ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IV, № 5 *РАДИОФИЗИКА* *1961*

К ВОПРОСУ О ЗАТУХАНИИ И НАРАСТАНИИ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

А. А. Андронов

Методом квантовой теории Эйнштейна получен коэффициент затухания (нарастания) продольных волн в равновесной изотропной плазме и в плазме, пронизываемой потоком электронов. Вычислены потери энергии электрона, связанные с излучением продольных волн.

Коэффициент затухания плазменных волн (не связанный с соударениями) был найден Ландау путем решения линеаризованного кинетического уравнения с самосогласованным полем [1]. Тем же методом в работе [2] вычислен коэффициент затухания (нарастания) продольных волн в плазме, пронизываемой потоком электронов.

После появления работ [3,4] и, в особенности, [5] стала ясна связь механизма затухания (нарастания) Ландау для плазменных волн с эффектом Вавилова—Черенкова, на что указано, например, в статье [6]. Представляет известный интерес проследить до конца эту связь и получить коэффициент затухания (нарастания) плазменных волн.

1. Коэффициент затухания плазменных волн для изотропной равновесной плазмы можно найти, используя, подобно Шафранову [5], закон Кирхгофа. Для плазмы с потоком пользоваться законом Кирхгофа нельзя. В этом случае коэффициент затухания (нарастания) плазменных волн можно вычислить с помощью квантовой теории Эйнштейна (см. [6]). (Для равновесной плазмы этот метод, естественно, эквивалентен закону Кирхгофа*.)

Согласно квантовой теории Эйнштейна, коэффициент поглощения определяется разностью процессов истинного поглощения и индуцированного испускания. Используя это обстоятельство и считая для определенности, что функция распределения электронов в потоке имеет вид:

$$f_s(v) = N_s \left(\frac{m}{2\pi \varkappa T_s} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2\varkappa T_s}(v - v_s)^2}, \qquad (1)$$

где N_s, T_s, v_s — соответственно плотность, температура и скорость потока, $\varkappa$ — постоянная Больцмана, m—масса, а v—скорость электрона, нетрудно получить (см. [6]):

$$\mu = \eta_\omega^s(\Theta) \frac{8\pi^3 c}{\omega^2 n} \frac{c/n - v_s \cos\Theta}{\varkappa T_s}. \qquad (2)$$

Здесь μ—коэффициент поглощения**, η_ω^s — излучательная способность

---

* Заметим, что рассматриваемый метод до некоторой степени эквивалентен классическому рассмотрению задачи в линейном приближении. В случае плазмы с потоком этот метод (как и классическое рассмотрение задачи в линейном приближении) позволяет найти коэффициент нарастания только в первый момент, пока начальное состояние некогерентно (см., например, [7]).

** Заметим, что в плазме с потоком коэффициент затухания (нарастания) продольных волн складывается из коэффициента поглощения, связанного с электронами плазмы, и коэффициента затухания (нарастания), связанного с электронами потока. В выражении (2) учтен только коэффициент, связанный с электронами потока. Однако из (2) легко найти коэффициент поглощения для равновесной плазмы, положив $v_s = 0$.

электронов потока (энергия плазменных волн, излучаемая 1 *см*^{3} потока в единичном интервале частоты и телесного угла), Θ—угол между направлением распространения волны и скоростью потока, ω—частота, c—скорость света, n—показатель преломления плазменных волн (считая поток слабым, его влияние на показатель преломления не учитываем).

Излучательную способность $\eta_\omega^s(\Theta)$ в нашем случае, когда движение электронов квазиклассическое и выполнено условие $\varkappa T_0 \gg \hbar\omega$ (T_0—температура плазмы, $\hbar$—постоянная Планка), можно вычислять классически. Для этого достаточно усреднить интенсивность излучения электрона W_ω (энергию черенковских плазменных волн, излучаемую электроном в 1 *сек* в единичном интервале частот) по функции распределения электронов в потоке. Таким образом, для нахождения коэффициента затухания (нарастания) плазменных волн необходимо найти интенсивность излучения электронов.

2. Рассмотрим черенковское излучение продольных волн заряженной частицей в изотропной среде с пространственной дисперсией.

При исследовании излучения продольных волн удобно пользоваться кулоновской калибровкой потенциалов электромагнитного поля. В этом случае продольное электрическое поле $\boldsymbol{E}$ определяется скалярным потенциалом φ ($\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$), который удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\varepsilon\Delta\varphi = 4\pi\rho(t), \tag{3}$$

где ε— диэлектрическая проницаемость, $\rho(t)$ — плотность электрического заряда, t—время. Распространение продольных волн возможно только в средах с пространственной дисперсией; поэтому в качестве ε в (3) необходимо взять диэлектрическую проницаемость с учетом пространственной дисперсии: $\varepsilon = \varepsilon(\omega, \boldsymbol{k})$ ($\boldsymbol{k}$—волновой вектор). Согласно [8], в изотропной среде с пространственной дисперсией диэлектрическая проницаемость имеет вид:

$$\varepsilon(\omega, \boldsymbol{k}) = \varepsilon_0(\omega) - L^2 \boldsymbol{k}^2. \tag{4}$$

Здесь ε_0—диэлектрическая проницаемость среды без учета пространственной дисперсии; величина L порядка характерного микроразмера среды. Для плазмы

$$L^2 = 3\varkappa T_0/4\pi e^2 N_0 = 3D_0^2, \tag{5}$$

где N_0—плотность электронов в плазме, e—абсолютная величина заряда электрона, D_0—дебаевский радиус.

При рассмотрении эффекта Вавилова—Черенкова можно считать, что электрон движется равномерно. В этом случае уравнение (3) имеет вид:

$$\varepsilon\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t). \tag{6}$$

Здесь $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$—радиус-вектор и скорость электрона, $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)$—дельта-функция, а под ε необходимо понимать оператор, поскольку ε имеет определенное числовое значение только для процессов, пропорциональных $e^{i\omega t - i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$.

Для нахождения потерь энергии электрона, связанных с излучением продольных волн, вычислим силу торможения, действующую на электрон со стороны создаваемого им поля*.

* Наше решение отличается от решения, приведенного в [9], § 84, только учетом пространственной дисперсии

Взяв пространственную компоненту Фурье от обеих сторон уравнения (6), нетрудно получить:

$$E_k = -\frac{ie\boldsymbol{k}e^{-i\boldsymbol{v}\boldsymbol{k}t}}{2\pi^2 \boldsymbol{k}^2 \varepsilon(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k})}, \tag{7}$$

где E_k — фурье-компонента вектора E, а $\varepsilon(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}) = \varepsilon(\omega, \boldsymbol{k})$ при $\omega = \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}$. Сила торможения равна

$$F = eE(r = vt), \tag{8}$$

где

$$E = \int E_k e^{ikr} d^3k. \tag{9}$$

Очевидно, что сила F направлена антипараллельно скорости $\boldsymbol{v}$. Полагая, что $\boldsymbol{v}$ направлена вдоль оси x, и производя замену переменных: $k_x v = \omega$, $q = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$, перепишем абсолютную величину силы F в виде (см. [9])

$$F = -\frac{ie^2}{\pi v^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{q} \frac{q\omega\, dq\, d\omega}{(q^2+\omega^2/v^2)\varepsilon\left(\omega, \sqrt{q^2+\omega^2/v^2}\right)}. \tag{10}$$

Сила F_ω, действующая в единичном частотном интервале, определяется соотношением

$$F = \int\limits_0^\infty F_\omega\, d\omega, \tag{11}$$

где

$$F_\omega = -\frac{ie^2}{\pi v^2} \sum_{\pm|\omega|} \omega \int\limits_q \frac{q\, dq}{(q^2+\omega^2/v^2)\, \varepsilon\left(\omega, \sqrt{q^2+\omega^2/v^2}\right)}. \tag{12}$$

Знак $\sum\limits_{\pm|\omega|}$ означает, что надо взять сумму выражений с $\omega = \pm|\omega|$. Используя соотношение (4), мы можем в (12) проинтегрировать по q (подобно интегрированию, проведенному в [9], § 86). В результате получим*:

$$F_\omega = e^2\omega/v^2\varepsilon_0 \tag{13}$$

при $v \gg c/n$. Здесь $n = \varepsilon_0/\omega^2 L^2$ — показатель преломления продольных волн (см. [8]).

Интенсивность черенковского излучения электрона равна**

$$W_\omega = F_\omega v = \frac{e^2\omega}{v\varepsilon_0} \tag{14}$$

при $v \gg c/n$. Заметим, что в отличие от интенсивности черенковского излучения для поперечных волн (см., например, [9]) интенсивность черенковского излучения для поперечных волн на „пороге", т. е. при равенстве фазовой скорости волны и скорости электрона, не обращается в нуль.

* Для плазмы соотношение (13) можно получить подобным интегрированием, используя выражения работы [1] для потенциала φ, возникающего при движении заряженной частицы в плазме

** Интенсивность черенковского излучения электрона для продольных волн в среде с пространственной дисперсией вычислялась в [10] квантовым путем Однако, результат этой работы (в классическом пределе $\hbar \to 0$) отличается от нашего результата на множитель $L^2\omega^2/c^2$ и, таким образом, содержит ошибку

Оценим общую энергию плазменных волн, излучаемую электроном в единицу времени. Согласно [4], она равна

$$W_t = \frac{e^2\omega_0^2}{2v} \ln\left(1 + \frac{2}{3}\frac{v^2}{v_{T_0}^2}\right); \quad v_{T_0}^2 = \varkappa T_0/m. \tag{15}$$

Можно убедиться, что наше выражение для общих потерь энергии электрона в плазме (см. (10)) и аналогичная величина в статье [4] совпадают (мы считаем, что $\omega^2 \sim \omega_0^2 = 4\pi e^2 N_0/m$). Чтобы получить выражение (15), необходимо в (10) провести интегрирование (как это сделано в [4]) сначала по ω, а затем по q. Однако для оценки величины W_t можно использовать найденное значение для W_ω, поскольку

$$W_t = \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} W_\omega \, d\omega; \tag{16}$$

частота ω_1 находится из условия $v = c/n(\omega_1)$, частота ω_2 определяется тем, что плазменные волны с $\omega \gg \omega_0$ сильно затухают. Полагая для определенности $\omega_2 = 2\omega_0$, найдем:

$$W_t = \frac{e^2\omega_0^2}{2v} \ln \frac{2}{3}\left(\frac{v}{v_{T_0}}\right)^2. \tag{17}$$

Обе формулы для W_t имеют одинаковую степень точности.

3. Как уже указывалось, для получения излучательной способности η_ω^s и, следовательно, коэффициента затухания (нарастания) плазменных волн μ достаточно усреднить интенсивность излучения электрона W_ω по функции распределения электронов в потоке. Для вычисления η_ω^s воспользуемся цилиндрической системой координат $(v_\parallel, v_\perp, \varphi)$, где $v_\parallel$ — скорость в направлении, составляющем угол Θ со скоростью $\boldsymbol{v}_s$, а $v_\perp$, φ — полярные координаты в плоскости, перпендикулярной $v_\parallel$.

Энергия плазменных волн, излучаемая 1 *см*³ потока в 1 *сек* в элементе телесного угла $d\Omega$ в направлении $v_\parallel$, равна

$$W d\Omega = d\Omega \int\limits_{v_\parallel} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} W_\Omega f_s(v_\parallel, v_\perp, \varphi)\, v_\perp \, dv_\perp \, d\varphi \, dv_\parallel, \tag{18}$$

где W_Ω — интенсивность черенковского излучения электрона в единичном элементе телесного угла (энергия черенковских плазменных волн, излучаемая электроном в 1 *сек* в единицу телесного угла). Интенсивность излучения W_Ω можно найти, зная величину W_ω, поскольку при черенковском излучении частота и направление излучения связаны условием

$$\boldsymbol{kv} = \omega. \tag{19}$$

Отсюда нетрудно получить:

$$W_\Omega = W_\omega \left| \frac{vn^2}{2\pi c\, \partial n/\partial\omega} \right|. \tag{20}$$

Для нахождения излучательной способности η_ω^s перейдем в выражении (18) от интегрирования по $v_{\parallel}$ к интегрированию по ω, используя соотношение

$$v_{\parallel} = c/n(\omega). \tag{21}$$

В итоге получим:

$$W d\Omega = \int\limits_{\omega} \eta^s_{\omega}\, d\omega\, d\Omega; \tag{22}$$

$$\eta^s_{\omega} = \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} W_{\Omega} f_s(v_{\perp}, \omega, \varphi, \Theta) \left| \frac{c\, \partial n/\partial\omega}{n^2} \right| v_{\perp}\, dv_{\perp}\, d\varphi. \tag{23}$$

После подстановки выражений для W_{Ω} и f_s соотношение (23) перепишется в виде:

$$\eta^s_{\omega} = \frac{e^2 \omega}{2\pi\varepsilon_0} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} N_s \left(\frac{m}{2\pi\varkappa T_s}\right)^{3/2} e^{-m/2\varkappa T_s} \left(\frac{c^2}{n^2} - 2v_s \frac{c}{n} \cos\Theta + v_{\perp}^2 - \right.$$
$$\left. - 2v_s v_{\perp} \sin\varphi \sin\Theta + v_s^2 \right) v_{\perp}\, dv_{\perp}\, d\varphi. \tag{24}$$

Интегралы можно вычислить (см. [11]). Окончательно

$$\eta^s_{\omega} = \frac{e^2 N_s \omega}{(2\pi)^{3/2} \varepsilon_0 v_{T_s}} e^{-\frac{m}{2\varkappa T_s}\left(\frac{c}{n} - v_s \cos\Theta\right)^2}; \quad v_{T_s} = \frac{\varkappa T_s}{m}. \tag{25}$$

Для сравнения с известными формулами для коэффициентов затухания (нарастания) определим коэффициент затухания (нарастания) во времени γ по энергетическому коэффициенту затухания (нарастания) в пространстве—μ [7]:

$$\gamma = \mu \left| \partial\omega/\partial \boldsymbol{k} \right|. \tag{26}$$

Откуда для амплитудного коэффициента затухания (нарастания) во времени получим

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{2} = \frac{\mu}{2} \left| \frac{\partial\omega}{\partial \boldsymbol{k}} \right|. \tag{27}$$

Для плазменных волн выражение (27) перепишется в виде

$$\tilde{\gamma} = \frac{\mu}{2} \frac{3 v_{T_0}^2 n}{c}. \tag{28}$$

Представляя значение μ из (2), найдем:

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_0 (\omega - k v_s \cos\Theta)}{(D_s k)^3 \omega_s} e^{-(\omega - k v_s \cdot \cos\Theta)^2 / 2 v_{T_s}^2 k^2}. \tag{29}$$

Здесь $D_s = (\varkappa T_s / 4\pi e^2 N_s)^{1/2}$ — дебаевский радиус в потоке.

Из (27) при $v_s = 0$, $\Theta = 0$, $v_{T_s} \gg |\omega/k - v_s|$ и замене индексов s на индексы „0“ получим формулу Ландау [2].

В заключение пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность В. В. Железнякову за предложенную тему и внимательное руководство, а также за ценные советы, сделанные им при подготовке работы к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1 Л. Д Ландау, ЖЭТФ, **16**, 576 (1946).
2 Г. В Гордеев, ЖЭТФ, **27**, 24 (1954)
3. D. Bohm, E. P Gross, Phys Rev., **75**, 1851 (1949).
4. D. Bohm, D. Pines, Phys. Rev., **85**, 338 (1952).
5. В Д Шафранов, ЖЭТФ, **34**, 1475 (1958)
6 В Л. Гинзбург и В В Железняков, Астрон ж, **35**, 694 (1958)
7 В В Железняков, Изв высш уч зав—Радиофизика, **2**, 14 (1959)
8 В Л Гинзбург, ЖЭТФ, **34**, 1953 (1958)
9 Л. Д Ландау и Е М Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957
10. Б А Лысов, ЖЭТФ, **36**, 321 (1959).
11 И М Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ, М—Л, 1948

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 февраля 1961 г.

TO THE QUESTION OF GROWTH AND ATTENUATION OF PLASMA WAVES

A. A. Andronov

By the Enstein's method of quantum theory the attenuation coefficient (growthing) of longitudinal waves in equilibrium isotropic plasma was obtained as well as in plasma permeated with the electron stream. Electron energy losses were calculated which deal with the emission of longitudinal waves