \quad (1)$$

\* В работе [8] рассмотрение проведено для частного вида функции  $f(v) = \int \rho_k |H'|^2 d\Omega$ . В общей форме наличие верхней границы применимости метода Вайскопфа—Вигнера было установлено в диссертации Халфина [11].

\*\* Буква  $x$  означает совокупность всех переменных, от которых может зависеть волновая функция, за исключением времени  $t$ .

где  $p(t)$  — проекция вектора состояния  $\psi(x, t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar) \times \times \psi(x, 0)$  в момент  $t$  на вектор начального состояния  $\psi(x, 0)$ ;  $p(t)$  одновременно является характеристической функцией распределения  $w(E)$ .

$$p(t) \equiv \int \psi^*(x, t) \psi(x, 0) dx = \int w(E) e^{iEt/\hbar} dE. \quad (2)$$

Плотность энергетического спектра  $w(E) = |c(E)|^2$ , где  $c(E)$  — коэффициенты разложения функции  $\psi(x, 0)$  по собственным функциям  $\psi_E(x)$  гамильтониана системы  $\hat{H}$ :

$$\psi(x, 0) = \int c(E) \psi_E(x) dE. \quad (3)$$

Весьма существенным здесь является то, что закон распада  $L(t)$  полностью определяется энергетическим распределением систем  $w(E)$ . В работах [11] это обстоятельство расценивается как естественный факт, отражающий физическую сущность явления распада. При этом делаются далеко идущие выводы. Во-первых, необходимым и достаточным условием распада (т. е. того, что  $L \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ) произвольной изолированной системы является непрерывность ее энергетического спектра  $w(E)$  (это показано еще в [12]). Последнее сразу следует из соотношений (1)—(2) и теоремы о характеристических функциях. Действительно, согласно указанной теореме,  $L(t)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  тогда и только тогда, когда функция  $w(E)$  абсолютно интегрируема\*. Это означает, что если распадающаяся система и может обладать дискретным спектром  $E_n$ , то относящиеся к нему вероятности  $w(E_n)$  должны быть равны нулю (в спектре нет  $\delta(E - E_n)$ ).

Достаточность этого условия, т. е. неизбежный распад произвольной изолированной системы, обладающей непрерывным спектром  $w(E)$ , представляется нам парадоксальной.

Во-вторых, введя дополнительное предположение о полуфинитности функции  $w(E)$  (т. е. условие  $w=0$  при  $E < 0$ ) и развивая математический аппарат теории дисперсионных соотношений, Халфин [11] показал, что в некоторых определенных случаях обратная задача имеет однозначное решение, т. е. по заданному (например, измеренному) закону распада  $L(t)$  может быть однозначно восстановлена плотность энергии  $w(E)$ . На этом пути им получен также другой существенный результат: закон распада  $L(t)$  произвольной изолированной квантовой системы принципиально не может быть экспоненциальным. Согласно [11], отклонение от экспоненциальности должно всегда наблюдаться при достаточно больших  $t$ , причем при  $t \rightarrow \infty$  распад должен происходить медленнее экспоненциального. Этот результат является необходимым следствием (теорема Пейли—Винера [13]) соотношений (1)—(2) и условия непрерывности и полуфинитности функции  $w(E)$ . В работах [11] он трактуется как чисто квантовый эффект.

Для систем, энергетический спектр которых при  $E > 0$  описывается дисперсионной формулой

$$w(E) = A [(E - E_0)^2 + \Gamma^2]^{-1}, \quad (4)$$

Халфин приходит к следующей оценке области справедливости экспоненциального закона распада:

$$(\Gamma t/\hbar) e^{-\Gamma t/\hbar} \gg (\Gamma/E_0)^2. \quad (5)$$

\* В условия абсолютной интегрируемости входит требование того, чтобы интеграл от  $w(E)$  по любому интервалу  $\Delta E$  стремился к нулю при  $\Delta E \rightarrow 0$ , т. е. исключается, например,  $\delta(E - E_0)$ .

Возникает вопрос о степени общности указанных результатов Халфина [11]\*, учитывая специальный характер понятия распада, которое принято в этих работах (распад чистого состояния  $\psi(x, 0)$ ). Выяснению этого вопроса посвящены разделы 1 и 2 настоящей статьи. Сейчас же мы хотим обратить внимание на то, что открытая в [11] неэкспоненциальность закона распада, по-видимому, не является глубоко квантовым эффектом и в равной мере присуща распаду классических систем.

При той постановке задачи, которая принята в этих работах, именно этого результата и следовало ожидать, если исходить из статистического феноменологического описания процессов распада, строго применимого к рассмотрению многих (но не всех) классических систем и, по-существу, применявшегося и применяющегося (хотя и недостаточно обоснованно) к квантовым системам (например, радиоактивному распаду ядер, спонтанному распаду атомов и т. д.). Речь идет об описании процессов распада, т. е. неравновесных процессов в системе по схеме марковского случайного процесса с дискретными состояниями\*\*. Именно на этом (и только на этом) пути рассматривания явления распада и был строго получен (при определенной постановке задачи, см. ниже) экспоненциальный закон  $L(t) = \exp(-\lambda t)$ . Все квантовые рассматривания (за исключением метода Вайскопфа—Вигнера, необоснованность которого при  $t \rightarrow \infty$  в настоящее время четко установлена [8, 11]), сводились к квантовомеханическому вычислению феноменологически введенной константы  $\lambda$ \*\*\*.

Не обсуждая вопроса о применимости указанного феноменологического способа описания к квантовым системам (см. [14]), используем это описание для анализа простейшей модели распада какой-либо изолированной системы. Пусть „состояние 1“ и „состояние 2“ суть соответственно нераспавшееся и распавшееся состояния рассматриваемой системы. Каждое из этих состояний может, разумеется, в свою очередь состоять из множества других состояний, но при той простейшей модели распада, которую мы принимаем, это не существенно. Простота модели обусловлена предположением, что схемой марковского процесса описываются переходы между самими состояниями 1 и 2. Тогда вероятности  $Q_i(t)$  того, что в момент  $t$  система находится в  $i$ -ом состоянии, удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{Q}_1 = -\omega_{12} Q_1 + \omega_{21} Q_2; \quad \dot{Q}_2 = \omega_{12} Q_1 - \omega_{21} Q_2, \quad (6)$$

где  $\omega_{12}$  и  $\omega_{21}$ —не зависящие от времени (однородность по времени) вероятности перехода в единицу времени соответственно из состояния 1 в состояние 2 и наоборот.

Решение этих уравнений при начальном условии  $Q_1(0) = 1$ ,  $Q_2(0) = 0$  имеет вид:

$$Q_1(t) = e^{-\lambda t} + \frac{\omega_{21}}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}); \quad Q_2 = 1 - Q_1, \quad (7)$$

\* В дальнейшем обсуждении мы будем ссылаться только на работы [11], как на наиболее общие из числа цитированных работ по теории распада

\*\* В вопросу о применимости такого способа описания к квантовым системам (с многими степенями свободы) посвящено большое число работ. В последнее время в этом направлении были достигнуты определенные успехи (см [14] и имеющуюся там библиографию).

\*\*\* В гаммовской теории  $\alpha$ -распада, например, константа  $\lambda$  вычисляется на основании модели нестационарного прохождения частицы через потенциальный барьер. В теории спонтанного распада возбужденных атомов или ядер константа  $\lambda$  вычисляется методом нестационарной теории возмущений в предположении адиабатического включения возмущения (взаимодействия с электромагнитным полем)

где  $\lambda = \omega_{12} + \omega_{21}$ . Функция  $Q_1(t)$  описывает закон распада системы, причем при  $\omega_{21} \neq 0$  учитывается и возможность многократных распадов, идущих, например, по схеме  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$  (двухкратный распад) и т. д.\*. Будем называть такие распады „распадами вообще“, т. е. безразлично, в какой раз к моменту  $t$  наступившими.

„Распад вообще“ наблюдается, очевидно, при следующей постановке опыта. В момент  $t=0$  тем или иным образом фиксируется начальное состояние системы, после чего она изолируется вплоть до момента времени  $t$ . Под изолированностью здесь понимается также и независимость по отношению к возможным продуктам распада. В момент  $t$  „включается“ взаимодействие с прибором, который фиксирует либо состояние 1 (нераспад, вероятность  $Q_1$ ), либо состояние 2 (распад, вероятность  $Q_2$ ). Именно такая постановка задачи (опыта) принята в работах [11]. Следовательно, установленная в них неэкспоненциальность закона распада относится к „распаду вообще“. Но в этом случае неэкспоненциальность следует и из нашего феноменологического рассмотрения: согласно (7), закон распада  $Q_1(t)$  экспоненциален только для моментов  $t$ , удовлетворяющих условию

$$\lambda t e^{-\lambda t} \gg \omega_{21} t. \quad (8)$$

Это неравенство может выполняться в некотором интервале значений  $t$  только в том случае, когда  $\omega_{21}/\omega_{12} \ll 1$ . Поэтому для всех значений  $t$ , для которых оно выполняется, величина  $\omega_{21} t \ll 1$  и равна вероятности перехода системы за время  $t$  из состояния 2 в состояние 1.

Полученное нами условие (8) имеет смысл, сходный со смыслом условия (5). Чтобы в этом убедиться, выясним вероятностный смысл величины  $(\Gamma/E_0)^2$ . Будем для определенности считать, что условие (5) относится к спонтанному распаду атомных уровней „1“ и „2“. Тогда легко видеть\*\*, что величина  $(\Gamma/E_0)^2$  есть вероятность поглощения атомом за время  $\tau \sim \hbar/\Gamma$  (время жизни возбужденного состояния 1) фотона с энергией  $E_0 = \hbar\omega_{12}$ , приходящего из заданного направления внутри телесного угла  $\Delta\Omega \sim 2\pi (\Gamma/E_0)^2 \sim 2\pi (\Delta p/p)^2$ , где  $p = E_0/c$  — импульс излученного атомом фотона, а  $\Delta p$  — неопределенность в импульсе, связанная с размытием уровня  $\Gamma$ .

Следует иметь в виду, что величину  $(\Gamma/E_0)^2$  в условии (5) нельзя интерпретировать как вероятность обратного перехода (за время  $\tau \sim \hbar/\Gamma$ ) рассматриваемой квантовой системы из распадавшегося состояния 2 в нераспавшееся состояние 1. Такая интерпретация противоречила бы основным положениям квантовой механики\*\*\*. По этой же причине неэкспоненциальность закона распада квантовых систем не может быть объяснена (в противоположность классике) возможностью обратных переходов системы. С этим же обстоятельством связана невозможность введения однозначного понятия „первого (однократного) распада“ для квантовых систем. Для классических систем такое понятие имеет, очевидно, вполне определенный смысл и в рассматриваемом нами феноменологическом описании формально соответствует

\* Для квантовых систем понятие многократного распада теряет смысл, см ниже

\*\* Действительно, пусть  $W_{\text{сп}}$  — полная вероятность спонтанного распада (излучения) атома в единицу времени. Тогда (см., например, [10])  $\Gamma = \hbar W_{\text{сп}}/2$ , а вероятность поглощения атомом за время  $\tau \sim \hbar/\Gamma$  фотона, падающего внутри телесного угла  $\Delta\Omega$ , равна  $(W_{\text{сп}} \Delta\Omega/4\pi) \hbar/\Gamma \sim \Delta\Omega/2\pi$ .

\*\*\* Это связано с известной спецификой утверждений квантовой теории, которая в данном случае проявляется в том, что утверждение «за интервал времени  $(0, t)$  система успела распасться и снова восстановиться» бессмысленно. Действительно, для того, чтобы установить факт распада системы, необходимо произвести измерение, которое существенно изменит ее состояние («редукция волнового пакета»).

условию  $\omega_{21} = 0^*$ . Именно это условие всегда (явно или неявно) предполагается, когда при помощи подобного рассмотрения получается экспоненциальный закон распада: при  $\omega_{21} = 0$  формула (7) дает  $Q_1(t) = \exp(-\lambda t)$ .

Таким образом, в рассмотренной нами (и обычно применявшейся) простейшей модели распада экспоненциальный закон получается только для первого распада—понятие, имеющее определенный смысл лишь применительно к классическим системам.

Настоящая работа посвящена общей теории спонтанного распада изолированных квантовых систем, не использующей теоремы Фока—Крылова. Прежде всего дано определение самого понятия распада квантовой системы по отношению к некоторому признаку (событию)  $A$ . Далее обсужден вопрос о способе описания (задания) начального состояния распадающейся системы с учетом информационного аспекта задачи. Получены общие выражения для вероятности распада, которые переходят в теорему Фока—Крылова, справедливую лишь для частного понятия распада (распада  $\psi$ -состояния). Тем самым дано разрешение отмеченного выше парадокса, связанного с достаточными условиями распада.

### 1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ РАСПАДА И ЗАДАНИЕ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ РАСПАДАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ

Когда речь идет о распаде таких систем как возбужденный атом (спонтанное излучение), радиоактивное ядро, нестабильная элементарная частица и т. д., то определять понятие распада, казалось бы, излишне. Однако, как будет следовать из дальнейшего, даже в этих случаях такое определение необходимо. При общей же постановке задачи о распаде (которая принимается в настоящей статье и в [11, 12]), когда ставится вопрос о распаде произвольной изолированной системы, задача определения понятия распада возникает прежде всего.

В работах [11, 12] под распадом разумеется всякий переход системы из начального состояния, описываемого волновой функцией  $\psi(x, 0)$ , в состояние  $\psi(x, t)$ , линейно независимое от  $\psi(x, 0)$ . Будем называть это распадом  $\psi$ -состояния или просто  $\psi$ -распадом. Очевидно, что такое понятие распада является весьма частным и поэтому может иногда не соответствовать физической постановке задачи. Например, переход изолированной системы „возбужденный атом+вакуум“ из начального состояния  $\psi(x, 0)$  в любое линейно независимое состояние  $\psi(x, t)$  еще отнюдь не означает, что атом спонтанно излучил фотон, т. е. вероятность обнаружить (измерить) в момент  $t$  в состоянии  $\psi(x, t)$  квант (или кванты) электромагнитного поля может быть равна строго нулю. Такое положение может иметь место всякий раз, когда (пользуясь терминологией теории гильбертова пространства  $\psi$ -функцией) размерность подпространства  $G$  собственных функций нераспавшейся системы\*\* больше единицы. Если в результате своего движения система

перейдет к моменту  $t$  в состояние  $\psi(x, t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar) \psi(x, 0)$ , принадлежащее  $G$  [ $\psi(x, t) \in G$ ], то мы должны считать, что система к этому моменту времени не распалась (вероятность обнаружить квант поля в точности равна нулю), в то время как, согласно [11, 12], вероятность

\* На самом деле для распадающейся ( $\omega_{12} \neq 0$ ) изолированной системы, согласно обобщенному принципу детального равновесия [15], вероятность  $\omega_{21}$  всегда отлична от нуля, но может, вообще говоря, не совпадать с вероятностью  $\omega_{12}$  (в частности, может выполняться условие  $\omega_{21}/\omega_{12} \ll 1$ ). Поэтому условие  $\omega_{21} = 0$  является формальным приемом для получения вероятности первого распада.

\*\* Т. е. таких  $\psi$ -функций системы, для которых вероятность обнаружить квант электромагнитного излучения в точности равна нулю.

$L(t)$  при этом, вообще говоря, отлична от единицы. Таким образом, понятие распада, принятое в [11, 12], в применении к рассмотренному конкретному примеру требует дополнительного исследования вопроса о том, когда может (и может ли вообще) выполняться условие:

$$\psi(x, t) \equiv \exp(-i\hat{H}t/\hbar) \psi(x, 0) \in G.$$

При общей постановке задачи о распаде естественно ввести понятие распада системы относительно некоторого определенного признака или события  $A$ . Строгое (количественное) определение события  $A$  заключается в том, что этому событию сопоставляется некоторая определенная область значений каких-то несохраняющихся физических величин, относящихся к данной системе („область события  $A$ “). Для квантовых систем область события  $A$ —это некоторая область возможных значений совокупности одновременно измеримых физических величин. Следует подчеркнуть, что эта совокупность не обязательно должна образовывать полный набор величин данной квантовой системы; в частности она может состоять всего из одной величины.

Если измерение, произведенное под системой в момент времени  $t$ , обнаружит, что имеет место событие  $A$  (т. е. результаты измерения выбранной совокупности величин дают значения, принадлежащие области события  $A$ ), то будем говорить, что в момент  $t$  система находится в распавшемся относительно признака (события)  $A$  состоянии. При этом, очевидно, предполагается, что в начальный момент  $t=0$  состояние системы таково, что измерение с достоверностью дает отсутствие события  $A$ , которое будет обозначаться через  $\bar{A}$ .

Ниже будет показано, какое место занимает при таком понятии распада тот подход, который используется в [11, 12] (распад  $\psi$ -состояния). В рассмотренном выше примере распадающейся системы (возбужденный атом+вакуум) под событием  $A$  можно понимать, например, наличие в вакууме кванта (или, вообще говоря, квантов) электромагнитного излучения.

Принятое выше определение понятия распада произвольной изолированной системы позволяет в очень простой форме получить общее выражение для закона распада  $L(t)$ , т. е. вероятности того, что произведенное под системой в момент времени  $t$  измерение обнаружит систему в нераспавшемся состоянии (зафиксирует событие  $\bar{A}$ ).

Введем величину  $P$ —регистратор события  $\bar{A}$ —с возможными значениями 0 и 1. Если измерение фиксирует событие  $A$ , то  $P=0$ , если событие  $\bar{A}$ , то  $P=1$ . Тогда в общем случае (как для классических, так и для квантовых систем) имеем:

$$L(t) = \langle P \rangle_t, \quad (9)$$

где символ  $\langle \rangle_t$  означает статистическое усреднение в момент времени  $t$ . Применительно к квантовым системам это соотношение, разумеется, нужно понимать в соответствующем операторном виде. Пусть

$\hat{P}$ —соответствующий величине  $P$  эрмитов оператор, определенный во всем пространстве  $\psi$ -функций системы; его собственные значения равны 0 и 1. Поскольку величина  $P$  не есть интеграл движения (в противном случае система была бы абсолютно стабильной по отношению к признаку  $A$ ), то  $[\hat{H}, \hat{P}] \neq 0$ . В этом случае вместо (9) получаем

$$L(t) = \langle \hat{P} \rangle_t = \langle \hat{P}(t) \rangle_0 = \text{Sp} \rho^0 \hat{P}(t), \quad (10)$$

где

$$\hat{P}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{P} e^{-i\hat{H}t/\hbar}, \quad (11)$$

а  $\hat{\rho}^0$  — матрица плотности, описывающая состояние системы при  $t=0$ . При описании начального состояния при помощи волновой функции  $\psi(x, 0)$  (чистое состояние) соотношение (10) соответственно приобретает вид:

$$L(t) = \int \psi^*(x, 0) \hat{P}(t) \psi(x, 0) dx. \quad (12)$$

Заметим, что выражение для  $L(t)$  (12), вообще говоря, не совпадает с теоремой Фока—Крылова (1), (2), поскольку его объединяет с этой теоремой только способ задания начального состояния системы как чистого состояния. Сам же распад понимается в (10) по отношению к произвольному признаку  $A$ , в то время как в теореме Фока—Крылова и в [11]—это распад  $\psi$ -состояния.

Остановимся теперь на способе задания (описания) начального состояния распадающейся системы. Этот вопрос, в свою очередь, тесно связан со способом приготовления системы к моменту  $t=0$ . В работах [11, 12] предполагается, что начальное состояние возникает в результате произведенного под системой полного измерения. Однако такое предположение не соответствует физической постановке задачи о распаде, понимаемом в том обобщенном виде, какой принят в настоящей работе. То, что нам обычно известно о начальном состоянии распадающейся системы, сводится к знанию средних значений некоторой совокупности (вообще говоря, не образующей полного набора) физических величин, относящихся к данной системе:  $\langle \hat{L}_1 \rangle_0, \langle \hat{L}_2 \rangle_0, \dots, \langle \hat{L}_n \rangle_0$ . Среди этих величин всегда, очевидно, должна фигурировать величина  $P$ , поскольку всегда задано  $L(0) = \langle \hat{P} \rangle_0 = 1$ .

При таком способе задания начального состояния встает задача определения матрицы плотности  $\hat{\rho}^0$  при максимальной в заданных условиях дезинформации о системе. Решение последней задачи хорошо известно [16–18]. Именно, условие максимума начальной энтропии системы  $S_0 = \text{Sp}(\hat{\rho}^0 \ln \hat{\rho}^0)$  при заданных средних значениях операторов  $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots, \hat{L}_n$  дает:

$$\hat{\rho}^0 = C \exp \left( - \sum_{i=1}^n \gamma_i \hat{L}_i \right), \quad (13)$$

где постоянные  $C$  и  $\gamma_i$  определяются из дополнительных условий  $\text{Sp} \hat{\rho}^0 = 1$  и  $\text{Sp} \hat{\rho}^0 \hat{L}_i = \langle \hat{L}_i \rangle_0$ .

Предположим, что вся начальная информация о системе сводится лишь к знанию того, что при  $t=0$  система находится в нераспавшемся состоянии, т. е. задано только одно среднее значение  $\langle \hat{P} \rangle_0 = 1$ . Тогда формула (13) дает:  $\hat{\rho}^0 = C \exp(-\gamma \hat{P})$ . В следующем разделе будет показано, что  $\hat{P}$  — проектирующий оператор и поэтому  $\hat{P}^2 = \hat{P}$ . Пользуясь этим свойством, для оператора  $\hat{\rho}^0$  получаем:

$$\hat{\rho}^0 = C [1 + (e^{-\gamma} - 1) \hat{P}].$$

Для того, чтобы совместить с таким видом оператора  $\hat{\rho}^0$  два дополнительных условия  $\text{Sp} \hat{\rho}^0 = 1$  и  $\text{Sp} \hat{\rho}^0 \hat{P} = 1$ , очевидно, необходимо положить  $C = 0$ ,  $C(e^{-\tau} - 1) = \alpha$ , где  $\alpha$  — постоянная, определяемая из условия  $\alpha \text{Sp} \hat{P} = 1$ . Для проектирующего оператора, как известно (см., например, [19])  $\text{Sp} \hat{P} = N$ , где  $N$  — размерность того подпространства  $G_1$ , на которое осуществляется проектирование. Таким образом, в рассматриваемом случае, когда дезинформация о начальном состоянии распадающейся системы абсолютно максимальна, получаем:

$$\hat{\rho}^0 = N^{-1} \hat{P}. \tag{14}$$

Именно этой матрицей плотности мы и будем главным образом пользоваться в дальнейшем.

## 2. ВЕРОЯТНОСТЬ РАСПАДА ИЗОЛИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Соотношение (10) позволяет получить некоторые общие результаты, касающиеся законов распада изолированных квантовых систем относительно заданного признака  $A$ . Выясним сначала свойства оператора  $\hat{P}$ .

Пусть  $\varphi_{Pn}(x)$  — ортонормированные собственные функции оператора  $\hat{P}$ , образующие полную систему функций. Индекс  $P$  принимает значения 0 и 1 в соответствии с двумя возможными собственными значениями оператора  $\hat{P}$ . Хотя бы одно из этих собственных значений (а в общем случае — оба) вырождено (в частности, бесконечно вырождены). Индекс  $n$  отмечает собственные функции, соответствующие вырожденным собственным значениям  $P = 0, 1$ , и представляет собою совокупность квантовых чисел, относящихся к выбранной совокупности физических величин, которые определяют область события  $A$  (и соответственно  $\bar{A}$ ). В частности, если область события  $\bar{A}$  сводится к одной точке  $n_0$ , то собственное значение  $P = 1$  не вырождено и начальное состояние системы задается собственной функцией  $\varphi_{1n_0}(x)$ . Таким образом, имеем:

$$\hat{P} \varphi_{Pn} = \delta_{1P} \varphi_{Pn}; \quad (\varphi_{Pn}, \varphi_{P'n'}) = \delta_{PP'} \delta_{nn'}; \tag{15}$$

$$\psi(x) = \sum_{P, n} a_{Pn} \varphi_{Pn}(x); \tag{16}$$

$$a_{Pn} = (\varphi_{Pn}, \psi) \equiv \int \varphi_{Pn}^*(x) \psi(x) dx,$$

где  $\psi(x)$  — произвольная волновая функция системы.

Обозначим через  $G_1$  подпространство, образованное собственными функциями  $\varphi_{1n}$ , а через  $G_0$  — подпространство, образованное функциями  $\varphi_{0n}$ . Тогда, согласно (16), любая функция  $\psi(x)$  может быть представлена в виде  $\psi = \psi_1 + \psi_0$ , где  $\psi_1 \in G_1$  (т. е. принадлежит  $G_1$ ), а  $\psi_0 \in G_0$ ,

\* С точки зрения формальной теории гильбертова пространства подпространства  $G_1$  и  $G_0$  суть замкнутые линейные оболочки, построенные на системах векторов  $\{\varphi_{1n}\}$  и  $\{\varphi_{0n}\}$  соответственно. Полное рассматриваемое гильбертово пространство  $G$  есть ортогональная сумма подпространств  $G_1$  и  $G_0$ . Заметим, что подпространство  $G_0$  можно было бы формально определить как ортогональное дополнение подпространства  $G_1$  [19, 20].



причем  $\hat{P}\psi = \psi_1$ . Функция  $\psi_1$  есть проекция вектора  $\psi$  на подпространство  $G_1$ , а  $\hat{P}$  — проектирующий на  $G_1$  оператор [19, 20]. Очевидно, что размерности подпространств  $G_1$  и  $G_0$  определяются кратностью вырождения соответствующих собственных значений оператора  $\hat{P}$ . В дальнейшем при использовании конкретной формы матрицы плотности (14) мы будем предполагать, что размерность  $N$  подпространства  $G_1$  конечна, но может быть сколько угодно большой.

Теорема Фока—Крылова (1)–(2) и связанные с ней результаты работ [11] относятся к случаю  $N=1$ . При этом область события  $A$  сводится к одной точке  $n_0$  и  $\varphi_{1n_0} \equiv \psi(x, 0)$ . Следует обратить внимание, что в этом частном случае начальное состояние системы может быть задано только как чистое состояние  $\psi(x, 0)$ ; именно такое задание в данном случае, очевидно, соответствует условию максимальной дезинформации о системе. В связи с этим необходимо показать, что матрица плотности (14) при  $N=1$  дает описание начального состояния, эквивалентное описанию при помощи волновой функции  $\psi(x, 0)$ , т. е. что, например, в энергетическом представлении эта матрица  $\rho_{EE'}^0$  равна  $c(E)c^*(E')$ . Для этого вычислим матрицу  $P_{EE'}$ . При  $N=1$  функция  $\psi_E(x)$  ( $\hat{H}\psi_E(x) = E\psi_E(x)$ ) может быть, на основании (16) и (3), представлена в виде:

$$\psi_E(x) = c^*(E)\psi(x, 0) + \sum_n a_n(E)\varphi_{0n}(x). \quad (17)$$

Поэтому, учитывая (15), получаем:

$$P_{EE'} = \int \psi_E^*(x)\hat{P}\psi_{E'}(x)dx = c(E)c^*(E'). \quad (18)$$

Таким образом, матрица  $\rho_{EE'}^0$ , определяемая формулой (14), при  $N=1$  действительно равна  $c(E)c^*(E')$ .

Обратимся теперь к общему выражению (10) для вероятности  $L(t)$  и запишем его в энергетическом представлении:

$$L(t) = \int \rho_{EE'}^0 P_{E'E} e^{i(E'-E)t/\hbar} dE dE' = \int h(E) e^{iEt/\hbar} dE, \quad (19)$$

где  $h(E)$  — характеристическая функция распределения  $L(t)$  — определяется выражением:

$$h(E) = \int \rho_{E', E'+E}^0 P_{E'+E, E'} dE'. \quad (20)$$

Легко видеть, что  $h^*(E) = h(-E)$ .

Теорема Фока—Крылова (1)–(2) немедленно следует из (19), если в соответствии с (18) положить  $\rho_{EE'}^0 = P_{EE'} = c(E)c^*(E')$  (распад  $\psi$ -состояния). В общем же случае, когда распад понимается по отношению к произвольному признаку  $A$ , для которого  $N > 1$ , вероятность  $L(t)$ , как это следует из (19), уже не определяется только одним энергетическим спектром  $\rho_{EE}^0$  системы, а зависит, вообще говоря, также и от недиагональных элементов  $\rho_{EE'}^0$ . Теорема Фока—Крылова оказывается несправедливой и в том случае, когда начальное состояние задается волновой функцией  $\psi(x, 0)^*$ , но распад понимается обобщенно ( $N > 1$ ).

\* Мы отвлекаемся при этом от того обстоятельства, что такое задание начального состояния при  $N > 1$  не отвечает условию максимальной дезинформации о системе

Используем теперь конкретную форму матрицы плотности  $\hat{\rho}^0$ , определяемую выражением (14). Прежде всего определим  $P_{EE'}$  при  $N > 1$ . Согласно (16), имеем

$$\psi_E(x) = \sum_{P,n} a_{Pn}(E) \varphi_{Pn}(x); \quad a_{Pn}(E) = \int \varphi_{Pn}^*(x) \psi_E(x) dx,$$

поэтому

$$P_{EE'} = \int \psi_E^*(x) \hat{P} \psi_{E'}(x) dx = \sum_n a_{1n}(E) a_{1n}(E'). \quad (21)$$

Введем матрицы  $\hat{w}(E)$  и  $\hat{p}(t)$ , элементы которых определяются выражениями:

$$w_{nm}(E) = w_{mn}^*(E) = a_{1n}(E) a_{1m}^*(E); \quad (22)$$

$$p_{nm}(t) = \int w_{nm}(E) e^{iEt/\hbar} dE. \quad (22a)$$

При  $N = 1$  единственный коэффициент  $a_1(E) \equiv c^*(E)$  (см. (17)) и матрицы  $\hat{w}(E)$  и  $\hat{p}(t)$  соответственно переходят в плотность распределения энергии  $w(E) = |c(E)|^2$  и ее характеристическую функцию  $p(t)$  (см. (2)). Заметим, что при  $N > 1$  плотность распределения энергии  $\hat{\rho}_{EE}^0$  определяется через матрицу  $\hat{w}(E)$  следующим образом:

$$\hat{\rho}_{EE}^0 = N^{-1} \text{Sp} \hat{w}(E). \quad (23)$$

Подстановка (14), (21) в (19) и учет (22), (22a) дают:

$$L(t) = N^{-1} \sum_{n,m} |p_{nm}(t)|^2 = N^{-1} \text{Sp} \hat{p}(t) \hat{p}^+(t), \quad (24)$$

где  $\hat{p}^+(t)$  — сопряженная матрица.

Асимптотическое поведение функции  $L(t)$  (при  $t \rightarrow \infty$ ) определяется аналитическими свойствами элементов матрицы  $w_{nm}(E)$ . В частности, достаточным условием того, чтобы функция  $L(t)$  стремилась к нулю при  $t \rightarrow \infty$  (т. е. достаточным условием распада системы по отношению к признаку  $A$ ), является абсолютная интегрируемость вещественной и мнимой частей функций  $w_{nm}(E)^*$ . С другой стороны, очевидно, что в общем случае требование абсолютной интегрируемости плотности распределения энергии  $\hat{\rho}_{EE}^0$ , определяемой выражением (23), еще не влечет за собой указанной асимптотики функции  $L(t)$ . Этот вывод разрешает отмеченный во введении парадокс, вытекающий из результатов работ [11, 12]: непрерывность энергетического спектра системы является достаточным условием ее распада только в отношении  $\psi$ -распада. Разумеется, что и все другие общие выводы, имеющиеся в работах [11], относятся лишь к  $\psi$ -распаду системы.

В заключение приведем простое выражение для интенсивности спонтанного распада, т. е. для вероятности распада в единицу времени  $l(t) \equiv \dot{L}(t)$ . Согласно (10) и уравнению, определяющему изменение оператора во времени, получаем:

$$l(t) = -i\hbar^{-1} \text{Sp} \hat{\rho}^0 [\hat{H}, \hat{P}(t)]. \quad (25)$$

\* См сноску на стр 893

Это выражение для вероятности  $l(t)$  дает возможность поставить задачу о приготовлении систем, обладающих в заданный момент времени  $t_1$  (например, при  $t_1 = 0$ ) максимально возможной интенсивностью распада. Задача, очевидно, сводится к нахождению матрицы плотности  $\rho^0$ , обращающей  $l(t_1)$  в максимум. Постановка такой задачи может представлять интерес, в частности, для квантовой радиофизики в связи с вопросами спонтанного излучения систем. За недостатком места мы не будем сейчас вникать в подробности задачи, предполагая рассмотреть это отдельно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. V. Glasser, G Köllen, Nuclear Physics, **2**, 706 (1956).
2. T. Okabayashi, S Sato, Prog Theor. Phys., **17**, 30 (1957)
3. H. Araki, Y. Munakata, M Kawaguchi, T. Goto, Prog. Theor Phys, **17**, 419 (1957).
4. P. Matthews, A Salam, Phys. Rev., **112**, 283 (1958).
5. P. Matthews, A. Salam, Phys Rev., **115**, 1079 (1959).
6. M. Lévy, Nuovo Cimento, **13**, 115 (1959)
7. E. Kazés, Nuovo Cimento, **15**, 537 (1960)
8. G Höhler, Zs f. Phys, **152**, 546 (1958).
9. W Weisskopf, E. Wigner, Zs. f Phys., **63**, 51; **65**, 18 (1930).
10. В Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956
11. Л А Халфин, ДАН СССР, **115**, 277 (1957); ЖЭТФ, **33**, 1371 (1951), Диссертация, ФИАН, М., 1960.
12. Н С Крылов, В А Фок, ЖЭТФ, **17**, 93 (1947).
13. R. E. A. C Paley, N. Wiener, Am. Math. Soc. Colloq. Pub., **19**, 16 (1931)
14. P Matthews, I. Shapiro, D. Falkoff, Phys Rev, **120**, 1 (1960).
15. N. G. van Kampen, Physica, **20**, 603 (1954).
16. J. von Neuman, Göttinger Nachr, **245**, 273 (1927).
17. Р Л Стратонович, ЖЭТФ, **28**, 547 (1955).
18. U Fano, Rev Mod Phys, **29**, 74 (1957).
19. J. von Neuman, Mathem Grundlagen d Quantenmech., Leipzig, 1932
20. Н И Ахнезер, И М. Глазман, Теория линейных операторов, ГИТТЛ, М—Л, 1950.

Физический институт  
им. П Н Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию  
8 апреля 1961 г.

## TO THE THEORY OF QUANTUM SYSTEMS SPONTANEOUS DECAY

F. V. Bunkin

The spontaneous decay of an arbitrary isolated quantum system, defined by its Hamiltonian has been examined. The general statement of a decay problem required, firstly the more precise definition of the decay and, secondly the special examination of the ways of discription (definition) of the initial state of the decaying system. The expressions for the probability of the arbitrary system decay have been obtained. Those generalize the well known Fok—Krylov's theorem which deals with particular decay of the  $\psi$ -state. These expressions may be of interest for the quantum radio physics in connection with spontaneous radiation.