

СОДЕРЖАНИЕ

Саломонович А. Е., Кощенко В. Н. Наблюдения теплового радиоизлучения Луны на волне 2 см	591
Кощенко В. Н., Лосовский Б. Я., Саломонович А. Е. Радиоизлучение Луны на волне 3,2 см	596
Стрежнева К. М., Троицкий В. С. Фазовая зависимость радиоизлучения Луны на волне 3,2 см	600
Гришкевич Л. В. Результаты исследований ионосферных дрейфов над г. Горьким в период 1957—1959 гг.	608
Железняков В. В. О неустойчивости магнитоактивной плазмы относительно высокочастотных электромагнитных возмущений. III	619
Денисов Н. Г. О дифракции волн на хаотическом экране	630
Булаевский Л. И. О неустойчивости однородной прецессии намагниченности	639
Щеглов В. А. Использование кольцевого конденсатора для сортировки молекул в молекулярном генераторе	648
Степанов Н. С. О резонансном отражении волн в системе с периодически изменяющимися параметрами	656
Долинин Ю. Р., Померанцев Н. М. Параметрическое захватывание частоты автодинного генератора в спектрометре ядерного магнитного резонанса	665
Гудзенко Л. И. О спектре малых флюктуаций установившихся колебаний автогенератора общего типа	671
Богатырев Ю. К. Стационарные волны в нелинейной дискретной линии передачи	680
Белуга И. Ш. Расчет резонаторных замедляющих систем эквивалентным статическим методом	689
Шестопалов В. П., Адонина А. И. О спиральных волнах в спиральном волноводе	703
Солнцев В. А. Параметрическое усиление и преобразование частоты в широком электронном потоке	712
Рубаник В. П. Многочастотные резонансные колебания в квазилинейных системах с запаздывающими аргументами	726
Сергиевский Б. Р. Автоколебания в системах с двумя релейными элементами	735
Аронович Г. В. К определению устойчивости «в большом» стационарных режимов ГЭС с уравнительными резервуарами	748
Кузин С. Г. Получение дискретных случайных величин с различными законами распределения	753

Краткие сообщения и письма в редакцию

Кротиков В. Д., Порфириев В. А., Троицкий В. С. Эталонирование радиоизлучения Луны на волне 3,2 см	759
Кисляков А. Г. Предварительные результаты экспериментального исследования радиоизлучения Солнца в диапазоне волн 3—7 мм	760
Бенедиктов Е. А., Коробков Ю. С. Поглощение космического радиоизлучения во время магнитной бури 1 апреля 1960 г.	763
Ковнер М. С. Об одном случае черенковской неустойчивости в неравновесной магнитоактивной плазме	765
Силин В. П. О тепловом излучении в прозрачной среде	767
Ахманов С. А. О влиянии флюктуаций начальных условий на процесс установления колебаний в генераторе с двумя устойчивыми состояниями	769
Жадан А. И. Оценка эмиссионных свойств прессованного катода на основе алюминиатов бария	772
Неймарк Ю. И. и Шильников Л. П. К исследованию устойчивости периодических движений квазилинейных систем	776
Телеснин В. Р. Использование нелинейных колебательных контуров для построения импульсных схем	779
Алексеев А. С., Дозоров В. А., Тай М. Л. О получении нелинейных функций на машинах непрерывного действия	782
О мировом центре данных Международного геофизического года	783
Содержание №№ 1, 2, 3 журнала «Известия вузов МВ и ССО СССР» по разделу «Радиотехника» за 1961 г.	785

НАБЛЮДЕНИЯ ТЕПЛОВОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ НА ВОЛНЕ 2 см*

А. Е. Саломонович, В. Н. Кощенко

Приведены результаты наблюдений радиоизлучения Луны на волне 2 см, выполненных в ноябре—декабре 1959 г. на радиотелескопе ФИАН. Получены двухмерные распределения яркостной температуры, обнаруживающие регулярное перемещение по лунному диску области максимальной яркости вслед за подсолнечной точкой. Зарегистрирован фазовый ход изменения яркостной температуры в центре диска; отношение амплитуды переменной составляющей к постоянной достигает $\sim 10\%$ при запаздывании по фазе 40° . С учетом наблюдаемого распределения поверхностной температуры, описываемого функцией $\cos^{1/2}\psi$, это дает отношение глубин проникновения радио- и тепловой волны $\delta = 4,4 = 2,2 \lambda$.

Использование для наблюдений радиоизлучения Луны радиотелескопов высокой разрешающей способности позволяет получить картину распределения яркостной температуры по видимому диску. Исследование изменений этого распределения в ходе лунации дает материал для выяснения некоторых физических характеристик поверхности слоя лунной коры [1].

В ноябре—декабре 1959 г. на 22-метровом радиотелескопе ФИАН [2] были проведены наблюдения радиоизлучения Луны на волне 2 см. Для приема радиоизлучения использовался ферритовый модуляционный радиометр обычного типа, высокочастотная часть которого вместе с усилителем промежуточной частоты размещалась вблизи фокуса 22-метрового параболоида. В качестве облучателя использовался открытый конец круглого волновода. Электрический вектор принимаемой линейно-поляризованной волны составлял угол 45° с плоскостью горизонта. Диаграмма антенны по уровню 3 дБ составляла в *E*- и *H*-плоскостях несколько более $4'$.

Калибровка антенной температуры проводилась путем записи излучения холодного эквивалента антенны и атмосферы [3]. Яркостные температуры пересчитывались затем из антенных с учетом рассеяния в дальние боковые и задние лепестки диаграммы антенны, оценивавшегося в 15% . Систематическая ошибка определения яркостных температур, по-видимому, составляла около $\pm 15\%$. В процессе наблюдений проводилось последовательное сканирование диска Луны по азимуту при перестановках оси радиотелескопа по углу высоты через $3'$ относительно центра диска. После учета влияния конечной ширины диаграммы на кривые прохождений, выполнявшегося в пределах диска Луны хордовым методом [4], строились радиоизофоты, представлявшие двухмерное распределение яркостной температуры.

На рис. 1 приведены образцы распределений, полученных для 6 различных оптических фаз Луны (от $\Phi_{\text{опт}} = 130^\circ$ до $\Phi_{\text{опт}} = 303^\circ$, считая от новолуния).

Рассмотрение карт двухмерного распределения обнаруживает систематическое перемещение по диску области максимальной яркостной

* Доклад на Пленуме планетной комиссии Астросовета в октябре 1960 года.

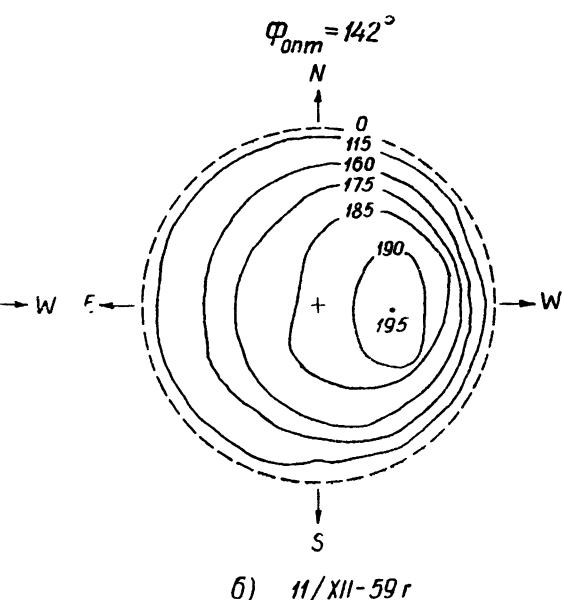
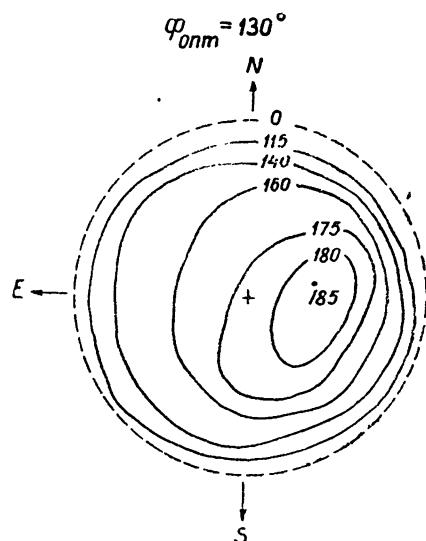


Рис. 1а.

Рис. 16.

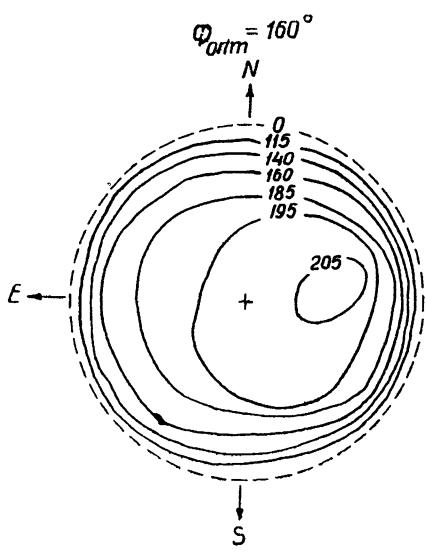


Рис. 1в.

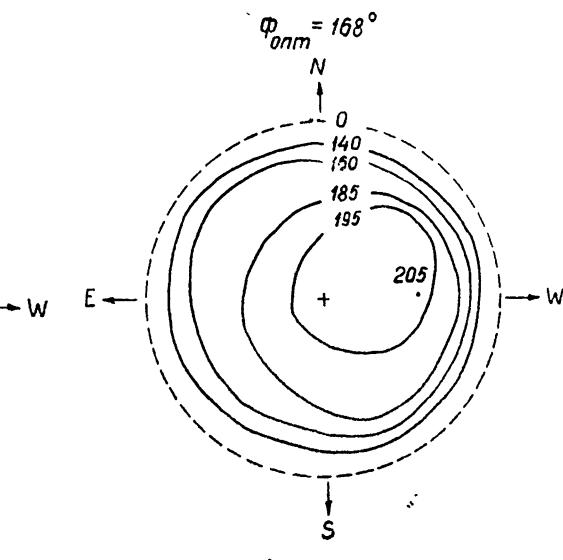


Рис. 1г.

температуры Луны вслед за подсолнечной точкой. Направление перемещения близко к перпендикуляру к линии рогов. Вблизи первой и последней четвертей распределение оказывается наиболее несимметричным, причем вслед за первой четвертью более „горячей“ оказывается западная, а вслед за последней четвертью—восточная части диска. Кроме того наблюдается дополнительное „потемнение“ к лунным полюсам вследствие меньшей освещенности Солнцем полярных областей.

Были произведены попытки оценить закон убывания поверхностной температуры Луны в зависимости от сelenографической широты ψ методом, изложенным в [5]. Для этого были использованы экваториаль-

ные и меридиональные распределения яркостной температуры, полученные 26.XI и 10.XII, когда распределение было наиболее несимметричным. По экваториальным распределениям были построены кривые относительного изменения вдоль экватора излучательной способности. Затем для различных законов широтного распределения поверхностной температуры ($\cos \phi$, $\cos^{2/3} \phi$, $\cos^{1/2} \phi$ и $\cos^{1/4} \phi$) с учетом наблюдаемого изменения излучательной способности (в предположении его центральной симметрии) были построены

ожидаемые распределения яркостной температуры вдоль центрального меридиана $T(r)$. Полученные таким образом распределения сравнивались с наблюдавшимися. На рис. 2 приведены результаты сопоставления. Повидимому, ближе согласуется с наблюдаемым распределением закон спадания поверхностной температуры, близкий к $\cos^{1/4} \phi$ или $\cos^{1/2} \phi$.

Учитывая, что наблюдаемое экваториальное и меридиональное распределения несут на себе не полностью устраненное хордовым методом antennное сглаживание, обработка наблюдений была проведена другим методом. Исходя из значения средней диэлектрической проницаемости лунной коры $\epsilon=3$, была построена кри-

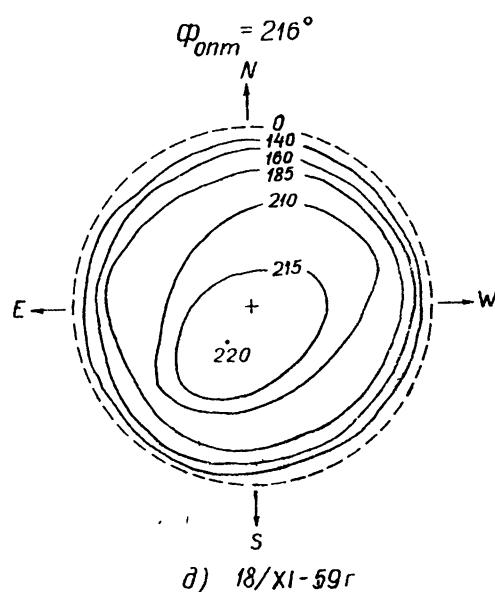


Рис. 1д.

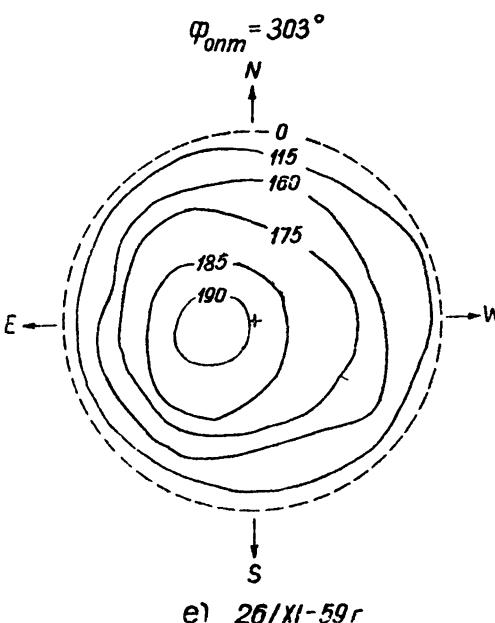


Рис. 1е.

вая изменения излучательной способности для модели гладкого шара, а затем — теоретические кривые меридионального распределения яркостной температуры для различных законов спадания поверхностной температуры с учетом указанного изменения излучательной способности. Полученные таким образом теоретические кривые „сглаживались“ реальной диаграммой антенны радиотелескопа и сравнивались с наблюдавшимся распределением яркостной температуры вдоль центрального меридиана, неисправленным за antennное сглаживание. В пределах лунного диска с экспериментальной кривой лучше совпадают кривые, построенные для законов $\cos^{1/2} \phi$ и $\cos^{2/3} \phi$. Сопоставление результатов обработки

обоими методами свидетельствует о близости закона распределения поверхностной температуры к $\cos^{1/2}\phi$, хотя этот результат нуждается в дополнительной проверке.

По данным 11 измерений была построена зависимость изменения яркостной температуры в центре диска Луны T_u от ее фазы, приведенная на рис. 3. Отчетливо виден фазовый ход, который можно аппроксимировать выражением $T_u(\Phi_{\text{опт}}) = 190 - 20 \cos(\Phi_{\text{опт}} - 40^\circ)$ градусов. При этом точность определения запаздывания по фазе не лучше $\pm 5^\circ$. Что касается абсолютных значений яркостной температуры, то вследствие наличия систематической ошибки, обусловленной неточным определением параметров антенны (главным образом, коэффициента рассеяния), они, по-видимому, занижены, однако не более, чем на 15%.

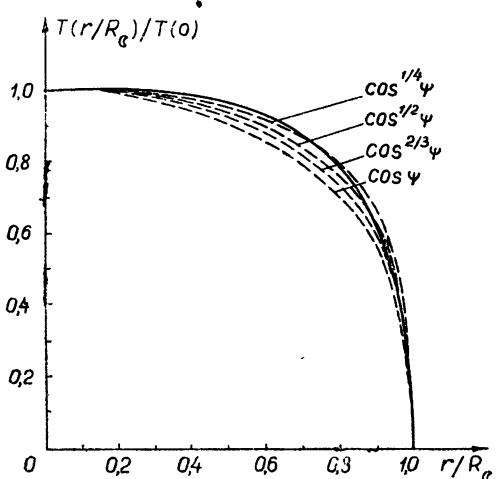


Рис. 2.

Если принять, как наиболее вероятный, закон широтного изменения поверхностной температуры в виде $\cos^{1/2}\phi$, а также значения $T_n = 407$ и $T_h = 125^\circ\text{K}$, где T_n и T_h — поверхностные температуры в центре диска в лунные полдень и полночь, мы получим, согласно [1], значение $\delta = 4,4$ и отношение $\delta/\lambda = 2,2$.

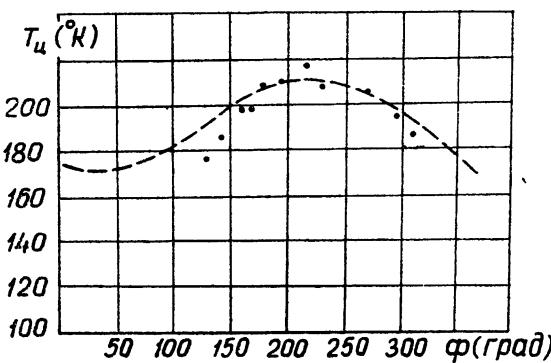


Рис. 3.

Исходя из полученного значения $\delta = 4,4$, находим, согласно [1], запаздывание по фазе переменной составляющей $T_{\text{я,н}} \sim$ относительно оптической фазы $\xi = \arctg [\delta/(1 + \delta)] = 39^\circ$, что с точностью ошибок измерений совпадает с наблюдаемым. Отсюда можно, по-видимому, сделать вывод о применимости для волн сантиметрового диапазона однослойной модели лунной коры. Полученное нами на волне 2 см значение $\delta/\lambda = 2,2$ несколько отличается от значения этой величины, найденной ранее на волне 1,63 см [6] ($\delta/\lambda = 1,4$). Что касается запаздывания по фазе ξ , то с точностью ошибок измерения результаты на волнах 2 см и 1,63 см совпадают.

Авторы выражают благодарность Н. А. Аменицкому, разработавшему радиометр и принимавшему участие в наблюдениях, и Р. И. Носковой за помощь в обработке записей.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 31, 511 (1954).
2. А. Е. Саломонович, Радиотехника и электроника, 4, 2092 (1959).
3. А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 35, 129 (1958).
4. R. N. Bracewell, Austr. J. Phys., 9, 1—4 (1956).
5. Н. Л. Кайдановский, А. Е. Саломонович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 40 (1961).
6. М. Р. Зелинская, В. С. Троицкий, Л. И. Федосеев, Астрон. ж., 31, 643 (1959).

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию
10 ноября 1960 г.

OBSERVATIONS OF LUNAR THERMAL RADIO EMISSION AT THE 2 cm WAVELENGTH

A. E. Salomonovitch, V. N. Koshchenko

Results are given of observations of lunar radio emission at the 2 cm wavelength carried out in November—December 1959 with the radiotelescope of the FIAN (Lebedev Physical Institute). Two-dimensional distributions of brightness temperature were obtained revealing the regular displacement on the lunar disk of the area of maximum brightness after the subsolar point. The phase dependence was registered of the change of brightness temperature in the centre of the disk; the ratio of the variable component amplitude to the constant reaches $\sim 10\%$ with phase delay of 40° . Taking into account the observed distribution of the surface temperature, described by the function $\cos^{1/2}\psi$, this gives a ratio of the depths of penetration of radio and thermal waves of $\delta = 4.4 = 2.2 \lambda$.

РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ ЛУНЫ НА ВОЛНЕ 3,2 см*

В. Н. Кощенко, Б. Я. Лосовский, А. Е. Саломонович

Измерения яркостной температуры теплового радиоизлучения Луны на волне 3,2 см, проведенные на 22-метровом радиотелескопе ФИАН, обнаружили наличие фазового хода, аппроксимируемого для центра диска функцией $T_{\pi} = 223 - 17 \cos(\Phi - 45)$, где Φ — оптическая фаза, отсчитываемая от новолуния. Полученные двухмерные распределения обнаруживают фазовый ход, а также уменьшение радиояркости от экватора к лунным полюсам.

Недостаточная чувствительность аппаратуры и низкая разрешающая способность использовавшихся радиотелескопов не позволили до последнего времени обнаружить зависящего от фазы изменения яркостной температуры радиоизлучения Луны на волнах, длиннее ~2 см [1,2]. Между тем, исследование фазовых изменений теплового излучения Луны в возможно более широком диапазоне частот позволяет получить важные данные о характеристиках излучающих слоев лунной коры, в частности, об их однородности.

В связи с этим на 22-метровом радиотелескопе ФИАН в августе—ноябре 1960 г. были проведены систематические измерения двухмерного распределения радиояркости Луны на волне 3,2 см. Ширина диаграммы направленности на уровне 3 дБ составляла $6',3 \pm 0',2$ [3]. Для наблюдений применялся модуляционный радиометр обычного типа. Флюктуационный порог чувствительности приемника при постоянной времени $\tau = 1$ сек составлял $3 \pm 4'$. В процессе измерений использовался метод калибровки, описанный ранее [4].

Достаточно узкая диаграмма направленности антенны позволяла делать несколько различных записей прохождения лунного диска.

Методика измерений состояла в следующем. Предварительно вычисляя азимутально-вертикальные координаты центра лунного диска и направляя ось радиотелескопа в соответствующую точку небесной сферы, можно было производить затем „разрез“ диска при центральном прохождении Луны. Перемещая в дальнейшем ось радиотелескопа вверх или вниз на ширину диаграммы направленности и снова „проходя“ лунный диск по азимуту, можно было получать несколько нецентральных разрезов.

Более точным является метод получения „разрезов“ лунного диска в случае, когда с помощью оптического гида осуществлялось слежение за верхним или нижним краем видимого диска по углу места при одновременном прохождении по азимуту с небольшой дифференциальной скоростью. После прохождения Луны через диаграмму направленности радиотелескопа производилась перестановка визирной линии гида по углу места на величину, примерно равную ширине диаграммы направленности. Подъемом или опусканием оси радиотелескопа край диска вновь подводился к визирной линии и производилось новое азимутальное прохождение в обратном направлении.

* Доклад на расширенном пленуме Комиссии по радиоастрономии 25 ноября 1960 г.

Рядом последовательных перемещений по углу места и проходений по азимуту осуществлялась запись радиоизлучения Луны для 5–6 сечений диска.

Для построения распределения яркостной температуры использовались лишь записи, полученные при оптическом слежении. В случаях отсутствия видимости разрезы по азимуту производились лишь через центральную часть лунного диска. Перед построением двухмерных распределений по полученным „разрезам“ последние были исправлены за antennное сглаживание по методу хорд [5]. Переход от antennных температур к яркостным производился с учетом коэффициента рассения в дальние боковые и задние лепестки, принимавшегося равным 0,15.

Построение двухмерного распределения яркостных температур заключалось в следующем.

1. По значению установки визирной линии оптического гида, при котором производилась запись прохождения, определялось положение соответствующего сечения на лунном диске.

2. Ширина записанной кривой прохождения по уровню половинной интенсивности (относительно середины центральной записи) отождествлялась с угловым размером соответствующей хорды оптического диска Луны на день наблюдения.

3. Полученные сечения строились в проекции на лунный диск. Точки равной яркостной температуры наносились с интервалом $10 \pm 15^\circ$ и соединялись плавными линиями.

На рис. 1 приведены примеры полученных указанным способом двухмерных распределений для различных оптических фаз Луны. Отчетливо видны изменения характера распределения радиояркости при различных фазах. Область, соответствующая максимальной яркости, систематически перемещается вдоль лунного экватора в зависимости от фазы. Вблизи от первой четверти более „горячей“ оказывается западня, а вблизи от последней—восточная часть диска. Заметно постоянное „потемнение“ полярных областей. Вследствие этого радиоизофоты оказываются эллиптическими. По двухмерным распределениям, а также по центральным прохождениям в дни, когда Луна оказывалась невидимой (облачность, новолуние), была построена зависимость яркостной температуры центра диска $T_{\text{ц}}$ от лунной фазы.

На рис. 2 приведены результаты такого построения. Явно различим фазовый ход с отставанием радиофазы от оптической Φ . Среднее значение яркостной температуры 223°K . Изменение температур может быть аппроксимировано функцией $T_{\text{ц}} = 223 - 17 \cos(\Phi - 45)$ градусов. При этом относительная ошибка измерений яркостной температуры составляет $\pm 5\%$ при абсолютной ошибке, обусловленной неточностью знания параметров антенны, равной $\pm 15\%$. Ошибка в определении фазового запаздывания составляет $\pm 5^\circ$. Отклонение температуры в центре от среднего значения составляет, таким образом, $\pm 7,5\%$.

В проводившихся ранее измерениях на $\lambda = 3,2 \text{ см}$ [1,2] обнаружить фазовый ход, по-видимому, не удавалось ввиду того, что относительная ошибка измерений была $7 \pm 8\%$.

Широкая диаграмма направленности использовавшихся радиотелескопов также уменьшала, хотя и незначительно, ожидаемый эффект, поскольку измерялась не $T_{\text{ц}}$, а усредненная по диску яркостная температура. Полученные в предыдущих работах [1,2] более низкие значения средней яркостной температуры обусловлены, по-видимому, недостаточно точным определением параметров антенны. По полученным нами данным в предположении оцененной ранее [6] широтной зависимости поверхностной температуры, определяемой функцией вида

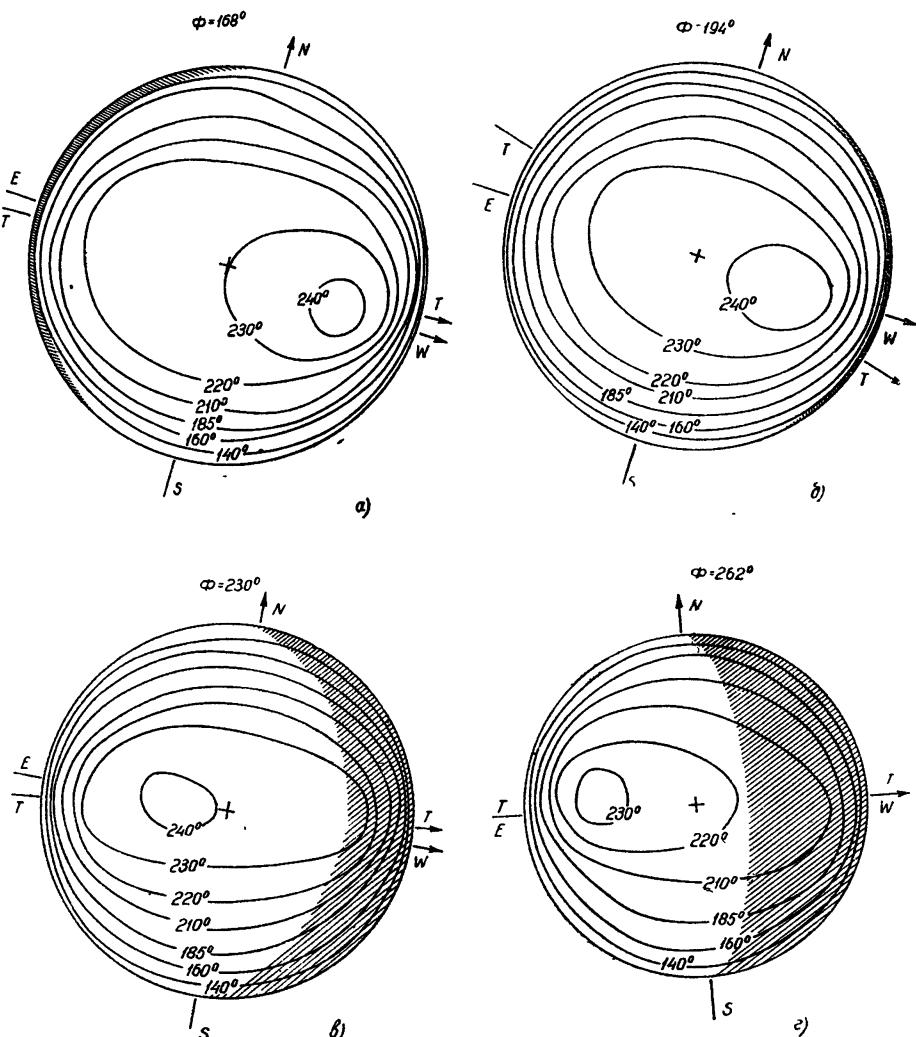
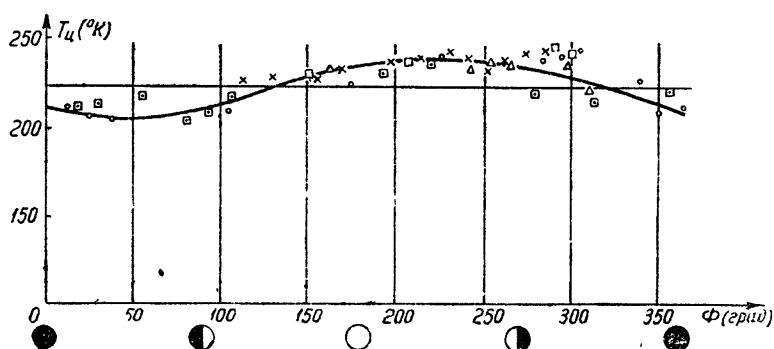


Рис. 1.

Рис. 2. Фазовый ход яркостной температуры Луны в центре диска на $\lambda=3,2$ см (— в августе, ● — в сентябре, × — в октябре, Δ — в ноябре 1960 г.).

$\sqrt{\cos \psi}$, в рамках теории [7], можно сделать оценку отношения глубин проникновения в лунную пору радио- и тепловой волн δ . Для исследований на волне 3,2 см $\delta=6,1$, что приводит к отношению $\delta/\lambda = 1,9$, близкому к полученному ранее [6] для $\lambda=2$ см. Измеренное значение запаздывания изменения T_c по фазе ($45^\circ \pm 5^\circ$) удовлетворительно согласуется с расчетным значением (41°), следующим из модели однородного излучающего слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Л. Кайдановский, М. Т. Турусбеков, С. Э. Хайкин, Труды 5-го совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М., 1956.
2. В. С. Троицкий, М. Р. Зелинская, Астрон. ж., 32, 350 (1955).
3. В. М. Каракун, А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Астрон. ж., (в печати).
4. А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 35, 129 (1958).
5. R. N. Bracewell, Austr. J. Phys., 9, 1—4 (1956).
6. А. Е. Саломонович, В. Н. Кощенко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, 591 (1961).
7. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 31, 511 (1954).

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию
23 января 1961 г.

LUNAR RADIO EMISSION AT THE 3.2 cm WAVELENGTH

V. N. Koshchenko, B. Ya. Lossovski, A. E. Salomonovitch

Measurements of the brightness temperature of lunar thermal radio emission at the 3.2 cm wavelength, carried out on the 22 meter radiotelescope of the FIAN (Lebedev Physical Institute) revealed the existence of a phase change approximated for the centre of the disk by the function $T_c=223-17 \cos(\Phi-45)$, Φ being the optical phase counted out from the new moon. The two-dimensional distributions obtained reveal a phase change as well as a decrease of radio brightness from the equator to the lunar poles.

ФАЗОВАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ НА ВОЛНЕ 3,2 см

К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий

Абсолютные измерения интенсивности радиоизлучения Луны, выполненные с более совершенной аппаратурой и методикой калибровки, позволили уверенно обнаружить фазовый ход излучения и дали значение эффективной температуры (практически для центра диска), равное $T_L = 255^\circ + 16^\circ \cos(\Omega t - 50^\circ)$, отношение глубин проникновения электрической и тепловой волн $\delta \approx 7,0$ и $\delta/\lambda \approx 2,2$ (λ —длина электромагнитной волны).

До последнего времени зависимость радиоизлучения Луны на волне 3,2 см от ее фаз не была обнаружена. Основной задачей настоящей работы являлось измерение фазовой зависимости радиотемпературы Луны на волне 3,2 см при более точном абсолютном измерении интенсивности, чем это было сделано ранее [1]. Для этой цели был применен новый метод калибровки антенны [2], более точная методика измерений и обработки с учетом влияния фоновых шумов антенны, применена более совершенная аппаратура [3]. Прежде чем перейти к изложению результатов, целесообразно вновь подвергнуть обсуждению метод измерения.

1. МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ АНТЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

Абсолютные измерения антенной температуры при приеме Луны проводились с использованием калибровки по собственным шумам антенны [4] (с модернизацией, позволяющей, согласно [5], автоматически учитывать поглощение в атмосфере). Процедура измерения, как обычно, состояла из двух операций.

1) Измерялась разность сигналов антенны, луч которой направлен в небо на высоту Луны справа или слева от нее и „холодного“ эталона излучения (имеющего температуру окружающего воздуха), который включался вместо антенны.

2) Измерение приращения сигнала при направлении луча антенны на Луну.

Уточнение анализа этой процедуры дает следующее. Температура сигнала на выходе антенны, направленной в небо на высоту Луны h , равна [2]

$$T_1(h) = T_n(h)(1 - \beta)\eta + T_\Phi(h) + T_0(1 - \eta), \quad (1)$$

где η —КПД антенны, β —коэффициент рассеяния мощности помимо заданного главного лепестка, $T_n(h)$ —эффективная радиотемпература неба на высоте h , $T_\Phi(h) = T_\delta(h)\eta\beta$ —фоновая температура выхода антенны (причем $T_\delta(h)$ —средняя температура фона по боковым лепесткам, учитывающая излучение атмосферы и земли), T_0 —температура материала антенны. Пусть температура холодного эталона $T_x = T_0 + \Delta t$. Первая операция дает:

$$kn_n = T_x - T_1(h) = \Delta t - T_n(h)(1 - \beta)\eta - T_\Phi(h) + T_0\eta,$$

где n_h — отклонение выходного прибора при переключении прибора с антенны на этalon в мм , k — чувствительность аппаратуры в град. мм^{-1} .

При наведении луча антенны на Луну вследствие небольшого изменения направления антенны лишь по азимуту ее температура, вызванная излучением фона, не изменится; поэтому вторая процедура дает

$$kn_L = T_{aL}\gamma, \quad (2)$$

где n_L — отклонение выходного прибора при направлении антенны на Луну и T_{aL} — антennaя температура от излучения Луны, ослабленного в атмосфере.

Из (1) и (2), исключая k , получим окончательное выражение для определения антенной температуры от излучения Луны или какого-либо другого источника:

$$T_{aL} = \frac{n_L}{n_h} \left[T_0 - T_h(h)(1-\beta) - \frac{1}{\eta} T_\Phi(h) + \frac{1}{\eta} \Delta t \right]. \quad (3)$$

Из (3) видно, что при точных измерениях необходимо знать и учитывать фоновую температуру и КПД антенны, входящие как поправки. Выражение (3) целесообразно в некоторых случаях представить в несколько ином виде.

Согласно [7], $T_h(h) = T_{cp}(1 - e^{-\gamma_0/\sin h})$, где $T_{cp} = T_0 - \Delta T$ и T_0 — температура атмосферы у поверхности земли, γ_0 — поглощение всей атмосферой в зените. Величина ΔT зависит от h и λ ; для $\lambda = 3,2$ при $h > 5^\circ$ (плоская атмосфера) $\Delta T \approx 30^\circ\text{K}$.

Так как прием Луны ведется на высотах, для которых атмосфера является плоской, то $T_{aL} = T_{aL}^* e^{-\gamma_0/\sin h}$, где T_{aL}^* — температура антенны при отсутствии поглощения в атмосфере. Подставляя выражения $T_h(h)$ и T_{aL}^* в (3), получим:

$$T_{aL}^* = \frac{n_L}{n_h} T_0 \left[1 + \beta \frac{1 - e^{-\gamma_0/\sin h}}{e^{-\gamma_0/\sin h}} + \frac{\Delta T(1-\beta)}{T_0} \frac{1 - e^{-\gamma_0/\sin h}}{e^{-\gamma_0/\sin h}} + \frac{\Delta t - T_\Phi(h)}{\eta T_0 e^{-\gamma_0/\sin h}} \right], \quad (4)$$

где, как известно,

$$T_{aL}^* = \int_{\omega} T_L F d\Omega / \int_{4\pi} F d\Omega. \quad (5)$$

Здесь ω — телесный угол Луны, T_L — распределение яркостной радио-температуры по диску Луны, F — диаграмма антенны по мощности.

Сделаем оценку отдельных членов. Для $\lambda = 3,2 \text{ см}$, $\gamma_0 = 0,02$ непера и для всех высот $h \geq 5^\circ$, величина $1 - e^{-\gamma_0/\sin h} = \gamma_0/\sin h$. Поскольку при измерениях высота Луны была не менее $h = 20^\circ$, то для всех измерений $\gamma_0/\sin h \ll 0,06$. При $\beta = 0,2^*$ второй член в (4) составляет около 1 % и им можно пренебречь, третий член при $\Delta T = 30^\circ$ — не более 0,5 %, четвертый член может дать поправку до $5 \div 7\%$. Итак, с достаточной точностью

$$T_{aL}^* = \frac{n_L}{n_h} T_0 \left[1 + \frac{\Delta t - T_\Phi(h)}{\eta T_0} \right]. \quad (6)$$

Эта формула служила для расчета антенной температуры. Величина

* В выражении (1) при измерении на углах $h > 20^\circ$ целесообразно величину β определять, принимая главный лепесток по угловому размеру порядка области однородности фона, т. е. $10 \div 15^\circ$. Этому соответствует приводимое здесь значение β .

$T_{\Phi}(h)$ была определена по методу [2] и при $h > 20 \div 30^\circ$ составляла 25°K для горизонтальной поляризации, 35°K — для вертикальной. Величины T_0 , Δt и η определялись при каждом измерении.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИОТЕМПЕРАТУРЫ ЛУНЫ

Поскольку ширина диаграммы антенны была сравнима с угловыми размерами Луны, то из (5) возможно определение лишь некоторой „взвешенной“ по диаграмме средней по диску температуры Луны [8] (см., например, [9]). Действительно, умножая и деля (5) на $\int F d\Omega$, получим:

$$T_{a, \text{Л}}^{\circ} = \bar{T}_{LF} \int_{\omega} F d\Omega / \int_{4\pi} F d\Omega = \bar{T}_{LF} (1 - \beta_{\text{Л}}), \quad (7)$$

где

$$\bar{T}_{LF} = \int_{\omega} T_{\text{Л}} F d\Omega / \int_{\omega} F d\Omega \quad (8)$$

— средняя взвешенная радиотемпература Луны, а

$$\beta_{\text{Л}} = \int_{4\pi - \omega} F d\Omega / \int_{4\pi} F d\Omega \quad (9)$$

— коэффициент „рассеяния“, показывающий, при рассмотрении передачи, долю излученной антенней мощности вне телесного угла Луны. Величина \bar{T}_{LF} при любой диаграмме, очевидно, заключена в пределах значений, соответствующих яркостной радиотемпературе центральной части диска $T_{\text{Л}}(0)$ (острая диаграмма) и средней по диску температуре $\bar{T}_{\text{Л}} = \omega^{-1} \int_{\omega} T_{\text{Л}} d\Omega$ (ширина диаграммы много больше угловых размеров Луны). Учитывая, что спадание яркостной температуры $T_{\text{Л}}$ происходит лишь в пределах узкого кольца $2 \div 3'$ угловых минуты [8, 12], а ширина диаграммы равна $36'$, следует полагать, что полученная нами величина \bar{T}_{LF} ближе к значению $T_{\text{Л}}(0)$, чем к значению $\bar{T}_{\text{Л}}$. Впрочем, разница между этими пределами невелика и составляет около 5% [8, 12].

Как видно из выражения (7), для нахождения $\bar{T}_{\text{Л}}$ необходимо определение $\beta_{\text{Л}}$. В работе [2] предложен и исследован метод измерения коэффициента рассеяния по отражающему листу. При угловом размере листа Ω_0 измеряется величина $\beta_{\Omega_0} = \int_{4\pi - \Omega_0} F d\Omega / \int_{4\pi} F d\Omega$. Выразим $T_{a, \text{Л}}^{\circ}$

через эту измеряемую величину. Умножая и деля (7) на $\int_{\Omega_0} F d\Omega$, получим:

$$T_{a, \text{Л}}^{\circ} = \bar{T}_{LF} \frac{\int_{\omega} F d\Omega}{\int_{\Omega_0} F d\Omega} (1 - \beta_{\Omega_0}). \quad (10)$$

Отсюда видно, что Ω_0 целесообразно выбирать равным телесному углу Луны [10] (см. также обзор [6]). Однако поскольку последний изменяется в течение цикла, то необходимость расчета отношения интегралов для каждого измерения, а следовательно, и необходимость знания диаграммы антенны этим не исключается. Минимальная погрешность измерений будет при выборе Ω_0 порядка телесного угла

главного лепестка антенны. Коэффициент β рассеяния антенны изменился по методу отражающего листа, описанного в [2], для двух размеров круглого листа: одного с видимым угловым радиусом $r_0 = 48'$ и телесным углом $\Delta\Omega_0 = \pi r_0^2/4$ и другого с видимым угловым радиусом $r_m = 16,5'$, равным максимальному угловому радиусу Луны.

Обозначим отношение интегралов в (10) через α . Для каждого измерения эта величина меняется в соответствии с изменением угловых размеров Луны. Заметим, что \bar{T}_{LF} практически не будет зависеть от размеров Луны (или во втором порядке малости по сравнению с зависимостью α). Для осесимметричной диаграммы

$$\alpha = \int_0^{r_0} F(\Theta) \sin\Theta d\Theta / \int_0^{r_m} F(\Theta) \sin\Theta d\Theta, \quad (11)$$

где r_0 и r — соответственно радиус листа и текущий радиус Луны. Но $r = r_m - \Delta r$, где r_m — максимальный радиус Луны за цикл. Предполагая, что $r_0 \neq r_m$, получим:

$$\alpha = \left(\int_0^{r_m} F(\Theta) \sin\Theta d\Theta - \int_r^{r_m} F(\Theta) \sin\Theta d\Theta \right) / \int_0^{r_0} F(\Theta) \sin\Theta d\Theta = \sigma_0 - \Delta\alpha, \quad (12)$$

где

$$\sigma_0 = \int_0^{r_m} F(\Theta) \sin\Theta d\Theta / \int_0^{r_0} F(\Theta) \sin\Theta d\Theta; \quad (13)$$

$$\Delta\alpha = \int_r^{r_m} F(\Theta) \Theta d\Theta / \int_0^{r_0} F(\Theta) \Theta d\Theta = F(r_m) r_m (r_m - r) / \int_0^{r_0} F(\Theta) \Theta d\Theta.$$

Итак, окончательно для $T_{a,L}$ имеем выражение:

$$T_{a,L}^\circ = \bar{T}_{LF} (\sigma_0 - \Delta\alpha) (1 - \beta_{r_0}), \quad (14)$$

по которому производился расчет \bar{T}_{LF} . Для случая $r_0 = r_m$

$$T_{a,L}^\circ = \bar{T}_{LF} (1 - \Delta\alpha) (1 - \beta_{r_m}). \quad (15)$$

Заметим, что величины β_{r_0} или β_{r_m} являются параметрами антенны, которые определяются лишь ее геометрией, поэтому они могли быть измерены однократно в период наблюдений, что и было сделано. В этом случае рассмотренная выше методика измерения антенной температуры является целесообразной.

Однако если отражающий лист и „черная“ излучающая площадка (см. [2]) могут быть использованы для каждого данного измерения излучения Луны, то более целесообразна для определения антенной температуры другая процедура измерений, исключающая необходимость учета фоновой температуры антенны. Действительно, находя разность принимаемого излучения листа и „черной“ излучающей площадки, получим

$$kn_k = (T_0 - T_{лист}) (1 - \beta_{r_0}) \eta, \quad (15a)$$

где T_0 — температура „черной“ площадки, $T_{лист}$ — эффективная температура листа, обусловленная в основном рассеянием и отражением излучения неба с соответствующего угла [6].

Приращение сигнала от Луны, согласно второй процедуре (формула (2)), дает $kn_L = T_{a,L} \eta$. Из обоих измерений

$$T_{a,L} = \frac{n_L}{n_k} (T_0 - T_{лист}) (1 - \beta_{r_0}) = e^{-\gamma(h)} T_{a,L}^{\circ}. \quad (16)$$

Наконец, согласно (7),

$$\bar{T}_{LF} = \frac{n_L}{n_k} (T_0 - T_{лист}) \frac{1 - \beta_{r_0}}{1 - \beta_L} e^{+\gamma(h)}, \quad (17)$$

где

$$(1 - \beta_{r_0}) / (1 - \beta_L) = \int_{\Omega_0} F d\Omega / \int_{\omega} F d\Omega = \alpha.$$

Может показаться, что рассмотренный способ целесообразен и при однократном использовании листа. Для этого достаточно измерить раз и навсегда (с помощью тепловой калибровки) величину $(T_0 - T_{лист})(1 - \beta_{r_0})$, входящую в формулы (16), (17) и являющуюся, по существу, неизменным параметром системы ($T_{лист}$ на сантиметровых волнах пренебрежимо мало меняется от метеоусловий). Однако для определения этой величины необходимо независимо измерить КПД η , а это, как известно (см. [2]), требует учета фоновых шумов антенны, и мы снова придем к рассмотренному выше методу. Если же с помощью тепловой калибровки определить из (15а) однократно величину $T_1 = (T_0 - T_{лист})(1 - \beta_{r_0})\eta_1$, где η_1 — КПД в момент измерения листа, а затем измерять $T_x = T_{a,L}\eta_x$, где η_x — КПД антенны в дни измерений Луны, то $T_{a,L} = T_x (T_0 - T_{лист})(1 - \beta_{r_0})\eta_1/\eta_x$ или

$$T_{LF} = \frac{T_x}{T_1} (T_0 - T_{лист}) \frac{1 - \beta_{r_0}}{1 - \beta_L} e^{+\gamma(h)} \frac{\eta_1}{\eta_x}. \quad (18)$$

Как нетрудно убедиться, величина фоновых шумов антенны, входящая в выражение для η_1 и η_x , практически слабо влияет на их отношение и, следовательно, на результат. Однако так как КПД антенны заметно меняется от метеоусловий и, в частности, от влажности воздуха (в нашем случае на $\pm 12\%$), то этот способ может дать большую ошибку или разброс данных, чем в случае применения рассмотренного выше метода раздельного измерения антенной температуры при приеме радиоизлучения Луны и параметра антенны β .

Заметим, что, как видно из приведенных выражений, систематическая ошибка примененного метода измерений заключена, в основном, в ошибке определения $T_{лист}$. Эта величина может быть рассчитана (см. [6]) и измерена. Согласно расчету для $\lambda = 3,2$ см, $20^\circ < T_{лист} < 60^\circ$; измерения дали $T_{лист} \approx 40 \pm 10^\circ\text{K}$. Таким образом, неточное знание $T_{лист}$ может привести к систематической ошибке в \bar{T}_{LF} (через ошибку в β) не более $\pm 7 \div 10\%$.

3. УСЛОВИЯ ИЗМЕРЕНИЙ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Измерения радиоизлучения Луны проводились на обеих поляризациях в дни оптической видимости Луны (визуальное наведение антенны) с августа по октябрь 1959 г. и с мая по сентябрь 1960 г. Однако надежные данные, наиболее точно обнаруживающие фазовую зависимость радиоизлучения Луны и приведенные здесь, получены лишь в сентябре 1960 г. Ранние данные используются для определения средней радиотемпературы.

Антенной радиотелескопа служил четырехметровый параболоид с облучением из открытого конца круглого волновода; КПД антенны, измеренный по собственным шумам [4], составлял в среднем $\eta = 0,85$

и менялся в зависимости от метеоусловий не более, чем на $\pm 12\%$. Коэффициент рассеяния антенны вне телесного угла листа $\Delta\Omega_0 = \pi r^2/4$ при $r = r_0 = 48'$ составляет по измерениям $\beta_{r_0} = 0,35$ и вне телесного угла при $r = r_m = 16,5'$ составляет $\beta_{r_m} = 0,75$. Радиометр обладал порогом чувствительности $0,5^\circ$ при постоянной времени в одну секунду, при которой производились все измерения. Выход регистрировался самописцем в течение одной минуты; при этом поддерживалось направление антенны на центр Луны.

Для контроля работы радиометра и определения КПД антенны производилась тепловая калибровка. В результате обработки данных по формулам (3), (14) и (15) получена кривая зависимости \bar{T}_{LF} от фаз, приведенная на рис. 1*. Наблюдавшаяся систематическая разница в измерении на обеих поляризациях (порядка $1 - 1,5\%$) считалась связанный с аппаратурными эффектами (некоторое изменение диаграммы, различная фоновая температура и т. д.); поэтому на рис. 1 эта разница исключена умножением данных при вертикальной поляризации

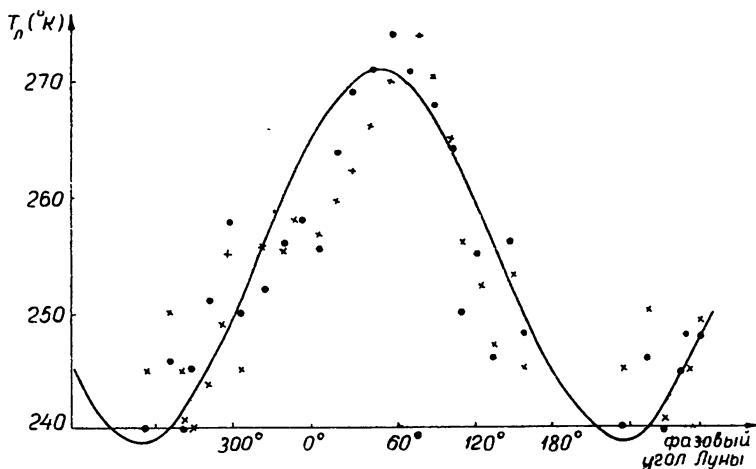


Рис. 1. Кривая зависимости радиотемпературы Луны от фазы:
... — температура Луны при вертикальной поляризации, $\times \times \times$ — температура Луны при горизонтальной поляризации; — кривая $\bar{T}_L = 255^\circ + 16^\circ \cos(\varphi t - 50^\circ)$.

на постоянный множитель. Множитель приведения находился из отношения средних радиотемператур на обеих поляризациях.

Вместе с калибровкой антенны по отражающему листу была проведена также калибровка по эталонному рупору [4], которая в пределах своих ошибок дала те же самые значения T_{LF} . При обработке использовалась диаграмма антенны, снятая по Солнцу и приведенная к диаграмме по точечному источнику. О соответствии полученной таким образом диаграммы истинной свидетельствует то, что рассчитанный по диаграмме КНД D_0 точно равен $D(1 - \beta_{r_0})$, где D — КНД, измеренный по рупору, а β_{r_0} — рассеяние вне принятой диаграммы, измеренное по листу.

Заметим, наконец, что расчет \bar{T}_{LF} , произведенный по измерениям β_{r_0} с листом $r_0 = 48'$ (формула (14)) и по измерениям с листом, равным максимальному размеру диска Луны $r_m = 16,5'$ (формула (15)), где точное значение диаграммы не требуется (диаграмма входит лишь в поправку Δx , составляющую не более $2-3\%$), привел с точностью

* Каждая точка соответствует $5 \div 6$ измерениям.

до $1 \div 2\%$ к одинаковым значениям. Проведена была также обработка данных согласно (18), принимая, что $\eta_1/\eta_x = 1$. Как и следовало ожидать, это несколько увеличило разброс значений T_{LF} , однако в пределах $1 \div 2\%$ привело к тому же значению температур. Наконец, были обработаны данные измерений трех циклов 1959 г., проведенные на двухзеркальной антенне, калиброванной по квадратному листу. Средняя температура Луны также оказалась равной 250°K . Учитывая систематическую погрешность метода и калибровок параметров, мы считаем, что ошибка абсолютных значений не выходит за пределы $\pm 10\%$. Точность относительных измерений от дня ко дню, характеризуемая средней дисперсией от аппроксимирующей кривой, не хуже $\pm 2\%$. Из рис. 2 видно, что кривая хода \bar{T}_{LF} несколько несимметрична, но достаточно удовлетворительно аппроксимируется выражением

$$T_{LF} = 255^{\circ} + 16^{\circ}\cos(\Omega t - 50^{\circ}).$$

Сравнивая отношение переменной части к средней радиотемпературе с соответствующим теоретическим отношением, найденным из выражений для яркостной и средней по диску радиотемператур [12], получим для величины δ , равной отношению глубины проникновения электрической волны к тепловой [8], значение $\approx 7,0$, откуда $\delta/\lambda \approx 2,2$, что удовлетворительно согласуется с оценкой, сделанной в [1], и измерениями на других волнах [11]. Сдвиг фазы в случае однослоиной модели $\xi = \arctg \frac{\delta}{1 + \delta}$ должен составлять 41° . Это меньше, чем наблюдаемая величина, но находится в пределах ошибки определения по следней.

Найденная довольно высокая постоянная составляющая радиотемпературы является, по нашему мнению, более достоверной, чем полученная в [1], где радиоизлучение Луны определялось на той же антенне методом сравнения с известным радиоизлучением Солнца по очевидному соотношению

$$\bar{T}_{LF} = \frac{T_C}{T_{aC}} \odot \frac{\int F d\Omega}{\int F d\Omega} T_{aL}$$

(см. обзор [6]), где T_C — температура Солнца, T_{aC} — температура антенны при приеме радиоизлучения Солнца. Если переработать полученные в [1] данные антенных температур, пользуясь найденными параметрами антенны, то для постоянной составляющей радиотемпературы получается $T_{L_0} \approx 250^{\circ}\text{K}$. Если использовать полученное позднее значение радиотемпературы спокойного Солнца [13], равное 16000°K^* (ранее было принято $T_C = 13000^{\circ}\text{K}$), то получим $T_{L_0} \approx 240^{\circ}\text{K}$, что в пределах ошибок измерений также совпадает с найденным теперь значением. Более высокое значение постоянной составляющей требует пересмотра величины некоторых физических параметров Луны. Что касается слишком большого отставания по фазе, то вряд ли можно сейчас основывать какие-либо выводы на этом, поскольку точ-

* Измеренная недавно значительно более точным методом [14] радиотемпература Солнца на $\lambda = 3,2 \text{ см}$ примерно в ту же фазу его активности, что и измерения в [1], оказалась равной $15000 \pm 5\%$ [15].

ность определения сдвига не более $\pm 10^\circ$, а сама кривая хода излучения довольно несимметрична*.

В заключение выражаем благодарность Н. М. Цейтлину за проведение калибровки антенны и помочь при обработке данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, М. Р. Зелинскаяя, Труды 5-го совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М., 1956, стр. 99.
2. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 667 (1960).
3. В. Л. Рахлин, Приборы и техника эксперимента (в печати).
4. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 1, 601 (1956), 2, 935 (1957).
5. А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 35, 429 (1958).
6. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 393 (1961).
7. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 2, 19 (1958).
8. В. С. Троицкий, Труды 5-го совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М., 1956, стр. 325; Астрон. ж., 31, 511 (1954).
9. Луна, под ред. Маркова, Физматгиз, М., 1960.
10. А. П. Молчанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 722 (1960).
11. М. Р. Зелинскаяя, В. С. Троицкий, Л. И. Федосеев, Астрон. ж., 31, 643 (1959).
12. В. С. Троицкий, Доклад на Пленуме Комиссии по радиоастрономии, ноябрь, 1960.
13. К. М. Стрежнева, В. М. Плечков, А. М. Стародубцев, Солнечные данные, 7, 71 (1958).
14. В. Д. Кротиков, В. А. Порфирьев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика 4, 759 (1961).
15. В. С. Троицкий, В. Л. Рахлин, М. Р. Зелинскаяя, К. М. Стрежнева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
21 октября 1960 г.

PHASE DEPENDENCE OF LUNAR RADIO EMISSION AT THE 3.2 cm WAVELENGTH

K. M. Strezhneva, V. S. Troitski

Absolute measurements of Lunar radio emission intensity made with more perfect apparatus and using calibration method enabled to detect with certitude the phase change of the emission and gave the value of the effective temperature (practically for the centre of the disk) $T_M = -55^\circ + 16^\circ \cos(\Omega t - 50^\circ)$, the ratio of penetration depths of electric and thermal wave $\delta \approx 7.0$ and $\delta/\lambda \approx 2.2$ (λ being the length of the electromagnetic wave).

* Неточность определения сдвига в значительной степени может быть связана с разбросом точек $0.01 \cdot 240 \approx 2^\circ$, от амплитуды колебания 16° . Этот разброс может дать сдвиг $\pm \arctg(2/4/16) = \pm (8 \div 10^\circ)$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ИОНОСФЕРНЫХ ДРЕЙФОВ НАД г. ГОРЬКИМ В ПЕРИОД 1957—1959 гг.

Л. В. Гришкевич

Приводятся основные результаты наблюдений за дрейфами ионизации в E - и F -областях ионосферы, полученные в период МГГ—МГС в Горьком. Данные о движениях в F -области сравниваются с результатами исследований, выполненных в Москве (ИЗМИР) и Кембридже.

В период 1957—1959 гг. в Горьком были организованы наблюдения за дрейфами в ионосфере, которые проводились методом вертикального зондирования при пространственно-разнесенном приеме с малой базой. Аппаратура и методика эксперимента, а также способ обработки данных описаны в [1,2]. Для изучения движений в E -области использовались частоты $2 \pm 0,2$ мгц, а в F -области $2 \div 10$ мгц. Если днем или ночью в E -области присутствовали спорадические слои типа E_s , то изучались их движения. Наибольшее количество данных было получено при наблюдениях за дрейфами в F -области в диапазоне частот $2 \div 6$ мгц. Ниже приводятся основные результаты исследований за июль 1957 г.—январь 1960 г.

1. УСЛОВИЯ НАБЛЮДЕНИЙ

Регулярные исследования движений в ионосфере проводились в соответствии с программой МГГ—МГС [3]. Общее число дней наблюдений в Горьком за весь период равно 315. В большинстве случаев наблюдения велись круглосуточно в течение $10 \div 15$ мин первой четверти каждого часа. Наиболее часто изучались движения в F -области ионосферы, так как значение критических частот слоя E в вечерние,очные и предутренние часы часто были меньше или порядка 2 мгц (особенно осенью, зимой и весной). Кроме того, значительное увеличение поглощения в часы, близкие к полуночи, а также большой уровень атмосферных и радиопомех часто затрудняли проведение эксперимента. Условия наблюдений за дрейфами в F -области ионосферы были более благоприятны. Однако и в этом случае атмосферные и радиопомехи и увеличение поглощения в дневные часы ограничивали число полезных измерений. Помимо этих факторов наиболее существенным являлось частое отсутствие в ионосфере мелкомасштабных неоднородностей. Физическое состояние ионосферы в период 1957—1959 гг. большей частью было таково, что амплитуды отраженных сигналов испытывали медленные и нехарактерные изменения во времени (явление „фокусировки“). Вместе с тем нередки были случаи, когда амплитуды отраженных сигналов оставались практически неизменными в продолжение значительной части суток и величина их определялась лишь поглощением радиоволн в ионосфере.

В таблице 1 для иллюстрации представлены сведения о числе полезных данных, которые были получены при изучении дрейфов в E - и

		1957											
Область Е	Область F	июль	август	за лето	сентябрь	октябрь	ноябрь	за осень	декабрь	январь	февраль	за зиму	март
		3	12	15	18	13	10	41	15	8	9	32	16
Число дней наблюдений		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
число наблюдений	число наблюдений	13	92	105	76	13	15	104	21	11	38	70	127
случаи фотографирования	случаи фотографирования	4	48	52	45	9	15	69	8	8	2	18	23
число обработанных данных	число обработанных данных	2	12	14	10	—	4	14	4	1	1	6	4
число наблюдений	число наблюдений	51	274	325	592	291	365	1248	463	21	300	1024	477
случаи фотографирования	случаи фотографирования	17	89	106	121	64	44	229	51	32	50	133	76
число обработанных данных	число обработанных данных	4	31	35	44	23	8	85	27	10	9	46	15

Т а б л и ц а 1

1958												1959															
март	апрель	май	за весну	июнь	июль	август	за лето	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь	январь	февраль	за зиму	март	апрель	май	за весну	июнь	июль	август	за лето	сентябрь	октябрь	ноябрь	за осень	
16	5	11	32	14	10	11	35	16	15	10	41	17	16	9	42	12	6	5	23	9	6	6	21	14	13	6	33
127	66	107	300	215	134	180	529	148	116	67	331	55	39	26	120	105	76	68	249	139	93	90	322	77	75	61	213
23	4	14	41	11	9	9	29	57	42	44	143	23	13	10	46	20	14	5	39	22	8	20	50	4	22	11	37
4	1	2	7	5	2	1	8	2	6	16	24	6	6	2	14	7	10	3	20	5	1	—	6	1	5	6	12
477	153	187	817	395	248	334	977	352	372	431	1156	347	471	246	1064	421	207	132	760	191	135	146	472	404	363	173	940
76	17	56	149	52	46	39	137	137	176	118	431	112	129	80	321	86	33	23	142	22	40	35	97	187	157	43	387
15	6	11	32	10	15	2	27	14	28	45	87	39	29	36	104	30	21	11	62	4	10	7	21	64	17	16	37

F-областях ионосферы*. Приведенные цифры достаточно убедительно характеризуют трудности, возникающие при изучении движений. Следует отметить, что аналогичные условия наблюдений в период МГГ — МГС имели место и на ряде других станций [4].

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Дрейфы в E-области. а) Величины скоростей движений. В связи с тем, что при изучении движений в *E*-области ионосферы было получено мало данных, никакого разделения их по сезонам не проводилось. На рис. 1 изображена гистограмма, характеризующая распределение величин скоростей движений *V* за весь период наблюдений. Из нее следует, что средняя величина скорости движений

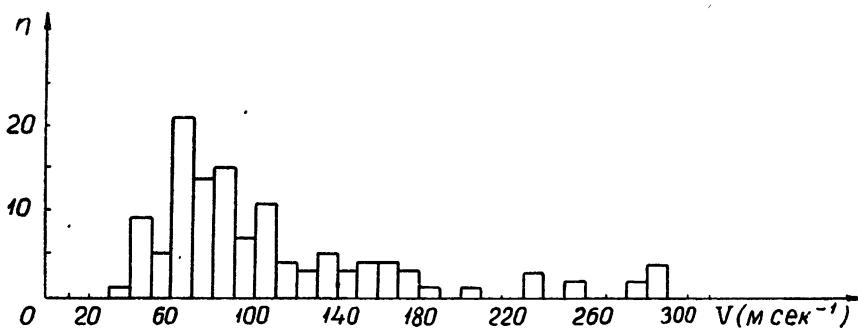


Рис. 1. Распределение скоростей движений в *E*-области ионосферы в 1957—1959 гг. (Горький).

в *E*-области составляет $85 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$. Средние скорости движений, вычисленные для двух периодов суток (день и ночь), также оказались равными $85 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$. Полученные нами результаты согласуются с аналогичными данными, опубликованными в литературе [5, 6]. Скорости движений порядка $150 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$ и более наблюдались редко (обычно в периоды повышенной магнитной активности) и при определении средних значений не учитывались.

б) Суточные вариации направлений движений. Для выяснения суточных вариаций направлений движений в *E*-области данные наблюдений были разделены на две группы, одна из которых относится к 00—07 и 18—23 часам, а другая охватывает период 08—17 часов. Такая классификация экспериментальных данных совпадает с принятой в работе [4]. В каждом случае были построены гистограммы направлений движений φ (рис. 2). Из анализа представленных на них данных можно заключить, что для обоих периодов суток направления движений в *E*-области ионосферы распределены почти равномерно. Некоторое исключение составляют значения углов $240^\circ \div 260^\circ$. Это можно объяснить тем, что в периоды 00—07, 18—23 часов направление движений на запад наблюдается как в утренние, так и в вечерние часы. Незначительное увеличение числа движений в направлении $220^\circ \div 280^\circ$ в дневное время связано с тем, что в этот период суток было полу-

* Обработке подвергались лишь те записи, на которых легко было визуально отождествить характерные значения амплитуд сигналов и отсчитать соответствующие времена смещений. Остальные записи или содержали в основном медленные и нехарактерные изменения амплитуд сигналов, или обнаруживали между собой малое сходство. В графике «Случай фотографирования» приведены цифры, характеризующие число случаев, когда отраженные сигналы испытывали заметные замедления.

чено несколько большее количество данных в часы, близкие к полуночи, когда также преобладали западные дрейфы. Если принять во внимание результаты работы [7], то полученные нами данные могут служить качественным подтверждением того, что вектор скорости дрейфа в E -области ионосферы в течение суток совершает два полных оборота, периоды которых составляют примерно 9 и 15 часов.

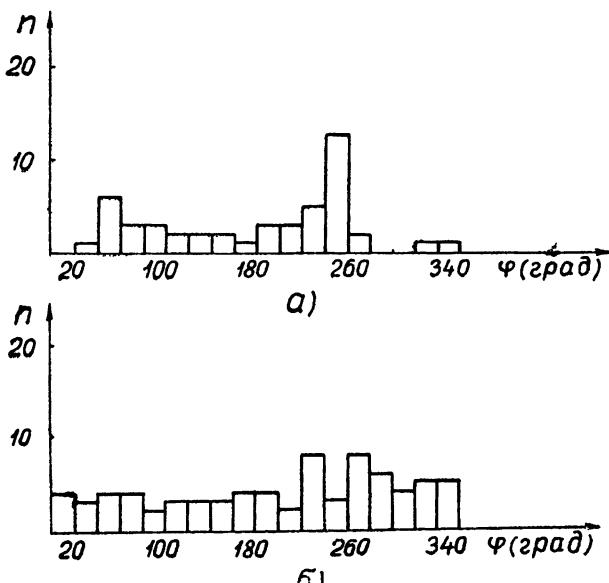


Рис. 2. Распределение направлений движений в E -области ионосферы в 1957—1959 гг. (Горький):
а) для интервала 00—07 и 18—23 часов; б) для 08—17 часов.

2. Дрейфы в F -области. а) *Величины скоростей движений.* Все результаты наблюдений за движениями в F -области ионосферы были объединены в четыре группы, каждая из которых соответствовала определенному сезону: март—май (весна), июнь—август (лето), сентябрь—ноябрь (осень) и декабрь—февраль (зима). На рис. 3 представлены гистограммы скоростей движений V , построенные по данным наблюдений в период 1957—1959 гг. Для каждого из сезонов были вычислены значения средних скоростей движений. При этом оказалось, что средние скорости зимой и весной несколько больше, чем летом и осенью, и соответственно равны $92 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$, $88 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$, $82 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$, $82 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$. Величины скоростей порядка $150 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$ и более при подсчете средних значений не учитывались, так как обычно они регистрировались в периоды магнитных возмущений. Скорости больше $250 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$ объединены в одну группу. Число таких случаев за весь период наблюдений мало.

Помимо отмеченных выше сезонных особенностей для средних скоростей движений в F -области ионосферы, по-видимому, существует некоторая зависимость величины среднечасовой скорости движений от времени суток: во все сезоны наблюдалась тенденция к увеличению средней скорости движений в часы, близкие к полуночи. Аналогичная зависимость была установлена и при анализе результатов обработки данных, полученных в Москве (ИЗМИР). Это дает основание полагать, что скорости движений в F -области ионосферы зависят не только от

времени года, но и от времени суток. Учитывая то обстоятельство, что количество надежных данных, относящихся к дневному времени, меньше, чем для остальной части суток, этот вывод требует дальнейшего подтверждения.

б) Суточные и сезонные особенности в направлении движений в F-области. На рис. 4 изображены круговые диаграммы, которые

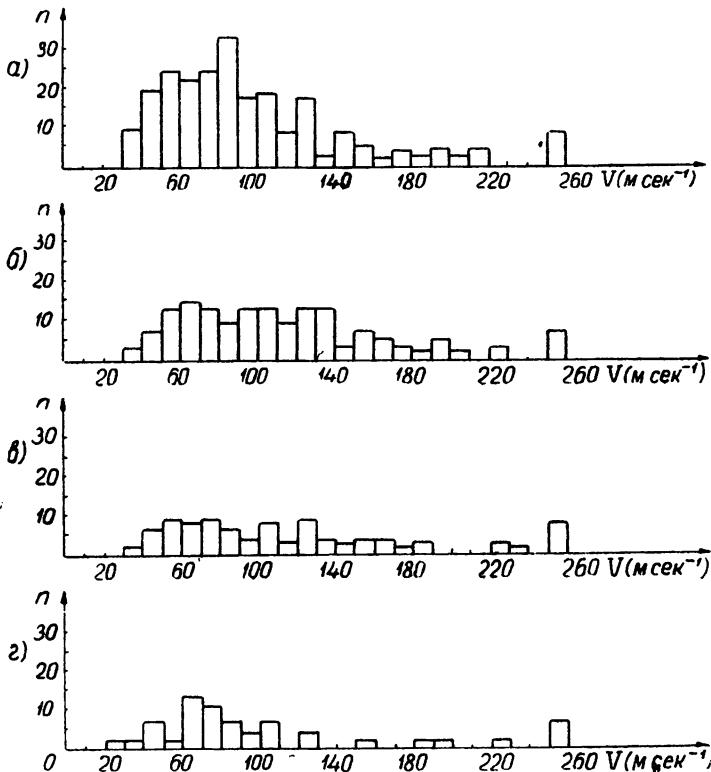


Рис. 3. Распределение скоростей движений в F-области ионосферы в 1957—1959 гг. (Горький):
а) сентябрь—ноябрь 1957—59 гг.; б) декабрь—февраль 1957—59 гг., в) март—май 1958—59 гг.; г) июнь—август 1957—59 гг.

характеризуют относительное распределение направлений движений в F-области ионосферы, наблюдавшихся в Горьком. Для сравнения на рис. 5 и 6 представлены аналогичные диаграммы, построенные по результатам наблюдений в Москве (ИЗМИР) и Кембридже*. На каждой диаграмме указано число данных n , которое было использовано при ее построении. Для выяснения суточных вариаций направления движений данные каждой станции объединены в группы, соответствующие определенному интервалу суток (время местное). Из приведенных на рис. 4—6 диаграмм можно сделать следующие выводы.

1) В вечерние,очные и предутренние часы (19—23; 00—06 часов) во все сезоны 1957—1959 гг. в F-области ионосферы над Горьким и Москвой преобладали движения к западу ($260^\circ \div 280^\circ$). Однако над Москвой западные дрейфы в вечерние и полуночные часы менее отчетливо выражены, чем над Горьким. В Кембридже в этот период

* Данные наблюдений в Москве и Кембридже были получены нами из Мирового центра данных (Москва).

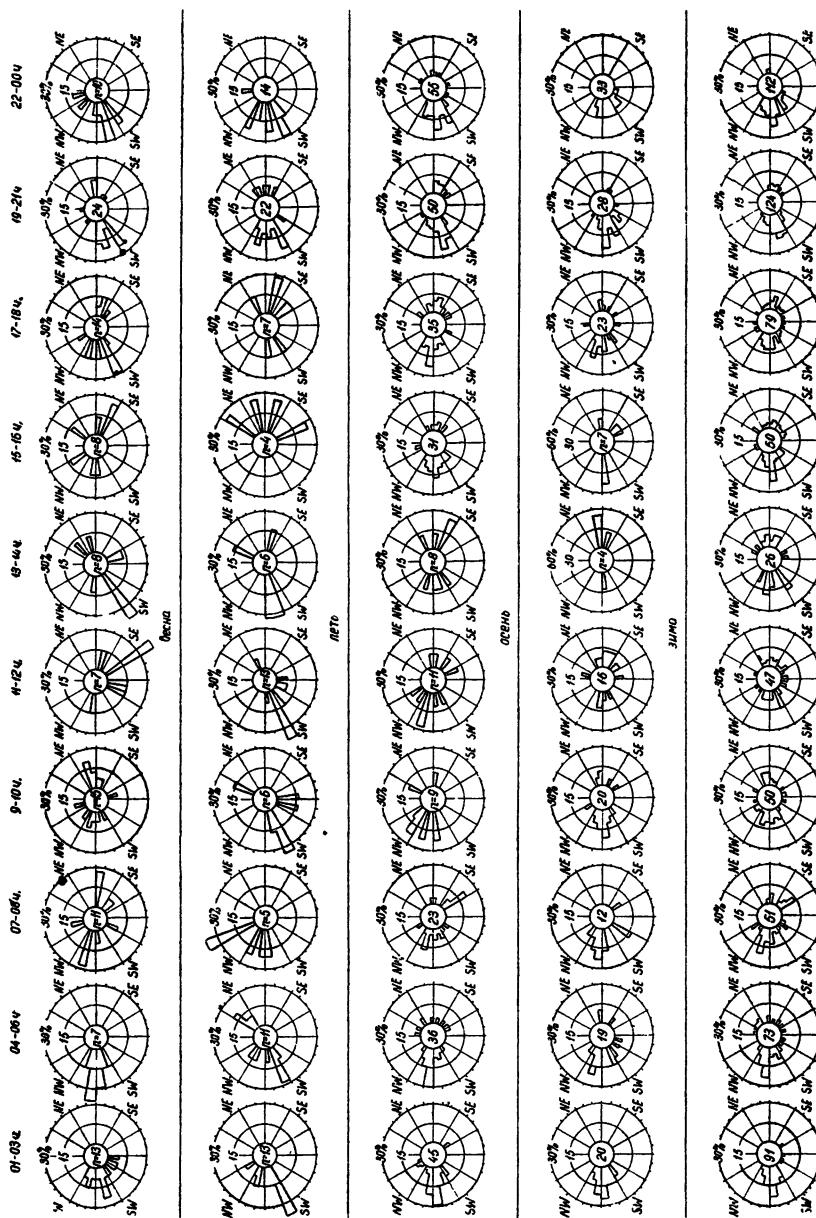


Рис. 4. Относительное распределение направлений движений в F -области ионосферы в зависимости от времени суток и сезона (Горкий).

среднее за июль 1962 – январь 1963

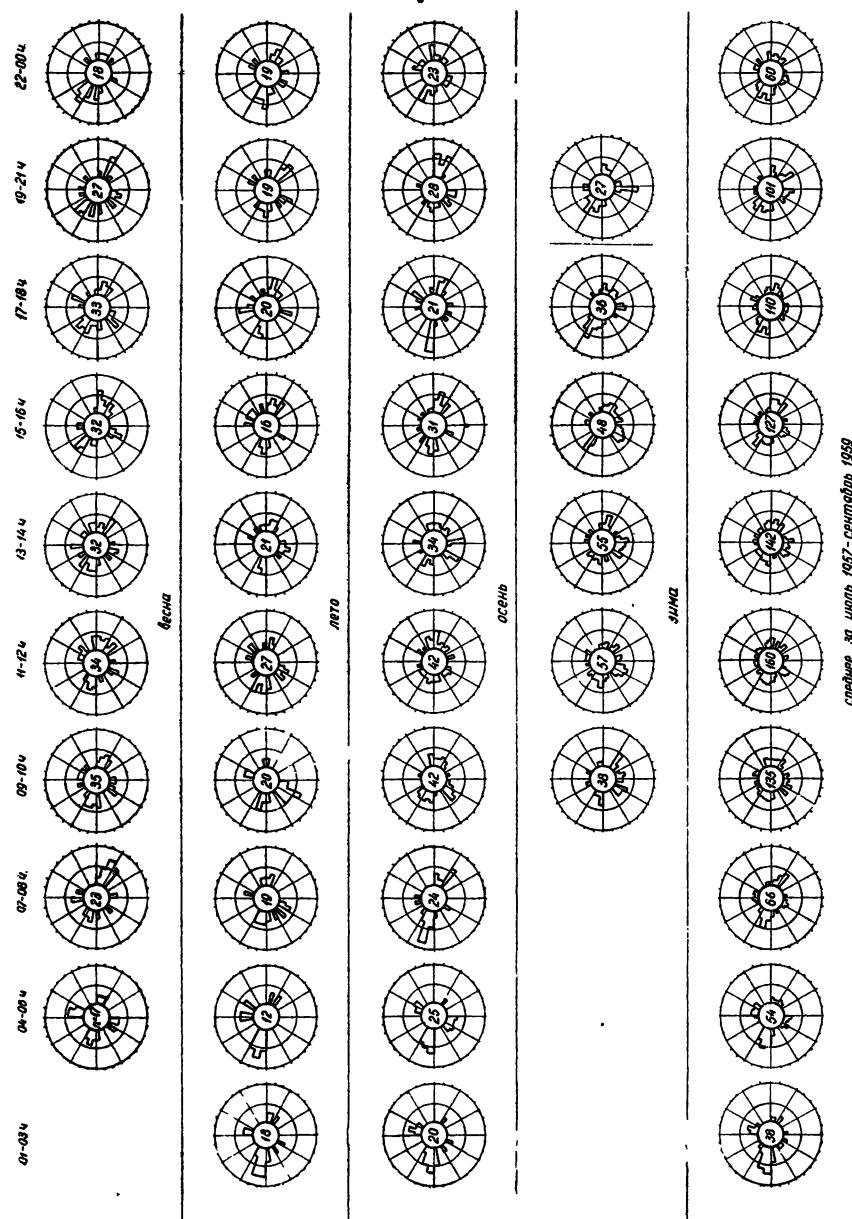


Рис. 5. Относительное распределение направлений движений в F-области ионосферы в зависимости от времени суток и сезона (Москва).

среднее за июль 1957 - сентябрь 1959

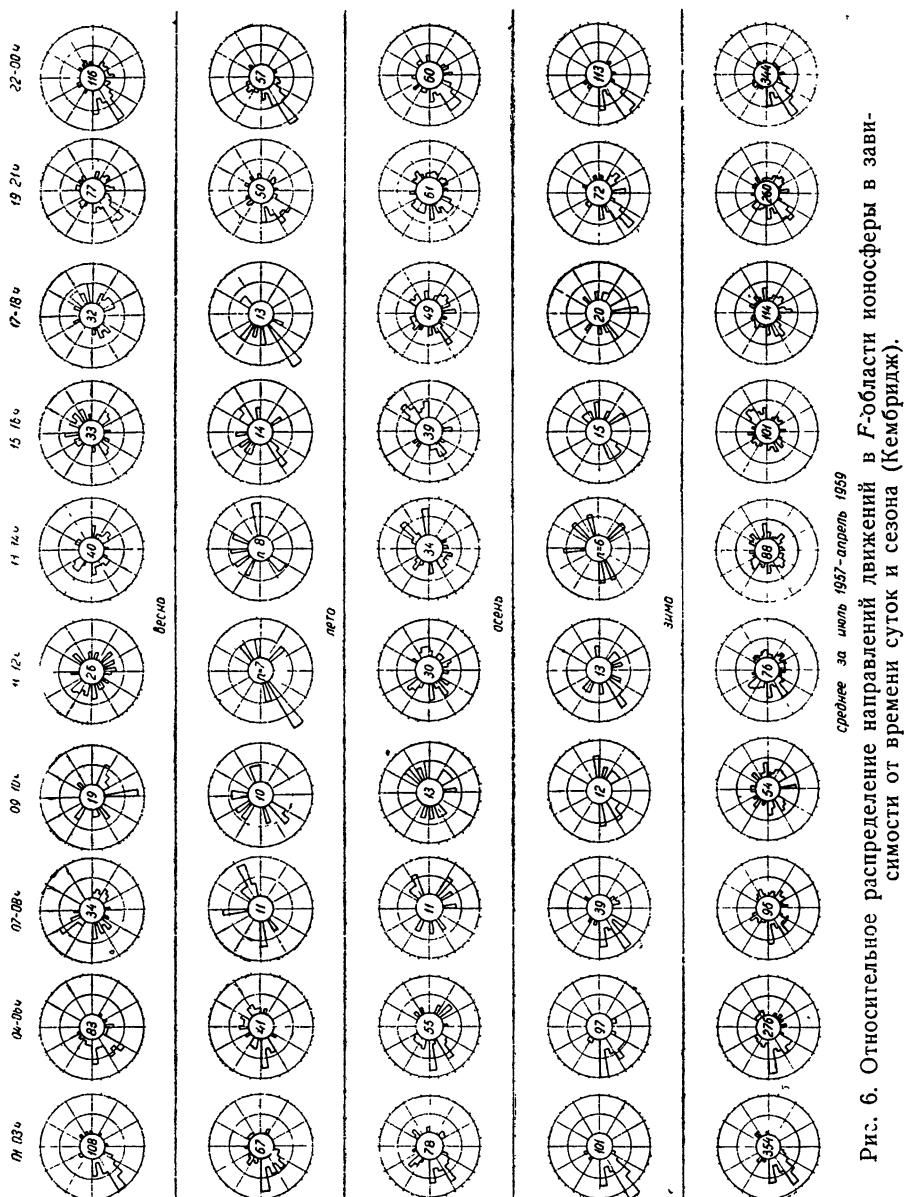


Рис. 6. Относительное распределение направлений лвижения в F-области ионосферы в зависимости от времени суток и сезона (Кембридж).

суток наиболее часто регистрировались юго-западные дрейфы ($230^\circ \pm 250^\circ$).

2) Во все сезоны днем (11—14 часов) направления движений в *F*-области ионосферы распределены более равномерно; поэтому не представляется возможным выделить преобладающее направление дрейфа. Особенно это отчетливо видно на диаграммах для Москвы и Кембриджа.

3) В остальное время суток во все сезоны также наблюдается значительный разброс в направлениях движений в *F*-области с некоторым преобладанием западных и восточных дрейфов.

4) Распределение направлений движений в *F*-области ионосферы для каждого из сезонов не обнаруживает между ними существенных различий.

Отмеченные особенности движений дают основание полагать, что суточные закономерности дрейфов в *F*-области ионосферы характеризуются 24-часовым периодом.

Сопоставление результатов наблюдений, полученных в Горьком, Москве и Кембридже в период МГГ—МГС, с аналогичными данными, относящимися к 1949—1953 гг. [7], свидетельствует о том, что для обоих периодов существует качественное согласие в закономерностях дрейфов в *F*-области. В связи с этим следует заметить, что если сезонные закономерности движений в *F*-области ионосферы действительно имеют место (как это отмечается в [4,7]), то они должны в основном проявляться в дневные часы. Однако для их выяснения необходимо располагать не только достаточным количеством надежных экспериментальных данных, но и тщательно анализировать их, поскольку в это время суток направления движений изменяются случайным образом от одного дня к другому. Поэтому наш вывод об отсутствии сезонных закономерностей дрейфов в *F*-области ионосферы не является окончательным и нуждается в дальнейшем подтверждении.

3. ДВИЖЕНИЯ В ИОНОСФЕРЕ И СВЯЗЬ С МАГНИТНОЙ АКТИВНОСТЬЮ

При проведении наблюдений за движениями в ионосфере было установлено, что в период магнитных возмущений в ионосфере скорости дрейфов значительно увеличиваются по сравнению с теми, которые измеряются в условиях спокойной ионосферы. Так, например, скорости движений *V* в *E*-области во время магнитных возмущений могут достигать порядка $200 \pm 250 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$, а в *F*-области $300 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ и более.

Для выяснения связи между величиной скорости дрейфов и степенью магнитной возмущенности мы провели анализ зависимости скоростей движений от *K*-индекса, который, как известно, является непрерывной мерой ионосферной возмущенности. При этом оказалось, что средняя скорость движений в *F*-области ионосферы с ростом *K*-индекса увеличивается, в то время как в *E*-области она постоянна при изменении *K*-индекса от 1 до 4 и только при $K > 4$ наблюдается значительное возрастание ее величины.

На рис. 7 представлены значения скоростей движений в *F*-области ионосферы безотносительно к времени года и суток в зависимости от величины *K*-индекса. Каждый отсчет скорости относится к тому значению *K*-индекса, который соответствует периоду наблюдений. Интересующие нас значения *K*-индекса определялись из таблиц, публикуемых ИЗМИРом в обзорах космических данных.

Из рассмотрения рис. 7 следует, что существует положительная корреляция между величиной средней скорости дрейфа в *F*-области и степенью магнитной возмущенности, подобная описанной в рабо-

так [5,6]. Необходимо отметить, что аналогичная зависимость была получена нами и для периода наблюдений июль—декабрь 1958 г. Это дает основание полагать, что магнитное поле Земли, по-видимому, оказывает существенное влияние на характер движений неоднородностей ионизации в *F*-области ионосферы. Если вместе с тем учесть, что скорости движений в *E*-области ионосферы менее подвержены влиянию магнитных возмущений, это может служить аргументом в пользу заключения о движении неоднородностей ионизации в *E*-области ионосферы со скоростью воздушных масс [8,9].

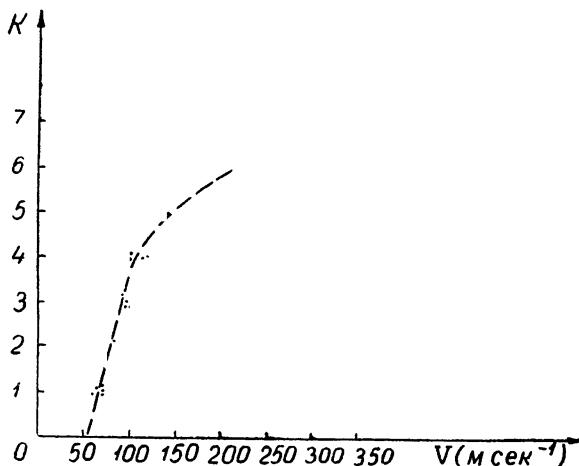


Рис. 7. Зависимость между скоростью движений и степенью магнитных возмущений (Горький) в *F*-слое в июле 1957—июне 1958 гг.

Возможная физическая интерпретация отмеченной связи между величиной скорости движений в ионосфере и степенью магнитной возмущенности предложена в работе [10]. Согласно этой работе солнечные корпускулярные потоки, вторгаясь во внешнюю атмосферу Земли (экзосферу), возбуждают низкочастотные электромагнитные поля, которые, распространяясь через ионосферу, вызывают увеличение скорости дрейфа в *E*- и, особенно, в *F*-области; достигая поверхности Земли, они создают вариации напряженности геомагнитного поля. В связи с этим следует указать, что для количественной проверки выводов данной теории необходимо располагать более определенными экспериментальными сведениями о характере связи между скоростями движений в ионосфере и степенью магнитной возмущенности (особенно в *E*-области). Дело в том, что данные ряда авторов [6,11] не обнаруживают сколько-нибудь существенной зависимости скорости движений в *E*-области от величины *K*-индекса вплоть до значений $K \geq 6$, в то время как по другим данным (см., например, [5]) уже при $K > 4$ имеет место значительное увеличение скорости дрейфов.

Отмеченная выше корреляция средней скорости движений со степенью геомагнитной активности, по-видимому, является важным фактором и для теории происхождения ионосферных неоднородностей [11]. Действительно, в периоды ионосферно-магнитных возмущений мелко-масштабные неоднородности ионизации наблюдаются гораздо чаще, чем в дни с низкой магнитной активностью.

В заключение заметим, что степень возмущенности ионосферы отчетливо проявляется в характере замираний отраженных сигналов. Если в спокойные дни частота замираний обычно составляет порядка

0,2 сек⁻¹, то во время сильных магнитных возмущений ($K > 5$) она увеличивается до 2 сек⁻¹. На рис. 8 представлены для сравнения два типа записей амплитуд сигналов, отраженных от нерегулярной ионосферы, один из которых является типичным для относительно спокойной, а другой для возмущенной ионосферы. Разница между ними очевидна. В литературе указывается, что аналогичная картина наблюдается при изучении флюктуаций интенсивности радиоизлучения дискретных источников [7, 12, 13]. Но нашему мнению, это может служить указанием на общность в происхождении различного типа неоднородностей.

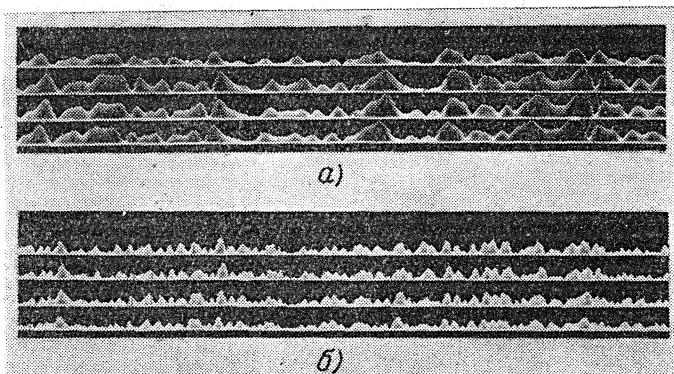


Рис. 8. Осциллограммы замираний сигналов, отраженных от F -области ионосферы на $f = 2,2$ мгц:

- а) 01 час 00 мин, 13.XI 1958, $h_d = 365$ км, $V = 95$ м сек⁻¹, $\varphi = 266^\circ$, $K=1$;
 б) 18 час 10 мин, 4.XII.1958, $h_d = 350$ км, $V=280$ м сек⁻¹, $\varphi = 278^\circ$, $K=7$
 (приемные антенны расположены по вершинам квадрата, стороны которого равны 140 м и ориентированы соответственно в направлениях с —ю. и в.—з.).

Изложенные выше результаты наблюдений за движениями в ионосфере, полученные в Горьком в период МГГ—МГС, свидетельствуют о том, что в E - и F -областях существуют определенные закономерности в горизонтальных дрейфах ионизации. Сопоставление результатов исследований, проведенных за движениями в F -области в Горьком, Москве и Кембридже, обнаруживает между ними качественное согласие. Установлено наличие положительной корреляции между величиной средней скорости движений в F -области и степенью магнитной активности.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность сотрудникам, принимавшим участие в проведении наблюдений и в обработке экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. В. Гришкевич, Н. А. Митяков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, 3, 13 (1958).
- Л. В. Гришкевич, Н. А. Митяков, Труды СИФТИ, вып. 37, 185 (1959)
- IGY 1957, 1958. Instruction manual, London, 3, 5 (1956).
- T. Shimaizaki, Report of Ionosphere and Space Research in Japan, 8, 21 (1959).
- J. H. Sharpman, Canad. J. Phys., 31, 120 (1953).
- В. А. Чечя, В. Е. Зеленков, Сб. трудов МГГ, Дрейфы и неоднородности в ионосфере, изд. АН СССР, М., 1959, стр. 50.
- B. N. Briggs, M. Spengler, Rep. Progress Phys., 17, 245 (1954).
- В. П. Докучаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 34 (1958).

9. T. Tsuda, Report of Ionosphere and Space Research in Japan, 8, 56 (1959).
10. В. П. Докучаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 901 (1960).
11. M. Dagg, J. Atm. Terr. Phys., 10, 144 (1957).
12. A. Maxwell, Camb. Conf. Proc. (Phys. Soc.), London, 1954 стр. 166.
13. A. Hewish, Proc. Roy. Soc., 214, 494 (1952).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 октября 1960 г.

RESULTS OF THE INVESTIGATION OF IONOSPHERIC DRIFTS OVER GORKI DURING THE 1957—1959 PERIOD

L. V. Grishkevitch

The main results are set forth of observations of ionization drifts in the *E*- and *F*-layers of the ionosphere, obtained during the IGY — IGC period in Gorki. Data on movements in the *F*-layer are compared with the results of investigations carried out in Moscow (IZMIR) and Cambridge.

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ ОСНОСИТЕЛЬНО ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ. III

B. B. Железняков

Рассмотрена задача о распространении электромагнитных волн вдоль магнитного поля H_0 в неравновесной однородной плазме. Получено выражение для коэффициента нарастания (затухания) волн во времени при условии, что этот коэффициент мал по сравнению с частотой и обусловлен мнимыми членами дисперсионного уравнения, которые приводят к появлению так называемого затухания Ландау в равновесной плазме.

Согласно статье [1], распространение электромагнитных волн в однородной безграничной плазме вдоль магнитного поля H_0 определяется дисперсионным уравнением*

$$c^2 k^2 - \omega^2 n_j^2(\omega) - \sum \pi \int \Omega_0^2 \frac{(\omega m - kp_{\perp}) \partial f_0 / \partial p_{\perp} + kp_{\perp} \partial f_0 / \partial p_{\parallel}}{\omega m - kp_{\parallel} \mp \Omega_H m} p_{\perp}^2 dp_{\perp} dp_{\parallel} = 0$$

или эквивалентным ему соотношением

$$\begin{aligned} c^2 k^2 - \omega^2 n_j^2(\omega) + \sum 2\pi \int \Omega_0^2 \frac{\omega m - kp_{\parallel}}{\omega m - kp_{\parallel} \mp \Omega_H m} f_0 p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel} + \\ + \sum \pi \int \Omega_0^2 \frac{k^2 - \omega^2/c^2}{(\omega m - kp_{\parallel} \mp \Omega_H m)^2} f_0 p_{\perp}^3 dp_{\perp} dp_{\parallel} = 0, \end{aligned}$$

полученными путем совместного решения релятивистского кинетического уравнения и уравнений Максвелла**. В приведенных формулах ω — частота, k — волновое число, c — скорость света в вакууме, $\Omega_0 \equiv 4\pi e^2 N/m$ — ленгмюровская частота, $\Omega_H \equiv eH_0/mc$ — гироочастота (e — заряд частиц с массой m , зависящей от модуля импульса $|p|$, и концентрацией N), p_{\perp} — модуль поперечной к H_0 составляющей p , $p_{\parallel} = p H_0 / H_0$, $f_0(p)$ — нормированная на единицу функция распределения частиц по импульсам, $n_j(\omega)$ — показатель преломления среды, в которой находится плазма. Знак \sum указывает на суммирование по сортам частиц, входящих в состав плазмы.

Приведенные дисперсионные уравнения относительно просто решаются методом возмущений при условии, что коэффициент нарастания (затухания) волн много меньше частоты. При нарушении этого условия исследование этих уравнений становится весьма затруднительным. Поэтому в статьях [1, 2], а также в настоящей работе указанное выше условие предполагается выполненным.

В статье [1] с помощью этих уравнений была исследована задача о неустойчивости плазмы относительно электромагнитных возмущений,

* Верхний знак отвечает необыкновенной, нижний — обычной нормальной волне.

** При выводе дисперсионных уравнений предполагалось, что поле волны зависит от времени t и радиуса-вектора r по закону $e^{ikr-i\omega t}$.

распространяющихся вдоль H_0 , в случае, когда дисперсия электронов плазмы по импульсам p_{\parallel} и p_{\perp} равна нулю: $f_0 \propto \delta(p_{\perp} - p_{\perp}^0) \delta(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)$. В статье [2] рассматривалось более общее распределение

$$f_0(\mathbf{p}) \propto \exp \left[-\frac{(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)^2}{a_{\parallel}^2} - \frac{(p_{\perp} - p_{\perp}^0)^2}{a_{\perp}^2} \right],$$

в котором дисперсия частиц по импульсам p_{\perp} и p_{\parallel} отлична от нуля, причем число электронов плазмы в элементе объема $d\mathbf{p}$ достигает максимума при $p_{\parallel} = p_{\parallel}^0 \neq 0$ и $p_{\perp} = p_{\perp}^0 \neq 0$ и монотонно уменьшается с ростом $(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)^2$ и $(p_{\perp} - p_{\perp}^0)^2$.

Однако в [2] исследовалась лишь неустойчивость, связанная с той частью дисперсионного уравнения, которая имеет особенность на частотах, удовлетворяющих соотношению $\omega \tilde{m} - kp_{\parallel}^0 \mp \tilde{\Omega}_H \tilde{m} = 0$ (p_{\parallel}^0 — значение продольной составляющей импульса плазмы, при котором функция $f_0(\mathbf{p})$ достигает максимума; знак \sim означает, что соответствующая величина относится к точке $p_{\parallel} = p_{\parallel}^0$, $p_{\perp} = p_{\perp}^0$). При этом игнорировалась другая часть уравнения, в которую явно входит мнимая единица и которая приводит к так называемому затуханию Ландау в случае, если распределение электронов по импульсам — равновесное.

Согласно [2], указанное рассмотрение допустимо при условии, что

$$|\xi_l| \equiv \left| \frac{\omega \tilde{m} - kp_{\parallel}^0 \mp e H_0 / c}{ka_{\parallel}} \right| \gg 1,$$

поскольку в этом случае в дисперсионном уравнении появляются члены, имеющие особенность при $\omega \tilde{m} - kp_{\parallel}^0 \mp \tilde{\Omega}_H \tilde{m} = 0$, а пропорциональные $e^{-\xi_l^2}$ члены уравнения, в которые явно входит мнимая единица, становятся экспоненциально малыми. Однако и при $|\xi_l| \gg 1$ учет членов с $e^{-\xi_l^2}$ для исследования неустойчивости плазмы становится существенным, если решение $\omega = \omega(k)$ дисперсионного уравнения без мнимой части оказывается действительным при реальных значениях k .

При $|\xi_l| \ll 1$ именно члены с $e^{-\xi_l^2}$ играют определяющую роль в нестабильности плазмы, так как решение $\omega = \omega(k)$ дисперсионного уравнения без мнимой части в случае $|\xi_l| \ll 1$ всегда действительно.

В настоящей статье мы рассмотрим условия распространения электромагнитных волн с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$ в неравновесной плазме, найдя коэффициент нарастания (затухания) в случае, когда неустойчивость связана с отрицательным затуханием Ландау, т. е. обусловлена пропорциональной $e^{-\xi_l^2}$ частью дисперсионного уравнения, которая определяет затухание Ландау в равновесной плазме.

Отыскание критериев неустойчивости неравновесной плазмы с помощью полученного выражения для коэффициента нарастания (затухания) волн в явном виде будет проведено в следующей статье [3].

1. ВЫБОР КОНТУРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ДИСПЕРСИОННОМ УРАВНЕНИИ

Как следует из [1], в дисперсионных уравнениях интегрирование проводится по действительным осям переменных p_{\parallel} (от $-\infty$ до $+\infty$) и p_{\perp} (от 0 до ∞), если $\text{Im } \omega > 0$. В случае, когда $\text{Im } \omega \leq 0$, интегралы следует понимать в смысле аналитического продолжения в нижнюю

полуплоскость ω . Для этого при переходе ω из верхней полуплоскости в нижнюю контуры интегрирования по p_{\parallel} и p_{\perp} должны деформироваться (в области комплексных значений p_{\parallel} , p_{\perp}) так, чтобы не пересечь особенности подынтегральных выражений.

Для простоты условимся в дальнейшем всегда считать одну из переменных (а именно p_{\perp}) действительной, деформируя контур только в комплексной плоскости p_{\parallel} .

Как обычно, при рассмотрении задачи о нестабильности плазмы волновое число k считается действительным. Не ограничивая общности, будем считать всегда, что $\operatorname{Re} \omega \geq 0$. Тогда направление распространения волны (вдоль или против поля H_0) определяется знаком k ; при любом знаке k верхний знак в уравнении (1.2), а также в приведенных выше дисперсионных соотношениях относится к необыкновенной, а нижний — к обыкновенной волне.

Если функция $f_0(p_{\perp}, p_{\parallel})$ — аналитическая, то подынтегральные выражения имеют особенности типа точек ветвления при

$$m = \sqrt{m_0^2 + c^{-2} p_{\perp}^2 + c^{-2} p_{\parallel}^2} = 0 \quad (1.1)$$

(m_0 — масса покоя) и особенности типа полюса при*

$$\omega m - kp_{\parallel} \mp \Omega_H m = 0. \quad (1.2)$$

Из (1.1) следует, что точки ветвления отвечают двум значениям продольного импульса, равным

$$p = \pm i \sqrt{m_0^2 c^2 + p_{\perp}^2} \quad (1.3)$$

(точки A_1 и A_2 на рис. 1а). Поскольку положение точек $A_{1,2}$ не меняется при изменении знака $\operatorname{Im} \omega$, их можно не принимать во внимание при деформации контура интегрирования. Отметим лишь, что этот контур должен располагаться в том листке римановой плоскости p_{\parallel} , на действительной оси которого масса $m > 0$.

Согласно (1.2), для каждой нормальной волны существуют два полюса при значениях $p_{\perp} = p_{\parallel l}$, определяемых соотношениями:

$$p_{\parallel l} = \frac{-k\Omega_H m \pm \sqrt{(k^2 - \omega^2/c^2)(m_0^2 c^2 + p_{\perp}^2) + \Omega_H^2 m^2 \cdot \omega/c}}{k^2 - \omega^2/c^2} \quad (1.4)$$

(необыкновенная волна),

$$p_{\parallel l} = \frac{k\Omega_H m \pm \sqrt{(k^2 - \omega^2/c^2)(m_0^2 c^2 + p_{\perp}^2) + \Omega_H^2 m^2 \omega/c}}{k^2 - \omega^2/c^2} \quad (1.5)$$

(обыкновенная волна).

В (1.4) и (1.5) индекс l принимает значения 1, 2 в соответствии с двумя знаками перед корнем.

* Как можно убедиться из статьи [1], полюса в дисперсионном уравнении в общем случае (для распространения волны под углом к магнитному полю H_0) определяются уравнением $\omega m - kp_{\parallel} \cos \alpha + s\Omega_H m = 0$, где $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и α — угол между полем H_0 и вектором k . Из сопоставления соотношения (1.2) и этого уравнения ясно, что проведенное в настоящем разделе рассмотрение будет справедливо и при $\alpha \neq 0$, если заменить k на $k \cos \alpha$ и $\pm \Omega_H m$ на $s \Omega_H m$.

Отметим, что полюса $p_{\parallel l}$ расположены, вообще говоря, на двух листках римановой поверхности p_{\parallel} . При заданных ω и k на плоскости, разрезанной по мнимой оси p_{\parallel} от $-i\infty$ до $-i\sqrt{m_0^2 c^2 + p_{\perp}^2}$ и от $+i\sqrt{m_0^2 c^2 + p_{\perp}^2}$ до $+i\infty$ (см. рис. 1а), у подынтегральных функций может быть два полюса, один и ни одного. Переход полюсов с одной плоскости на другую через указанные на рис. 1а линии разреза отвечает, согласно (1.2), значениям частоты

$$\omega = \frac{kp_{\parallel l} \pm eH_0/c}{\sqrt{m_0^2 + c^{-2}p_{\perp}^2 + c^{-2}p_{\parallel l}^2}}; \quad (1.6)$$

значения $p_{\parallel l}$ ($l = 1, 2$) в (1.6) соответствуют точкам, лежащим на берегах разреза (включая бесконечность). Как видно из рис. 1б, соотношение (1.6) при указанных условиях определяет на плоскости ω ($\text{Re}\omega \geq 0$) кривую, разделяющую области I и II с разным числом полюсов подынтегральных выражений.

О числе полюсов на листке плоскости p_{\parallel} для различных значений параметра ω можно судить, рассматривая положение точек $p_{\parallel 1}$ и $p_{\parallel 2}$ при действительных значениях ω . Последнее удобно делать с помощью графика рис. 2, на котором представлены зависимости $m = \sqrt{m_0^2 + c^{-2}p_{\perp}^2 + c^{-2}p_{\parallel}^2}$ и $(kc/\omega)(p_{\parallel}/c) \pm \Omega_H m/\omega$ от p_{\parallel}/c . Точки

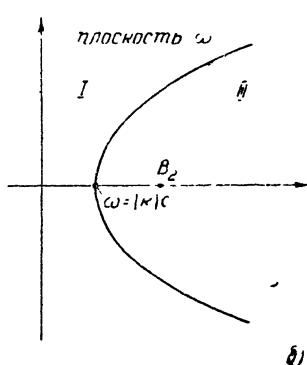
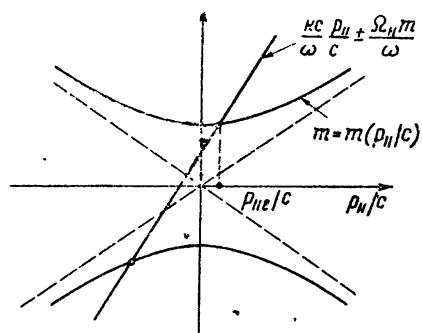
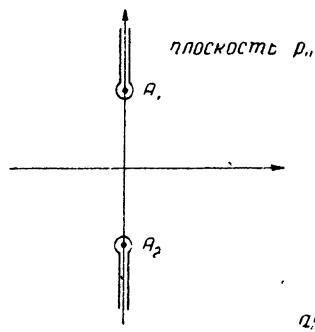


Рис. 1.

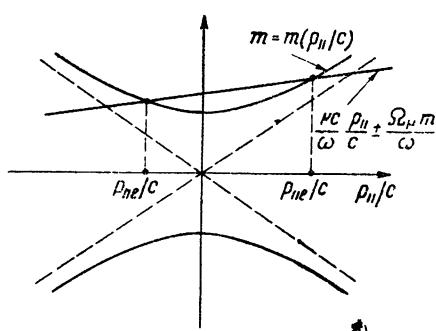


Рис. 2.

пересечения на этом графике определяют значения $p_{\parallel 1,2}$, отвечающие полюсам подынтегральных функций дисперсионного уравнения.

Из рис. 2а следует, что на листке плоскости p_{\parallel} с действительной

осью, отвечающей значениям $m(p_{\parallel}) > 0$, при $\omega^2 < k^2c^2$ существует один полюс (в точке, где $\text{Im } p_{\parallel} = 0$). Тогда, согласно рис. 1б, во всей области I, где лежит отрезок $0 < \omega < kc$, также существует только один полюс.

Как легко убедиться из рис. 2б, при действительных ω могут существовать два полюса, расположенных на действительной оси p_{\parallel} , если $\omega^2 > k^2c^2$. Однако это условие не является достаточным, так как, согласно (1.4), (1.5), в случае

$$\omega^2 > k^2c^2 + \frac{\Omega_H^2 m^2 c^2}{m_0^2 c^2 + p_{\perp}^2}. \quad (1.7)$$

оба полюса переходят в комплексную плоскость (в сопряженные точки p_{\parallel}^* и p_{\parallel}^{**}). Таким образом, два полюса с $\text{Im } p_{\parallel,2} = 0$ существуют на одном листке плоскости p_{\parallel} для действительных значений ω в интервале

$$k^2c^2 < \omega^2 < k^2c^2 + \frac{\Omega_H^2 m^2 c^2}{m_0^2 c^2 + p_{\perp}^2}. \quad (1.8)$$

Из рис. 2б ясно, что эти полюса расположены на интересующем нас листке p_{\parallel} , если наряду с (1.8)

$$\pm \Omega_H m / \omega > 0 \quad (1.9)$$

(т. е. для необыкновенной волны); напротив, при условии

$$\pm \Omega_H m / \omega < 0 \quad (1.10)$$

(т. е. для обыкновенной волны) оба полюса расположены на другом листке p_{\parallel} .

Поскольку интервал (1.8) расположен в области II, неравенства (1.9), (1.10) означают, что для обыкновенной волны (знак „—“) нет полюсов в области II ($\text{Re } \omega > 0$); для необыкновенной волны (знак „+“) есть два полюса в области II (см. рис. 3).

Если ω смещается в плоскости частот на $d\omega$, то полюса в плоскости p_{\parallel} смещаются при этом на величину dp_{\parallel} , которую нетрудно найти, дифференцируя соотношение (1.2):

$$dp_{\parallel} = \frac{m}{k - \omega p_{\parallel}/mc^2} d\omega. \quad (1.11)$$

Согласно (1.11), dp_{\parallel} — комплексное при комплексных $d\omega$ и действительных p_{\parallel} и m . Это означает, что при переходе ω с действительной оси в комплексную плоскость полюса в плоскости p_{\parallel} также сходят с действительной оси, если вначале они находились на ней **.

При переходе ω в верхнюю полуплоскость ($\text{Im } \omega > 0$) полюс p_{\parallel} также переходит в верхнюю полуплоскость ($\text{Im } p_{\parallel} > 0$), если на действительной оси ω (когда $\omega = \text{Re } \omega \geq 0$)

* Заметим, что оба полюса сливаются на частоте ω , удовлетворяющей соотношению

$$\omega^2 = k^2c^2 + \Omega_H^2 m^2 c^2 / (m_0^2 c^2 + p_{\perp}^2);$$

на рис. 1б это значение ω отмечено точкой B_1 .

** Полюса могут располагаться на действительной оси p_{\parallel} только в случае, когда $\text{Im } \omega = 0$: при реальных p_{\parallel} и p_{\perp} (и, тем самым, при реальных m) соотношению (1.2) заведомо нельзя удовлетворить комплексными значениями ω . В частности, полюса могут пересечь действительную ось p_{\parallel} только в момент перемены знака у $\text{Im } \omega$.

$$k - \omega p_{\parallel l} / mc^2 > 0, \quad (1.12)$$

и в нижнюю полуплоскость ($\text{Im } p_{\parallel l} < 0$), если *

$$k - \omega p_{\parallel l} / mc^2 < 0. \quad (1.13)$$

Неравенства (1.12), (1.13) фактически определяют соотношение между kc/ω — наклоном прямой $(kc/\omega)(p_{\parallel l}/c) \pm \Omega_H m/\omega$ и $p_{\parallel l}/mc$ — наклоном кривой $\sqrt{m_0^2 + (p_{\perp l}/c)^2 + (p_{\parallel l}/c)^2}$ в точке их пересечения $p_{\parallel l} = p_{\parallel l}$, на рис. 2.

В случае $\omega^2 < k^2 c^2$, когда на действительной оси $p_{\parallel l}$ расположен только один полюс, из рис. 2а ясно, что $kc/\omega > p_{\parallel l}/mc$ (при $kc/\omega > 0$, т. е. при $k > 0$) и $kc/\omega < p_{\parallel l}/mc$ (для $kc/\omega < 0$, т. е. для $k < 0$). Таким образом, при $k > 0$ справедливо неравенство (1.12), т. е. при этом $\text{Im } p_{\parallel l} > 0$, когда $\text{Im } \omega > 0$, и наоборот. Для $k < 0$ имеет место неравенство (1.13), т. е. при этом $\text{Im } p_{\parallel l} > 0$, когда $\text{Im } \omega < 0$, и наоборот.

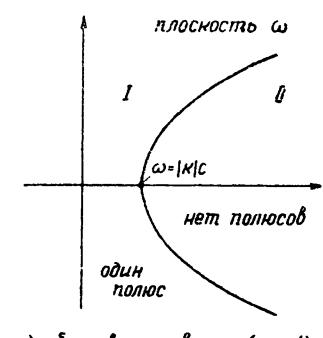
При условии (1.8), когда на действительной оси $p_{\parallel l}$ расположены два полюса, из рис. 2б следует, что для одного полюса $kc/\omega > p_{\parallel l}/mc$, тогда как для другого $kc/\omega < p_{\parallel l}/mc$. Сопоставляя эти неравенства с условиями (1.12), (1.13), можно заключить, что при $\text{Im } \omega > 0$ для одного полюса $\text{Im } p_{\parallel l} > 0$, а для другого $\text{Im } p_{\parallel l} < 0$, т. е. полюса расположены по разные стороны от действительной оси $p_{\parallel l}$.

Изменение знака $\text{Im } \omega$, очевидно, переводит первый полюс в нижнюю, а второй — в верхнюю полуплоскость, если ω пересекает

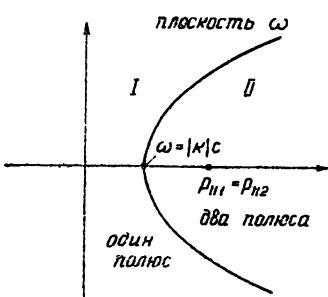
действительную ось в интервале (1.8). В то же время при пересечении этой оси в интервале (1.7) полюса не могут перейти из одной полуплоскости в другую, так как для реальных значений ω в интервале (1.8) полюса расположены вне действительной оси, в комплексно-сопряженных точках $p_{\parallel l}$ и $p_{\parallel l}^*$. Различное положение полюсов на плоскости $p_{\parallel l}$ в зависимости от пути перехода ω из верхней полуплоскости в нижнюю объясняется тем, что точка B_1 , где сливаются оба полюса, является точкой ветвления функции $p_{\parallel l}(\omega)$ (1.4), (1.5), определенной уравнением (1.2).

Из сказанного нетрудно представить себе общую картину поведения полюсов при изменении ω и, в частности, расположение полюсов при изменении ω от $0 + \gamma$ до $+\infty + \gamma$, где γ/i — малая положительная величина (см. рис. 3).

Согласно замечаниям, сделанным в начале этого раздела, интегрирование в дисперсионных уравнениях следует проводить по действительности оси $p_{\parallel l}$ от $-\infty$ до $+\infty$, если $\text{Im } \omega > 0$. Полюса $p_{\parallel l}$ в случае, когда значения ω отвечают прямой, прохо-



а) обыкновенная волна ($s=+1$)



б) необыкновенная волна ($s=-1$)

Рис. 3.

* При пересечении действительной оси ω сверху вниз указанный переход полюсов имеет место соответственно при условиях, обратных (1.12) и (1.13).

дящей в верхней полуплоскости параллельно действительной оси ($\operatorname{Im} \omega = \gamma / i > 0$), расположены на кривых $l=1$ и 2 рис. 4, построенных для случая, когда $k > 0$. Буквами a, b, c, d на рисунке указаны соответственные точки ω и $p_{\parallel i}(\omega)$. Контур интегрирования C проходит ниже полюсов, расположенных в верхней полуплоскости (на кривой $l=1$), и выше полюсов в нижней полуплоскости (на кривой $l=2$).

Для сохранения аналитического характера интегралов при переходе ω в нижнюю полуплоскость контур интегрирования C деформи-

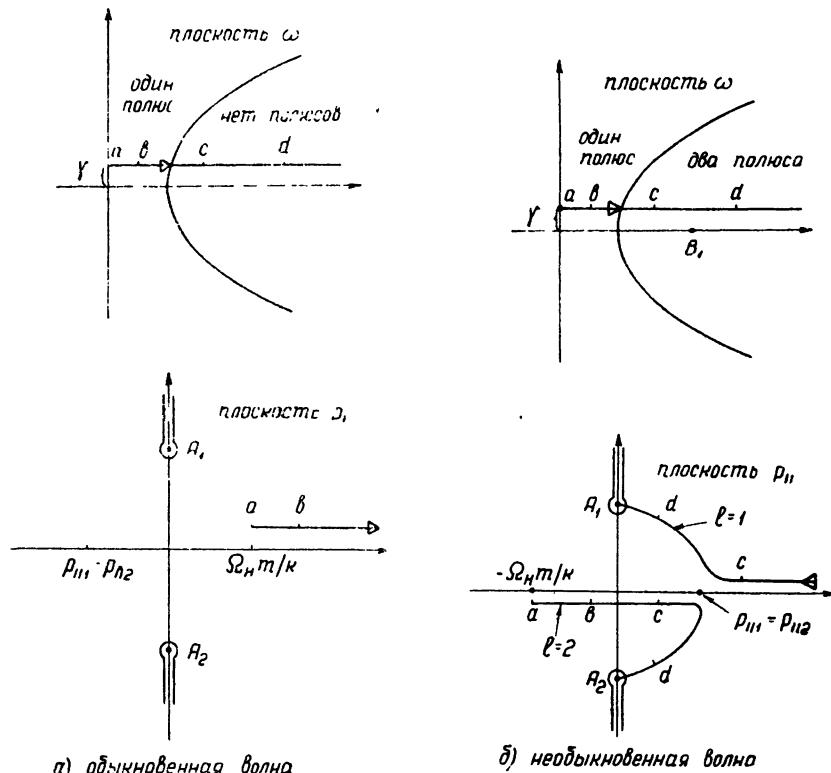


Рис. 4.

руется в плоскости $p_{\parallel i}$ таким образом, чтобы он не пересекал полюсов подынтегральных функций*. Поскольку положение полюсов зависит от пути перехода ω в область $\operatorname{Im} \omega < 0$ (по отношению к точке ветвления B_1), вид контура интегрирования также зависит от пути перехода**. Следует, однако, подчеркнуть, что для вычисления интегралов в дисперсионных соотношениях нет необходимости исследовать конкретный вид контура интегрирования при $\operatorname{Im} \omega < 0$. В самом деле, сначала можно вычислить указанные интегралы в предположении, что

* Относительное положение полюсов и контура C не изменится при любой деформации последнего (если только не происходит пересечения точек, в которых подынтегральные функции имеют особенность). В противном случае, очевидно, будет нарушена аналитичность интегралов в дисперсионных соотношениях.

** Ясно, что вид контура C (т. е. направление обхода точки B_1) определяет и результат интегрирования, который, тем самым, является, вообще говоря, ветвящейся функцией частоты ω (с точкой ветвления B_1). Для $\operatorname{Im} \omega < 0$ контур интегрирования нетрудно установить, пользуясь рис. 4 и учитывая сделанные выше замечания о характере перехода полюсов $p_{\parallel i}$ через действительную ось (при переходе ω в нижнюю полуплоскость).

что $\operatorname{Im} \omega > 0$, интегрируя по действительным значениям p_{\parallel} и p_{\perp} . Затем, рассматривая результат как аналитическую функцию комплексной переменной ω , определенную при $\operatorname{Im} \omega > 0$, следует распространить ее на область, где $\operatorname{Im} \omega \leq 0$.

2. КОЭФФИЦИЕНТ НАРАСТАНИЯ (ЗАТУХАНИЯ) ЛАНДАУ В НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

Как показано в работе [2], приведенные в начале настоящей статьи дисперсионные уравнения могут быть представлены в виде

$$c^2 k^2 - \omega^2 n_j^2(\omega) + \sum \frac{1}{G_0 V \pi} \int_0^\infty \zeta^2 e^{-(\zeta-\zeta_0)^2} \left\{ \frac{(\zeta - \zeta_0)}{ka_{\parallel}} (\omega \tilde{m} I_1 - kp_{\parallel}^0 I_2) + \right. \\ \left. + \left[\zeta \left(\frac{a_{\perp}^2}{a_{\parallel}^2} - 1 \right) + \zeta_0 \right] I_3 \right\} d\zeta = 0; \quad (2.1)$$

$$c^2 k^2 - \omega^2 n_j^2(\omega) + \sum \frac{1}{G_0 V \pi} \int_0^\infty \zeta e^{-(\zeta-\zeta_0)^2} \left\{ \frac{\omega \tilde{m} I_1 - kp_{\parallel}^0 I_2}{ka_{\parallel}} - I_3 - \right. \\ \left. - \frac{c^2 k^2 - \omega^2}{2 c^2} \frac{a_{\perp}^2 \zeta^2}{k^2 a_{\parallel}^2} \frac{dI_2}{d\beta_j} \right\} d\zeta = 0, \quad (2.2)$$

если распределение частиц по импульсам p определяется функцией

$$f_0(p) dp = A \exp \left[-\frac{(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)^2}{a_{\parallel}^2} - \frac{(p_{\perp} - p_{\perp}^0)^2}{a_{\perp}^2} \right] dp. \quad (2.3)$$

В соотношениях (2.1) — (2.3) приняты следующие обозначения:

$$\zeta = p_{\perp}/a_{\perp}; \quad \zeta_0 = p_{\perp}^0/a_{\perp};$$

$$A = 1/2 \pi^{3/2} a_{\perp}^2 a_{\parallel} G_0; \quad G_0 = \int_0^\infty e^{-(\zeta-\zeta_0)^2} \zeta d\zeta; \quad \beta_j = \frac{\omega \tilde{m} - kp_{\parallel}^0 \mp \Omega_H m}{ka_{\parallel}}; \\ I_1 = \int_C \frac{\tilde{\Omega}_0^2 e^{-\xi^2}}{\beta_j - \delta(\xi, \zeta)} d\xi; \quad I_2 = \int_C \frac{\Omega_0^2 e^{-\xi^2}}{\beta_j - \delta(\xi, \zeta)} d\xi; \quad I_3 = \int_C \frac{\Omega_0^2 \xi e^{-\xi^2}}{\beta_j - \delta(\xi, \zeta)} d\xi; \\ \xi = (p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)/a_{\parallel}; \quad \delta(\xi, \zeta) = -\frac{\omega}{ka_{\parallel}} (m - \tilde{m}) + \xi; \quad (2.4)$$

знак \sim указывает на то, что соответствующая величина берется в точке $\xi = 0$, $\zeta = \zeta_0$ (т. е. $p_{\parallel} = p_{\parallel}^0$; $p_{\perp} = p_{\perp}^0$). Контур C в интегралах I_1 , I_2 , I_3 выбирается в соответствии с замечаниями, сделанными в первом разделе статьи.

Согласно [2],

$$I_1 = F_1(\zeta) = \sum_l \left[\hat{\delta}_l \frac{i \pi \tilde{\Omega}_0^2}{(\partial \delta / \partial \xi)_l} e^{-\xi_l^2} \right];$$

$$I_2 = F_2(\zeta) - \sum_l \left[\delta_l \frac{i\pi \Omega_0^2(\xi_l, \zeta)}{(\partial\delta/\partial\xi)_l} e^{-\xi_l^2} \right]; \quad (2.5)$$

$$I_3 = F_3(\zeta) - \sum_l \left[\delta_l \frac{i\pi \Omega_0^2(\xi_l, \zeta)\xi_l}{(\partial\delta/\partial\xi)_l} e^{-\xi_l^2} \right].$$

Здесь $\delta_l = +1$, если особенность ξ_l (т. е. $p_{\parallel l}$) лежит выше контура интегрирования C (на кривой 1 рис. 4 в случае $\text{Im } \omega > 0, k > 0$), и $\delta_l = -1$, если она расположена ниже контура C (на кривой 2 рис. 4 в случае $\text{Im } \omega > 0, k > 0$); F_1, F_2, F_3 — функции, действительные при реальных значениях ω и k . Суммирование в (2.5) проводится по числу полюсов на плоскости $p_{\parallel l}$, которое зависит от положения ω на плоскости комплексных частот (см. рис. 2).

Из формулы для $\delta(\xi, \zeta)$ (2.4) и выражения для массы частицы $m = \sqrt{m_0^2 + c^{-2}p_{\perp}^2 + c^{-2}p_{\parallel}^2}$ следует, что в (2.5) производные $(\partial\delta/\partial\xi)_l$ определяются соотношением

$$k(\partial\delta/\partial\xi)_l = k - \frac{\omega}{c} \frac{a_{\parallel l}\xi_l + p_{\parallel l}^0}{mc} = k - \frac{\omega p_{\parallel l}}{mc^2}. \quad (2.6)$$

В (2.6) значения ξ_l соответствуют полюсам $p_{\parallel l}$: $\xi_l = (p_{\parallel l} - p_{\parallel l}^0)/a_{\parallel l}$ (см. (2.4)).

Согласно (1.12), (1.13), при действительных ω, k и ξ_l произведение $k(\partial\delta/\partial\xi)_l > 0$, если при переходе ω в верхнюю полуплоскость полюс ξ_l также переходит с действительной оси в верхнюю полуплоскость; напротив, $k(\partial\delta/\partial\xi)_l < 0$, если ξ_l переходит в нижнюю полуплоскость. Учитывая приведенное выше определение величины δ_l , мы видим, что при действительных ω, k и ξ_l величина $\delta_l/k(\partial\delta/\partial\xi)_l$ всегда положительна (для обоих полюсов):

$$\frac{\delta_l}{k - \omega p_{\parallel l}/mc^2} > 0, \quad (2.7)$$

т. е.

$$\delta_l = \text{sgn}(k - \omega p_{\parallel l}/mc^2). \quad (2.7a)$$

Предполагая члены, содержащие явно мнимую единицу, достаточно малыми по сравнению с остальными членами дисперсионных уравнений (2.1), (2.2) и рассматривая их как возмущение, найдем частоту ω , соответствующую данному значению k . Тогда, очевидно,

$$\omega = \Omega(k) + \gamma,$$

где $\Omega(k)$ — решение дисперсионного уравнения без учета малых членов, т. е. уравнения

$$c^2k^2 - \Omega^2\Phi(\Omega, k) = 0; \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\Omega, k) = n_j^2(\Omega) - \sum \frac{1}{\Omega^2 G_0 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty \zeta^2 e^{-(\zeta - \zeta_0)^2} \left\{ \frac{(\zeta - \zeta_0)}{ka_{\parallel}} (\Omega \tilde{m}F_1 - kp_{\parallel}^0 F_2) + \right. \\ \left. + \left[\zeta \left(\frac{a_{\perp}^2}{a_{\parallel}^2} - 1 \right) + \zeta_0 \right] F_3 \right\} d\zeta = n_j^2(\Omega) - \sum \frac{1}{\Omega^2 G_0 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty \zeta e^{-(\zeta - \zeta_0)^2} \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{ka_{\parallel}} (\Omega \tilde{m} F_1 - kp_{\parallel}^0 F_2) - F_3 - \frac{c^2 k^2 - \Omega^2}{2c^2} \frac{a_{\perp}^2 \zeta^2}{k^2 a_{\parallel}^2} \frac{dF_2}{d\beta_j} \right\} d\zeta,$$

а γ — поправка к частоте, вносимая слагаемыми, содержащими мнимую единицу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Omega^2 \Phi)}{\partial \Omega} \gamma = & - \sum \frac{i \sqrt{\pi}}{G_0} \int_0^\infty \zeta^2 e^{-(\zeta - \zeta_0)^2} \left\{ \frac{(\zeta - \zeta_0)}{ka_{\parallel}} \Omega \tilde{m} \sum_l \left[\delta_l \frac{\tilde{\Omega}_0^2}{(\partial \delta / \partial \xi)_l} e^{-\xi_l^2} \right] - \right. \\ & - \frac{(\zeta - \zeta_0)}{ka_{\parallel}} kp_{\parallel}^0 \sum_l \left[\delta_l \frac{\Omega_0^2(\xi_l, \zeta)}{(\partial \delta / \partial \xi)_l} e^{-\xi_l^2} \right] + \\ & \left. + \left[\zeta \left(\frac{a_{\perp}^2}{a_{\parallel}^2} - 1 \right) + \zeta_0 \right] \sum_l \left[\delta_l \frac{\Omega_0^2(\xi_l, \zeta) \xi_l}{(\partial \delta / \partial \xi)_l} e^{-\xi_l^2} \right] \right\} d\zeta \end{aligned} \quad (2.9)$$

или в другой форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Omega^2 \Phi)}{\partial \Omega} \gamma = & - \sum \frac{i \sqrt{\pi}}{G_0} \int_0^\infty \zeta e^{-(\zeta - \zeta_0)^2} \left\{ \frac{\Omega \tilde{m}}{ka_{\parallel}} \sum_l \left[\delta_l \frac{\tilde{\Omega}_0^2}{(\partial \delta / \partial \xi)_l} e^{-\xi_l^2} \right] - \right. \\ & - \frac{kp_{\parallel}^0}{ka_{\parallel}} \sum_l \left[\delta_l \frac{\Omega_0^2(\xi_l, \zeta)}{(\partial \delta / \partial \xi)_l} e^{-\xi_l^2} \right] - \sum_l \left[\delta_l \frac{\Omega_0^2(\xi_l, \zeta) \xi_l}{(\partial \delta / \partial \xi)_l} e^{-\xi_l^2} \right] - \\ & \left. - \frac{c^2 k^2 - \omega^2}{2c^2} \frac{a_{\perp}^2 \zeta^2}{k^2 a_{\parallel}^2} \frac{d}{d\beta_j} \sum_l \left[\delta_l \frac{\Omega_0^2(\xi_l, \zeta)}{(\partial \delta / \partial \xi)_l} e^{-\xi_l^2} \right] \right\} d\zeta. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь величины ξ_l и $(\partial \delta / \partial \xi)_l$ взяты при значениях ω , равных Ω .

Вид соотношений, определяющих коэффициент γ , можно несколько упростить, если учесть, что $\tilde{m} \tilde{\Omega}_0^2 \equiv m(\xi_l, \zeta) \Omega_0^2(\xi_l, \zeta)$ и что в рассматриваемом приближении

$$\Omega m(\xi_l, \zeta) - kp_{\parallel} \mp \Omega_H m = 0, \quad (2.11)$$

т. е.

$$\Omega m(\xi_l, \zeta) - kp_{\parallel}^0 - ka_{\parallel} \xi_l = \pm eH_0/c \quad (2.11a)$$

(верхний знак относится к необыкновенной, нижний — к обычновенной волне). Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Omega^2 \Phi)}{\partial \Omega} \gamma = & - \sum \frac{i \sqrt{\pi}}{G_0} \int_0^\infty \zeta^2 e^{-(\zeta - \zeta_0)^2} \sum_l \left[\pm \frac{(\zeta - \zeta_0)}{ka_{\parallel}} \frac{eH_0}{c} + \right. \\ & \left. + \zeta \frac{a_{\perp}^2}{a_{\parallel}^2} \xi_l \right] \delta_l \frac{\Omega_0^2(\xi_l, \zeta)}{(\partial \delta / \partial \xi)_l} e^{-\xi_l^2} d\zeta; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Omega^2 \Phi)}{\partial \Omega} \gamma = & - \sum \frac{i \sqrt{\pi}}{G_0} \int_0^\infty \zeta e^{-(\zeta - \zeta_0)^2} \sum_l \left[\pm \frac{1}{ka_{\parallel}} \frac{eH_0}{c} - \right. \\ & \left. - \frac{c^2 - \omega^2/k^2}{2c^2} \frac{a_{\perp}^2 \zeta^2}{a_{\parallel}^2} \frac{d}{d\beta_j} \right] \delta_l \frac{\Omega_0^2(\xi_l, \zeta)}{(\partial \delta / \partial \xi)_l} e^{-\xi_l^2} d\zeta, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $\delta_l = \operatorname{sgn}(k - \Omega p_{\parallel l}/mc^2)$ ($\delta_l = +1$ при $l = 1$ и $\delta_l = -1$ при $l = 2$, если $k > 0$; см. рис. 4). В случае, когда нулевое приближение к частоте Ω есть величина действительная*, соотношения (2.12), (2.13) определяют мнимую часть частоты ω , т. е. коэффициент нарастания (затухания) волн в плазме.

Приближение, в котором получены выражения для γ (2.12), (2.13), справедливо при условии, что поправка γ достаточно мала по сравнению с Ω :

$$|\gamma| \ll \Omega(k). \quad (2.14)$$

Из (2.12), (2.13) ясно, что на частоте Ω в величину коэффициента нарастания (затухания) $\operatorname{Im} \gamma$ вносят свой вклад те частицы плазмы, импульс которых (т. е. значения p_{\parallel} и p_{\perp}) удовлетворяет уравнению (2.11). Это уравнение является не чем иным, как условием Допплера для магнитотормозного излучения заряженной частицы на частоте Ω [4]. Поскольку вклад частиц с импульсом p в величину γ пропорционален $Nf_0(p)$, ясно, что использованный метод возмущений будет справедлив в том случае, когда число излучающих частоту Ω частиц в плазме достаточно мало (в пределе — стремится к нулю). Это условие, очевидно, может быть выполнено, если общее число частиц в плазме мало (т. е. в предельном случае $N \rightarrow 0$, $\Omega^2 \rightarrow 0$) или если излучающие частицы находятся на „хвосте“ функции распределения (т. е. при $f(p) \rightarrow 0$). Последнее, очевидно, имеет место при условии, что

$$\operatorname{Re} \xi_l^2 \gg 1. \quad (2.15)$$

В заключение заметим, что выражение (2.12) для коэффициента нарастания $\operatorname{Im} \gamma$ электромагнитных волн легко может быть получено квантовым методом с помощью коэффициентов Эйнштейна (см. [5]). В частном случае нерелятивистского потока с максвелловым распределением по скоростям в сопровождающей системе отсчета подобное рассмотрение проведено в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 3, 57 (1960).
2. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, 180 (1960).
3. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
4. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, 14 (1959).
5. А. А. Андronov и В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 февраля 1961 г.

ON THE INSTABILITY OF MAGNETOACTIVE PLASMA RELATIVE TO HIGH-FREQUENCY ELECTROMAGNETIC DISTURBANCES. III

V. V. Zhelezniakov

The problem was examined of the propagation of electromagnetic waves along magnetic field H_0 in nonequilibrium homogeneous plasma. The expression was obtained for the time growth (attenuation) coefficient of waves assuming that this coefficient is small in comparison with the frequency and depends on the imaginary terms of a dispersion equation, which bring about the so-called Landau damping in a equilibrium plasma.

* Поскольку $\operatorname{Re} \omega > 0$, в этом случае нулевое приближение $\Omega \geq 0$.

О ДИФФРАКЦИИ ВОЛН НА ХАОСТИЧЕСКОМ ЭКРАНЕ

Н. Г. Денисов

Исследуются корреляционные свойства поля за хаотическим экраном. Введены две функции корреляции комплексного поля, которые определяют автокорреляцию амплитуды, фазы и взаимную корреляцию амплитуды и фазы. Получены общие формулы, выражающие корреляционные функции поля за экраном через их значения на экране. Рассмотрены корреляционные свойства поля в дальней зоне как для малого, так и для большого набега фазы в неоднородном слое.

ВВЕДЕНИЕ

В большинстве работ, посвященных исследованию корреляционных свойств поля волны, прошедшей через хаотически неоднородный слой, ограничиваются областью, расположенной в самом рассеивающем слое. Такой расчет позволяет, в частности, описать корреляционные свойства поля непосредственно на границе неоднородного слоя. Однако на опыте часто приходится наблюдать рассеянное поле на некотором расстоянии от рассеивающего слоя. Это имеет место, например, при исследовании радиоизлучения, проходящего через ионосферу или отраженного от нее и при приеме излучения, проходящего через солнечную корону.

Хорошо известно [1], что корреляционные функции амплитуды и фазы волны, прошедшей через неоднородный слой, изменяются по мере удаления фронта волны от слоя так же, как корреляционные свойства шума, проходящего через некоторую линейную систему, обладающую определенными дисперсионными свойствами. Нахождение поля за неоднородным слоем (экраном) представляет собой дифракционную задачу, которая рассматривалась в целом ряде работ. В обзорной статье [1] приводятся результаты этих исследований, основной целью которых, главным образом, является нахождение углового энергетического спектра или корреляционной функции комплексного поля. Существует ряд работ, в которых исследуется статистика амплитуды и фазы случайного поля за экраном. Однако в этих работах интересующая нас задача не получила достаточно полного решения, так как в них либо решались частные вопросы с использованием гауссовой функции корреляции для неоднородностей экрана [2-4], либо в расчете использовался метод плавных возмущений [2,5], который в случае больших набегов фазы в неоднородном слое дает неверный результат.

Неприменимость метода плавных возмущений к описанию изменения поля при распространении в пространстве за экраном можно пояснить следующим образом. Известно, что метод плавных возмущений ограничен случаем малых амплитудных флюктуаций поля [3,6]; однако в случае, когда неоднородный слой действует как фазовый экран с большим набегом фазы, за экраном возникают большие амплитудные изменения [4]. В этом случае естественно для нахождения поля за экраном использовать обычные дифракционные формулы, как это делалось в работах [3,4,7]. Как будет показано в настоящей статье, на

этом пути для корреляционных функций амплитуды и фазы случайного поля за экраном могут быть получены сравнительно простые и достаточно общие формулы. Особенно простые соотношения удается получить для поля в зоне Фраунгофера.

1. ДИФФРАКЦИОННОЕ ПОЛЕ

Рассмотрим плоскую волну, падающую нормально на плоский слой с хаотическими неоднородностями. Пусть нижняя граница неоднородного слоя совпадает с плоскостью $z=0$, и волна распространяется вдоль оси z . По выходе из слоя (в плоскости $z=0$) волна будет, вообще говоря, промодулирована по амплитуде и фазе. Эта модуляция естественно изменяется по мере того, как волна удаляется от экрана. Если амплитудная и фазовая модуляции являются хаотическими величинами, то в распространяющейся за экраном волне будут изменяться их корреляционные свойства.

Задача о нахождении статистических свойств поля в любой плоскости, расположенной за хаотическим экраном, по заданной статистике поля на экране математически сходна с задачей о прохождении шума через линейную систему с определенными дисперсионными свойствами. Для ее решения естественно использовать обычные дифракционные формулы, выражающие поле за экраном через поле на экране.

Разложим поле на экране (шум на входе линейной системы) в интеграл Фурье:

$$\begin{aligned} E(x, y, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z_1, z_2) e^{i(z_1 x + z_2 y)} dz_1 dz_2; \\ F(z_1, z_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, y, 0) e^{-i(z_1 x + z_2 y)} dx dy. \end{aligned} \quad (1)$$

Поле за экраном в плоскости $z=L$ будет равно

$$E(x_1, y_1, L) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z_1, z_2) e^{i(z_1 x_1 + z_2 y_1 - z_3 z)} dz_1 dz_2, \quad (2)$$

где $z_3 = \sqrt{k_0^2 - z_1^2 - z_2^2}$. Ниже мы будем рассматривать рассеяние в слое, размер неоднородностей которого l много больше длины волны λ . В таком случае углово спектр рассеянного поля будет узким, и мы можем приближенно записать

$$z_3 \approx k_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{k_0^2} \right). \quad (3)$$

Отброшенный член в фазе $(1/8)(x^4/k_0^3)L$ должен быть много меньше 2π . Так как $x \sim 1/l$, то это означает, что

$$\lambda^3 L / l^4 \ll 1 \text{ или } l^2 / \lambda L \gg (\lambda / l)^2. \quad (4)$$

При заданной структуре экрана условие (4) требует, чтобы расстояние L от экрана до точки наблюдения не было очень велико. Однако, в силу того, что $\lambda / l \ll 1$, это условие может быть выполнено и в зоне Фраунгофера, т. е. при выполнении неравенства $\lambda L \gg l^2$.

Формулу (2) можно рассматривать как фурье-преобразование функции $F(x_1, x_2)e^{-ik_0z}$. При выбранной аппроксимации (3) можно, используя теорему о свертке, представить поле $E(x, y, L)$ в виде:

$$E(x_1, y_1, L) = \frac{ik_0 - ik_0 L}{2\pi L} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, y, 0) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2L} [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] \right\} dx dy. \quad (5)$$

Это хорошо известная формула, используемая в работах по френелевской дифракции (см., например, [7]).

Интересно отметить, что в случае дифракции волны, исходящей из точечного источника (сферической волны), получается формула, по структуре сходная с формулой (5) и отличающаяся лишь множителем, стоящим перед интегралом, и тем, что в показателе экспоненты стоит вместо L величина [7]

$$L' = \frac{LL_0}{L + L_0},$$

где L_0 — расстояние от источника до экрана.

2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ПОЛЯ ЗА ЭКРАНОМ

Для удобства введем в рассмотрение величину

$$f(x, y, z) = f_1(x, y, z) + i f_2(x, y, z) = [E(x, y, z) - \overline{E(x, y, z)}] e^{\Phi_0(x, y, z)}, \quad (6)$$

где $\Phi_0(x, y, z) = \ln A_0 + \Phi_0(x, y, 0) - ik_0z$ — регулярная комплексная фаза поля. Таким образом, среднее значение функции $f(x, y, z)$ равно нулю и фаза определяется случайным набегом фазы в слое. Обозначим случайную комплексную фазу поля $E(x, y, z)$ через $\Phi_1(x, y, z)$. Тогда $f(x, y, z) = e^{\Phi_0(x, y, z)} - e^{\Phi_1(x, y, z)}$. Если $|\Phi_1| \ll 1$, то

$$f(x, y, z) \approx \Phi_1(x, y, z) = i \Delta S(x, y, z) + \ln \frac{A(x, y, z)}{A_0}, \quad (7)$$

где $\Delta S(x, y, z)$ — случайный набег фазы, а $\ln(A/A_0)$ — случайный уровень. Следовательно, при малом набеге фазы $f_1 = \Delta S$, а $f_2 = \ln(A/A_0)$. Для большого набега фазы функции f_1 и f_2 определяют амплитуду и фазу поля более сложным образом.

Найдем теперь значения функции f в плоскости $z = L$. Из формулы (5) можно получить:

$$f(x_1, y_1, L) = \frac{ik_0}{2\pi L} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, 0) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2L} [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] \right\} dx dy. \quad (8)$$

Отсюда можно найти корреляционные функции поля $f(x, y, L)$, если известны корреляционные свойства поля на экране. Во-первых, легко показать, что в рассматриваемом приближении корреляционная функция

$$R_{ff^*}(\xi, \eta, L) = \overline{f(x, y, L)f^*(x + \xi, y + \eta, L)} = R_{f_1}(\xi, \eta, L) + R_{f_2}(\xi, \eta, L) \quad (9)$$

не зависит от положения плоскости наблюдения за экраном, т. е. не зависит от L [1]. Ниже нам понадобится также другая корреляционная функция $R_f(\xi, \eta, z)$, которая равна

$$\begin{aligned} R_f(\xi, \eta, z) &= \overline{f(x, y, z)f(x + \xi, y + \eta, z)} = \\ &= R_{f_1}(\xi, \eta, z) - R_{f_2}(\xi, \eta, z) + 2iR_{f_1 f_2}(\xi, \eta, z). \end{aligned} \quad (10)$$

Из решения (8) значение этой функции в плоскости $z = L$ может быть выражено через значения той же функции на экране ($z = 0$):

$$R_f(\xi, \eta, L) = \frac{ik_0}{4\pi L} e^{-\frac{ik_0}{4L}(\xi^2 + \eta^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(x, y, 0) e^{-\frac{ik_0}{4L}(x^2 + y^2 - 2x\xi - 2y\eta)} dx dy \quad (11)$$

(аналогичные вычисления для квадрата поля см. в [7]).

Сравнение с формулой (5) показывает, что функция $R_f(\xi, \eta, L)$ определяет дифракционную картину Френеля в случае, когда распределение поля на экране описывается функцией $R_f(\sqrt{2}x, \sqrt{2}y, 0)$. Таким образом, при расчете корреляции поля f можно использовать обычные методы теории дифракции. Отсюда, в частности, следует, что в зоне Фраунгофера (при $k_0 l^2 / 4L \ll 1$) модуль функции $R_f(\xi, \eta, L)$ передает спектр корреляционной функции поля на экране $R_f(x, y, 0)$. Это приводит к своеобразным корреляционным соотношениям для амплитуды и фазы дифракционного поля в плоскости $z=L$ (см. ниже), так как действительная часть функции $R_f(\xi, \eta, z)$ есть разность $R_{f_1} - R_{f_2}$ (см. (10)). При использовании (9) можно определить R_{f_1} и R_{f_2} в отдельности. Мнимая часть $R_f(\xi, \eta, z)$ представляет собой функцию взаимной корреляции $R_{f_1 f_2}$.

Ниже мы всюду будем рассматривать дифракцию на фазовом экране. Такая модель неоднородного слоя является, как известно, практически наиболее интересной. К тому же расчет дифракции на экране, который дает и амплитудную модуляцию, может быть проведен аналогично. Для фазового экрана мы можем написать:

$$f(x, y, 0) = e^{iS_1(x, y, 0)} - e^{\overline{iS_1(x, y, 0)}}, \quad (12)$$

где $S_1(x, y, 0)$ — случайный набег фазы в неоднородном слое. Теперь легко выразить корреляционную функцию $R_f(\xi, \eta, 0)$, через корреляционную функцию набега фазы $R_S(\xi, \eta, 0)$. Запишем сначала:

$$R_f(\xi, \eta, 0) = \overline{e^{iS_1(x + \xi, y + \eta, 0) + iS_1(x, y, 0)}} - (e^{\overline{iS_1(x, y, 0)}})^2. \quad (13)$$

Так как случайная величина $S_1(x, y, 0)$ является суммой большого числа независимых случайных величин, то ее распределение вероятностей будет нормальным. В таком случае средние значения, входящие в (13), можно вычислить [8]. Окончательный результат запишется в виде:

$$R_f(\xi, \eta, 0) = e^{-R_S(0, 0, 0)} [e^{-R_S(\xi, \eta, 0)} - 1]. \quad (14)$$

Аналогично может быть вычислена и корреляционная функция $R_{ff^*}(\xi, \eta, 0)$:

$$R_{ff^*}(\xi, \eta, 0) = e^{-R_S(0, 0, 0)} [e^{R_S(\xi, \eta, 0)} - 1]. \quad (15)$$

Функции (14) и (15) являются вещественными, так как фаза

$S_s(x, y, 0)$ вещественна. Интересно отметить, что корреляционные функции (14) и (15) имеют различный масштаб. Если первый из них в основном определяется масштабом неоднородностей фазы l и слабо растет с ростом $R_s(0,0)$, то масштаб R_{ff^*} определяется, кроме того, полным набегом фазы в слое $l' \sim l/V R_s(0,0)$. Для иллюстрации на рис. 1 построены функции $\rho_{ff^*} = R_{ff^*}(r)/R_{ff^*}(0)$; $\rho_f = R_f(r)/R_f(0)$ для случаев $(\Delta S)^2 = R_s(0,0) = 1, 10$ и 100 ($R_s(r, 0) = R_s(0,0) e^{-(r^2/l^2)}$). Однако при малом набеге фазы ($R_s(0,0,0) \ll 1$) $R_{ff^*}(\xi, \eta, 0) \simeq R_f(\xi, \eta, 0) \simeq R_s(\xi, \eta, 0)$ и масштабы трех функций совпадают.

Обратимся теперь к изучению корреляционных свойств поля в плоскости $z = L$, расположенной за экраном. Сразу же отметим, что так как функция $R_{ff^*}(\xi, \eta)$ при удалении плоскости наблюдения сохраняется, то мы можем на основе (15) написать:

$$\begin{aligned} R_{ff^*}(\xi, \eta, L) &= R_{f_1}(\xi, \eta, L) + R_{f_2}(\xi, \eta, L) = R_{ff^*}(\xi, \eta, 0) = \\ &= e^{-R_s(0,0,0)} [e^{R_s(\xi, \eta, 0)} - 1]. \end{aligned} \quad (16)$$

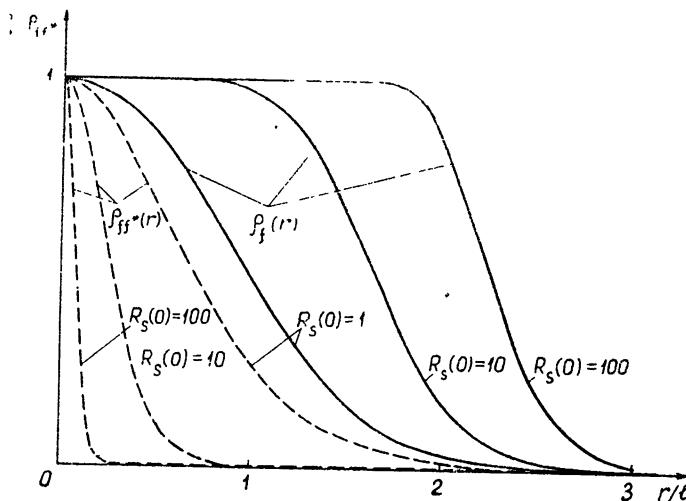


Рис. 1.

Что касается второй функции $R_f(\xi, \eta, L)$, то она выражается формулой (11), где $R_f(x, y, 0)$ вещественна (см. (14)). Определяя далее разность $R_{f_1} - R_{f_2}$ как действительную часть $R_f(\xi, \eta, L)$ и используя (16), найдем:

$$\begin{aligned} R_{f_{1,2}}(\xi, \eta, L) &= \frac{1}{2} [R_{ff^*}(\xi, \eta, 0) \pm \operatorname{Re} R_f(\xi, \eta, L)]; \\ R_{f_1 f_2}(\xi, \eta, L) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} R_f(\xi, \eta, L), \end{aligned} \quad (17)$$

где Re и Im означают действительную и мнимую части R_f . Таким образом, расчет интересующих нас корреляционных функций сводится к вычислению интеграла (11), что не представляет особых затруднений, если известна функция $R_f(x, y, 0)$. Для иллюстрации на рис. 2 приведены графики $\rho_{f_{1,2}}(r)$ для гауссовой функции корреляции $R_f(\xi, \eta, 0)$ и при $\pi l^2/2\lambda L = 1$.

3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ В ЗОНЕ ФРАУНГОФЕРА

Сравнительно просто расчет $R_f(\xi, \eta, L)$ можно провести для произвольной функции корреляции $R_f(x, y, 0)$, если $k_0 l^2 / 4L \ll 1$. В этом случае в формуле (11) фактор $e^{-i(k_0/4L)(x^2+y^2)}$ можно разложить в ряд. Тогда двойной интеграл записывается в виде ряда, нулевой член которого равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(x, y, 0) e^{i \frac{k_0}{2L}(x\xi+y\eta)} dx dy = F_f\left(\frac{k_0 \xi}{2L}, \frac{k_0 \eta}{2L}\right) \quad (18)$$

и представляет собой спектр функции $R_f(x, y, 0)$. Легко показать, что остальные члены ряда можно выразить через производные от нулевого члена. При выполнении условия $k_0 l^2 / 4L \ll 1$, естественно, можно ограничиться первым членом этого ряда и записать формулу (11) в виде:

$$R_f(\xi, \eta, L) = \frac{i k_0}{4\pi L} e^{-\frac{i k_0}{4L}(\xi^2 + \eta^2)} F_f\left[\frac{k_0 \xi}{2L}, \frac{k_0 \eta}{2L}\right], \quad (19)$$

где отброшены величины порядка $(k_0/4\pi L)^2$. Теперь функция $F_f[k_0 \xi/2L, k_0 \eta/2L]$ действительна, а формулы (17) запишутся так:

$$R_{f_{1,2}}(\xi, \eta, L) = \frac{1}{2} \left\{ R_{ff^*}(\xi, \eta, 0) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{k_0}{4\pi L} F_f\left[\frac{k_0 \xi}{2L}, \frac{k_0 \eta}{2L}\right] \sin\left[\frac{k_0}{4L}(\xi^2 + \eta^2)\right] \right\}; \\ R_{f_{1,2}}(\xi, \eta, L) = \frac{k_0}{4\pi L} F_f\left[\frac{k_0 \xi}{2L}, \frac{k_0 \eta}{2L}\right] \cos\left[\frac{k_0}{4L}(\xi^2 + \eta^2)\right]. \quad (20)$$

Таким образом, искомые корреляционные функции поля в плоскости наблюдения сравнительно просто выражаются через корреляционную функцию $R_{ff^*}(x, y, 0)$ на экране и спектр функции $R_f(x, y, 0)$.

Ниже при обсуждении корреляционных свойств поля мы рассмотрим отдельно дифракцию на экране с малым набегом фазы $R_s(0, 0) \ll 1$ и большим набегом фазы.

Как уже отмечалось, при малом набеге фазы в слое $R_{ff^*}(\xi, \eta, 0) = R_f(\xi, \eta, 0) = R_s(\xi, \eta, 0)$ и из формулы (7) следует, что $R_{f_1} = R_s$, а $R_{f_2} = R_A$. Следовательно, формулы (17) в этом случае выражают корреляционные функции амплитуды и фазы и функцию их взаимной

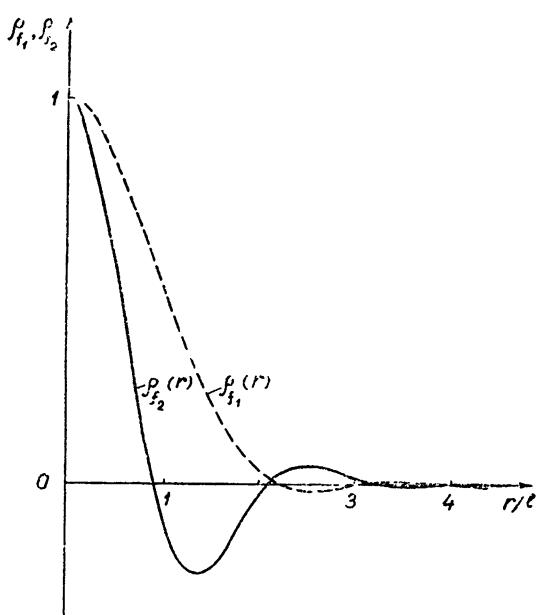


Рис. 2.

корреляции в плоскости $z = L$ через корреляционную функцию набега фазы в слое $R_S(\xi, \eta, 0)$ и ее спектр. Далее, при выполнении неравенства $k_0 l^2 / 4L \ll 1$ масштаб функции $F_S[k_0 \xi / 2L, k_0 \eta / 2L]$ будет велик по сравнению с масштабом функции $R_S(\xi, \eta, 0)$ и периодом осцилляций функции $\sin [k_0 (\xi^2 + \eta^2) / 4L]$. Следовательно, функции $R_{AS}(\xi, \eta, L)$ на расстояниях $r > l$ будут испытывать осцилляции, период которых определяется расстоянием от точки наблюдения до экрана L (см. рис. 3). Амплитуда этих осцилляций стремится к нулю при удалении плоскости наблюдения до экрана, и, следовательно, корреляционные функции амплитуды и фазы в плоскости $z = L$ становятся одинаковыми:

$$\begin{aligned} R_A(\xi, \eta, L) &\simeq R_S(\xi, \eta, L) = \\ &= \frac{1}{2} R_S(\xi, \eta, 0). \end{aligned} \quad (21)$$

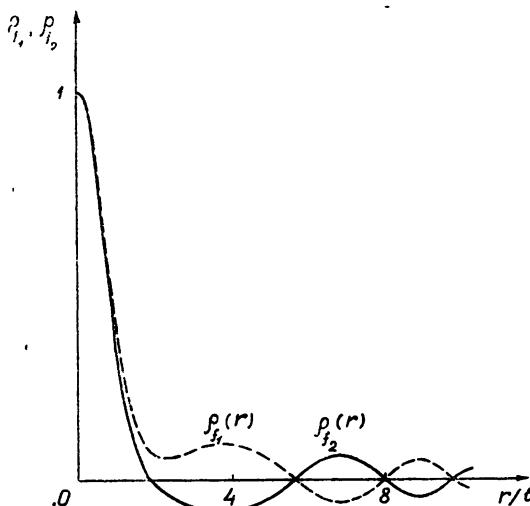


Рис. 3.

представляет известный интерес. Действительно, при выполнении условия $l^2/\lambda L \ll 1$ $R_{AS}(\xi, \eta, L)$ (см. формулу (17)) выражается произведением быстро осциллирующей функции $\cos [(k_0/4L)(\xi^2 + \eta^2)]$ и медленно меняющегося спектра неоднородностей экрана. Возьмем, к примеру, гауссову функцию корреляции для неоднородностей фазы в плоскости $z = 0$: $R_S(\xi, \eta, 0) = \overline{(\Delta S)^2} e^{-(\xi^2 + \eta^2)/l^2}$. Ее спектр равен $F_S(z_1, z_2) = = \overline{(\Delta S)^2} \pi l^2 e^{-(z_1^2 + z_2^2)l^2/4}$ и, следовательно,

$$F_S\left(\frac{k_0}{2L} \xi, \frac{k_0}{2L} \eta\right) = \pi l^2 \overline{(\Delta S)^2} e^{-\frac{l^2 k_0^2}{16L^2} (\xi^2 + \eta^2)}; \quad (22)$$

$$R_{AS}(\xi, \eta, L) = \frac{k_0 l^2}{8L} \overline{(\Delta S)^2} e^{-\frac{l^2 k_0^2}{16L^2} (\xi^2 + \eta^2)} \cos \left[\frac{k_0}{4L} (\xi^2 + \eta^2) \right]. \quad (23)$$

Функция $R_{AS}(r, L)$ при $2\lambda L / \pi l^2 = 10$ изображена на рис. 4.

Таким образом, огибающая быстрых осцилляций взаимной корреляции амплитуды и фазы в плоскости, расположенной достаточно далеко от экрана, передает спектр неоднородностей фазы на хаотическом экране. Мы можем в этих условиях определить масштаб неоднородностей экрана l , изучая корреляцию амплитуды или фазы. В таком случае знание функции взаимной корреляции (огибающей частых колебаний) позволяет определить высоту L , на которой расположен экран

Этот результат аналогичен тому, который имеет место при прохождении волны через достаточно толстый случайно неоднородный слой [8].

Что касается взаимной корреляции фазы и амплитуды, то она в зоне Фраунгофера ($l^2/\lambda L \ll 1$) достаточно мала; однако ее структура

Случай большого набега фазы в сравнении с рассмотренным является в некотором смысле более простым. Действительно, при $R_s(0,0,0) \gg 1$ функция $R_f(\xi, \eta, 0)$ ничтожно мала по сравнению с функцией $R_{ff^*}(\xi, \eta)$ при любых ξ, η (см. (14)). Из (11) следует, что будут малы действительная и мнимая части функции $R_f(\xi, \eta, L)$. Это означает, что будет малой корреляция компонент f_1 и f_2 и что $R_{f_1} \sim R_{f_2}$. Так как сумма $R_{f_1} + R_{f_2} = R_{ff^*}$ не зависит от z , то из (16) следует, что

$$R_{f_1}(\xi, \eta, L) = R_{f_2}(\xi, \eta, L) = \frac{1}{2} R_{ff^*}(\xi, \eta, L) = \frac{1}{2} e^{-R_s(0,0,0)} [e^{R_s(\xi, \eta, 0)} - 1] \quad (24)$$

и не зависит от z .

Следовательно, в случае большого набега фазы в слое статистические параметры комплексного дифракционного поля очень просто выражаются через корреляционную функцию неоднородностей фазы

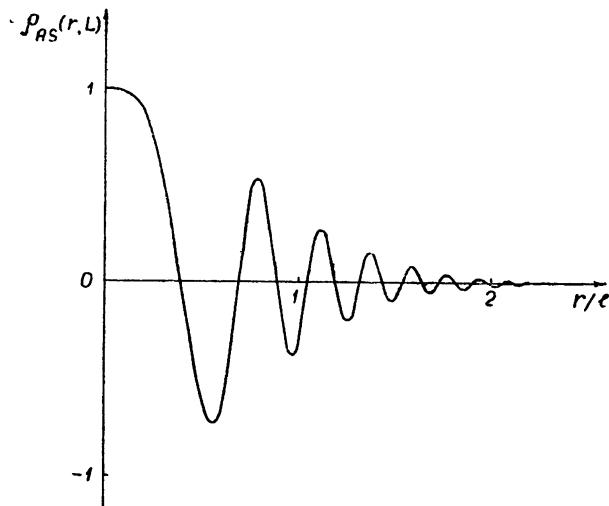


Рис. 4.

экрана. Значительно более сложным в этом случае является расчет флюктуаций амплитуды и фазы поля, которое представляется в виде суммы среднего поля \bar{E} и флюктуационной составляющей $A_0 f$. Этот расчет требует знания закона распределения для компонент f_1 и f_2 . Естественно, что в зоне Фраунгофера эти величины будут распределены по нормальному закону. Кроме того, при большом набеге фазы ($R_s(0,0,0) \gg 1$) среднее поле будет ничтожно малым ($\bar{E} \sim e^{-R_s(0,0,0)}$), и поле за экраном в основном состоит из флюктуационной части f . Таким образом, расчет сводится к нахождению статистических свойств амплитуды и фазы вектора f , компоненты которого распределены поциальному закону.

Эта задача хорошо известна и ее решение приводит к следующему (см., например, [9]). Фаза поля будет распределена равномерно на интервале $(-\pi, +\pi)$, а амплитуда поля будет распределена по Релею. Пространственная корреляция амплитуды и квадрата амплитуды определяется формулой [9]

$$\overline{A(r_1) A(r_2)} = 2\sigma^2 [E(\rho) - \frac{1}{2} (1 - \rho^2) K(\rho)], \quad (\overline{A})^2 = \frac{\pi}{2} \sigma^2, \\ (25)$$

$$\overline{A^2(r_1) A^2(r_2)} = 4\sigma^2 (1 + \rho^2),$$

где E и K — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, $\sigma^2 = \overline{A_0^2 f_1^2} = \overline{A_0^2 f_2^2}$, $\rho = \overline{f_1(r_1) f_1(r_2)}/\overline{f_1^2}$. С хорошим приближением корреляционную функцию амплитуды можно представить в виде:

$$\overline{A(r_1) A(r_2)} \simeq \frac{\pi \sigma^2}{2} \left(1 + \frac{\rho^2}{4} \right). \quad (26)$$

На основе (14) коэффициент корреляции равен

$$\rho(\xi, \eta) = [e^{R_S(\xi, \eta, 0)} - 1]/[e^{R_S(0, 0, 0)} - 1]. \quad (27)$$

Таким образом, результат, полученный в [9] путем статистического анализа сигналов, принимаемых разнесенными антеннами, будет верен только в зоне Фраунгофера и при большом набеге фазы в слое. При этом корреляционные функции амплитуды и квадрата амплитуды имеют одинаковые масштабы и определяются масштабом квадрата функций $\rho(\xi, \eta)$, который в свою очередь определяется масштабом неоднородностей экрана и средним квадратом набега фазы $R_S(0, 0, 0)$ (см. (27)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Ж. Ратклифф, Пробл. совр. физ., вып. 10, 3 (1957).
2. H. Schäffler, Astron. Nachricht., 282, 193 (1955).
3. В. Писарева, Астрон. ж., 35, №12 (1958).
4. S. A. Bowhill, J. Atm. Terr. Physics, 11, 91 (1957).
5. А. А. Кротова, Уч. зап. Читинского пед. ин-та, 2, 39 (1958).
6. В. В. Писарева, Акустич. ж., 6, 87 (1960).
7. R. P. Megerle, Phil. Mag., 4, 763 (1959).
8. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
9. E. N. Bremley, Proc. IEE, Pt. III, 98, 19 (1951).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 января 1961 г.

ON THE DIFFRACTION OF WAVES BY A RANDOM SCREEN

N. G. Denisov

An investigation is carried out of a field correlation properties behind a random screen. Two correlation functions of a complex field are introduced, which determine the autocorrelation of amplitude, phase and the mutual correlation of amplitude and phase. General formulas are obtained expressing the field correlation functions behind the screen through their values on the screen. The correlation properties of the field are examined in the Fraunhofer region for a small as well as for a large phase variations caused by an inhomogeneous layer.

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНОЙ ПРЕЦЕССИИ НАМАГНИЧЕННОСТИ

Л. Н. Булаевский

Рассмотрена устойчивость однородной прецессии намагниченности в линейном и нелинейном по спиновым волнам приближении для произвольных углов между магнитным полем и магнитным моментом. Показано, что устойчивой является лишь однородная прецессия малой амплитуды; во всех других состояниях быстро нарастают спиновые волны, разрушающие намагниченность. Инвертированные состояния ферромагнитных систем оказываются неустойчивыми. Рассмотрен специальный случай, когда возбужденный ферромагнетик полностью отдает энергию электромагнитному полю.

Вопрос об устойчивости однородной прецессии намагниченности возникает в связи с созданием возбужденных состояний ферро- и ферромагнитных систем. Возникновение неоднородной намагниченности в таких системах, находящихся в постоянном магнитном поле, разрушает однородную прецессию, и мы будем считать, что однородная прецессия неустойчива, если малые флюктуации вызывают нарастающие волны намагниченности. Условия, при которых возникает неустойчивость, были даны в [1]; в настоящей статье эти вопросы рассмотрены подробнее.

Имеет смысл обсудить отдельно два случая:

а) нарастание неоднородной намагниченности в линейном приближении,

б) разрушение однородной прецессии в результате взаимодействия со спиновыми волнами в нелинейном приближении.

1. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОРОДНОЙ ПРЕЦЕССИИ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Для ферромагнетика в магнитном поле H изменение намагниченности описывается уравнением

$$\dot{M} = -\gamma [M, H_{\text{эфф}}], \quad (1)$$

где $H_{\text{эфф}} = H + \lambda M + H_{ex} \frac{l^2}{|M|} \nabla^2 M + H_d$, λ — постоянная молекулярного поля, l — межатомное расстояние, H_d — размагничивающее поле.

Намагниченность $M(r, t)$ разложим в ряд по волнам намагниченности:

$$M(r, t) = \sum_k M_k(t) e^{ikr}. \quad (2)$$

Если образец имеет форму эллипсоида, то для однородной прецессии ($k = 0$) размагничивающее поле $H_{d0} = -4\pi(N_x M_{x0}, N_y M_{y0}, N_z M_{z0})$ (N_x, N_y, N_z — размагничивающие факторы). Пренебрегая эффектами распространения и граничными условиями, найдем из уравнений Максвелла размагничивающее поле для волн с $k > k_{\min}$:

$$H_{d k > k_{\min}} = -4\pi \sum_{k > k_{\min}} [k(M_k)/k^2] e^{ikr}.$$

Волны намагниченности с $k > k_{\min}$ (спиновые волны) в линейном приближении являются нормальными колебаниями системы. Для бегущих волн с $k < k_{\min}$ граничные условия существенны в линейном приближении, учет этих условий приводит к тому, что нормальными колебаниями будут магнитостатические моды, найденные в [2], для которых намагниченность описывается функцией с тремя целочисленными индексами (n, m, r). Заметим, что для магнитостатических мод короткодействующими обменными силами можно пренебречь. Расчет, проведенный в [3], показывает, что $k_{\min} \approx 10/a$ (a — размер образца ферромагнетика).

Дисперсионное соотношение для спиновых волн имеет вид:

$$\omega_k = \gamma \sqrt{(H_i + H_{ex} l^2 k^2) (H_i + H_{ex} l^2 k^2 + 4\pi M \sin^2 \Theta)}, \quad (3)$$

где $H_i = H - 4\pi MN_z$, поле H направлено вдоль оси z , Θ — угол между k и H .

При

$$-4\pi M \sin^2 \Theta < H_i + H_{ex} l^2 k^2 < 0 \quad (4)$$

частоты ω_k становятся мнимыми, что указывает на неустойчивость состояния системы относительно образования нарастающих спиновых волн. При параллельных H и M ($H > 0$) условие (4) для волн с $\Theta = \pi/2$ (они нарастают быстрее других) запишется так:

$$H_{ex} l^2 k^2 < 4\pi MN_z - H. \quad (5)$$

Неустойчивость возникает при $H < 4\pi MN_z$ для волн с малыми k , поэтому необходимо рассмотреть также магнитостатические моды. Их спектр имеет вид:

$$\omega_{nmr} = \gamma \sqrt{H_i (H_i + 4\pi M \rho_{nmr})}, \quad (6)$$

где $\rho_{nmr} = \delta^2 (1 - z_{nmr}^2) / \delta^2 (1 - z_{nmr}^2) + z_{nmr}^2$, δ — отношение длины продольной и поперечной оси эллипсоида, z_{nmr}^2 — квадрат r -го корня при соединенного полинома Лежандра $P_n^m(z)$, $0 < z_{nmr}^2 < 1$.

Магнитостатические моды неустойчивы при

$$-4\pi M (\rho_{nmr} - N_z) < H < 4\pi MN_z. \quad (7)$$

Если $H < 4\pi MN_z$, то всегда найдутся моды, для которых выполняется (7), так как $0 < \rho_{nmr} < 1$, и $N_z < 1$. Время нарастания магнитостатических мод и спиновых волн $\tau = 1/\text{Im } \omega$ (возрастание амплитуды в e раз) по порядку величины равно $1/4\pi\gamma M$ для H в центре интервала $(0, 4\pi MN_z)$ при $N_z \approx 1$ и $\tau \rightarrow \infty$, если H приближается к граничным значениям интервала $(0$ или $4\pi MN_z)$, причем для спиновых волн τ больше, так как обменные силы препятствуют возникновению неоднородной намагниченности. При антипараллельных M и H ($H < 0$) условие (4) имеет вид:

$$|H| - 4\pi M (1 - N_z) < H_{ex} l^2 k^2 < |H| + 4\pi MN_z. \quad (8)$$

Такие перевернутые состояния неустойчивы относительно спиновых волн с большими k независимо от величины магнитного поля H . Волновое число k неустойчивых спиновых волн растет пропорционально $\sqrt{|H| + 4\pi MN_z}$, время их нарастания $\tau \approx 1/4\pi\gamma M$.

Дисперсионные уравнения (3) и (6) справедливы, если угол между

H и **M** близок к 0 или π . Представляет интерес получить спектр для спиновых волн при произвольных углах между **H** и **M**. Будем считать, что однородная прецессия уже создана, и рассмотрим спиновые волны как малые отклонения от этого состояния. Для простоты предполагаем, что образец имеет форму сферы и $N_x = N_y = N_z = 1/3$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\omega_H &= \gamma H, \quad \omega_{ex} = \gamma H_{ex}, \quad \omega_M = 4\pi\gamma M, \\ m &= M/|M|, \quad \omega_d = \gamma H_d, \\ m^+ &= m_x + im_y, \quad m^- = (m^*)^*, \\ a_k &= m_k^+, \quad a_{-k}^* = m_k^-. \end{aligned}\tag{9}$$

Возьмем первые два уравнения для \dot{M}_x и \dot{M}_y из (1) и интеграл системы (!) $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = M^2$. В новых обозначениях (9) получим:

$$\begin{aligned}\dot{m}^+ &= im^+ (\omega_H + \omega_{dz} + \omega_{ex} l^2 \nabla^2 m_z) - \\ &- im_z (\omega_{ex} l^2 \nabla^2 m^+ + \omega_{dx} + i\omega_{dy}); \\ m_z &= \sqrt{1 - m^+ m^-}. \end{aligned}\tag{10}$$

Решение (10) ищем в виде:

$$m^+ = a_0 + \sum_{k \neq 0} a_k e^{ikr}.\tag{11}$$

Величина a_0 описывает однородную прецессию, a_k — спиновую волну k . Рассматривая состояния, близкие к однородной прецессии, считаем $|a_k^*|$ малыми при $k \neq 0$ и, ограничиваясь членами, линейными по a_k и a_{-k}^* , получим:

$$m_z = \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi} \sum_{k \neq 0} (a_0 a_{-k}^* + a_0^* a_k) e^{ikr},\tag{12}$$

где $\sin \varphi = |a_0|$, φ — угол между **M** и **H**.

Разложение (12) справедливо, если угол φ не близок к $\pi/2$. Подставляя (12) в (10), получим уравнение для a_k :

$$-ia_k = A_k a_k + B_k a_{-k}^* + D_{1k} a_k + (D_{2k} + T_k) a_{-k}^*,\tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}A_k &= \omega_H + \omega_{ex} l^2 k^2 \left(\cos \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \right) + \frac{1}{2} \omega_M \cos \varphi \sin^2 \Theta - \\ &- \frac{1}{6} \omega_M \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi - \frac{1}{3} \omega_M \cos \varphi + \frac{1}{2} \omega_M \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \cos^2 \Theta; \\ B_k &= \omega_M \frac{k_T^2}{2k^2} \cos \varphi; \quad D_{1k} = -\frac{\omega_M}{2k^2} k_z (k_T^* a_0 + k_T a_0^*); \\ D_{2k} &= -\frac{\omega_M k_z k_T}{k^2} a_0; \\ T_k &= \left(\frac{\omega_M k_z^2}{k^2} + \omega_{ex} l^2 k^2 - \frac{1}{3} \omega_M \right) \frac{a_0^2}{2 \cos \varphi}; \\ k_T &= k_x + ik_y. \end{aligned}\tag{14}$$

Величины a_0 и a_0^* осцилляторно зависят от времени; поэтому последние два члена в правой части (13) можно не учитывать при нахождении частоты ω_k . Они дают нелинейный механизм возникновения неустойчивости и будут рассмотрены ниже.

Из (13) и аналогичного уравнения для \dot{a}_{-k} получим:

$$\omega_k = \sqrt{A_k^2 - |B_k|^2} = \gamma \sqrt{(H' - 2\pi M \cos \varphi \sin^2 \Theta)(H' + 2\pi M \cos \varphi \sin^2 \Theta)}, \quad (15)$$

где

$$H' = H + \left(\cos \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \right) \left(H_{ex} l^2 k^2 - \frac{1}{3} 4\pi M \right) + \\ + \cos \varphi 2\pi M \sin^2 \Theta + \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi 2\pi M \cos^2 \Theta.$$

Из (15) следует, что если угол между M и H острый ($\cos \varphi > 0$), то первыми нарастают волны с $\Theta = \pi/2$ в интервале полей H , удовлетворяющих условиям:

$$-4\pi M \cos \varphi < H - \frac{1}{3} 4\pi M \cos \varphi - \frac{1}{3} 2\pi M \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi + \\ + H_{ex} l^2 k^2 \left(\cos \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \right) < 0. \quad (16)$$

С увеличением φ от 0 до $\pi/2$ неустойчивость появляется при больших полях H , но интервал полей H , при которых наблюдается неустойчивость, сужается пропорционально $\cos \varphi$. Нарастают спиновые волны с малыми k , такими, что

$$H_{ex} l^2 k^2 \left(\cos \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \right) < 4\pi M \cos \varphi. \quad (17)$$

Время нарастания τ меняется от $1/4\pi\gamma M \cos \varphi$ до ∞ в зависимости от H . При малых H и φ состояние с однородной прецессией может быть возбужденным не только из-за зеемановской энергии, но и диполь-дипольного взаимодействия, если размагничивающее поле больше подмагничивающего. Состояние с параллельными спинами не дает минимума энергии диполь-дипольного взаимодействия, и растут волны с малыми k (обменное взаимодействие не может подавить их). Это же рассуждение приводит к необходимости доменной структуры ферромагнетика, в которой размагничивающие поля отдельных доменов компенсируют друг друга.

Если угол φ тупой, то условие неустойчивости для спиновых волн с $\Theta = \pi/2$ имеет вид:

$$H + \frac{2}{3} \pi M (4\cos \varphi - \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi) < -H_{ex} l^2 k^2 \left(\cos \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \right) < \\ < H - \frac{2}{3} \pi M (2\cos \varphi + \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi). \quad (18)$$

Все состояния с перевернутым относительно поля магнитным моментом ($\cos \varphi < 0$) неустойчивы относительно спиновых волн с большими k , время их нарастания $\tau \approx 1/4\pi\gamma M$. При нарастании спиновых волн полный магнитный момент не сохраняется, поэтому за неустой-

чивость ответственно диполь-дипольное взаимодействие (обменное и зеемановское взаимодействие сохраняет полный момент), и время нарастания волн не меньше величины $1/4\pi\gamma M$.

Инвертированные состояния ферромагнетиков неустойчивы; за время $\tau \approx 1/4\pi\gamma M$ возникают спиновые волны, разрушающие намагниченность. Поэтому к ферромагнетикам неприменимы результаты работы [4,5] о когерентном излучении инвертированных систем. То же относится к работе [6], где специально обсуждается вопрос о ферромагнитных системах (ферритах). Для ферримагнетиков дисперсионное соотношение с учетом диполь-дипольного взаимодействия получено в [7], где использована модель двух подрешеток с магнитными моментами единицы объема M_1 и M_2 .

Уравнения для намагниченностей M_1 и M_2 :

$$\begin{aligned}\dot{M}_1 &= -\gamma_1 [M_1, H_{1\text{эфф}}]; \\ \dot{M}_2 &= -\gamma_2 [M_2, H_{2\text{эфф}}],\end{aligned}\quad (19)$$

где

$$H_{1,2\text{эфф}} = H - \lambda M_{2,1} - \lambda' l^2 \nabla^2 M_{2,1} + H_a \pm H_s,$$

γ_1, γ_2 — гиromагнитные отношения для подрешеток, H_s — эффективное поле анизотропии.

Диполь-дипольное взаимодействие учитывается размагничивающим полем $H_{d0} = -4\pi[N_x(M_{1x0}+M_{2x0}), N_y(M_{1y0}+M_{2y0}), N_z(M_{1z0}+M_{2z0})]$ для однородной прецессии и полем $H_{dk>k_{\min}} = -4\pi \sum_{k>k_{\min}} \frac{k}{k^2} [k(M_{1k}+M_{2k})] e^{ikr}$

для спиновых волн с $k > k_{\min}$ и $k_{\min} \approx 10/a$ (a — размер образца) [3]. Из уравнений (19) легко найти дисперсионное соотношение в точке компенсации, когда

$$|M_1|/\gamma_1 = |M_2|/\gamma_2 = S.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) H + \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) H_a; \\ \omega_{ex} &= \gamma_1 \lambda M_2 = \gamma_2 \lambda M_1; \\ \omega'_{ex} &= \gamma_1 \lambda' M_2 = \gamma_2 \lambda' M_1; \\ \omega_H &= \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) H.\end{aligned}\quad (20)$$

Обычно $\omega_H \gg (\gamma_1 - \gamma_2)^2 S, K$ и $\omega_{ex}(\gamma_1 - \gamma_2)^2 / \gamma_1 \gamma_2 \gg \omega_H, K$. При этих условиях

$$\begin{aligned}\omega_{1,2}^2 &= 2\omega_{ex}K + \omega_H^2 + 2\pi S \omega_{ex} (\gamma_1 - \gamma_2)^2 \sin^2 \Theta + 2\omega_{ex} \omega'_{ex} k^2 l^2 \pm \\ &\pm \{[2\pi S \omega_{ex} (\gamma_1 - \gamma_2)^2]^2 \sin^4 \Theta + 8\pi S \omega_{ex} \omega_H^2 (\gamma_1 - \gamma_2)^2 \sin^2 \Theta + \\ &+ 8\omega_{ex} K \omega_H^2 + 8\omega_{ex} \omega'_{ex} k^2 l^2 \omega_H^2\}^{1/2}.\end{aligned}\quad (21)$$

Для $K < 0$ частота однородной прецессии и спиновых волн с небольшими k может стать комплексной. Для однородной прецессии ($k = 0, \sin^2 \Theta = 0$) время возрастания является наименьшим и равно $\tau = 1/\sqrt{2\omega_{ex}|K|}$. Нелинейность для нее подробно рассмотрена в [8]; однако в этой работе не учтено разрушение намагниченности из-за спиновых волн.

Для спиновых волн с $\Theta = 0$

$$\omega_k = \omega_H \pm \sqrt{2\omega_{ex} K + \omega_{ex}^2 l^2 k^2}; \quad (22)$$

область неустойчивости $2K + \omega_{ex} l^2 k^2 < 0$, время нарастания волн $\tau_k = |2K \omega_{ex} + \omega_{ex}^2 l^2 k^2|^{-1/2}$. Из (21) видно, что волны с $\sin \Theta \neq 0$ нарастают медленнее.

Инвертированное состояние ферромагнетика в точке компенсации неустойчиво относительно образования спиновых волн, и к нему относится все сказанное ранее о [4], [5] и [6].

2. НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕХАНИЗМ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СПИНОВЫХ ВОЛН

Взаимодействие спиновых волн с однородной прецессией может привести к их нарастанию и разрушению полного момента. Впервые этот нелинейный механизм был рассмотрен в [9] для ферромагнетика, однако расчет был сделан для однородной прецессии малой амплитуды (малый угол φ). Неустойчивость появляется при $\sin^2 \varphi > \eta/4\pi\gamma M$, где η — коэффициент релаксации спиновых волн. Характерное время неустойчивости $\tau = 1/(4\pi\gamma M \sin^2 \varphi - \eta)$.

Рассмотрим взаимодействие спиновых волн с однородной прецессией произвольной амплитуды. (Однако, как и ранее при выводе (12), будем считать, что φ не близок к $\pi/2$.) Это взаимодействие описывается двумя последними членами в правой части (13). Ограничивааясь вопросом о появлении неустойчивости однородной прецессии, будем считать амплитуду однородной прецессии постоянной ($a_0 = a_0^0 e^{i\omega_H t}$, $a_0^0 = \sin \varphi = \text{const}$, ω_H — частота однородной прецессии, образец имеет форму сферы) и пренебрежем членами, нелинейными по a_k и a_{-k}^* .

Решение (13) ищем в виде:

$$a_k = \lambda_k b_k^0 e^{i\omega_k t} - \mu_k b_{-k}^{0*} e^{-i\omega_k t}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \Psi_k \right) = \lambda_{-k}; \\ \mu_k &= \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \Psi_k \right) e^{2i\Phi_k} = \mu_{-k}; \\ \operatorname{tg} \Phi_k &= k_y/k_x; \quad \operatorname{th} \Psi_k = |B_k|/A_k; \\ A_k &= \omega_k \operatorname{ch} \Psi_k; \\ B_k &= \omega_k e^{2i\Phi_k} \operatorname{sh} \Psi_k. \end{aligned} \quad (24)$$

Подстановка (23) (с учетом (24)) в (13) и аналогичное уравнение для a_{-k}^* дает:

$$\begin{aligned} b_k^0 &= iD_{1k} \left[(\lambda_k^2 + \mu_k \mu_k^*) b_k^0 - 2\lambda_k \mu_k b_{-k}^{0*} e^{-2i\omega_k t} \right] - \\ &- i \left[(D_{2k} + T_k) \lambda_k \mu_k^* + (D_{2k}^* + T_k^*) \lambda_k \mu_k \right] b_k^0 + \\ &+ i \left[(D_{2k} + T_k) \lambda_k^2 + (D_{2k}^* + T_k^*) \mu_k^2 \right] b_{-k}^{0*} e^{-2i\omega_k t}. \end{aligned} \quad (25)$$

Величины D_{1k} , D_{2k} , T_k определены соотношениями (14), в которых $a_0 = \sin \varphi e^{i\omega_H t}$.

Экспоненциальное возрастание амплитуды спиновой волны b_k^0 дают

члены в правой части с временными множителями $e^{2i(\omega_H - \omega_k)t}$ при $\omega_k \approx \omega_H$ и множителем $e^{i(\omega_H - 2\omega_k)t}$ при $\omega_k \approx \omega_H/2$. Остальные члены определяют осцилляторное изменение b_k^0 и их можно опустить, после чего получим:

$$\dot{b}_k^0 = i \rho_k \sin \varphi b_{-k}^{0*} e^{i(\omega_H - 2\omega_k)t} + i \xi_k \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi b_{-k}^{0*} e^{2i(\omega_H - \omega_k)t}, \quad (26)$$

где

$$\rho_k = \omega_M [\lambda_k (\mu_k k_T^* - \lambda_k k_T) k_z / k^2] = \rho_{-k};$$

$$\xi_k = \frac{1}{2} \lambda_k^2 \left(\omega_M \frac{k_z^2}{k^2} + \omega_{ex} l^2 k^2 - \frac{1}{3} \omega_M \right).$$

Для спиновых волн с $\omega_H = \omega_k$ (они нарастают быстрее всего)

$$\dot{b}_k^0 = i \xi_k \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi b_{-k}^{0*}. \quad (27)$$

Решая это уравнение совместно с уравнением для \dot{b}_{-k}^{0*} , получим:

$$b_k^0 = b_k^0(0) e^{i \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \xi_k t} \quad (28)$$

($b_k^0(0)$ — начальное значение амплитуды спиновой волны, определяемое тепловым равновесием).

В выражении для ξ_k значения k надо брать такие, что $\omega_k = \omega_H$; при этом ξ_k по порядку величины совпадает с ω_M . С учетом релаксации $b_k^0 = b_k^0(0) e^{i \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \xi_k t - \eta t}$; однако $\eta \ll \omega_M$ и релаксация спиновых волн не может скомпенсировать влияние однородной прецессии при больших углах φ .

Время возрастания волн с $\omega_k = \omega_H$

$$\tau = 1/(4\pi\gamma M \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi - \eta).$$

При полях $H < 8\pi MN_z$ возможно выполнение условия $\omega_k \approx \omega_H/2$. Для спиновых волн, удовлетворяющих этому условию, получим:

$$\dot{b}_k^0 = i \rho_k \sin \varphi b_{-k}^{0*}. \quad (29)$$

Решение этого уравнения совместно с уравнением для \dot{b}_{-k}^{0*} и с учетом релаксации дает:

$$b_k^0 = b_k^0(0) e^{(\sqrt{\rho_k \rho_k^*} \sin \varphi - \eta) t}, \quad (30)$$

где $\sqrt{\rho_k \rho_k^*} \approx \omega_M$. При $\sin \varphi > \omega_M$ появляется неустойчивость со временем $\tau = 1/\omega_M \sin \varphi - \eta$.

Результаты первой и второй части работы, дающие зависимость устойчивости однородной прецессии от угла φ и величины магнитного поля H , собраны в таблице 1.

Таблица 1

Область углов φ , близких к $\pi/2$, исключена из рассмотрения

Интервал углов	Интервал полей	Вид неустойчивости и характер нарастающих спиновых волн	Время нарастания спиновых волн
$0 < \varphi < \pi/2$	$H \leq 4\pi MN_z$	Линейный механизм, волны с малыми k	$\tau \approx 1/4\pi\gamma M$
$\pi/2 < \varphi < \pi$	Любые	Линейный механизм, волны с большими k	$\tau \approx 1/4\pi\gamma M$
$\eta/\omega_M < \varphi < \pi/2$	$4\pi MN_z \leq H \leq 8\pi MN_z$	Нелинейный механизм, волны с $\omega_k \approx \omega_H/2$	$\tau \approx 1/4\pi\gamma M \sin \varphi - \eta$
$0 < \varphi < \sqrt{\eta/\omega_M}$	$H > 8\pi MN_z$	Устойчивое состояние	∞
$0 < \varphi < \eta/\omega_M$	$4\pi MN_z < H < 8\pi MN_z$	Устойчивое состояние	∞
$\sqrt{\eta/\omega_M} < \varphi < \pi/2$	Любые	Нелинейный механизм, волны с $\omega_k \approx \omega_H$	$\tau \approx 1/4\pi\gamma M \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi - \eta$

3. ИЗЛУЧЕНИЕ ФЕРРОМАГНЕТИКА В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С УЧЕТОМ СПИНОВЫХ ВОЛН

Представляет интерес рассмотреть случай, когда в начальный момент угол между H и M острый и амплитуда однородной прецессии убывает быстрее, чем нарастают спиновые волны. Достаточно сильное затухание однородной прецессии появляется, если ферромагнетик помещен в свободное пространство и частота ω_H велика. Тогда энергия момента в магнитном поле переходит в энергию электромагнитного излучения за достаточно короткое время.

Для учета радиационного затухания необходимо добавить к $H_{\text{эфф}}$ в уравнении (1) поле $H_{\text{рад}} = -2V\ddot{M}_0/3c^3$, где V — объем образца, c — скорость света [10]. Тогда для однородной прецессии получим уравнение

$$-i\dot{a}_0 = \omega_H a_0 - \frac{\Gamma}{\omega_H^3} \ddot{a}_0 \sqrt{1 - |a_0|^2}, \quad (31)$$

где $\Gamma = V\omega_M\omega_H^3/6\pi c^3$. При $\Gamma \ll \omega_H$ решение этого уравнения имеет вид:

$$\sin \varphi = |a_0| = \frac{2}{\operatorname{ctg}(\varphi_0/2)e^{rt} + \operatorname{tg}(\varphi_0/2)e^{-rt}}, \quad (32)$$

где φ_0 — начальный угол между M и H , $\varphi < \pi/2$. Величина ω_k для спиновой волны k определяется соотношением (15) с φ , определяемым из (32). Она зависит от времени, но при ω_M , $\Gamma \ll \omega_H$ изменения ω_k малы ($\pm \omega_M$) и при $\Gamma \approx \omega_M$ скорость изменения ($1/\omega_k$) $(d\omega_k/dt) \approx (\omega_M/\omega_H)\Gamma \ll \omega_M$, ω_H , так что ω_k имеет смысл частоты спиновых волн.

Быстрее всего нарастают волны с $\omega_k \approx \omega_H$. Для этих волн получим следующее решение уравнений (13) с радиационным полем $H_{\text{рад}}$ (решение аналогично изложенному в первой и второй частях):

$$|b_k^0(t)| = |b_k^0(0)| \left(\frac{1}{\cos \varphi_0} \frac{\operatorname{ctg}^2(\varphi_0/2)e^{2rt} - 1}{\operatorname{ctg}^2(\varphi_0/2)e^{2rt} + 1} \right)^{1/2 + |\xi'_k|/\Gamma}, \quad (33)$$

где $\xi'_k = \xi_k - (i/2)\lambda_k^2\Gamma$ и $|\xi'| \approx \omega_M$ при $\omega_M \approx \Gamma$.

Зависимость λ_k от времени незначительна (так как $(1/\lambda_k^2)(d\lambda_k^2/dt) \approx (\omega_M/\omega_H)^2\Gamma$) и ею можно пренебречь.

Из (33) следует, что амплитуда любой спиновой волны возрастает не более, чем в $(\cos \varphi_0)^{-(1/2 + |\xi'_k|/\Gamma)}$ раз, и при $\omega_M \approx \Gamma$ спиновые волны остаются малыми, если угол φ_0 не близок к $\pi/2$.

Условия $\omega_M \approx \Gamma \ll \omega_H$ осуществимы при $4\pi M \approx 3000$ эрстед, $H \approx 30000$ эрстед и $V \approx 3 \cdot 10^{-4}$ см³.

Начальный угол φ_0 между \mathbf{H} и \mathbf{M} может быть создан быстрым неадиабатическим изменением направления поля \mathbf{H} на угол $\varphi_0 < \pi/2$ за время, меньшее 10^{-12} сек при $\omega_H \approx 10^{12}$ сек⁻¹. Спиновые волны за это время нарасти не успеют, так как время их нарастания 10^{-11} сек. Нужно учитывать также, что момент будет следовать за полем по направлению, если оно меняется медленнее, чем за время $1/\Gamma$; однако при нашем выборе параметров $1/\Gamma \approx 10^{-11}$ сек.

В заключение отметим, что полученные выражения расходятся при $\varphi \rightarrow \pi/2$. Это связано с невозможностью использования разложения (12) около угла $\varphi = \pi/2$, а не с физическим смыслом задачи. Можно думать, что характеристики неустойчивости состояний с $\varphi \approx \pi/2$ сходны с теми, которые получены для других значений угла φ .

Автор выражает глубокую благодарность В. М. Файну за предложение темы и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Булаевский, В. М. Файн, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 39, 516 (1960).
2. L. R. Wolker, Phys. Rev., 105, 390 (1957).
3. M. H. Cohen, F. Keffer, Phys. Rev., 99, 1128 (1955).
4. В. М. Файн, ЖЭТФ, 34, 1032 (1958).
5. В. М. Файн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 5—6, 75 (1958).
6. F. R. Morgenthaler, IRE Trans. of Microwave Theory and Techniques, 1, 6 (1959).
7. В. Н. Генкин, Дипломная работа, ГГУ, 1960.
8. В. М. Файн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 876 (1959).
9. H. Suhl, J. Phys. Chem. Solids, 1, 209 (1957).
10. В. Л. Гинзбург, Труды ФИАН, вып. 3 (1946), ЖЭТФ, 13, 33 (1943); J. Phys. USSR, 8, 33 (1944).

Поступила в редакцию
30 августа 1960 г.

ON THE INSTABILITY OF A UNIFORM MAGNETIZATION PRECESSION

L. N. Bulayevsky

The stability of a uniform magnetization precession is considered in linear and nonlinear spinal waves approximation for any angle between the magnetic field and the magnetic moment. It is shown that the only stable precession is that with a small amplitude; in all other cases there is a rapid growth of spinal waves which cause the magnetization to collapse. It was found that inverted states of ferromagnetic systems are unstable. An examination was made of the special case when the excited ferromagnetic gives away its total energy to the electromagnetic field.

Примечание при корректуре. После того, как статья была направлена в печать, автору стало известно, что некоторые результаты этой работы получены в статье T. Schaug-Pettersen, J. Appl. Phys. Suppl., 31, 382 S (1960).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОЛЬЦЕВОГО КОНДЕНСАТОРА ДЛЯ СОРТИРОВКИ МОЛЕКУЛ В МОЛЕКУЛЯРНОМ ГЕНЕРАТОРЕ

B. A. Щеглов

Проведен расчет кольцевого конденсатора как сортирующей системы в молекулярном генераторе. Получена зависимость напряженности электрического поля от параметров конденсатора, найдены энергия взаимодействия молекулы с полем кольцевого конденсатора и число активных молекул, получаемых с помощью такой сортирующей системы, а также вычислены угол захвата и длина системы, необходимая для эффективной сортировки.

1. РАСЧЕТ КОЛЬЦЕВОГО КОНДЕНСАТОРА

В работе [1] было предложено использовать для сортировки молекул аммиака не квадрупольный конденсатор, который обычно использовался с этой целью, а кольцевой. Однако расчета кольцевого конденсатора в указанной работе проведено не было.

Кольцевой конденсатор представляет собой систему большого числа соосных металлических колец (рис. 1). Соседние кольца несут разноименные потенциалы $+\varphi_0$ и $-\varphi_0$. Задача отыскания поля в кольцевом конденсаторе сводится к нахождению потенциальной функции φ , которая удовлетворяет уравнению Лапласа и принимает периодически значения $+\varphi_0$, $-\varphi_0$ на поверхности тороидов-колец. Будем искать потенциал в цилиндрической системе координат. Очевидно, что поле

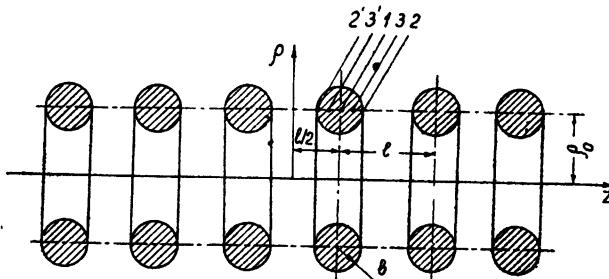


Рис. 1. Кольцевая сортирующая система в плоскости, проходящей через ее ось.

в данном случае обладает аксиальной симметрией. Уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат (для $\rho \leq \rho_0$) при наличии аксиальной симметрии имеет вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Для простоты будем считать, что количество колец бесконечно; это позволяет пренебречь краевыми эффектами кольцевого конденсатора. При введенной идеализации потенциальная функция $\varphi(\rho, z)$

становится периодической функцией z с периодом $2l$ и при соответствующем выборе начала координат (рис. 1)—нечетной по z . Из свойств функции $\varphi(\rho, z)$ следует, что ее можно разложить в ряд Фурье по z и причем только по синусам:

$$\varphi(\rho, z) = \sum_k \varphi_k(\rho) \sin(k\pi z/l), \quad (2)$$

где, согласно общей теории Фурье,

$$\varphi_k(\rho) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\rho, z) \sin(k\pi z/l) dz \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (3)$$

Для определения $\varphi_k(\rho)$ умножим уравнение (1) на $(2/l)\sin(k\pi z/l)dz$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) и проинтегрируем от 0 до l :

$$\frac{2}{l} \int_0^l \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) \sin \frac{k\pi z}{l} dz + \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \sin \frac{k\pi z}{l} dz = 0. \quad (4)$$

Последовательно интегрируя (4) по частям и используя то, что потенциальная функция $\varphi(\rho, z)$ в плоскостях $z = \pm ln$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) обращается в нуль, получаем:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\varphi_k}{d\rho} \right) - \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \varphi_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (5)$$

Уравнение (5) есть так называемое модифицированное уравнение Бесселя. Общий интеграл уравнения (5) имеет вид [2]:

$$\varphi_k(\rho) = A_k I_0 \left(\frac{k\pi\rho}{l} \right) + B_k K_0 \left(\frac{k\pi\rho}{l} \right), \quad (6)$$

где $I_0(k\pi\rho/l)$ — функция Бесселя нулевого порядка чисто мнимого аргумента, а $K_0(k\pi\rho/l)$ — функция Макдональда нулевого порядка чисто мнимого аргумента. Функция $K_0(k\pi\rho/l)$ имеет в нуле логарифмическую особенность; поэтому необходимо положить $B_k = 0$ для того, чтобы потенциал был конечен на оси конденсатора.

Учтем, что для потенциала $\varphi(\rho, z)$ справедливо граничное условие, согласно которому в плоскостях $z = \pm (2n+1)l/2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) имеется только радиальная составляющая напряженности электрического поля, т. е. $\partial\varphi/\partial z = 0$. Это условие удовлетворяется, если, имея в виду, что $\cos[(2n+1)\pi/2] = 0$ для любого целого n , положить $k = 2n+1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Таким образом,

$$\varphi(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n I_0 [(2n+1)\pi\rho/l] \sin [(2n+1)\pi z/l], \quad (7)$$

где [2]

$$I_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (x/2)^{2s} (s!)^{-2}. \quad (8)$$

Нахождение коэффициентов A_n , при которых потенциал удовлетворял бы граничным условиям данной краевой задачи, вызывает значительные затруднения. Поэтому воспользуемся формулой (7) для нахождения приближенного решения. Один из приближенных методов

заключается в том, что при решении электростатической задачи добиваются выполнения граничных условий не всюду, а лишь в конечном числе точек [3]. Для простоты будем считать толщину кольца достаточно малой: $2b \ll \rho_0$, $2b \ll l$. Если пренебречь в выражении (7) всеми членами, для которых $n > 2$, т. е. ограничиться только первыми тремя гармониками, можно добиться, чтобы потенциал $\varphi(\rho, z)$ был равен $+\varphi_0$ в трех точках плоскости (ρ, z) . Мы будем рассматривать z в пределах $0 \leq l \leq z$, так как в случае, если потенциал удовлетворяет граничным условиям в этом промежутке, граничные условия для других z будут выполняться автоматически в силу периодичности и нечетности по z функции $\varphi(\rho, z)$.

Пусть точки 1, 2, 3, в которых потенциал принимает значение $+\varphi_0$, имеют координаты (рис. 1):

$$z = l/2, \rho = \rho_0; \quad z = l/2 + b, \rho = \rho_0; \quad z = l/2 + b/2, \rho = \rho_0.$$

Тогда для определения коэффициентов A_0, A_1, A_2 после элементарных упрощений и введения обозначений

$$AI_0\left(\frac{\pi\rho_0}{l}\right) = m_0, \quad A_1I_0\left(\frac{3\pi\rho_0}{l}\right) = m_1, \quad A_2I_0\left(\frac{5\pi\rho_0}{l}\right) = m_2$$

получим следующую систему уравнений:

$$\varphi_0 = m_0 - m_1 + m_2;$$

$$\varphi_0 = m_0 \cos(\pi b/l) - m_1 \cos(3\pi b/l) + m_2 \cos(5\pi b/l); \quad (9)$$

$$\varphi_0 = m_0 \cos(\pi b/2l) - m_1 \cos(3\pi b/2l) + m_2 \cos(5\pi b/2l).$$

Заметим, что потенциал автоматически принимает значение $+\varphi_0$ в точках 2' и 3' с координатами

$$z = l/2 - b, \rho = \rho_0; \quad z = l/2 - b/2, \rho = \rho_0.$$

Заменив в (9) косинусы соответствующими рядами Тейлора $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$, из (9) получим: $m_0 = 1,2\varphi_0$; $m_1 = 0,19\varphi_0$; $m_2 = -0,01\varphi_0$, и, следовательно, для амплитуд гармоник будем иметь:

$$A_0 = 1,2\varphi_0/I_0(\pi\rho_0/l), \quad A_1 = 0,19\varphi_0/I_0(3\pi\rho_0/l), \quad A_2 = -0,01\varphi_0/I_0(5\pi\rho_0/l).$$

Пренебрегая третьей гармоникой вследствие ее малости и подставляя $\varphi_0 = U_0/2$, для $\rho \leq \rho_0$ находим:

$$\varphi(\rho, z) = \frac{0,6U_0}{I_0(\pi\rho_0/l)} I_0(\pi\rho/l) \sin(\pi z/l) + \frac{0,1U_0}{I_0(3\pi\rho_0/l)} I_0(3\pi\rho/l) \sin(3\pi z/l). \quad (10)$$

Теперь нетрудно определить модуль электрической напряженности E :

$$E = \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} = 0,3\pi \frac{U_0}{l} \left\{ \left[2 \frac{I_1(\pi\rho/l)}{I_0(\pi\rho_0/l)} \sin \frac{\pi z}{l} + \frac{I_1(3\pi\rho/l)}{I_0(3\pi\rho_0/l)} \sin \frac{3\pi z}{l} \right]^2 + \left[2 \frac{I_0(\pi\rho/l)}{I_0(\pi\rho_0/l)} \cos \frac{\pi z}{l} + \frac{I_0(3\pi\rho/l)}{I_0(3\pi\rho_0/l)} \cos \frac{3\pi z}{l} \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (11)$$

где $I_1(x)$ — функция Бесселя первого порядка мнимого аргумента.

* Если ограничиться первыми двумя членами, то для определения коэффициентов получается неопределенность типа 0/0.

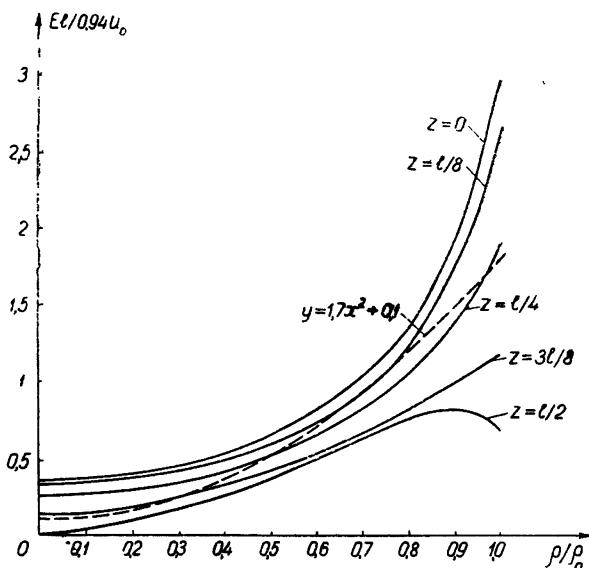


Рис. 2. Графическая зависимость модуля напряженности электрического поля E от расстояния до оси ρ при фиксированных значениях z ($\rho \leq \rho_0 = l$).

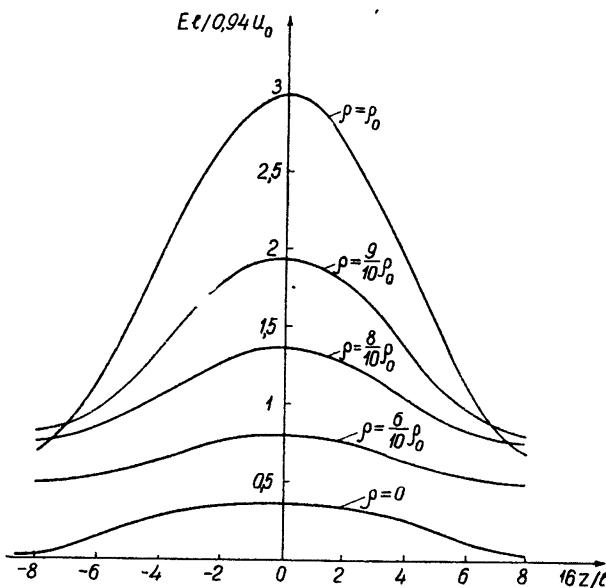


Рис. 3. Графическая зависимость модуля напряженности E от z ($-l/2 \leq z \leq l/2$) при фиксированных значениях ρ ($|z| \leq l/2; \rho_0 = l$).

На рис. 2 представлена зависимость модуля напряженности E от расстояния до оси ρ ($\rho \ll \rho_0$) при фиксированных z , на рис. 3 представлена зависимость модуля E от z ($-l/2 \leq z \leq l/2$) при фиксированных ρ для случая $\rho_0 = l$. Согласно (11), для того, чтобы получить наибольшую напряженность при заданном радиусе кольца ρ_0 и заданном напряжении между двумя соседними кольцами U_0 , надо уменьшать

расстояние между кольцами l . При некотором расстоянии наступает пробой в конденсаторе; он и определяет наименьшее расстояние между кольцами. Если $\rho_0 = l$, то максимальная напряженность электрического поля

$$E_m = 2,82U_0/l \quad (12)$$

достигается на окружностях $\rho = \rho_0$, $z = \pm ln (n = 0, 1, 2, \dots)$.

2. КОЛЬЦЕВОЙ КОНДЕНСАТОР КАК СОРТИРУЮЩАЯ СИСТЕМА

В молекулярном генераторе на молекулах, находящихся в электрическом поле, оказывается эффект Штарка. Если ограничиться излучением одной частоты, то можно рассматривать только два уровня (верхний и нижний), между которыми происходят квантовые переходы. В результате эффекта Штарка энергетические уровни изменяются [4], так что

$$W_{\text{в,н}} = \frac{W_{\text{в}}^0 + W_{\text{н}}^0}{2} \pm \left[\left(\frac{W_{\text{в}}^0 - W_{\text{н}}^0}{2} \right)^2 + E^2 d_{12}^2 \right]^{1/2}, \quad (13)$$

где индексами „в“ и „н“ обозначены соответственно верхний и нижний уровни; $W_{\text{в}}^0$, $W_{\text{н}}^0$ —невозмущенные энергетические уровни, E —электрическое поле, d_{12} —матричный элемент проекции вектора дипольного момента на направление поля E , соответствующий переходу из верхнего энергетического состояния в нижнее.

Нетрудно вычислить матричный элемент d_{12} [4], например, для молекул типа симметричного волчка:

$$d_{12} = d_0 M_J K / J(J+1), \quad (14)$$

где d_0 —дипольный момент молекулы, M_J, K, J —квантовые числа, соответствующие проекции полного вращательного момента молекулы на направление поля, проекции момента на ось симметрии молекулы и полному моменту. Учитывая, что $W_{\text{в}}^0 - W_{\text{н}}^0 = h\nu_0$, и подставляя (14) в (13), получим:

$$W_{\text{в,н}} = W_{\text{в}}^0 - \frac{h\nu_0}{2} \pm \left[\left(\frac{h\nu_0}{2} \right)^2 + \left(Ed_0 \frac{M_J K}{J(J+1)} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (15)$$

Сила, которая действует на молекулу в потенциальном поле, определяется формулой $f = -\text{grad } W$. Компоненты силы f , действующей на молекулы в поле кольцевого конденсатора, запишутся в виде:

$$f_{\varphi(\text{в,н})} = \mp q(E) E \frac{\partial E}{\partial \varphi}; \quad (16)$$

$$f_z(\text{в,н}) = \mp q(E) E \frac{\partial E}{\partial z}; \quad (16a)$$

$$f_{\varphi(\text{в,н})} \equiv 0, \quad (16b)$$

где

$$q(E) = \left[d_0 \frac{M_J K}{J(J+1)} \right]^2 / \left\{ \left(\frac{h\nu_0}{2} \right)^2 + \left[\frac{M_J K}{J(J+1)} d_0 E \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (17)$$

Из формул (16)–(16b) следует, что для сортировки молекул в молекулярном генераторе, т. е. для отделения „нижних“ молекул

от „верхних“, электрическое поле должно быть неоднородным и что фокусировка „верхних“ молекул сопровождается дефокусировкой „нижних“. Если сортировка молекул производится неоднородным полем кольцевого конденсатора, то в случае, когда источник молекулярного пучка находится на оси конденсатора, а длина его достаточно велика, число отсортированных молекул (как и в случае квадрупольного конденсатора) связано с числом молекул, поступающих в конденсатор, соотношением [5]

$$(N_{JKM_JB})_{\text{сорт}} = N_{JKM_JB} \frac{W_m}{kT} \quad (W_m \ll kT). \quad (18)$$

Здесь N_{JKM_JB} — число „верхних“ молекул, вылетающих за 1 сек из источника пучка и находящихся в состоянии J, K, M_J ; W_m — максимальное смещение верхнего инверсионного уровня молекулы в поле; согласно (15), оно определяется соотношением

$$W_m = \frac{\hbar v_0}{2} \left\langle \left\{ 1 + \left[\frac{E_m d_0 M_J K / J(J+1)}{\hbar v_0 / 2} \right]^2 \right\}^{1/2} - 1 \right\rangle. \quad (19)$$

При подсчете числа активных молекул, получаемых с помощью кольцевого конденсатора, разумнее в (19) подставить не E_m , а усредненное по периоду значение поля E при $\rho = \rho_0$. Так как $E(\rho, z)$ — периодическая по z функция, то $\bar{E}_m = \frac{1}{2} [E_{\max}(\rho_0, z) + E_{\min}(\rho_0, z)]$.

В случае $\rho_0 = l$

$$E_{\max} = 2,82 U_0 / l \quad \text{и} \quad E_{\min} = 0,66 U_0 / l,$$

так что

$$\bar{E}_m = 1,74 U_0 / l. \quad (20)$$

С помощью (18), (19), (20) получаем:

$$(N_{JKM_JB})_{\text{сорт}} = N_{JKM_JB} \frac{\hbar v_0}{2kT} \left\langle \left\{ 1 + 4 \left[1,74 \frac{U_0 d_0 M_J K}{l \hbar v_0 J(J+1)} \right]^2 \right\}^{1/2} - 1 \right\rangle. \quad (21)$$

Для сильных полей, когда $E_m d_0 M_J K / J(J+1) \gg \hbar v_0$, с большей степенью точности

$$(N_{JKM_JB})_{\text{сорт}} = N_{JKM_JB} 1,74 \frac{U_0 d_0 M_J K}{l k T J (J+1)}. \quad (22)$$

Зная количество отсортированных молекул, можно определить максимальный угол захвата θ_{0B} .

Вылетающие из печи молекулы, находящиеся на верхнем уровне, имеют максвелловское распределение по скоростям и углам вылета:

$$dN_{JKM_JB} = A \exp(-mv^2/2kT) v^3 dv \cos \theta \sin \theta d\theta, \quad (23)$$

где A — нормировочная константа. По определению максимальный угол захвата вычисляется из соотношения

$$(N_{JKM_JB})_{\text{сорт}} = A \int_0^\infty \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^3 dv \int_0^{\theta_{0B}} \cos \theta \sin \theta d\theta. \quad (24)$$

Полное количество молекул, находящихся на верхнем уровне и поступающих за 1 сек в конденсатор, равно

$$N_{JKM_JB} = A \int_0^{\infty} \exp(-mv^2/2kT) v^3 dv \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta. \quad (25)$$

Из (24) и (25) получим:

$$\sin^2 \theta_{0B} = (N_{JKM_JB})_{\text{сорт}} / N_{JKM_JB}. \quad (26)$$

Таким образом, из (21) и (26) имеем:

$$\sin^2 \theta_{0B} = \frac{h v_0}{2kT} \left\langle \left\{ 1 + 4 \left[1,74 \frac{U_0 d_0 M_J K}{l h v_0 J(J+1)} \right] \right\}^{1/2} - 1 \right\rangle. \quad (27)$$

Если длина конденсатора достаточно велика, то можно считать, что все „нижние“ молекулы отсортируются, и число активных молекул определяется формулой (21). Однако полной отсортировки „нижних“ молекул не происходит. Поэтому представляется интересным вычислить минимальную длину кольцевого конденсатора для эффективной сортировки, которую определим как такую длину L_{\min} , при которой количество „нижних“ молекул составляет 0,01 от количества „верхних“ молекул.

Прежде всего найдем приближенное уравнение движения „нижних“ молекул. Для простоты будем считать, что напряженность поля E зависит только от расстояния от оси ρ и не изменяется по z . Пусть зависимость E от ρ представляется параболой вида

$$y = 1,7x^2 + 0,1, \quad (28)$$

где $y = El/0,94U_0$, $x = \rho/\rho_0$. На рис. 3 эта кривая проведена пунктиром. Так как мы рассматриваем случай $\rho_0 = l$, то

$$E = 0,94 \cdot 1,7 \frac{U_0}{l^3} \rho^2 + 0,94 \cdot 0,1 \frac{U_0}{l}. \quad (29)$$

Ограничеваясь рассмотрением „сильных“ полей, запишем уравнение движения для „нижних“ молекул в виде:

$$m \ddot{\rho} = 3,196 d_0 \frac{M_J K}{J(J+1)} \frac{U_0 \rho}{l^3}. \quad (30)$$

При начальных условиях $\rho|_{t=0}=0$, $\dot{\rho}|_{t=0}=v_{0B}$ решение уравнения (30):

$$\rho = \frac{v_{0B}}{2V_k} (e^{V_k t} - e^{-V_k t}), \quad (31)$$

где $k = 3,196 d_0 M_J K / J(J+1)$. По аналогии с формулой (26) для „верхних“ молекул можно написать соотношение для угла захвата „нижних“ молекул:

$$\sin^2 \theta_{0H} = \frac{(N_{JKM_JH})_{\text{рез}}}{(N_{JKM_JH})}, \quad (32)$$

где $(N_{JKM_JH})_{\text{рез}}$ — количество „нижних“ молекул, попавших в резонатор. Так как с равной вероятностью можно обнаружить молекулу на выходе печи на верхнем или нижнем уровне, то $N_{JKM_JB} = N_{JKM_JH}$, и из (26), (32) следует, что

$$\sin^2 \theta_{0H} / \sin^2 \theta_{0B} = (N_{JKM_JH})_{\text{рез}} / (N_{JKM_JB})_{\text{сорт}}. \quad (33)$$

Положив это отношение равным 0,01, получим:

$$\sin \theta_{0h} = 0,1 \sin \theta_{0b}. \quad (34)$$

Учитывая, что $v_{0p} = \bar{v} \sin \theta_{0h} = 0,1 \bar{v} \sin \theta_{0b}$ (\bar{v} — средняя скорость), в соответствии с введенной идеализацией получаем из (31) уравнение для определения L_{\min} :

$$\rho_0 = \frac{0,1 \bar{v} \sin \theta_{0b}}{2 \sqrt{k}} (e^{\sqrt{k} L_{\min} / \bar{v}} - e^{-\sqrt{k} L_{\min} / \bar{v}}) \quad (35)$$

(радиус отверстия резонатора равен радиусу кольца), откуда

$$L_{\min} = \frac{\bar{v}}{\sqrt{k}} \operatorname{Arsh} \left(\frac{\rho_0 \sqrt{k}}{0,1 \bar{v} \sin \theta_{0b}} \right). \quad (36)$$

Рассмотрим частный случай. При работе молекулярного генератора в ФИАН им. П. Н. Лебедева использовался кольцевой конденсатор с $\rho_0 = l = 2\text{ см}$ и $U_0 = 100 \text{ кв}$. Если производится сортировка молекул димерированного аммиака ND_3 (тип слегка асимметричного волчка), то, полагая в (21) $d_0 = 1,5\text{ д}\text{б}$ [5], $h\nu_0/2kT = 0,39 \cdot 10^{-4}$, $h\nu_0 = 1,56 \cdot 10^{-18} \text{ эрг}$ и рассматривая молекулы на уровне $J = K = 6$, получаем:

$$(N_{JKM_JB})_{\text{сорт}} = 0,004 |M_J| N_{JKM_JB}. \quad (37)$$

Максимальный угол захвата определяется из соотношения $\sin^2 \theta_{0b} = 0,004 |M_J|$ и равен $4^\circ \div 9,5^\circ$ ($|M_J| = 1 \div 6$). Для эффективной сортировки молекул ND_3 по инверсионным уровням минимальная длина кольцевого конденсатора L_{\min} должна быть равна 45 см.

Автор благодарит А. Н. Ораевского за помощь, оказанную в процессе работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Крупнов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 658 (1959).
2. Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, ГИТТЛ, М., 1948.
3. С. Рамо и Д. Уиннер, Поля и волны в современной радиотехнике, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
4. Ч. Таунс и А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ГИТТЛ, М., 1959.
5. Н. Г. Басов и К. К. Свидзинский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 2, 89 (1958).

Московский физико-технический
институт

Поступила в редакцию
22 декабря 1960 г.

THE UTILIZATION OF A RING CAPACITOR FOR MOLECULES SORTING IN A MOLECULAR GENERATOR

V. A. Sheglov

A calculation was carried out of a ring capacitor as a sorting system in a molecular generator. The dependence was obtained of the intensity of the electric field on the capacitor parameters; were also found the energy of the interaction of molecule with ring capacitor field, and the number of active molecules obtained with the help of such a sorting system. The angle of capture and the length of the system necessary for effective sorting were also calculated.

О РЕЗОНАНСНОМ ОТРАЖЕНИИ ВОЛН В СИСТЕМЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

H. C. Степанов

Методом последовательных приближений, предложенным в [1], находятся отраженные волны в длинной линии с параметрами, периодически изменяющимися по закону бегущей волны. Показано, что при выполнении определенных соотношений между частотами и скоростями распространения волн параметра и сигнала отраженные волны монотонно накапливаются, что может привести к усилению или даже самовозбуждению колебаний.

Рассмотрение отраженных волн в среде с переменными параметрами представляет, в частности, интерес в связи с проблемой параметрического усиления бегущей волны. Результаты работ [1-3] приводят к заключению о невозможности такого усиления монохроматических колебаний в слабо диспергирующей системе. Эти выводы справедливы, однако, только при отсутствии или, по крайней мере, малости отраженных волн, т. е. в области применимости „геометрической оптики“.

Как было показано в статье [1], прямая (распространяющаяся в положительном направлении) и обратная волны в длинной линии не будут отражаться, если соответственно равны нулю коэффициенты

$$k_{21} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} + n \frac{\partial}{\partial t} \right) \ln V^{\rho} - d, \quad k_{12} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} - n \frac{\partial}{\partial t} \right) \ln V^{\rho} + d, \quad (1)$$

где x и t —расстояние и время, $n = \sqrt{LC}$, $\rho = \sqrt{L/C}$, $d = (1/2)(R/\rho - \rho G)$, L , C , R , G —погонные параметры. Когда коэффициенты k_{21} и k_{12} не равны нулю, но хотя бы один из них мал, решение задачи можно найти в виде ряда по отраженным волнам*. Если в нулевом приближении в линии распространяется только прямая волна, необходимым условием применимости „геометрической оптики“ будет соотношение

$$\frac{\pi |k_{21}|}{2n\omega} = \left| \frac{\pi}{4\omega\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{\pi d}{2n\omega} \right| \ll 1, \quad (2)$$

где производная берется для фиксированного фронта волны (ω —мгновенная частота сигнала). Малость первого члена в (2) означает плавное изменение „волнового сопротивления“ ρ , второго же, как нетрудно видеть,—малость дисперсии в линии, вызываемой потерями**. Поскольку последний член не является специфичным для переменных параметров, далее для простоты потерями будем пренебрегать.

* Заметим, что рассмотренный в [3] случай, когда параметры L или C изменяются по закону «простой» волны в нелинейной среде, как раз удовлетворяет условию $k_{21}=0$. В работе [2] отраженные волны не принимались во внимание.

** Легко показать (используя, например, результаты [3]), что при постоянных параметрах фазовая скорость монохроматической волны частоты ω с точностью до членов четвертого порядка относительно $R/\omega L$, $G/\omega C$ равна $\left[n \sqrt{1 + (d'n\omega)^2} \right]^{-1}$. Случай $d=0$, как известно, соответствует отсутствию искажения сигнала в линии с потерями.

Условие (2), вообще говоря, не является достаточным; при периодическом изменении L и C (типичном в параметрических усилителях) отраженные волны могут накапливаться: в стационарном случае этому соответствует известное „брэгговское“ резонансное отражение от периодической структуры. Если параметры изменяются также во времени, не исключена возможность, как будет показано ниже, усиления какой-либо гармоники сигнала.

1. Прежде всего необходимо уточнить граничные условия задачи. Обычно [1-4] при теоретическом исследовании система полагается полубесконечной, причем задаются значения искомых величин (например, напряжения V и тока I в длинной линии) на входе. Реальный смысл, однако, имеет система конечной длины, от которой существенно зависит и возможность накопления отраженных волн; при этом для соответствия физическим условиям необходимо задавать данные на обеих границах.

Предположим, что на входе линии ($x = 0$) имеется источник с электродвижущей силой $E(t)$ и внутренним сопротивлением $R_i(t)$, а на выходе ($x = l > 0$)—нагрузка $R_n(t)$. Тогда на границах будут выполняться соотношения:

$$V(0, t) = E(t) - R_i I(0, t), \quad V(l, t) = R_n I(l, t). \quad (3)$$

В дальнейшем, как и в [1], удобно пользоваться переменными $U_1 = V + \rho I$, $U_2 = V - \rho I$. Будем считать, что в нулевом приближении в линии существует только прямая волна U_1^0 , а $U_2^0 = 0$. Для этого, как нетрудно видеть из (3), необходимо, чтобы источник, линия и нагрузка были согласованы:

$$\rho(0, t) = R_i(t), \quad \rho(l, t) = R_n(t). \quad (4)$$

Тогда окончательно получаем граничные условия

$$U_1(0, t) = E(t), \quad U_2(l, t) = 0. \quad (5)$$

Физически эти соотношения означают отсутствие локального отражения от границ*.

Ограничимся рассмотрением системы с „бегущими“ параметрами** $n = n(\eta)$, $\rho = \rho(\eta)$, где $\eta = t - x/a$. В предельных случаях это соответствует изменению параметров только во времени ($a \rightarrow \infty$) или только в пространстве ($a \rightarrow 0$). Полагая входной сигнал монохроматическим: $E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \Theta_0)$, можно найти нулевое приближение [1] в виде:

$$U_1^0 = \frac{n[t(\xi_1)] - 1/a}{n(\eta) - 1/a} \sqrt{\frac{\rho(\eta)}{\rho[t(\xi_1)]}} E_0 \cos \Theta, \quad \Theta = \omega_0 t(\xi_1) + \Theta_0, \quad (6)$$

где $\xi_1(x, t)$ —одна из характеристических переменных (первый интеграл уравнения $ndx = dt$), а функция $t(\xi_1)$ определяется соотношением $\xi_1 = \xi_1(0, t)$.

Не уточняя начальных условий задачи, рассмотрим сначала уст-

* Аналогичные условия будут иметь место, когда плоская волна нормально падает на слой (толщиной l) с переменными параметрами, если вне этого слоя отражение не происходит. При этом R_i и R_n соответствуют волновым сопротивлениям среды до и после указанного слоя, $E(t)$ —амплитуда падающей волны.

** Практически такое изменение параметров представляется возможным получить, например, в системе из двух линий, если вспомогательная линия, по которой с определенной скоростью распространяется мощная волна «накачки», нелинейно связана с основной (используя ферриты или полупроводниковые диоды). При надлежащем характере дисперсии для этой цели может быть использована и одна линия.

новившийся режим. Используя формулы (5)–(9) в [1] и переходя к интегрированию по x , с учетом условий (5) для волн высших порядков (отраженной и переотраженных) можно написать своего рода рекуррентные соотношения:

$$U_1^{2(k+1)} = e^{f_1} \int_0^x k_{12} e^{-f_1} U_2^{2k+1} dx; \quad U_1^{2k+1} = 0; \quad (7)$$

$$U_2^{2k+1} = e^{f_2} \int_l^x k_{21} e^{-f_2} U_1^{2k} dx; \quad U_2^{2k} = 0, \quad (7a)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$; в рассматриваемом случае $e^{f_1} = \sqrt{\rho}/(n - 1/a)$, $e^{f_2} = \sqrt{\rho}/(n + 1/a)$; криволинейный интеграл 2-го рода для U_1 берется вдоль характеристики $\xi_1 = \text{const}$, а для U_2 —при $\xi_2 = \text{const}$ (ξ_2 —интеграл уравнения $ndx = -dt$).

2. В общем виде исследование интегралов в (7) встречается с некоторыми трудностями, поэтому примем несколько упрощающих предположений. Пусть

$$n = C_0 \rho = n_0 [1 + m \cos(\Omega\eta)], \quad (8)$$

где $0 \ll m \ll 1$ (постоянство погонной емкости C_0 здесь не принципиально). Будем также полагать, что

$$\frac{mn_0}{|n_0 \pm 1/a|} \ll 1, \quad \frac{mn_0 \omega_0}{|n_0 - 1/a| \Omega} \ll 1; \quad (9)$$

в этом случае явления, связанные с изменением величины $n = \sqrt{LC}$, выражены слабо [4] и приближенно можно написать:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x - \frac{\eta}{n_0 - 1/a} + O(m); & \xi_2 &= x + \frac{\eta}{n_0 + 1/a} + O(m); \\ t(\xi_1) &= -(n_0 - 1/a) \xi_1 + O(m) = t - n_0 x + O(m), \end{aligned} \quad (10)$$

где через $O(m)$ обозначены поправки малости порядка m и выше (существенно, что эти поправки не накапливаются). Пренебрегая подобными членами, из выражения (6) имеем:

$$U_1^0 = E_0 \cos \Theta, \quad \Theta = \omega_0 (t - n_0 x) + \Theta_0. \quad (6a)$$

Упрощая аналогичным образом и другие величины, входящие в (7a), для первой отраженной волны получим:

$$U_2^1 = \frac{1}{2} E_0 m \left(n_0 - \frac{1}{a} \right) \Omega \int_l^x \sin(\Omega\eta) \cos \Theta dx. \quad (11)$$

Выразив из (10) η и Θ как функции x и ξ_2 , легко вычислим последний интеграл:

$$\begin{aligned} U_2^1 &= \frac{1}{2} E_0 m \left(n_0 - \frac{1}{a} \right) \Omega \left\{ \frac{\sin[(1/2)(p-q)(l-x)]}{p-q} \sin \Theta_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin[(1/2)(p+q)(l-x)]}{p+q} \sin \Theta_2 \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$p = \Omega(n_0 + 1/a); \quad q = 2\omega_0 n_0;$$

$$\Theta_1 = (\omega_0 - \Omega)t - (1/2)\Omega(n_0 - 1/a)x + (1/2)(p - q)l + \Theta_0;$$

$$\Theta_2 = (\omega_0 + \Omega)t + (1/2)\Omega(n_0 - 1/a)x - (1/2)(p + q)l + \Theta_0.$$

Таким образом, в этом приближении (с точностью до членов порядка m^2) в отраженной волне содержатся только гармоники с частотами $|\omega_0 - \Omega|$ и $\omega_0 + \Omega$, причем обе составляющие модулированы по амплитуде в пространстве с соответствующими периодами $2\pi(p - q)^{-1}$ и $2\pi(p + q)^{-1}$. Если, например, $l = 2\pi r(p - q)^{-1}$ ($r = 1, 2, \dots$), то частоты $|\omega_0 - \Omega|$ на входе линии не будет, при $l = \pi(2r+1)(p - q)^{-1}$ амплитуда этой гармоники максимальна и равна $(1/2)E_0 m(n_0 - 1/a) \times (p - q)^{-1}$.

Существенно, что отражение носит резонансный характер: если $p \mp q = 0$, т. е.

$$\omega_0 = \pm \frac{1}{2} \Omega \left(1 + \frac{1}{an_0} \right), \quad (13)$$

то соответствующие гармоники в отраженной волне будут монотонно накапливаться по направлению от выхода линии к входу (см. рис. 1). Нижний знак в (13), означающий „резонанс“ компоненты суммарной частоты $\omega_0 + \Omega$, возможен в случае $a < -1/n_0$. Далее для определенности будем считать $a \geq 0$; при этом в отраженной волне преобладает гармоника с разностной частотой $|\omega_0 - \Omega|$. Отбрасывая тогда второй член в (12) и полагая условие (13) выполненным, имеем:

$$U_2^1 = \Gamma(1 - \zeta) E_0 \sin \Theta_1, \quad (14)$$

где $\Gamma = (1/4)m(n_0 - 1/a)\Omega l$, $\zeta = x/l$ — относительное расстояние от входа, а $\Theta_1 = (\omega_0 - \Omega)t - (1/2)\Omega(n_0 - 1/a)x + \Theta_0$, причем здесь $\omega_0 - \Omega = (1/2)\Omega(1 - 1/an_0) = \omega_0(n_0 - 1/a)(n_0 + 1/a)^{-1}$. В случае $a \rightarrow \infty$ из (13) следует равенство $\Omega = 2\omega_0$ — обычное условие параметрического резонанса в основной зоне, а при $\Omega = K a \rightarrow 0$ — соответствующее условие „брэгговского“ отражения или „полосы непропускания“ в периодически неоднородной линии [6] $K = 2k$, где $K = \Omega/a$ и $k = \omega_0 n_0$ — волновые числа параметра и сигнала. При более точном вычислении интегралов в (7) можно было бы определить и резонансные частоты высших порядков.

Сравнивая амплитуды прямой и отраженной волны на входе линии ($\zeta = 0$), получаем достаточное условие применимости „геометрической оптики“ в виде:

$$|\Gamma| = \frac{1}{4}m \left| n_0 - \frac{1}{a} \right| \Omega l \ll 1; \quad (15)$$

величину Γ можно рассматривать как коэффициент отражения прямой волны (в первом приближении). Условие (15) накладывает ограничение на относительную длину системы: при $a \rightarrow 0$, например, отсюда получаем $l/\Lambda \ll 2/\pi m$, где $\Lambda = 2\pi/K$ — длина волны параметра. При $|\Gamma| \sim 1$

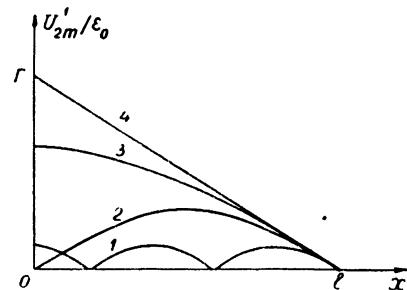


Рис. 1. Изменение относительной амплитуды отраженной волны в первом приближении U_2^1/E_0 вдоль линии:

1) $p - q = 5\pi/l$; 2) $p - q = 2\pi/l$, 3) $p - q = \pi/l$; 4) $p - q = 0$.

отраженная волна на входе—одного порядка с прямой. С уменьшением разности $|n_0 - 1/a|$ коэффициент отражения уменьшается. При $|a| \rightarrow 1/n_0$ условия (9) нарушаются и в соотношениях (6) и (10) пре-небречь членами порядка m , т. е. аппроксимировать семейства ха-рактеристик параллельными прямыми, уже нельзя. В этом случае на первый план выдвигаются именно явления, связанные с искривле-нием и группировкой характеристик (из-за изменения параметра $n = \sqrt{LC}$), причем этот эффект будет порядка mKl [1, 4], тогда как коэффициент отражения будет малой величиной второго порядка ($\Gamma < (1/2)m^2 Kl$).

3. Для вычисления поправки к мощности, вносимой отраженными волнами, необходимо рассмотреть также волну второго приближения, которая возбуждается в результате переотражения U_2^1 . После упро-щений, аналогичных проведенным в формуле (11), из соотношения (7) имеем:

$$U_2^2 = \frac{1}{2} m \left(n_0 + \frac{1}{a} \right) \Omega \int_0^x \sin(\Omega\eta) U_2^1 dx. \quad (16)$$

Если вычислить этот интеграл, подставив U_2^1 из (12) (и выразив из (10) подынтегральное выражение как функцию x и ξ_1), получим в спектре последней волны частоты ω_0 , $\omega_0 + 2\Omega$ и $|\omega_0 - 2\Omega|$. Ввиду гро-моздкости этого выражения приведем лишь наиболее интересный слу-чай, когда выполнено резонансное условие (13):

$$U_2^2 = M \left(\zeta - \frac{\zeta^2}{2} \right) E_0 \cos \Theta, \quad M = \frac{1}{16} (a^2 n_0^2 - 1) (mKl)^2, \quad (17)$$

где, как и в (6а), $\Theta = \omega_0(t - n_0 x) + \Theta_0$, $\zeta = x/l$ (гармоники с комби-национными частотами, имеющие относительно меньшие амплитуды, от-брошены)*.

Таким образом, при $|M| \sim 1$ переотраженная волна U_2^2 , имеющая, как и U_1^0 , частоту ω_0 , на выходе ($\zeta = 1$) одного порядка с последней. Если $M < 0$, т. е. $a^2 < 1/n_0^2$ (волна параметра распространяется мед-леннее сигнала), U_1^0 и U_2^2 имеют противоположные фазы, т. е. нали-чие отражения в этом случае уменьшает прямую волну („полоса не-пропускания“), а при $a^2 > 1/n_0^2$ — наоборот, несмотря на возбуждение обратной волны U_2^1 , выходная мощность увеличивается (отметим, что в последнем случае из (13) следует $\Omega \geq \omega_0$).

Для выяснения характера работы внешних сил, изменяющих па-раметры системы, полезно сравнить средние значения входного и выход-ного потоков мощности в линии. Очевидно, поток мощности на входе равен $P(0) = VI|_{x=0} = (1/4\rho_0) [(U_1^0)^2 - (U_2^1)^2]_{x=0}$, а на выходе $P(l) = = (1/4\rho_0) (U_1^0 + U_2^1)^2|_{x=l}$; учитывая (14) и (17) и усредняя по времени, с точностью до m^4 получаем:

$$\bar{P}(l) - \bar{P}(0) = (1/8) (mKl)^2 a n_0 (a n_0 - 1) \bar{P}_0, \quad (18)$$

где $\bar{P}_0 = E_0^2 / 8\rho_0$ — значение средней мощности волны в нулевом при-ближении. Следовательно, работа внешних сил отрицательна при

* Отметим, что соотношение (17) справедливо и для нижнего знака в (13), когда резонансное нарастание отраженной волны происходит на суммарной частоте $\omega_0 + \Omega$.

$0 < a < 1/n_0$ и положительна в случаях $a < 0$ и $a > 1/n_0$ (напомним, что при $a \rightarrow 1/n_0$ подобное приближение неприменимо). При $a \rightarrow 0$, когда параметры не изменяются во времени, работа внешних сил равна нулю и средние значения входного и выходного потоков энергии в линии без потерь равны между собой.

4. Аналогичным образом можно вычислить и следующие приближения, которые при $|M| \geq 1$ дают существенную поправку к решению. При этом характерно, что в обратной волне содержатся только гармоники $|\omega_0 \pm (2k+1)\Omega|$, а в прямой—только $|\omega_0 \pm 2k\Omega|$, где $k=0, 1, 2, \dots$. При условии (13) всеми комбинационными гармониками по сравнению с основной можно пренебречь, кроме составляющей $|\omega_0 - \Omega|$ в обратной волне (если $a > 0$). Тогда приближенное решение можно получить в виде суммы ряда по степеням M :

$$U_1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k M^k \right) E_0 \cos \Theta, \quad U_2 = \Gamma \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k M^k \right) E_0 \sin \Theta, \quad (19)$$

где коэффициенты a_k и b_k выражаются через кратные интегралы:

$$a_k(\zeta) = \int_0^{\zeta} d\zeta_{2k} \int_{\zeta_{2k}}^1 d\zeta_{2k-1} \cdots \int_0^{\zeta_2} d\zeta_2 \int_{\zeta_2}^1 d\zeta_1, \quad b_k(\zeta) = \int_{\zeta}^1 a_k d\zeta.$$

Непосредственным последовательным интегрированием нетрудно вычислить эти коэффициенты в виде полиномов:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & b_0 &= 1 - \zeta, \\ a_1 &= \zeta - \frac{\zeta^2}{2}, & b_1 &= \frac{1}{3} - \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^3}{3!}, \\ a_2 &= \frac{\zeta}{3} - \frac{\zeta^3}{3!} + \frac{\zeta^4}{4!}, & b_2 &= \frac{2}{15} - \frac{\zeta^2}{6} + \frac{\zeta^4}{4!} - \frac{\zeta^5}{5!}, \\ a_3 &= \frac{2\zeta}{15} - \frac{\zeta^3}{18} + \frac{\zeta^5}{5!} - \frac{\zeta^6}{6!}, & b_3 &= \frac{17}{315} - \frac{\zeta^2}{15} + \frac{\zeta^4}{72} - \frac{\zeta^6}{6!} + \frac{\zeta^7}{7!}, \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

и т. д.

Поскольку a_k и b_k при $k \rightarrow \infty$ во всей области $0 \leq \zeta \leq 1$ стремятся к нулю, то при $M < 0$ (т. е. $|a| < 1/n_0$) ряды в (19) будут знакопреременными и, во всяком случае, условно сходящимися.

При $M \geq 0$ необходимо оценить радиусы абсолютной сходимости этих рядов; так как $0 \leq a_k(\zeta) \leq a_k(1)$, $0 \leq b_k(\zeta) \leq b_k(0)$, достаточно рассмотреть ряд для U_1 при $\zeta = 1$, а для U_2 —при $\zeta = 0$. Нетрудно убедиться, что все $a_k(1)$ и $b_k(0)$ совпадают с коэффициентами разложения в ряд Маклорена соответственно функций $\operatorname{sc} \sqrt{M}$ и $(1/\sqrt{M}) \operatorname{tg} \sqrt{M}$, т. е. установленные значения относительной амплитуды прямой волны на выходе линии (коэффициент усиления) и обратной на входе (полный коэффициент отражения) при $M < \pi^2/4$ равны:

$$U_{1m}(l)/E_0 = 1 + \frac{1}{2}M + \frac{5}{24}M^2 + \frac{61}{720}M^3 + \dots = \operatorname{sc} \sqrt{M}; \quad (20)$$

$$U_{2m}(0)/E_0 = \Gamma \left(1 + \frac{1}{3}M + \frac{2}{15}M^2 + \frac{17}{315}M^3 + \dots \right) = (\Gamma/\sqrt{M}) \operatorname{tg} \sqrt{M}.$$

Эти равенства формально справедливы и при $M < 0$; в последнем случае, однако, их удобнее выразить через гиперболические функции действительного аргумента:

$$U_{1m}(l)/E_0 = \operatorname{sch} \sqrt{-M}, \quad U_{2m}(l)/E_0 = (\Gamma/\sqrt{-M}) \operatorname{th} \sqrt{-M}. \quad (20a)$$

Коэффициент усиления, следовательно, может быть сколь угодно большим и при ограниченных значениях m, K, l , если $M \rightarrow \pi^2/4$. В случае же $|a| < 1/n_0$ с увеличением $|M|$ коэффициент усиления асимптотически стремится к нулю, а коэффициент отражения—к величине $\Gamma/\sqrt{-M} = |an_0 - 1|^{1/2} (an_0 + 1)^{-1/2}$, которая может быть как меньше ($a > 0$), так и больше единицы ($a < 0$). На рис. 2 показано изменение этих коэффициентов в зависимости от относительной длины линии $(1/4)mKl$ при $a = 2/n_0$ и $a = 1/2 n_0$. Отметим, что решения (20) удовлетворяют известным соотношениям Мэнли—Роу [7], дающим распределение мощности колебаний по частотам в нелинейных системах.

Таким образом, ряды (19) по переотраженным волнам имеют конечные суммы лишь при $M < M_{kp} = \pi^2/4$. Если же $M \geq \pi^2/4$, эти ряды расходятся; это означает, что в последнем случае установившийся режим невозможен.

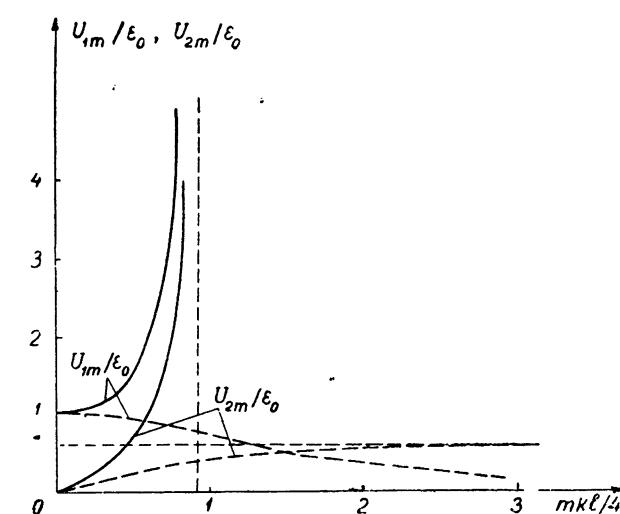


Рис. 2. Зависимость коэффициентов усиления и отражения от величины $mKl/4$ при $an_0=2$ (сплошные кривые) и $an_0=1/2$ (пунктир).

5. Излагаемый метод можно применить и к исследованию неуставновившегося режима. Пусть начальные условия—нулевые, т. е.

$$V(x, 0) = 0, \quad I(x, 0) = 0, \quad (21)$$

а генератор $E(t)$ включается в момент $t = 0$. Тогда равенство (6a) справедливо лишь в области, пройденной передним фронтом волны, а в остальной части решение будет равно нулю. Уравнение переднего фронта в линии $t(\xi_1) = 0$ [1], согласно (10), определяет соотношение $t = n_0 x$. Учет начальных условий тогда сводится лишь к изменению нижних пределов интегрирования в (7), что для волны U_2^1 поясняется рис. 3, где наклонные прямые соответствуют семействам характеристик ξ_1 и ξ_2 . Поскольку выше прямой $t = n_0 x$ $U_1^0 = 0$, для значения U_2^1 в некоторой точке x_n, t_n вместо (11) теперь имеем:

$$U_2^1(x_n, t_n) = \frac{2\Gamma}{l} \int_{x'}^{x_n} \sin(\Omega\eta) \cos\Theta dx. \quad (11a)$$

Здесь x' можно выразить через x_n и t_n из уравнений $t' = n_0 x'$ и $t' +$

$+ n_0 x' = t_n + n_0 x_n$ (так как интегрирование проводится вдоль характеристики ξ_2). При условии (13) вместо (14) тогда получаем:

$$U_2^1(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < n_0 x, \\ (\Gamma/2n_0 l)(t - n_0 x) E_0 \sin\Theta_1 & \text{при } n_0(2l - x) \geq t \geq n_0 x, \\ \Gamma(1 - \zeta) E_0 \sin\Theta_1 & \text{при } t > n_0(2l - x). \end{cases} \quad (14a)$$

Таким образом, время установления отраженной волны U_2^1 в некоторой точке x равно $n_0(2l - x) \leq 2n_0 l$. Аналогично можно показать, что максимальное время установления для волны U_1^2 равно $3n_0 l$, для U_2^3 равно $4n_0 l$ и т. д. Поскольку при $M < M_{kp}$ ряды в (19) сходятся, то волнами высшего порядка, начиная с некоторого, можно пренебречь и решение считать установившимся. Если же $M > M_{kp}$, то процесс установления в линии продолжается бесконечно долго. Так как при этом все U_1^{2k} в фазе друг с другом (аналогично и U_2^{2k+1}), это означает, что несмотря на то, что прямая волна поглощается нагрузкой, а обратная генератором, колебания в линии неограниченно раскачиваются. Если даже ЭДС генератора $E(t) = 0$, любое случайное возмущение здесь приведет к нарастающим колебаниям с частотой $(1/2)\Omega|1 + 1/an_0|$ в прямой и $(1/2)\Omega|1 - 1/an_0|$ в обратной волне.

Указанный эффект, очевидно, аналогичен явлению регенерации в системе с обратной связью, которая здесь осуществляется в результате распределенного переотражения волн. Случай $M < 0$ соответствует отрицательной обратной связи (при этом выходная мощность в линии ослабляется по сравнению с входной), а $M > 0$ ($a^2 > 1/n_0^2$) — положительной. Если обратная связь положительна, но меньше критической, имеет место регенеративное усиление распространяющегося в линии сигнала, а при $M > M_{kp}$ — самовозбуждение колебаний. Для выяснения амплитуды установившихся колебаний, как обычно, необходимо учитывать нелинейность системы. В отличие от обычных регенеративных систем, однако, здесь источником энергии являются периодические силы, изменяющие параметры; в результате в спектре колебаний, кроме основной частоты ω_0 , будут присутствовать также комбинационные гармоники (например, как мы видели, в обратной волне U_2 при $a > 0$ преобладает частота $|\omega_0 - \Omega|$).

Аналогичным образом нетрудно рассмотреть и некоторые другие системы, например, линию со стоячей волной параметра: $\rho = \rho_0 [1 + m \cos(Kx) \cos(\Omega t)]$. В последнем случае существуют две резонансные частоты $\omega_0 = (1/2)\Omega|1 \pm 1/an_0|$, вследствие чего резонансное нарастание обратной волны может происходить одновременно на обеих гармониках $|\omega_0 \pm \Omega|$, а в режиме самовозбуждения спектры прямой и обратной волны будут одинаковы.

Итак, при распространении волн в системах с переменными параметрами представляется возможным выделить два физически различных эффекта. Первый из них, который можно назвать нерезонансным (ибо периодичность изменения параметров здесь не принципиальна), связан с модуляцией сигнала по скорости (в длинной линии путем

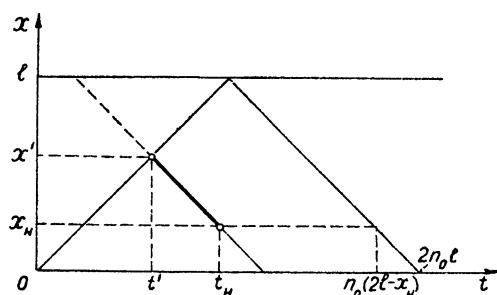


Рис. 3.

изменения величины $n = \sqrt{LC}$); этот эффект может стать существенным в „синхронном“ режиме, когда скорости распространения сигнала и волны параметра близки друг к другу. При этом, однако, в слабо диспергирующей системе происходит лишь преобразование формы и спектра сигнала, но невозможно усиление какой-либо монохроматической составляющей [1]. Второй же эффект, рассмотренный в настоящей работе и связанный с отражением волны, т. е. прежде всего с изменением „волнового сопротивления“ ρ , в противоположность первому носит резонансный характер и может оказаться существенным лишь в режимах, далеких от синхронного*. В последнем случае возможно усиление (и генерация) монохроматического сигнала и в системе, не обладающей дисперсией при фиксированных параметрах.

В заключение автор выражает благодарность В. А. Звереву за ценные замечания при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 672 (1960).
2. G. M. Roe, M. R. Boyd, Proc. IRE, 47, 1213 (1959).
3. R. Landauer, J. Appl. Phys., 31, 3 (1960).
4. С. И. Аверков, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 203 (1959).
5. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957, стр. 254.
6. Л. Бриллюэн, М. Пароди, Распространение волн в периодических структурах, ИЛ, М., 1959, § 48.
7. L. M. Manley, H. E. Rowe, Proc. IRE, 44, 904 (1956).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
15 декабря 1960 г.

ON RESONANCE REFLECTION OF WAVES IN A SYSTEM WITH PERIODICAL CHANGING PARAMETERS

N. S. Stepanov

By the successive approximation method proposed in [1] the reflected waves are found in a long line with parameters periodically changing according to the travelling wave law. It is shown that when the definite correlations are taking place between the frequencies and the propagation velocities of a parameter wave and a signal wave, the reflected waves are monotonously accumulated. This accumulation may lead to an amplification or even an autoexcitation of the oscillations.

** Речь идет здесь о системах с плавно изменяющимися параметрами. При наличии же резких границ или «точек заворота» лучей, естественно, возможно и нерезонансное (локальное) отражение.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЗАХВАТЫВАНИЕ ЧАСТОТЫ АВТОДИННОГО ГЕНЕРАТОРА В СПЕКТРОМЕТРЕ ЯДЕРНОГО МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА

Ю. Р. Долинин, Н. М. Померанцев

На основе автодинного генератора построен спектрометр, регистрирующий сигнал поглощения ядерного магнитного резонанса. Частота автодинного генератора параметрически захвачена внешним источником двойной частоты, модулирующим емкость контура генератора. Сопоставлены режимы звуковой модуляции магнитного поля и медленного прохождения в случае автодинного генератора. Обоснована возможность получения высокой чувствительности схемы к изменению затухания в контуре генератора в режиме медленного прохождения с параметрическим захватыванием частоты генератора.

1. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ СПЕКТРОМЕТРА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ЗАПИСИ СПЕКТРА

Чувствительность спектрометра ядерного магнитного резонанса является одним из показателей, определяющих его возможности. Настоящая работа была выполнена с целью выяснения возможностей повышения чувствительности автодинного спектрометра. Внимание при этом уделялось не снижению собственных шумов схемы, как обычно, а получению параметров, обеспечивающих максимальную чувствительность к изменению затухания в катушке контура автодинного генератора.

Авторы отказались от применения обычного метода, при котором наряду с медленным прохождением используется звуковая модуляция магнитного поля, по следующим соображениям. Из сопоставления решений для случая звуковой модуляции магнитного поля и стационарного случая, сделанного в [1], следует, что амплитуда первой гармоники сигнала только при оптимальных условиях превышает амплитуду сигнала в стационарном случае на 16,4%. При медленном прохождении (без звуковой модуляции) регистрируется непосредственно сигнал поглощения, а не его производная. Если последний имеет лоренцовую форму [2], то можно показать, что выражение для его спектральной плотности имеет вид:

$$S(\Omega) = \frac{\chi H_0 H_1}{2dH_0/dt} \exp\left(\frac{\Omega}{T_2 \gamma dH_0/dt}\right), \quad (1)$$

где χ —ядерная магнитная восприимчивость, H_0 —напряженность постоянного магнитного поля, H_1 —амплитуда радиочастотного магнитного поля, dH_0/dt —скорость изменения магнитного поля (скорость „прохождения“), Ω —наблюдаемая компонента спектра, T_2 —поперечное время релаксации, γ —гиromагнитное отношение исследуемых ядер.

Из (1) видно, что при достаточно медленном прохождении спектр сигнала сосредоточивается в области нулевых частот спектра огибающей колебаний автодинного генератора.

Рассматривая теперь характер искажений сигнала в автодинном генераторе при быстром прохождении [3], замечаем, что его высоко-

частотные компоненты ослабляются при уменьшении амплитуды генерации. Это свидетельствует о том, что полоса пропускания автодинного генератора в этом режиме сильно уменьшается (уменьшение амплитуды генерации необходимо для предотвращения насыщения, наступающего при $\gamma^2 H_1^2 T_1 T_2 = 1$ [4], а также, как показано ниже, для повышения чувствительности к изменению затухания).

При звуковой модуляции магнитного поля ближайшие боковые компоненты спектра сигнала отстоят по оси частот от генерируемой частоты на величину частоты модуляции. При работе с малой амплитудой генерации, т. е. с малой полосой пропускания, боковые компоненты будут ослаблены. Сигнал же медленного прохождения при этих условиях не ослабляется, так как его спектр не выходит за пределы полосы пропускания.

2. ПОВЫШЕНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СПЕКТРОМЕТРА

Можно показать, что при уменьшении амплитуды генерации чувствительность автодинной схемы к изменению затухания возрастает.

Уравнение автогенератора, работающего в мягком режиме, имеет вид [5]:

$$\frac{d^2 u_g}{dt^2} - \left(\omega_0^2 M S_0 - \frac{\omega_0^2 M S_0}{u_s^2} u_g^2 - 2\alpha \right) \frac{du_g}{dt} + \omega_0^2 u_g = 0,$$

где u_g — амплитуда колебательного напряжения на управляющей сетке, u_s — средняя крутизна при достижении максимальной амплитуды в системе, ω_0 — частота генерации, α — коэффициент затухания контура.

При уменьшении u_g происходит „линеаризация системы“ за счет быстрого уменьшения нелинейного члена. Так как работа происходит вблизи порога исчезновения генерации ($\omega_0^2 M S_0 \approx 2\alpha$, $\omega_0^2 M S_0 > 2\alpha$), то усиливается зависимость от α коэффициента, стоящего при du_g/dt и характеризующего баланс энергии в системе, что и означает возрастание чувствительности.

Малый уровень генерации в описываемой ниже схеме достигается соответствующим выбором параметров и поддерживается автоматически. Дальнейшее увеличение чувствительности достигается применением параметрического захватывания частоты автодинного генератора.

Если модулировать емкость контура генератора частотой $2\omega_0$, то уже при незначительных коэффициентах модуляции наблюдается явление захватывания частоты генерации. Генератор в некоторой полосе работает как точный делитель частоты в 2 раза. При параметрической подкачке такого рода затухание контура уменьшается на величину $\omega_0 \Delta C / 4C_{cp}$ [6]. Возросшую амплитуду генерации возвращают к прежнему уровню уменьшением S_0 , чем и достигается дальнейшее уменьшение нелинейного члена, т. е. дальнейшая линеаризация и дальнейшее повышение чувствительности системы к изменению затухания α . Работа при этом, естественно, происходит принципиально ниже порога возникновения самостоятельной параметрической генерации.

3. ПРИНЦИПИАЛЬНАЯ СХЕМА

Радиочастотная часть спектрометра состоит из элементов, изображенных на рис. 1.

Датчик частоты $2\omega_0$ представляет собой кварцевый генератор на 7 $мгц$, третья гармоника которого, смешиваясь с частотой дополнительного генератора 800 $кгц$, дает нужную частоту 21,8 $мгц$, которая выделяется настроенным контуром. Частота 21,8 $мгц$ подается на вход

катодного повторителя, собранного на лампе L_1 (см. рис. 2). Нагрузкой последнего является контур на 21,8 мгц, связанный с контуром автодинного генератора (10,9 мгц) через емкость запертого диода D2—E*. Напряжение частоты 21,8 мгц модулирует напряжение запирания диода и, тем самым, его емкость, которая подключена параллельно емкости контура, настроенного на 10,9 мгц (контур на 21,8 мгц не представляет для частоты 10,9 мгц заметного сопротивления). Так осуществляется параметрическое захватывание частоты генератора.

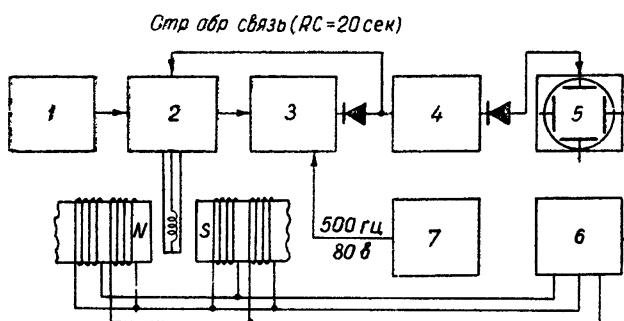


Рис. 1. Блок-схема спектрометра:

1—датчик частоты $2\omega_0$ для параметрического захватывания частоты автодина; 2—автодинный генератор; 3—усилитель высокой частоты; 4—усилитель низкой частоты; 5—осциллограф для регистрации спектров и развертки поля; 6—катодный повторитель с дифференциальным выходом для питания катушек развертки поля; 7—звуковой генератор, дающий напряжение для работы электронного прерывателя

Высокочастотное напряжение, снятое с катода генераторной лампы, усиливается двухкаскадным усилителем на лампах L_3 и L_4 . Анодное и экранированное напряжение лампы L_4 модулируются звуковой частотой. Это делается с целью „переложить“ модуляцию, производимую сигналом поглощения, с частоты 10,9 мгц на звуковую частоту. Работает этот каскад аналогично прерывателю, с той разницей, что „прерывание“ ведется по синусоидальному закону и по высокой частоте (а не по постоянному току).

С выхода детектора через интегрирующую цепочку с постоянной времени $R_c = 20$ сек снимается напряжение отрицательной обратной связи для стабилизации среднего уровня генерации. Напряжение звуковой частоты усиливается двухкаскадным усилителем на лампах L_6 и L_7 . Переходные цепочки в этом усилителе сильно ослабляют частоты ниже 200 гц, что позволяет питать накал всей схемы переменным током. Наводка 50 гц практически отсутствует. Катодные сопротивления в усилителе низкой частоты не щунтированы емкостями, что увеличивает внутреннее сопротивление ламп, приводя к ослаблению усиления на высших звуковых частотах. Последняя мера улучшает отношение сигнал/шум при наблюдении сигнала быстрого прохождения, применяемого для грубой настройки схемы. (Для этого прекращается подача звукового напряжения на лампу L_4 и вводится звуковая модуляция магнитного поля. Сигнал снимается с анода лампы L_6 .) Сигнал ядерного резонансного поглощения вызывает лишь незначительное уменьшение уровня несущей. Чтобы зафиксировать это уменьшение после усилителя низкой частоты применены каскады удвоения частоты ($1/2 L_7$) и ограничения по минимуму с последующим усилением (L_8). Опти-

* Заметим, что 10,9 мгц — частота резонанса протонов в поле используемого постоянного магнита.

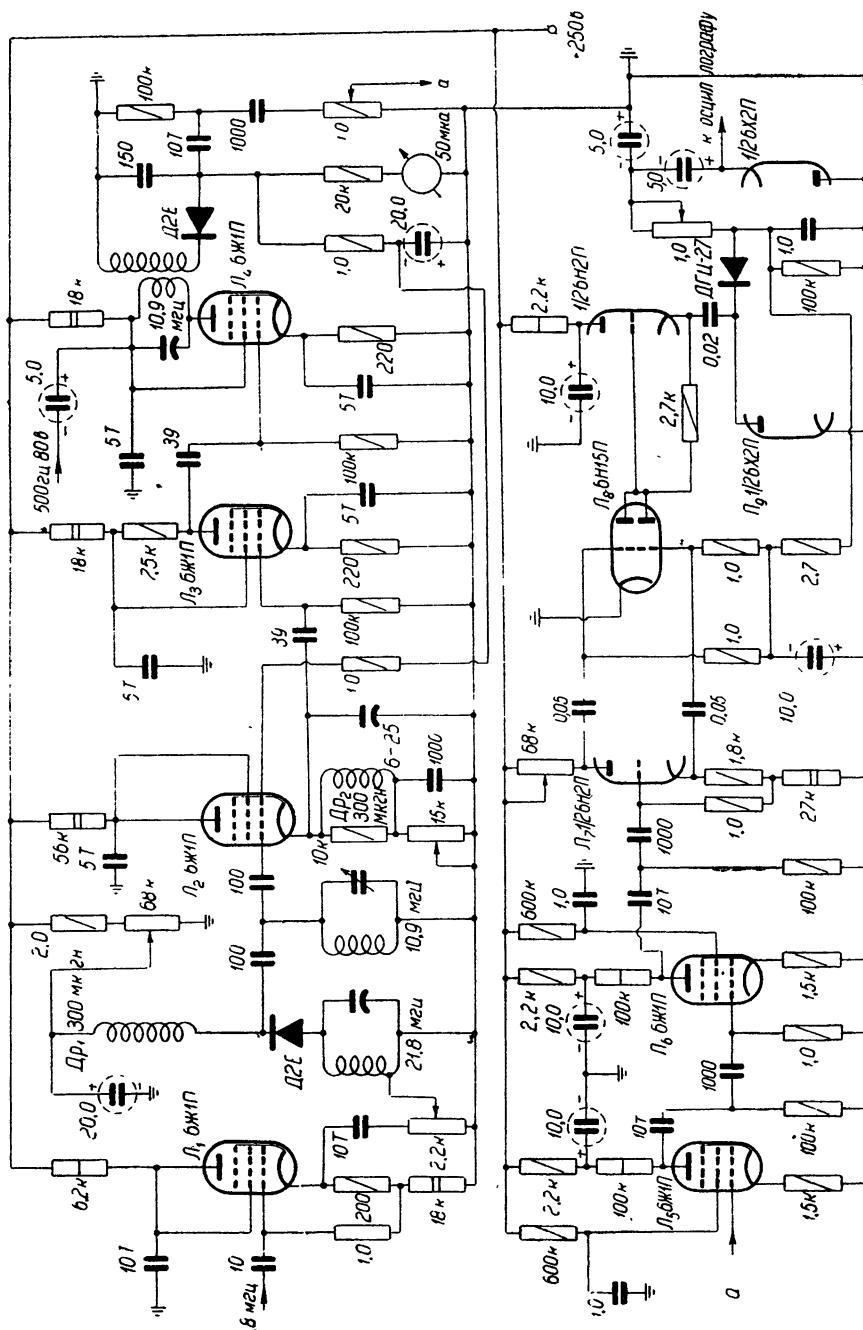


Рис. 2. Принципиальная схема радиочастотной части спектрометра.

мальный потенциал ограничения устанавливается автоматически с постоянной времени $R_c = 27$ сек.

Во время прохождения импульса через L_8 запирается правая половина лампы 6Н2П, служащая анодной нагрузкой L_8 по постоянному току. При этом переходный конденсатор 0,02 мкф частично разряжается через L_8 и ДГЦ-27, заряжая накопительный конденсатор 1 мкф. В паузах между импульсами заряд переходного конденсатора быстро восстанавливается через открывающуюся левую половину 6Х2П и правую половину 6Н2П. Интегрирующая цепочка $R=1$ мгом и $C=5$ мкф служит для ограничения полосы пропускания со стороны высоких частот. Конденсатор 5 мкф, соединенный с катодом правой половины 6Х2П, служит для отделения постоянной составляющей напряжения. Во время прохождения через линию ядерного резонансного поглощения отрицательное напряжение на конденсаторе интегрирующей цепочки понижается, вызывая запирание правой половины 6Х2П и, тем самым, увеличение постоянной времени выходной цепи. Поэтому для регистрации сигнала нужно устройство, имеющее высокоомный вход. Действие обеих интегрирующих цепочек автоматической регулировки уровня приводит к подавлению компонент спектра огибающей автодина в интервале частот ниже 0,05 гц. Постоянная составляющая спектра восстанавливается на выходе.

Опробование описанной схемы показало, что на основе автодинного генератора может быть построен спектрометр, обладающий вы-

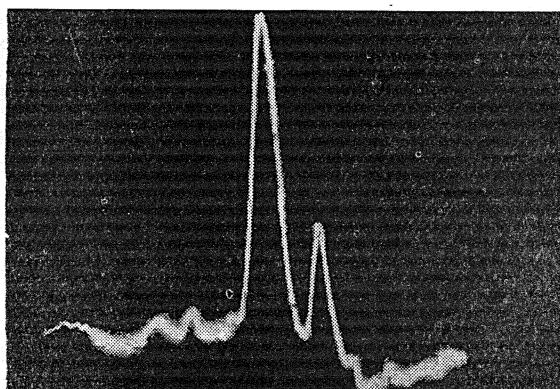


Рис. 3. Спектр толуола.

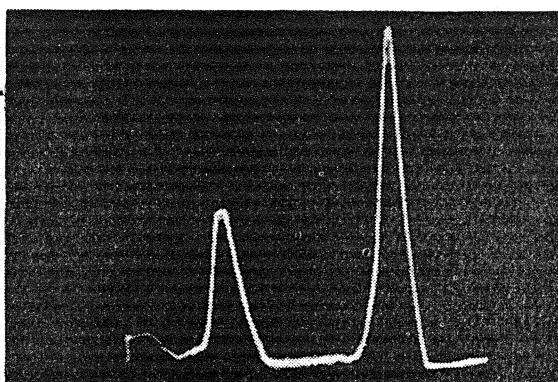


Рис. 4. Спектр уксусной кислоты.

сокой чувствительностью. При сравнительно малой напряженности магнитного поля $H_0=2600$ эрстед (интенсивность сигнала пропорциональна $H_0^{7/4}$) [7] схема без применения вращения образца позволяет, например, регистрировать сигнал от образца толуола объемом 4 мм^3 (рис. 3). На рис. 4 представлен спектр уксусной кислоты от образца объемом 60 мм^3 .

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Primas, Helv. Phys. Acta, **31**, 17 (1958).
2. F. Bloch, Phys. Rev., **70**, 460 (1946).
3. Н. М. Померанцев, Изв. АН СССР, сер. физ., **20**, 1238 (1956).
4. Э. Эндрю, Ядерный магнитный резонанс, ИЛ, М., 1957.
5. В. И. Калинин и Г. М. Герштейн, Введение в радиофизику, ГИТЛ, М., 1957, стр. 372.
6. Л. И. Мандельштам, Лекции по колебаниям, Изд. АН СССР, М., 1955.
7. R. Evans, J. Sci. Instr., **37**, 353 (1960).

Научно-исследовательский физико-химический институт
им. Л. Я. Карпова

Поступила в редакцию
27 февраля 1961 г.

PARAMETRIC LOCKING OF AUTODYNE GENERATOR FREQUENCY IN NUCLEAR MAGNETIC RESONANCE SPECTROMETER

Yu. R. Dolinin, N. M. Pomerantsev

On the basis of an autodyne generator, a spectrometer was built registering the signal of absorption of nuclear magnetic resonance. The autodyne generator frequency is parametrically locked by the external source of double frequency modulating the generator circuit capacitance. The regimes are compared of the magnetic field sound modulation and the slow passage in the case of the autodyne generator. The possibility is substantiated of achieving a high sensitivity of the network towards a change of attenuation in the generator circuit in the regime of slow passage with parametric locking of the generator frequency.

О СПЕКТРЕ МАЛЫХ ФЛЮКТУАЦИЙ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ АВТОГЕНЕРАТОРА ОБЩЕГО ТИПА

Л. И. Гудзенко

Получена спектральная интенсивность флюктуаций сигнала автономного генератора несинусоидальных колебаний в пренебрежении малыми отклонениями по нормали от предельного цикла. Показано, что спектр состоит из уширенных линий дискретного спектра, соответствующего отсутствию флюктуаций. Контуры всех линий одинаковы; для полуширины k -ой линии выведена формула $\Delta\omega_{0.5}^{(k)}=Dk^2$, полученная ранее лишь для некоторых частных случаев. Проведенное рассмотрение становится незаконным, если какой-либо параметр близок к бифуркационному значению; оно непригодно также для описания флюктуаций в релаксационных генераторах.

Уравнение автономного генератора общего типа с $N/2$ степенями свободы можно представить в виде:

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + \lambda F(x, t), \quad (1)$$

где

$x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $X = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$, $F = \{F_1, F_2, \dots, F_N\}$, λ — малый параметр, $F(x, t)$ — поле векторной стационарной случайной функции времени t , имеющей флюктуационный характер: $\langle F(x, t) \rangle = 0$. При $\lambda = 0$ уравнение (1) описывает динамическую систему генератора. Будем считать, что эта система обладает единственным устойчивым предельным циклом

$$x = \chi(t), \quad \chi(t + T) = \chi(t) \quad (2)$$

с периодом автоколебаний T , равным 2π . Тогда

$$\chi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi^{(k)} \exp [ik(t + \gamma)], \quad \chi^{(k)} = \{\chi_1^{(k)}, \chi_2^{(k)}, \dots, \chi_N^{(k)}\}. \quad (2a)$$

Установившимся колебаниям возмущенной системы (1) соответствует движение статистического ансамбля изображающих точек вблизи цикла (2). Действие ортогональной к циклу составляющей возмущающей силы λF_n (рис. 1) приводит, прежде всего, к статистическим изменениям формы сигнала. Дисперсия $\{\lambda^2 p_n^2(t)\}$ этих изменений *, а также регулярная поправка $\lambda^2 \Delta(t)$, характеризующая отклонение среднестатистической траектории системы (1) от кривой (2), являются малыми величинами, пропорциональными интенсивности ортогональной составляющей флюктуационной силы $\lambda^2 \langle F_n^2 \rangle$. При достаточно малых значениях последней случайные изменения формы сигнала можно в первом приближении не учитывать.

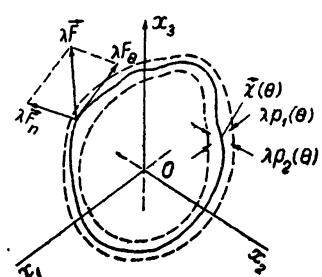


Рис. 1.

* Корреляционные функции флюктуационных уходов $\lambda p(t)$ по нормали от цикла для автономного генератора с одной степенью свободы вычислены в заметке [1].

Действия тангенциальной составляющей λF_0 флюктуационной силы, а также (при неизохронности динамической системы) и ее ортогональной составляющей λF_n приводят, кроме того, к статистическому размытию фазы колебаний $\gamma(t) = \lambda\sigma(t) + \gamma$. Дисперсия набега фазы автономных колебаний неограниченно растет со временем. Интересуясь колебаниями генератора (1) на сколь угодно больших интервалах времени и пренебрегая малыми изменениями формы сигнала, нельзя не учитывать размытия фазы. В этом приближении сигнал генератора имеет вид:

$$x(t) = \chi [t + \lambda\sigma(t) + \gamma]$$

или (с учетом (2а))

$$x(t) = \sum_k \chi^{(k)} \exp[ik[t + \lambda\sigma(t) + \gamma]]. \quad (3)$$

Для набега фазы колебаний $\lambda\sigma(t)$ в соответствии с [1] можно написать:

$$d\sigma/dt = F_\sigma(t), \quad F_\sigma(t) = F_0(t) + (\theta n),$$

где $(\theta n) = \sum_{m=1}^{N-1} n_m \theta^{(m)}$, причем векторы $\{\lambda n_1, \lambda n_2, \dots, \lambda n_{N-1}\}$ и $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(N-1)}\}$ характеризуют соответственно малые отклонения изображающей точки x по нормали от кривой (2) и неизохронность динамической системы по отношению к этим отклонениям. Вследствие неограниченного роста дисперсии фазы случайный процесс (3) с ростом t становится стационарным; в силу эргодичности последнего среднее статистическое равно среднему по времени:

$$\langle x(t) \rangle = \widetilde{x(t)} = \chi^{(0)}.$$

Отсюда следует, что флюктуационная составляющая сигнала

$$\delta x = \{\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_N\}, \quad \delta x_m = x_m - \langle x_m \rangle$$

есть

$$\delta x(t) = \sum_{k \neq 0} \chi^{(k)} \exp[ik[t + \lambda\sigma(t) + \gamma]]. \quad (3)$$

Вычислим корреляционную матрицу сигнала. Взаимная корреляционная функция r -ой и s -ой составляющих вектора

$$b_{r,s}(t, \tau) = \langle \delta x_r(t + \tau) \delta x_s(t) \rangle, \quad (4)$$

согласно (3а), равна

$$b_{r,s}(t, \tau) = \sum_{k, m \neq 0} \chi_r^{(k)} \chi_s^{(m)*} \exp[i(k - m)t + im\tau] \phi_{k,m}^{(t, \tau)}(\lambda) \Phi_{k,m}, \quad (5)$$

где

$$\phi_{k,m}^{(t, \tau)}(\lambda) = \langle \exp[i\lambda[k\sigma(t) - m\sigma(t + \tau)]] \rangle \quad (6)$$

— характеристическая функция случайного процесса, $\alpha_{k,m}(t, \tau) = k\sigma(t) - m\sigma(t + \tau)$, $\Phi_{k,m} = \langle \exp[i(k - m)\gamma] \rangle$ (γ — начальная фаза). С ростом t распределение флюктуационного набега фазы колебаний $\lambda\sigma(t)$ приближается к нормальному. Дисперсия этого распределения растет вместе с t , асимптотически следуя диффузионному закону:

$$\langle \sigma^2(t) \rangle \approx S + 2D_0 t. \quad (7)$$

Поскольку случайная величина $\alpha_{k,m}(t, \tau)$, будучи линейной функцией

набегов фазы, тоже распределена при достаточно больших t по нормальному закону, для характеристической функции $\varphi_{k,m}^{(t,\tau)}(\lambda)$ можно написать:

$$\varphi_{k,m}^{(t,\tau)}(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2} \left\langle \left[\alpha_{k,m}(t, \tau) \right]^2 \right\rangle \right\}. \quad (6a)$$

Для анализа спектра установившихся колебаний необходимо выяснить асимптотическое поведение дисперсий

$$\langle [\alpha_{k,m}(t, \tau)]^2 \rangle = m^2 \langle [\sigma(t + \tau)]^2 \rangle - 2km \langle \sigma(t + \tau) \sigma(t) \rangle + k^2 \langle [\sigma(t)]^2 \rangle$$

при больших t . Представив корреляционную функцию набега фазы в виде:

$$\langle \sigma(t + \tau) \sigma(t) \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [\sigma(t + \tau)]^2 \rangle + \langle [\sigma(t)]^2 \rangle - S_1(t, \tau) \},$$

где

$$S_1(t, \tau) = \langle [\sigma(t + \tau) - \sigma(t)]^2 \rangle$$

— дисперсия набега фазы за промежуток времени от t до $t + \tau$, и используя формулу (7), получим:

$$\langle [\alpha_{k,m}(t, \tau)]^2 \rangle = (k - m)^2 (S + 2D_\sigma t) + 2m(k - m)D_\sigma \tau + kmS_1(t, \tau). \quad (7a)$$

В силу стационарности флюктуаций дисперсия $S_1(t, \tau)$ с ростом t перестает зависеть от времени и становится равной

$$S_1(t, \tau) = \langle \left[\int_t^{t+\tau} F_\sigma(\xi) d\xi \right]^2 \rangle \simeq \Gamma(\tau). \quad (7b)$$

Подставляя это выражение в (7a), найдем, что все дисперсии $\langle [\alpha_{k,m}(t, \tau)]^2 \rangle$ при $k \neq m$ неограниченно растут с t . Отсюда на основании (6a) заключаем, что с ростом t исчезают все функции $\varphi_{k,m}^{(t,\tau)}(\lambda)$ с неодинаковыми нижними индексами. Дисперсии же $\langle [\alpha_{k,k}(t, \tau)]^2 \rangle$ при достаточно больших t перестают зависеть от времени и становятся равными

$$\langle [\alpha_{k,k}(t, \tau)]^2 \rangle \simeq k^2 \Gamma(\tau).$$

Для соответствующих характеристических функций имеем тогда

$$\varphi_{k,k}^{(t,\tau)}(\lambda) \simeq \exp \left[-\frac{k^2 \lambda^2}{2} \Gamma(\tau) \right].$$

Подстановка этих формул в (5) дает для элементов корреляционной матрицы сигнала $x(t)$ выражение

$$b_{r,s}(t, \tau) \simeq \sum_{k \neq 0} \chi_r^{(k)} \chi_s^{(k)*} \exp \left[ik\tau - \frac{k^2 \lambda^2}{2} \Gamma(\tau) \right] = b_{r,s}(\tau).$$

Перейдем к вычислению матрицы спектральной интенсивности установившихся малых флюктуаций сигнала автономного генератора. Элементы этой матрицы, определяемые формулами

$$g_{r,s}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b_{r,s}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau,$$

можно переписать в виде:

$$g_{r,s}(\omega) = \sum_{k \neq 0} g_{r,s}^{(k)}(\omega), \quad (8)$$

где

$$g_{r,s}(\omega) = \chi_r^{(k)} \chi_s^{(k)} \beta_{k\lambda}(\omega - k), \quad (8a)$$

$$\beta_q(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-i\xi\tau - \frac{q^2}{2} \Gamma(\tau) \right] d\tau, \quad q = k\lambda.$$

Функция $\beta_q(\xi)$ определяет форму спектральных линий сигнала генератора. Она обладает тем свойством, что ее интеграл по всем ξ не зависит от q и равен 1. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_q(\xi) d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{q^2}{2} \Gamma(\tau) \right] d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi\tau) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{q^2}{2} \Gamma(\tau) \right] \delta(\tau) d\tau = \exp \left[-\frac{q^2}{2} \Gamma(0) \right] = 1, \end{aligned}$$

поскольку, в силу (7б), $\Gamma(0) = 0$. Из формулы (7б) видно, что $\Gamma(\tau)$ — четная функция, монотонно возрастающая с $|\tau|$. Отсюда следует, что $\beta_q(\xi)$ обладает при $\xi = 0$ единственным максимумом, равным

$$\beta_q(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{q^2}{2} \Gamma(\tau) \right] d\tau.$$

Так как дисперсия набега фазы асимптотически следует диффузионному закону,

$$\Gamma(\tau) \approx S + 2D_\sigma |\tau|, \quad |\tau| \gg \tau_0.$$

При достаточной малости $q^2 = k^2 \lambda^2$ можно считать выполненными соотношения

$$k^2 \lambda^2 S \ll 1, \quad k^2 \lambda^2 D_\sigma \tau_0 \ll 1$$

и положить в (8а) $\Gamma(\tau) \approx 2D_\sigma |\tau|$. Тогда, очевидно,

$$\beta_q(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\xi\tau) \exp(-q^2 D_\sigma \tau) d\tau = \frac{q^2 D_\sigma}{\pi (\xi^2 + q^4 D_\sigma^2)}; \quad (9)$$

$$\beta_q(0) = \frac{1}{\pi q^2 D_\sigma}. \quad (9a)$$

Таким образом, спектральная интенсивность установившегося сигнала автогенератора имеет в случае малых флюктуаций очень простую структуру. Спектральная интенсивность существенно отлична от нуля лишь на узких интервалах около частот $\omega = k$ ($k \neq 0$), т. е. автономный генератор имеет „линейчатый“ спектр. Спектральные линии получаются уширением (без изменения интегральной интенсивности) δ -линий дискретного спектра периодических колебаний (2) динамической системы. Контуры спектральных линий сигнала определяются функциями $\beta_q(\xi)/\beta_q(0)$. Из выражений

$$\frac{\beta_q(\xi)}{\beta_q(0)} = \frac{1}{1 + (\xi/q^2 D_\sigma)^2}, \quad q = k\lambda \quad (96)$$

видно, что эти функции зависят только от отношения ξ/D_k , где ξ — частотная расстройка относительно максимума линии, $D_k = k^2 \lambda^2 D_\sigma$ — коэффициент диффузии фазы k -ой гармоники сигнала, $\lambda^2 D_\sigma$ — коэффициент диффузии случайного набега фазы автоколебаний $\gamma(t) = \lambda \sigma(t)$. Согласно формулам (8) и (9а), максимум k -ой линии спектральной интенсивности $g_{r,r}^{(k)}(\omega)$ приходится на частоту $\omega = k$ соответствующей δ -линии дискретного спектра установившихся колебаний динамической системы и равен

$$g_{r,r}^{(k)}(k) = \frac{|\chi_r^{(k)}|^2}{\pi k^2 \lambda^2 D_\sigma} = \frac{|\chi_r^{(k)}|^2}{\pi D_k}.$$

Для полуширины этой линии $\Delta\omega_{0,5}^{(k)}$, определяемой условием

$$g_{r,r}^{(k)}(k \pm \Delta\omega_{0,5}^{(k)}) = \frac{1}{2} g_{r,r}^{(k)}(k),$$

в соответствии с формулой (9б) имеем:

$$\Delta\omega_{0,5}^{(k)} = D_k.$$

Аналогичные результаты были получены в работах [2–4], посвященных анализу флюктуаций в двух типах автономного генератора несинусоидальных колебаний. Хургиным [2,3] была вычислена спектральная интенсивность сигнала импульсного автогенератора. При этом предполагалось, что свойства флюктуирующего сигнала заданы усредненными параметрами, определяющими форму и ширину импульса (а также период следования), и статистическими характеристиками, описывающими флюктуации этих параметров. Рытовым [4] рассмотрены флюктуации колебаний автономного генератора с кусочно-линейными характеристиками. В отличие от работ [2,3] в [4] исследована связь спектральной интенсивности флюктуаций со свойствами генератора. Проведенное нами рассмотрение, не будучи связано с конкретной моделью автономного генератора, доказывает, что ряд простых свойств спектра, найденных в работах [2–4], имеет общий характер. Необходимо, однако, выяснить, в каком случае флюктуации сигнала $x(t)$ автогенератора уже нельзя считать малыми и, в частности, когда следует учитывать влияние на форму фазовых траекторий отклонений по нормали от кривой (2).

В случае установившихся флюктуаций уходы по нормали от предельного цикла описываются векторной периодически нестационарной случайной функцией тангенциальной координаты изображающей точки. В соответствии с работой [1] следует считать, что $\theta = t + \gamma(t)$. Вместо фиксированных векторов $\chi^{(k)}$, являющихся коэффициентами Фурье периодических колебаний (2) динамической системы, введем периодически нестационарные векторные случайные процессы $\chi^{(k)}(\theta)$, характеризующие отклонение точки x под действием ортогональной составляющей λF_n возмущающей силы. Тогда сигнал автономного генератора запишется в виде:

$$x(t) = \sum_k \chi^{(k)}[t + \gamma(t)] \exp\{ik[t + \gamma(t)]\}.$$

Вычислив спектральную интенсивность этого более сложного случайного

процесса, мы учтем тем самым влияние малых случайных изменений формы сигнала.

Подобное рассмотрение, однако, не всегда допустимо. Оно обосновано лишь в таких статистических задачах, когда пренебрежимо мала вероятность флюктуационного перехода системы в новое качественное состояние. Последнее условие не выполнено, если какой-нибудь параметр генератора достаточно близок к своему бифуркационному значению. Поясним это на примере автономного генератора с одной степенью свободы, динамическая система которого имеет пять предельных траекторий: два устойчивых цикла ((1) и (2) на рис. 2) и три неустойчивых точки покоя (O_1 , O_2 и O_3 на этом же рисунке).

Пусть α — параметр динамической системы, при изменении которого от $-\infty$ до 0 циклы (1) и (2) неограниченно сближаются; при $\alpha > 0$ динамическая система имеет единственный устойчивый предельный цикл (рис. 3), которому соответствует сигнал в виде последовательности чередующихся разнополярных импульсов.

При значении $\alpha = 0$ у динамической системы нет периодических колебаний, так как циклы переходят в сепаратрисы седла O . Значение

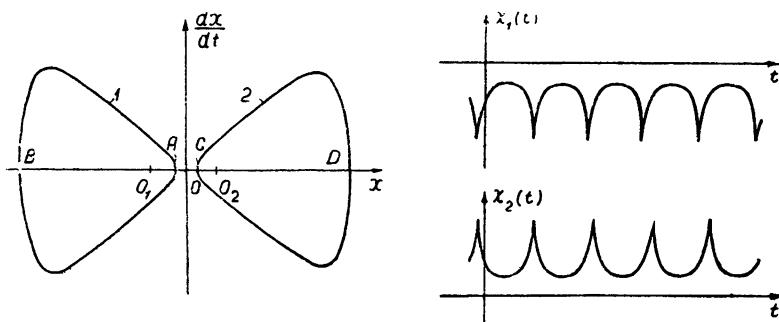


Рис. 2.

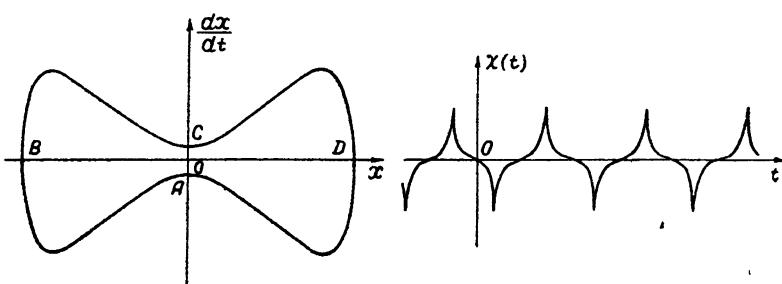


Рис. 3.

$\alpha = 0$ является бифуркационным. При $\alpha \rightarrow 0$ часть цикла, удаленная от начала координат, почти не изменяется, так что длительность и форма генерируемых импульсов остаются без изменения; в то же время участки цикла A и C все более приближаются к точке покоя O , что приводит к увеличению периода повторения импульсов и к росту скважности. С приближением α к нулю со стороны отрицательных значений участки A и C циклов (1) и (2) приближаются к точке покоя O . При этом движение изображающей точки системы на каждом из участков A и C замедляется, эти участки сближаются, и возрастает вероятность смены состояния генератора путем перескока изображающей точки с цикла (1) на цикл (2) или обратно под действием ортогональной составляющей флюктуационной силы ($F_n = \lambda F_x$). Частота

таких перескоков оценивается вероятностью $p(\alpha, \lambda F_x)$ первого перехода изображающей точки с участка A в область $x \geq 0$ за время, соответствующее динамическому движению вдоль участка A предельного цикла.

При достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значениях α , когда $p(\alpha, \lambda F_x) \ll 1$, сигнал генератора состоит из длинных последовательностей однополярных импульсов, причем переходы от одной полярности к другой соответствуют перескокам изображающей точки между циклами. Аналогичным образом при $\alpha > 0$ действие y -составляющей флюктуационной силы (здесь $\lambda F_y = \lambda F_x$) приводит к случайным перескокам изображающей точки непосредственно между участками A и C предельного цикла, минуя участок B или D . Частота таких перескоков оценивается вероятностью $p(\alpha, \lambda F_y)$ первого перехода с участка A в область $y \leq 0$. Сигнал генератора при $\alpha > 0$ отличается от сигнала динамической системы наличием „срывов“ импульса, когда в последовательности импульсов чередующейся полярности не происходит смены полярности; такие „срывы“ соответствуют непосредственным перескокам от A к C или обратно.

Вероятности $p(\alpha > 0, \lambda F_y)$ и $p(\alpha < 0, \lambda F_x)$ с неограниченным уменьшением $|\alpha|$ стремятся к единице, сигнал генератора перестает зависеть от знака α , т. е. полярность следующего импульса не зависит от полярности предыдущего. Вблизи $\alpha = 0$ действие тангенциальной составляющей флюктуационной силы (λF_y при $\alpha < 0$ и λF_x при $\alpha > 0$) приводит к значительной дисперсии периода повторения импульсов и к существенному уменьшению средней скважности*. Наличие флюктуационного возмущения приводит, таким образом, к нечувствительности генератора по отношению к малым изменениям параметра вблизи его бифуркационного значения. Вместо бифуркационного значения появляется бифуркационный интервал, длина которого определяется интенсивностью флюктуационного возмущения динамической системы**.

Из сказанного вытекает, что флюктуационное воздействие на динамическую систему, один из параметров которой близок к бифуркационному значению, нельзя описать методом малых возмущений, поскольку при этом флюктуации ведут к сменам состояния генератора. Такой результат воздействия флюктуационной силы связан здесь с негрубостью динамической системы.

Рассмотрим теперь характер флюктуационного воздействия на колебания релаксационного генератора, у которого вблизи участков скачка имеет место не только слабая устойчивость динамической системы, но и резкий рост интенсивности флюктуационной силы. Для этого мы кратко обсудим простейшую модель релаксационного генератора с одной степенью свободы, сигнал которого представляет собою симметричные пилообразные колебания (рис. 4). Предельный цикл на фазовой плоскости $(x, dx/dt)$ такого генератора состоит из четырех отрезков прямых; по двум из них (A_1, B_1 и A_2, B_2), параллельным оси x , изображающая точка движется с постоянной скоростью y_0 , через два других ($B_1 A_2$ и $B_2 A_1$), параллельные оси x , точка перемещается скачком. Участки скачка соответствуют мгновенному изменению производной $d\chi/dt$ установившегося сигнала. Пунктирная ломаная делит фазовую плоскость на области притяжения полупрямых $y = \pm y_0$.

* Напомним, что значению $\alpha = 0$ соответствует в динамической системе бесконечная скважность.

** Флюктуации томсоновского генератора вблизи бифуркационных значений изкремента рассматривались в работах [5–7].

Колебания релаксационной динамической системы с одной степенью свободы удовлетворяют, как известно, дифференциальному уравнению второго порядка с малым параметром μ при старшей производной; вводя флюктуационное возмущение в виде векторного стационарного процесса $\{\lambda F_x(t), \lambda F_y(t)\}$, напишем уравнения генератора в виде

$$\frac{dx}{dt} = y + \lambda F_x(t), \quad \mu \frac{dy}{dt} = f(x, y) + \lambda F_y(t).$$

Анализ схемы релаксационного генератора на неоновой лампе показывает, что интенсивности $\lambda^2 \langle F_x^2 \rangle$ и $\lambda^2 \langle F_y^2 \rangle$ имеют одинаковый порядок малости, а динамическая характеристика генератора в рамках рассматриваемой здесь модели определяется формулой:

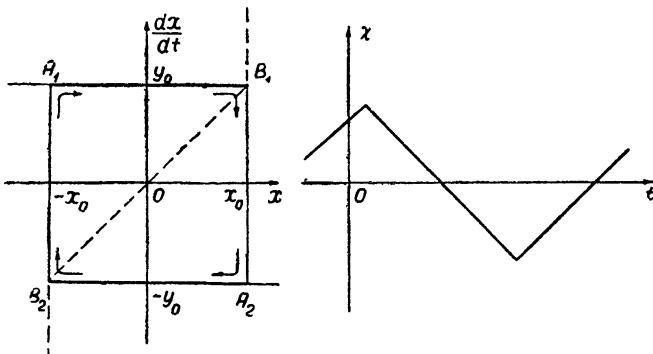


Рис. 4.

$$f(x, y) = \begin{cases} a(y_0 - y), & y > \frac{y_0}{x_0} x \\ -b(y_0 + y), & y < \frac{y_0}{x_0} x \end{cases} \quad (a, b > 0).$$

Приводя уравнения генератора к каноническому виду:

$$\frac{dx}{dt} = y + \lambda F_x(t), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\mu} f(x, y) + \frac{\lambda}{\mu} F_y(t),$$

получим:

$$F_x = F_0, \quad \frac{1}{\mu} F_y = F_n.$$

В силу изохронности этой динамической системы малые флюктуации (в первом приближении относительно μ) не приводят здесь к набегу фазы колебаний. Учет возможности преждевременных перескоков изображающей точки через границу B_1B_2 областей притяжения (под действием ортогональной составляющей $\lambda F_n = \frac{\lambda}{\mu} F_y$ флюктуационной силы) показывает, что при достаточно малых значениях μ такие перескоки вносят основной вклад в дисперсию случайного набега фазы, а также приводят к уменьшению периода по сравнению с периодом динамических колебаний (2).

Из сказанного следует, что метод малых флюктуаций не применим не только при анализе флюктуаций генератора, один из параметров которого близок к бифуркационному значению, но и при рассмотрении

флюктуаций релаксационного генератора. Флюктуации приводят к случайным срывам импульса или отдельных его частей. Поэтому при исследовании флюктуаций сигнала импульсного автогенератора представляют особый интерес значения вероятностей „срыва“ тех или иных частей сигнала при различных режимах работы генератора.

Автор глубоко благодарен С. М. Рытову за обсуждение работы и существенные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Гудзенко, ДАН СССР, **125**, 62 (1959).
2. Я. И. Хургин, Радиотехника и электроника, **2**, 515 (1957).
3. Я. И. Хургин, Научн. докл. высш. школы—Радиотехника и электроника, **1**, 96 (1958).
4. С. М. Рытов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 50 (1959).
5. Л. И. Гудзенко, Радиотехника и электроника, **4**, 97 (1959).
6. Кюо Ju Sung, Beiling daxue xuebau, Ziran kexue, Acta scient. natur. Univ. pekinensis, **4**, 287 (1958).
7. Р. Л. Стратонович, П. С. Ланда, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 37 (1959).

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию
6 января 1961 г.

ON THE SPECTRUM OF SMALL FLUCTUATIONS OF STEADY-STATE OSCILLATIONS OF AN AUTOGENERATOR OF THE GENERAL TYPE

L. I. Goudzenko

The spectral intensity was obtained of the signal fluctuations of an autonomous generator of nonsinusoidal oscillations, neglecting small fluctuations along the normal from the limiting cycle. It is shown that the spectrum consists of widened lines of that discrete spectrum which corresponds to the absence of fluctuations. The forms of all the lines are similar; for the half-width of the k -line, formula $\Delta\omega_{0.5}^{(k)} = Dk^2$ is given, obtained earlier only for certain particular cases. The consideration expounded is unsuitable if some parameter be close to bifurcation value, as well as for describing of fluctuations in relaxation generators.

СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Ю. К. Богатырев

Рассматривается распространение электромагнитной волны в дискретной линии с нелинейной связью между магнитным потоком Φ и током i в индуктивности звена линии в предположении, что эта связь однозначна и не зависит явно от времени. Проведено количественное исследование структуры фронта стационарной волны в линии с малыми потерями для частного случая $\Phi(i) = ai - \beta i^3$.

В работах [1,2] были выяснены особенности распространения плоской однородной электромагнитной волны в бесконечной среде с нелинейной связью между магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля и показана возможность образования в такой среде ударных электромагнитных волн. Для случая стационарной волны в насыщенном феррите была рассмотрена структура фронта ударной волны; в частности, показано, что ширина фронта определяется дисперсионными свойствами среды (феррита).

В распределенной нелинейной линии передачи (эквивалентная схема в виде цепочки со звенями типа постоянного k) с безынерционным нелинейным элементом процесс формирования фронта волны описывается системой волновых уравнений, решение которых аналогично решениям уравнений Максвелла, описывающим простые волны в однородной нелинейной среде [1,3]:

$$\begin{aligned} i &= f(t \mp z\sqrt{L(i)C}); \\ u &= \pm \frac{1}{\sqrt{C}} \int_0^i \sqrt{L(i)} di, \end{aligned} \quad (1)$$

где $f(t, z)$ — произвольная функция, определяемая начальными условиями, $L(i)$ и C — соответственно индуктивность (монотонно убывающая функция тока) и емкость, распределенные на единицу длины линии.

Согласно (1), крутизна фронта волны по мере ее распространения вдоль линии возрастает до тех пор, пока не образуется разрывная (ударная) волна. Ширина фронта ударной волны оказывается равной нулю, поскольку в этом приближении дисперсия волн в линии не учитывается.

В настоящей работе на примере волны, распространяющейся вдоль нелинейной дискретной линии передачи, рассматривается влияние дисперсии на структуру фронта стационарной ударной волны*.

1. СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим бесконечно длинную нелинейную линию передачи, состоящую из идентичных звеньев с сосредоточенными параметрами

* Вопрос о распространении волн в нелинейной линии с дисперсией рассматривался также в работе [4].

(рис. 1), вдоль которой распространяется волна тока. В дальнейшем для определенности будем считать, что нелинейными элементами линии являются индуктивности, выполненные в виде катушек с ферритом, взаимоиндукция между которыми отсутствует.

Поскольку нас интересует роль дисперсионных свойств линии передачи, а не феррита, можно считать феррит безынерционным*. В этом

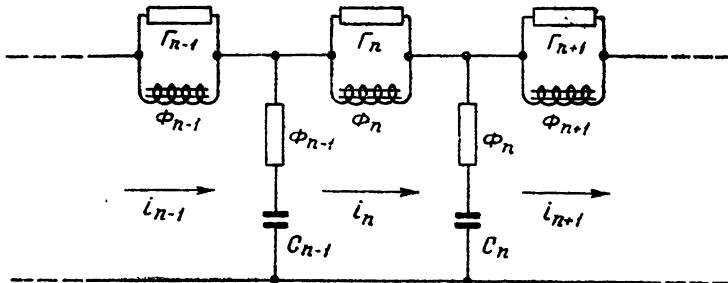


Рис. 1. Электрическая схема нелинейной искусственной линии передачи.

случае связь между магнитным потоком Φ_n и током i_n в индуктивности звена линии не зависит явно от времени и определяется функцией $\Phi_n = \Phi(i_n)$, а процессы, происходящие в линии, будут описываться нелинейным дифференциально-разностным уравнением

$$\int (i_{n+1} - 2i_n + i_{n-1}) dt + CR(i_{n+1} - 2i_n + i_{n-1}) + \frac{CR}{r} \frac{d}{dt} (\Phi_{n-1} - 2\Phi_n + \Phi_{n+1}) + \frac{1}{r} (\Phi_{n+1} - 2\Phi_n + \Phi_{n-1}) = C \frac{d\Phi_n}{dt}, \quad (2)$$

где i_n и Φ_n — соответственно ток и магнитный поток в n -ом звене линии, C — емкость звена, а R и r — сопротивления, учитывающие диссипативные свойства линии. В (2) вследствие однородности линии положено $C_n = C$, $R_n = R$ и $r_n = r$.

Решение уравнения (2) в общем виде не представляется возможным, поэтому мы ограничимся исследованием его стационарных решений типа:

$$i(t) = i(t \pm \Delta t),$$

представляющих волну тока, распространяющуюся вдоль линии передачи без изменения формы. Величина $\Delta t = \text{const}$ характеризует время запаздывания волны на ячейку линии.

Разложив в (2) выражения для тока и магнитного потока в степенные ряды:

$$i_{n\pm 1} = i(t \pm \Delta t) = i(t) \pm \frac{\Delta t}{1!} \frac{di}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{d^2i}{dt^2} \pm \dots; \quad (3)$$

$$\Phi_{n\pm 1} = \Phi(t \pm \Delta t) = \Phi(t) \pm \frac{\Delta t}{1!} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{d^2\Phi}{dt^2} \pm \dots,$$

перейдем от дифференциально-разностного уравнения (2) к дифференциальному уравнению бесконечно высокого порядка. Однако, предпо-

* Это всегда справедливо для линий, у которых постоянная времени звена при намагничении до насыщения феррита много больше времени релаксации феррита.

лагая, что величина Δt много меньше некоторого характерного времени τ (определение величины τ , характеризующей скорость изменения тока, будет уточнено ниже), ограничимся первыми членами разложений (3). После преобразования уравнения (2) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t^4 CR}{12r} \frac{d^4 \Phi}{dt^4} + \frac{\Delta t^4}{12r} \frac{d^3 \Phi}{dt^3} + \frac{\Delta t^2 CR}{r} \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \frac{\Delta t^2}{r} \frac{d \Phi}{dt} + \\ + \frac{\Delta t^4 CR}{12} \frac{d^3 i}{dt^3} + \frac{\Delta t^4}{12} \frac{d^2 i}{dt^2} + \Delta t^2 CR \frac{di}{dt} = C\Phi(i) - \Delta t^2 i. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что величина Δt , входящая в коэффициенты уравнения (4), не определена. Задача сводится, таким образом, к нахождению собственных значений параметра (Δt), для которых уравнение (4) имеет стационарные решения конечной амплитуды.

В реальных линиях передачи сопротивление R мало и, кроме того, всегда выполняется условие $R \ll r$; поэтому в (4) можно пренебречь членами с третьей и четвертой производными*. Тогда уравнение (4) принимает вид:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{12}{\Delta t^2} \left[CR + \frac{1}{r} \Phi'(i) \right] \frac{di}{dt} = \frac{12}{\Delta t^4} [C\Phi(i) - \Delta t^2 i]. \quad (5)$$

Возможные состояния равновесия системы, описываемой выражением (5), на фазовой плоскости определяются из условий $di/dt = y = 0$, $dy/dt = 0$, из которых следует:

$$y = 0, \quad \Phi(i) - \frac{\Delta t^2}{C} i = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

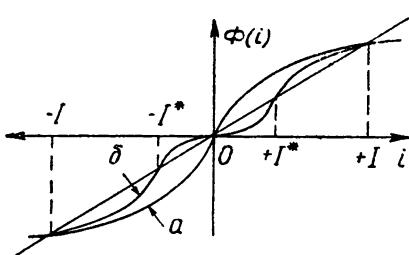


Рис. 2. Кривые зависимости магнитного потока от тока $\Phi = \Phi(i)$ в индуктивности звена линии.

Случай 1. Если зависимость магнитного потока от тока такова, как показано на рис. 2 (кривая *a*), то состоянию равновесия будут соответствовать точки пересечения кривой $\Phi(i)$ и прямой $\Phi(I) = (\Delta t^2/C)I$, откуда

$$\Delta t = \sqrt{\frac{\Phi(I)}{I}} C = \sqrt{L(I)C}. \quad (7)$$

Как и следовало ожидать, $\lim_{I \rightarrow \infty} \Delta t = \sqrt{L_0 C} = \tau_0$, где τ_0 — по-

стоянная времени звена при намагниченнем до насыщения феррита.

Исследуем состояния равновесия (5) на устойчивость [5]. Линеаризируя уравнение (5) около особых точек $i = i_0$ и $y = y_0$, получим:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{12}{LC} \left[CR + \frac{1}{r} \Phi'(i_0) \right] \frac{di}{dt} - \frac{12}{LC} \left[\frac{\Phi'(i_0)}{L} - 1 \right] i = 0, \quad (8)$$

где $\Phi'(i_0) = d\Phi(i)/di|_{i=i_0}$ и введено обозначение $\Delta t^2 = LC$.

* Следует отметить, что величины $(\Delta t/\tau)^2$, $(CR/\tau)^2$ и $L/r\tau$ имеют одинаковый порядок малости; поэтому при переходе от (4) к (5) опускаются члены второго и более высокого порядка малости.

Характеристическое уравнение этой системы:

$$\lambda^2 + \frac{12}{LC} \left[CR + \frac{1}{r} \Phi'(i_0) \right] \lambda - \frac{12}{LC} \left[\frac{\Phi'(i_0)}{L} - 1 \right] = 0. \quad (9)$$

Характер корней уравнения (9) зависит от пяти параметров: \bar{L} , C , R , r и $\Phi'(i_0)$. Поэтому произведем разбиение плоскостей параметров схемы $\bar{L}, \Phi'(i_0)$; $C, \Phi'(i_0)$; $R, \Phi'(i_0)$ и $r, \Phi'(i_0)$ на области, каждая из которых соответствует определенному типу состояний равновесия. Результаты построения приведены на рис. 3. Эти диаграммы позволяют судить о характере особых точек при любых значениях параметров \bar{L} , C , R , r и $\Phi'(i_0)$. Очевидно, состояние равновесия в точке $i_0 = 0$, $y_0 = 0$ является седлом и неустойчиво при любых значениях параметров R и r , а состояние равновесия в точках $i_0 = \pm I$, $y_0 = 0$ всегда устойчиво (устойчивый фокус или устойчивый узел).

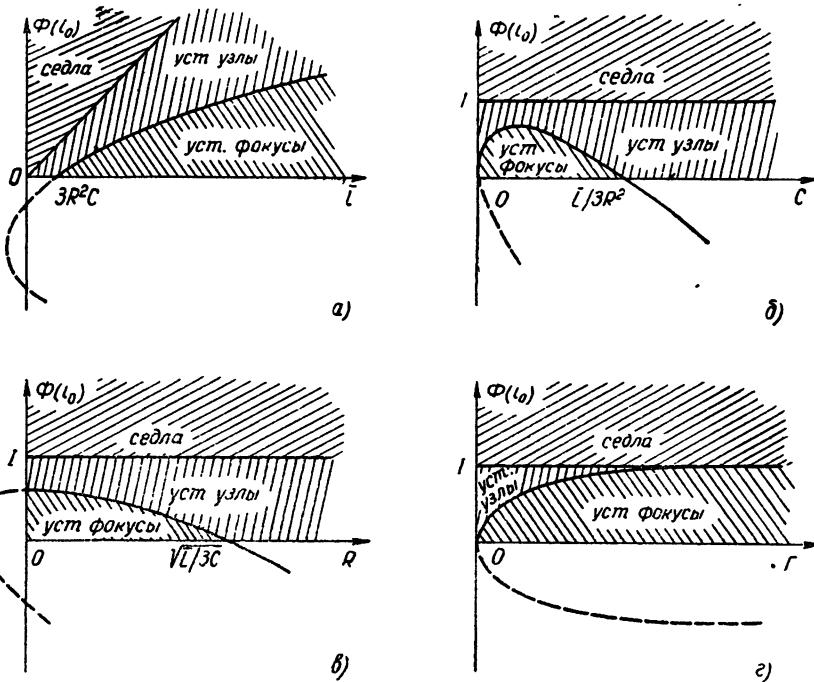


Рис. 3. Диаграммы разбиения плоскостей параметров.

Таким образом, в линии с диссипацией могут существовать стационарные волны в виде перепада тока конечной амплитуды (от $i = 0$ при $t \rightarrow -\infty$ до $i = I$ при $t \rightarrow +\infty$). Фронт волны имеет вполне определенную длительность, зависящую от параметров звена линии, и распространяется со скоростью*

$$V = 1/\Delta t = 1/\sqrt{LC}. \quad (10)$$

На фронте волны возникают затухающие осцилляции, коэффициент затухания которых определяется величиной сопротивлений R и r . При $R > \sqrt{L/C}$ колебательный процесс переходит в апериодический.

* В линии с распределенными параметрами фронт волны распространяется со скоростью $V = 1/\sqrt{L^*(i)C^*}$, где $L^*(i)$ и C^* — индуктивность и емкость на единицу длины линии.

В простейшем случае ($R = 0, r = \infty$) уравнение (4) принимает вид

$$\frac{d^2i}{dt^2} = \frac{12C}{\Delta t^4} \Phi(i) - \frac{12}{\Delta t^2} i. \quad (11)$$

Состояния равновесия системы, описываемой (11), на фазовой плоскости, как и в случае линии с диссипацией, определяются из (6). Особые точки $i_0 = \pm I, y_0 = 0$ вырождаются в центры, что соответствует существованию в линии стационарных волн, которые носят колебательный характер. Период колебаний находится путем интегрирования уравнения (11) и равен

$$T = \oint \left[\pm 24 \Delta t^2 \int_0^i \left(\frac{C\Phi(i)}{\Delta t^2} - i \right) di \right]^{-\frac{1}{2}} di. \quad (12)$$

Вид интегральных кривых на фазовой плоскости для случая, когда кривая намагничивания соответствует рис. 2(a), приведен на рис. 4а.

Случай 2. Если зависимость магнитного потока от тока имеет вид, изображенный на рис. 2 кривой б, то, как нетрудно видеть, характер особых точек несколько отличен от случая 1: при $R \neq 0, r \neq \infty$ состояния равновесия в особых точках $i_0 = 0, y_0 = 0$ и $i_0 = \pm I, y_0 = 0$ будут всегда устойчивы (устойчивый фокус или устойчивый узел), а состояние равновесия в особых точках $i_0 = \pm I^*, y_0 = 0$ неустойчиво (седло). Следовательно, в этом случае в линии могут существовать стационарные волны в виде перепада тока с амплитудой $I > I^*$ (от $i = I^*$ при $t \rightarrow -\infty$ до $i = I$ при $t \rightarrow +\infty$) и $I < I^*$ (от $i = I^*$ при $t \rightarrow -\infty$ до $i = 0$ при $t \rightarrow +\infty$). Фронт стационарной волны представляет собой в этом случае перепад тока с последующими осцилляциями (как в случае 1)*.

При $R=0, r=\infty$ особые точки $i_0 = \pm I, y_0 = 0$, как и в случае 1, вырождаются в центры; этому же типу состояния равновесия соответствует особая точка $i_0 = 0, y_0 = 0$. Кроме того, появляются две неустойчивые точки типа седла $i_0 = \pm I^*, y_0 = 0$, что показывает существование в линии стационарных волн, которые носят осциллирующий (близ состояний равновесия $i = \pm I$ или $i = 0$) характер.

Вид интегральных кривых на фазовой плоскости в этом случае соответствует рис. 4б.

2. СТРУКТУРА ФРОНТА СТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ В СЛУЧАЕ МАЛЫХ ПОТЕРЬ

Выше был качественно рассмотрен вопрос о структуре фронта стационарной волны, распространяющейся вдоль нелинейной дискретной линии передачи. Количественные оценки проиллюстрируем на следующем примере. Аппроксимируем кривую статической зависимости магнитного потока от тока полиномом вида

$$\Phi(i) = \alpha i - \beta i^3 \quad (13)$$

(α, β — постоянные положительные коэффициенты), что соответствует

* Интересно отметить, что влияние диссипативного элемента R (так же, как r) аналогично проявлению вязкости феррита (характеризуемой величиной λ — частотой релаксации). Он не влияет на структуру стационарной ударной волны вне области быстрого изменения тока, но обеспечивает диссипацию энергии в области перепада, которая необходима (как это видно из граничных условий) для существования ударной волны [2,6]. Если диссипацию в линии учесть сопротивлением, шунтирующим емкость ячейки линии, то и в этом случае могут существовать стационарные решения в виде перепада тока с последующим возрастанием величины его по мере удаления от фронта волны (аналогично случаю среды с конечной проводимостью [2]).

рассмотренному выше случаю 1. При этом величина Δt^2 равна

$$\Delta t^2 = \frac{\Phi(I)}{I} C = (\alpha - \beta I^2)C, \quad (14)$$

а уравнение (5), записанное в виде двух дифференциальных уравнений первого порядка, принимает вид:

$$\frac{di}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{12\beta C}{\Delta t^4} [I^2 - i^2] i - \frac{12CR}{\Delta t^2} y \quad (15)$$

(при переходе от (5) к (15) положено $r = \infty$).

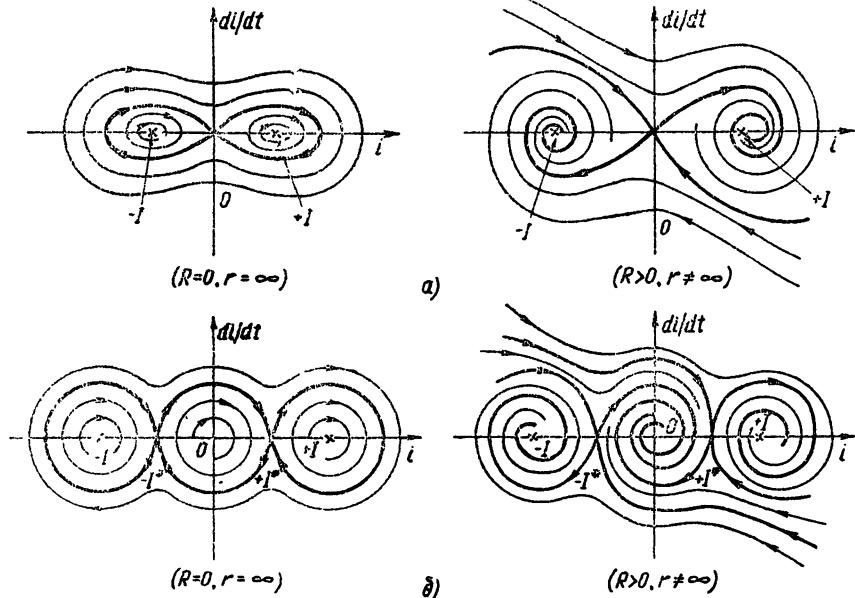


Рис. 4.

При достаточно малом сопротивлении R (таком, что $CR \ll \Delta t$) для решения системы (15) можно применить метод медленно меняющихся амплитуд. В нулевом приближении ($R = 0$) имеем:

$$\frac{di}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{12\beta C}{\Delta t^4} (I^2 - i^2)i. \quad (16)$$

Отсюда следует уравнение фазовых траекторий на плоскости y, i :

$$y^2 = \frac{6\beta C}{\Delta t^4} (2I^2i^2 - i^4 - I^2A), \quad (17)$$

где A — некоторая постоянная.

При $0 < A < I^2$ уравнение (17) описывает замкнутые кривые типа эллипса, вложенные друг в друга. При заданном значении величины A изображающая точка совершает на плоскости y, i периодические движения с периодом

$$T = \oint \frac{di}{y} = \frac{2\Delta t^2}{i_1 \sqrt{6\beta C}} F\left(\sqrt{1 - \frac{i_2^2}{i_1^2}}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (18)$$

где F — эллиптический интеграл первого рода и

$$i_{1,2} = I^2 \pm IV\sqrt{I^2 - A}. \quad (19)$$

При учете диссипации ($R \neq 0$) характер движения изображающей точки на фазовой плоскости существенно изменится: она будет двигаться по спирали, соединяющей неустойчивую особую точку ($i=y=0$) с устойчивой особой точкой ($y=0, i=\pm I$; знак выбирается в зависимости от полярности волны).

Для исследования этого движения будем считать параметр медленной функцией времени $A(t)$, которая изменяется от 0 при $t \rightarrow -\infty$ до I^2 при $t \rightarrow +\infty$. Разрешая (16) и (17) относительно $A(t)$, получим:

$$\frac{dA(t)}{dt} + \frac{24CR}{\Delta t^2} A(t) = \frac{24CR}{\Delta t^2} \left(2i^2 - \frac{i^4}{I^2} \right). \quad (20)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$A(t) = e^{-\frac{24CR}{\Delta t^2} t} \int \frac{24CR}{\Delta t^2} \left(2i^2 - \frac{i^4}{I^2} \right) e^{\frac{24CR}{\Delta t^2} t} dt. \quad (21)$$

Параметр $A(t)$ вследствие малости R незначительно меняется за время одного оборота изображающей точки; поэтому период движения по спирали приближенно определяется выражением (18), а в уравнении (21) значение квадрата тока i^2 можно заменить его средним значением, которое следует считать величиной постоянной, равной I^2 . Тогда (21) легко интегрируется:

$$A(t) = I^2 \left[1 - \exp \left(-\frac{24CR}{\Delta t^2} t \right) \right] \quad (t > 0). \quad (22)$$

Отсюда следует, что характер изменений амплитуды колебаний на фронте волны* определяется выражением:

$$i_1 - i_2 \approx \frac{i_1^2 - i_2^2}{2I} = I \exp \left(-\frac{12RC}{\Delta t^2} t \right) = I \exp \left(-\frac{12R}{\alpha - \beta I^2} t \right), \quad (23)$$

а время затухания осцилляций равно

$$\tau_3 \approx \frac{\Delta t^2}{12RC} = \frac{\alpha - \beta I^2}{12R}. \quad (24)$$

Частота их слабо зависит от параметра A и ее в первом приближении можно считать постоянной:

$$\omega = \frac{2\pi V\sqrt{\beta C}}{\Delta t^2} I = \frac{2\pi}{\alpha - \beta I^2} \sqrt{\frac{\beta}{C}} I. \quad (25)$$

Форма стационарной волны тока показана на рис. 5.

Проведенное рассмотрение не годится в области начального отклонения изображающей точки от положения равновесия $i = y = 0$. Это отклонение можно оценить промежутком времени $\tau_{\text{нач}}$, характеризующим изменение тока от $i = 0,1i_1$ до $i = 0,9i_1$:

$$\tau_{\text{нач}} \approx \int_{0,1i_1}^{0,9i_1} \frac{di}{y|_{\text{при } A=0}} = 0,7 \frac{\Delta t^2}{V\sqrt{\beta C}} \frac{1}{I} = 0,7 (\alpha - \beta I^2) \sqrt{\frac{C}{\beta}} \frac{1}{I}. \quad (26)$$

* Под длительностью фронта ударной волны, как и в [?], понимается время, в течение которого происходят все основные изменения величины тока, т. е. $\tau_{\text{фр}} = \tau_3 + \tau_{\text{нач}}$.

Метод медленно меняющихся амплитуд справедлив лишь при выполнении неравенства $\tau_{\text{нач}} \ll \tau_s$, т. е. при $\frac{R}{I} \sqrt{\frac{C}{\beta}} \ll 1$, что всегда справедливо в реальных линиях на ферритах. С другой стороны, как уже было отмечено, время запаздывания фронта стационарной волны тока на одно звено линии Δt должно быть много меньше некоторого характерного времени τ , равного, очевидно, $\tau_{\text{нач}}$ или длительности периода колебаний на фронте волны $T = 2\pi/\omega$ (26). Исходя из этого, получим: $\Delta t \gg I \sqrt{\beta C}$. Это неравенство выполняется тем лучше, чем меньше параметр β , т. е. чем меньше нелинейность характеристики $\Phi = \Phi(i)$.

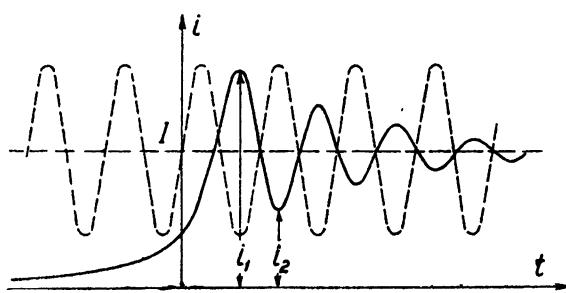


Рис. 5. Качественный вид стационарной волны тока в линии:

— — — без учета диссипации,
— — с учетом диссипации.

Как видно из (23), (24), (25) и (26), при уменьшении параметров ячейки (что эквивалентно расширению полосы пропускания частот линии при намагниченнем до насыщения феррита) фронт стационарной волны тока становится более крутым, а частота осцилляций за ним возрастает. Характер изменения амплитуды осцилляций в первом приближении (при $R = \text{const}$) остается прежним. Более точно характер изменения частоты осцилляций и амплитуды может быть выяснен, если при решении задачи учесть в разложении (3) члены более высокого порядка малости.

Результаты работы могут быть без труда применены для случая, когда нелинейным элементом линии является емкость (например, конденсатор из сегнетоэлектрика, емкость перехода в полупроводнике и т. д.) или когда нелинейны и емкостный и индуктивный элементы линии.

В заключение автор выражает признательность А. В. Гапонову за постоянный интерес к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 36, 957 (1959).
2. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, 79 (1960).
3. И. Г. Катаев, Вопросы радиоэлектроники, серия 6 — Радиоизмер. техника, 2 (1959).
4. Р. В. Хохлов, Доклад на конференции МВО СССР по радиоэлектронике, Харьков, 1960.

5. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
6. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 276 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 января 1961 г.

STATIONARY WAVES IN DISCRETE NONLINEAR TRANSMISSION LINE

Yu. K. Bogatyrev

The electromagnetic wave propagation is examined in a discrete line with nonlinear relationship between magnetic flux Φ and current i in a section inductance of the line, assuming that this relationship is simple and is clearly not dependent on time. A quantitative investigation is given of the structure of the stationary wave front in a line with small losses for the particular case $\Phi(i) = ai - \beta i^3$.

РАСЧЕТ РЕЗОНАТОРНЫХ ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СИСТЕМ ЭКВИВАЛЕНТНЫМ СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

И. Ш. Белуга

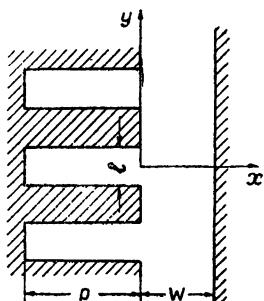
Эквивалентный статический метод расчета волноводных переходов [1] обобщен на случай периодических структур и использован для нахождения входной проводимости пространства взаимодействия и амплитуд пространственных гармоник электромагнитного поля. В связи с этим известный метод исследования двухмерных электростатических полей с помощью аналитических функций обобщен на случай комплексных полей, в частности, полей, удовлетворяющих условию Флокае i(1).

В электронных приборах СВЧ и ускорителях заряженных частиц широко применяются резонаторные замедляющие системы. Резонаторная замедляющая система образуется цепочкой периодически расположенных резонаторов, соединенных с полостью, в которой может происходить взаимодействие электронного потока с высокочастотным полем (см. рис. 1—4). В СВЧ приборах эту полость принято называть пространством взаимодействия.

Для расчета основных характеристик резонаторной замедляющей системы—дисперсии и сопротивления связи—нужно знать входную проводимость полости $Y_{\text{вх}}$ и амплитуды пространственных гармоник. Многие авторы [2—4] ведут расчет этих величин, полагая, что y -компоненты электрического поля E_y постоянна в месте сочленения резонатора и полости, т. е. при $x = 0$, $-l/2 < y < l/2$. В действительности же $E_y \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow \pm l/2$. Известны и более точные, но весьма громоздкие способы расчета [5—7].

В предлагаемом способе расчета распределение поля E_y при $x = 0$ представляется в виде суммы соответствующих распределений для электростатического поля E_s гребенки (рис. 1) с $p = \infty$, $W = \infty$ и не-

Рис. 1. Резонаторная замедляющая система типа “гребенка”, образованная цепочкой прямоугольных щелевых резонаторов, связанных с плоско-параллельной (Π) полостью. Экран, совпадающий с плоскостью $x = W$, либо электрический (\mathcal{E}) (идеально проводящий), либо магнитный (M) (вдоль которого $H_{tg} = 0$).



которых добавочных полей. Каждое добавочное поле соответствует определенной (m -ой) пространственной гармонике или волне резонатора, а его амплитуда тем меньше, чем меньше отличается отношение $(H/E_y)_{x=0}$ для m -ой гармоники (волны) от отношения $(H/E_y)_{x=0}$ для m -ой гармоники (волны) поля E_s . В широком диапазоне изменения геометрических размеров и длины волны это отличие у высших гармоник

(волн) мало; при этом получаются простые и точные окончательные формулы.

В статье использована практическая система единиц.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При данной частоте ω рассчитывается поле в полости, показанной на одном из рисунков 1—3 при следующих условиях. Вектор электрического поля E лежит в плоскости рисунка. Поле зависит только от координат x и y в этой плоскости. Вектор магнитного поля H (имеющий при этом лишь одну отличную от нуля составляющую $H = H_z$) удовлетворяет условию Флока:

$$f(x, y + L) = e^{i\varphi} f(x, y) \quad (0 \leq \varphi \leq \pi). \quad (1)$$

В случае К-полости (рис. 2) под y понимается величина $R_a \Theta$, где Θ — полярный угол.

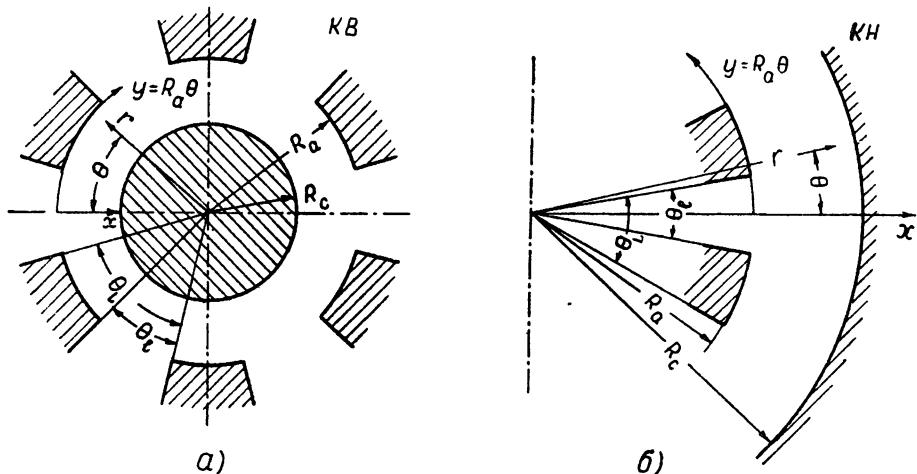


Рис. 2. Кольцевая (К) полость с внутренним (В) и наружным (Н) экраном. Радиус экрана R_c . Обозначения: $y=R_a \Theta$; $x=R_a - r$ (а) или $x=r-R_a$ (б); $L=R_a \theta_L$; $l=R_a \theta_l$; $W=R_a |\ln(R_a/R_c)|$; $N=2\pi/\theta_L$ — число резонаторов.

Требуется найти входную проводимость

$$Y_{bx} = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} H \left|_{x=0} dy \right| \int_{-l/2}^{l/2} E_y \left|_{x=0} dy \right| \quad (2)$$

и амплитуды пространственных гармоник в полости.

В дальнейшем (в том числе в окончательных формулах) вместо Y_{bx} и H используются величины

$$C = Y_{bx}/i\omega\epsilon_0; \quad (3)$$

$$h = h(x, y) = H/i\omega\epsilon_0. \quad (4)$$

Функция $h(x, y)$ определяет вектор E , так как $\text{rot } H = i\omega\epsilon_0 E$. Например, в П-полости (рис. 1)

$$E_x = \partial h / \partial y; \quad E_y = -\partial h / \partial x. \quad (5)$$

Заметим, что условие $\varphi \geq 0$ в (1) не ограничивает общности, так как замена $E \rightarrow E^*$, $H \rightarrow -H^*$ (*—знак комплексной сопряженности), не нарушая уравнений Максвелла, приводит к замене $\varphi \rightarrow (-\varphi)$.

2. СПОСОБ РЕШЕНИЯ

Введем обозначения:

$$c_n(y) = \cos [(n\pi/l)(y + l/2)] \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (6)$$

$$e_m(y) = \exp [i(-1)^m (\varphi_m y/L)] \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (6a)$$

где

$$\varphi_m = \begin{cases} m\pi + \varphi & (m = 0, 2, \dots); \\ (m+1)\pi - \varphi & (m = 1, 3, \dots), \end{cases} \quad (6b)$$

и примем напряжение на входе в полость равным единице:

$$\int_{-l/2}^{l/2} E(y) dy = 1, \quad (7)$$

где

$$E(y) = E_y|_{x=0}. \quad (7a)$$

При $x = 0$ разложим поле по пространственным гармоникам:

$$E(y) = \sum_{m=0}^{\infty} N_{em} (1/L) e_m(y); \quad (8)$$

$$h|_{x=0} = \sum_{m=0}^{\infty} r_{em} N_{em} e_m(y) \quad (\text{при любом } y) \quad (8a)$$

и по волнам резонатора:

$$E(y) = 1/l + \sum_{n=1}^{\infty} N_{cn} (2/l) c_n(y) \quad (-l/2 < y < l/2); \quad (9)$$

$$h|_{x=0} = - \sum_{n=1}^{\infty} r_{cn} N_{cn} c_n(y) + C \quad (-l/2 < y < l/2). \quad (9a)$$

Здесь N_{em} —искомые амплитуды гармоник, N_{cn} —амплитуды высших волн в резонаторе; r_{em} и r_{cn} определяются отношением $(H/E_y)|_{x=0}$ для этих гармоник и волн.

Поле отдельной пространственной гармоники или отдельной волны резонатора меняется в пространстве тем быстрее, чем выше ее номер m . При достаточно большом номере m быстрое изменение поля гармоники (волны), в частности, его спадание при удалении от поверхности $x=0$, происходит на протяжении отрезка q_m , малого по сравнению с геометрическими размерами замедляющей системы и с длиной волны в свободном пространстве λ . Из неравенства $q_m \ll R_a$ (рис. 2, 3) следует, что распределение поля m -ой гармоники (волны) почти не изменится, если положить $R_a = \infty$, т. е. вместо кольцевой или аксиально симметричной структуры рассматривать плоско-параллельную (рис. 1). Далее, из тех же соображений при достаточно большом m можно положить $W = \infty$, $p = \infty$ (рис. 1), а также $\lambda = \infty$. Таким образом, распределение поля гармоники (волны) в любой полости и в любом резонаторе, показанных на рис. 1—4, с ростом номера m все меньше отличается от распределения поля соответствующей гармоники (волны).

электростатического поля E_s гребенки с $p = \infty$, $\mathbf{W} = \infty$ (все связанные с полем E_s величины отмечаются индексом s).

Из приведенных рассуждений следует, что при $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ значения r_{em} , r_{cn} стремятся к соответствующим величинам для поля E_s : $r_{em}^s = 1/\varphi_m$, $r_{cn}^s = 2/n\pi$, так что

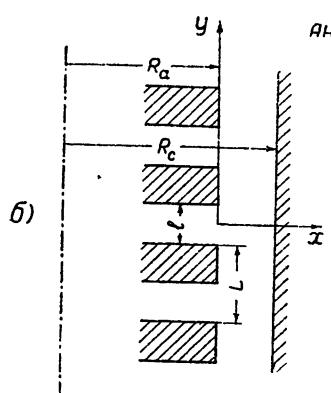
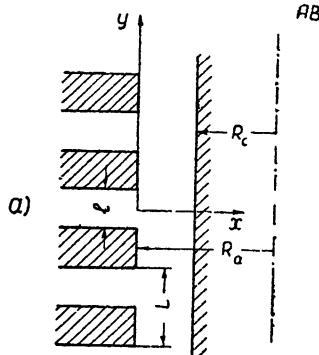


Рис. 3. Аксиально симметричный (A) полость с внутренним (B) и наружным (H) экраном. Радиус экрана R_c .

$$\Delta r_{em} = r_{em} - r_{em}^s; \quad \Delta r_{cn} = r_{cn} - r_{cn}^s \quad (m = 0, 1, \dots; n = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

и

$$\delta_{em} = \Delta r_{em}/r_{em}^s; \quad \delta_{cn} = \Delta r_{cn}/r_{cn}^s \quad (m = 0, 1, \dots; n = 1, 2, \dots) \quad (10a)$$

стремятся к нулю:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta r_{em} = \lim_{m \rightarrow \infty} \delta_{em} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta r_{cn} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{cn} = 0. \quad (10b)$$

Строгое доказательство справедливости равенств (10b) для каждой из структур рис. 1—4 проводится следующим образом. Сначала находится распределение поля m -ой (n -ой) гармоники (волны) как частное решение уравнений Максвелла в соответствующей системе координат. Тем самым определяется величина r_{em} (r_{cn}). Затем с помощью асимптотических формул для бесселевых и гиперболических функций проверяются равенства (10b).

Ниже, там, где это удобнее, вводим одинарную нумерацию пространственных гармоник и высших волн резонатора, т. е. вместо двойных индексов em ($m=0, 1, 2, \dots$), cn ($n=1, 2, 3, \dots$) используем одну цифру. Первые три цифры 0, 1, 2 ставятся в соответствие индексам $e0$, $e1$, $c1$:

$$\begin{array}{ccc} e0 & e1 & c1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \quad (11)$$

и т. д. (например, $r_0 = r_{e0}$, $\delta_1 = \delta_{e1}$, $N_2 = N_{c1}$).

Непрерывность полей на входе в резонатор и условие $E(y) = E_y|_{x=0} = 0$ на металле между резонаторами приводят с учетом (8), (8a), (9) и (9a) к равенствам:

$$E(y) = \sum_{m=0}^{\infty} N_{em} \frac{1}{L} \dots e_m(y) = \begin{cases} 1/l + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} N_{cn}(2/l)c_n(y) & (-l/2 \leq y \leq l/2) \\ 0 & (l/2 \leq |y| \leq L/2) \end{cases}; \quad (12)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} r_{em} N_{em} e_m(y) + \sum_{n=1}^{\infty} r_{cn} N_{cn} c_n(y) = C \quad (-l/2 \leq y < l/2). \quad (13)$$

Заметим, что при $R_a \neq R'_a$ (рис. 4) равенства (12), (13)—приближенные, поскольку малые дуги разных радиусов считаются совпадающими.

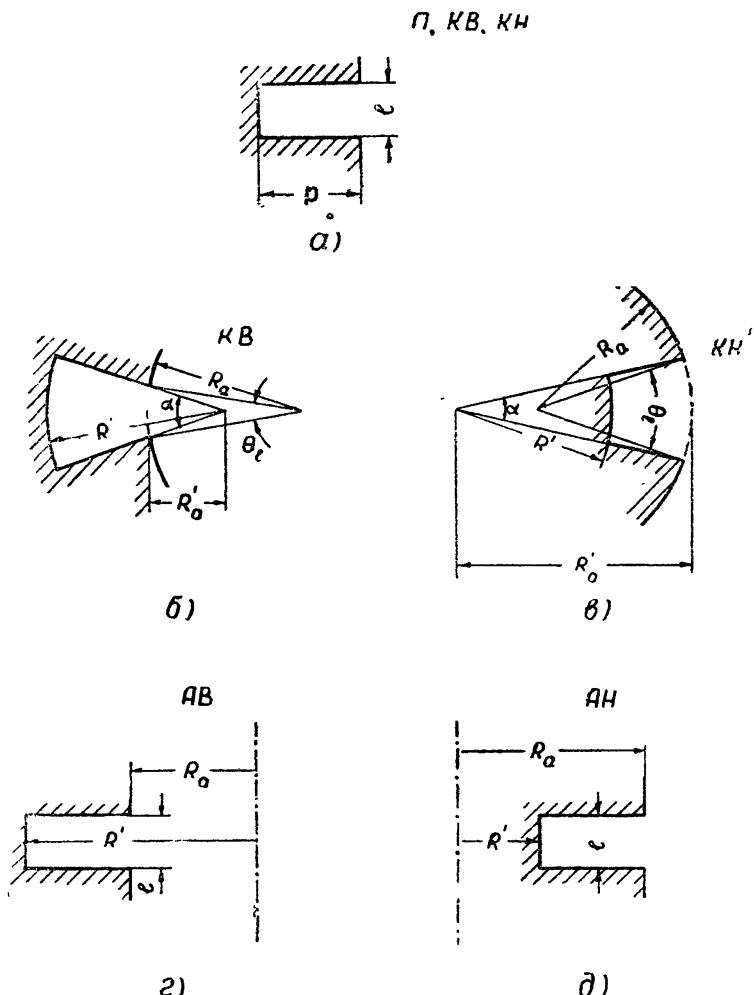


Рис. 4. Резонаторы различных типов:

а—прямоугольный щелевой, б, в—лопаточный, г, д—радиальный (аксиально симметричный). Буквами над каждым рисунком отмечен тип полости, с которой может быть связан резонатор.

Из ортогональности функций $c_n(y)$ (6) и функций $e_m(y)$ (6a), а также из равенства (12) следует, что

$$N_{cn} = \int E(y') c_n(y') dy' \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (14)$$

$$N_{em} = \int E(y') e_m^*(y') dy' \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (14a)$$

Пределы интегрирования $-l/2$, $l/2$ здесь и ниже опущены. Подставляя (14), (14a) в (13) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим:

$$\int G(y, y') E(y') dy' = C \quad (-l/2 < y < l/2), \quad (15)$$

где

$$G(y, y') = \sum_{n=1}^{\infty} r_{cn} c_n(y) c_n(y') + \sum_{m=0}^{\infty} r_{em} e_m(y) e_m^*(y'). \quad (16)$$

Вводя, кроме того, функцию $G_s(y, y')$ для поля E_s :

$$G_s(y, y') = \sum_{n=1}^{\infty} r_{cn}^s c_n(y) c_n(y') + \sum_{m=0}^{\infty} r_{em}^s e_m(y) e_m^*(y') \quad (17)$$

и снова воспользовавшись соотношениями (14), (14a), преобразуем (15) к виду:

$$\begin{aligned} \int G_s(y, y') E(y') dy' &= C - \sum_{n=1}^{\infty} \Delta r_{cn} N_{cn} c_n(y) - \\ &- \sum_{m=0}^{\infty} \Delta r_{em} N_{em} e_m(y) \\ &(-l/2 < y < l/2). \end{aligned} \quad (18)$$

Функция $E(y)$ и величина C однозначно определяются условиями (7) и (15) или, что то же самое, условиями (7), (18) и (14), (14a). Это следует из единственности решения поставленной электродинамической задачи. Покажем, что условиям (7), (18), (14), (14a) удовлетворяет функция $\tilde{E}_g(y) = \tilde{E}_{gy}|_{x=0}$ некоторого электростатического ($\lambda = \infty$) поля \tilde{E}_g гребенки (рис. 1) с $p = \infty$, $W = \infty$.

Если не требовать, чтобы поле было ограничено на бесконечности, произвольное электростатическое поле E_g этой гребенки можно представить формулами:

$$\begin{aligned} E_{gy} &= \frac{A_{c0}}{l} - \sum_{n=1}^{\infty} A_{cn} \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{l} x \right) c_n(y) \frac{n\pi}{l} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} Z_{ck} \frac{2}{l} c_k(y) e^{k\pi x/l} \end{aligned} \quad (19)$$

$(x \leq 0; -l/2 < y < l/2);$

$$\begin{aligned} h_g &= B - \frac{A_{c0}}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} A_{cn} \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi}{l} x \right) c_n(y) - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} r_{ck}^s Z_{ck} c_k(y) e^{k\pi x/l} \end{aligned} \quad (19a)$$

$(x \leq 0; -l/2 < y < l/2);$

$$\begin{aligned} E_{gy} &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{em} \frac{\varphi_m}{L} \operatorname{sh} \left(\frac{\varphi_m}{L} x \right) e_m(y) + \\ &+ \sum_{p=0}^{\infty} Z_{ep} \frac{1}{L} e_p(y) e^{-\varphi_p x/L} \end{aligned} \quad (19b)$$

$(x \geq 0);$

$$\begin{aligned}
 h_g = & - \sum_{m=0}^{\infty} A_{em} \operatorname{ch} \left(\frac{\varphi_m}{L} x \right) e_m(y) + \\
 & + \sum_{p=0}^{\infty} r_{ep}^s Z_{ep} e_p(y) e^{-\varphi_p x/L} \\
 & (x \geq 0).
 \end{aligned} \tag{19в}$$

Поле E_g однозначно определяется коэффициентами A_{cn} , A_{em} ($n, m = 0, 1, 2, \dots$) и может быть представлено в виде ряда:

$$E_g = \sum_{n=0}^{\infty} A_{cn} E_{cn} + \sum_{m=0}^{\infty} A_{em} E_{em}, \tag{19г}$$

где каждое из парциальных полей E_{cn} , E_{em} определяется равенством единице стоящего перед ним в (19г) коэффициента A и нулю остальных коэффициентов A . Коэффициенты B , Z_{ck} , Z_{ep} (см. (19)–(19в)) для полей E_{c0} , E_{cn} ($n \neq 0$), E_{em} обозначим соответственно через B_{c0} , T_{ck} , T_{ep} ; B_{cn} , $Z_{ck,cn}$, $Z_{ep,cn}$ и B_{em} , $Z_{ck,em}$, $Z_{ep,em}$.

Из непрерывности функции h_g (см. (19а), (19в)) при $x = 0$ находим аналогично тому, как было получено (15) из (13):

$$\begin{aligned}
 \int G_s(y, y') E_g(y') dy' = & B + \sum_{n=1}^{\infty} A_{cn} c_n(y) + \\
 & + \sum_{m=0}^{\infty} A_{em} e_m(y) \\
 & (-l/2 < y < l/2).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Сравнивая (20) с (18) и учитывая (7), получим, что при

$$A_{c0} = 1, \tag{21}$$

$$A_{cn} = -N_{cn} \Delta r_{cn} \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{21а}$$

$$A_{em} = -N_{em} \Delta r_{em} \quad (m = 0, 1, \dots) \tag{21б}$$

функция $E_g(y)$ удовлетворяет поставленным требованиям, а следовательно, совпадает с $E(y)$. Поэтому (см. (14), (14а) и (19)–(19в)) $N_{em} = Z_{em}$, $N_{cn} = Z_{cn}$, $C = B$, где величины Z_{em} , Z_{cn} , B определяются рядами, аналогичными (19г), с коэффициентами (21)–(21б). Используя одинарную нумерацию (11), получим:

$$N_p = T_p - \sum_{m=0}^{\infty} N_m Z_{pm} \Delta r_m \quad (p = 0, 1, 2, \dots); \tag{22}$$

$$C = B_{c0} - \sum_{m=0}^{\infty} N_m B_m \Delta r_m. \tag{23}$$

Для обычных ограниченных на бесконечности электростатических полей гребенки (рис. 1) с $p = \infty$ справедливо равенство $C = C_k$, где C_k – краевая емкость, определенная и рассчитанная в [8] при любом W . При $W = \infty$ ограниченным полем является $E_{c0} = E_s$, так что B_{c0} совпадает с $C_{k\infty} = C_k|_{W=\infty}$:

$$B_{c0} = C_{k\infty}, \tag{24}$$

где (см. [8])

$$C_{\kappa\infty} = C_\infty(\mu) + \hat{C}_\infty(\varphi) \quad (\mu = l/L); \quad (24a)$$

$$C_\infty(\mu) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{1}{\mu^2} - 1 \right) + \frac{1}{\mu} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} \right]; \quad (24b)$$

$$\hat{C}_\infty(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi_{2n}} + \frac{1}{\varphi_{2n+1}} - \frac{2}{(2n+1)\pi} = \frac{1}{\varphi_0} + \frac{1}{\varphi_1} - g(\varphi). \quad (24b)$$

Выражение для $g(\varphi)$ см. в [8].

С помощью функции Грина, удовлетворяющей условию Флоке (1), можно доказать равенства

$$Z_{mn} = Z_{nm}^* \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (25)$$

$$B_m = -T_m^* \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (25a)$$

На основании (24), (25a) перепишем (23) в виде:

$$C = C_{\kappa\infty} + \sum_{m=0}^{\infty} N_m T_m^* \Delta r_m. \quad (26)$$

Величины Z_{pm} , T_m (22), (26), являющиеся коэффициентами разложений (19)—(19в) парциальных полей E_{cn} , E_{em} ($m, n = 0, 1, \dots$), находятся следующим образом. На основании (19)—(19в) записываются разложения для потенциалов $\hat{\Phi}_I(\xi)$, $\hat{\Phi}_{II}(\xi)$ некоторого парциального поля (см. формулу (П4) из Приложения). Здесь $\xi = (2\pi/L)(x + iy)$. Далее конформно отображаем гребенку (рис. 1) с $p = \infty$, $W = \infty$ на полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ (рис. 5а). Связь между z и ξ можно представить в виде:

$$z = d_1(\mu) e^{\xi/2\mu} + d_2(\mu) e^{\xi/\mu} + \dots \quad (27)$$

$(x \leq 0; |y| \leq l/2);$

$$e^{-z} = \frac{e^{-\xi}}{A(\mu)} \left(1 - \frac{2\mu^2}{A(\mu)} e^{-\xi} + \dots \right) \quad (27a)$$

где

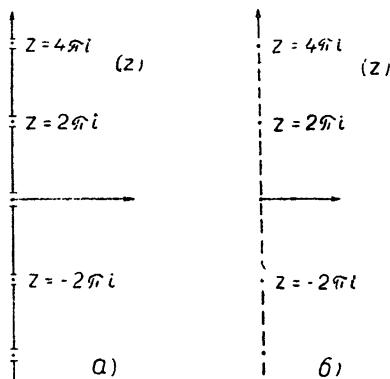
$$\mu = l/L; \quad (28)$$

$$d_1(\mu) = 4e^{-\pi C_\infty(\mu)}; \quad (28a)$$

$$A(\mu) = (1 + \mu)^{1+\mu} (1 - \mu)^{1-\mu}. \quad (28b)$$

Поле $\hat{E}(z)$ (см. раздел 6 Приложения) в плоскости z аналитически продолжается на полуплоскость $\operatorname{Re} z < 0$, и находятся аналитические выражения для потенциалов $\hat{\Phi}_I(z)$, $\hat{\Phi}_{II}(z)$.

Рассмотрим сначала поле E_{c0} . Согласно (П5), при единичной разности потенциалов ($A_{c0} = 1$) в точке $z = 0$ появляется заряд $\hat{Q} = -2\epsilon_0$,



так что поле \hat{E}_{c0} лишь множителем $(-1/\pi)$ отличается от поля, рассмотренного в разделе 4 Приложения, т. е.

$$\hat{\Phi}_{c0, I} = -\frac{1}{\pi} f_{0I}(z); \quad \hat{\Phi}_{c0, II} = -\frac{1}{\pi} f_{0II}(z). \quad (29)$$

Перейдем к другим парциальным полям. С помощью полученных ранее выражений $\hat{\Phi}_I(\xi)$, $\hat{\Phi}_{II}(\xi)$ и формул (27), (27а) найдем поведение потенциалов $\hat{\Phi}_I$, $\hat{\Phi}_{II}$ при $\operatorname{Re} z = \infty$ и при $z=0$. Используя также условия

$$\hat{\Phi}_I(-z) = \hat{\Phi}_I(z), \quad \hat{\Phi}_{II}(-z) = -\hat{\Phi}_{II}(z), \quad (30)$$

справедливые для всех парциальных полей, получим аналитические выражения для потенциалов:

$$\hat{\Phi}_{e0, I} = A^{-\varphi_0/2\pi}(\mu) \operatorname{ch}(\varphi_0 z/2\pi); \quad i\hat{\Phi}_{e0, II} = A^{-\varphi_0/2\pi}(\mu) \operatorname{sh}(\varphi_0 z/2\pi); \quad (31)$$

$$\hat{\Phi}_{e1, I} = A^{-\varphi_1/2\pi}(\mu) \operatorname{ch}(\varphi_1 z/2\pi); \quad i\hat{\Phi}_{e1, II} = -A^{-\varphi_1/2\pi}(\mu) \operatorname{sh}(\varphi_1 z/2\pi); \quad (31a)$$

$$\hat{\Phi}_{c1, I} = \frac{i}{2} d_1(\mu) f_{1I}(z); \quad i\hat{\Phi}_{c1, II} = \frac{i}{2} d_1(\mu) if_{1II}(z) \quad (31b)$$

и т. д. Выражение для f_1 см. в разделе 4 Приложения.

Возвращаясь с помощью (27), (27а) к переменной ξ , найдем коэффициенты разложений потенциалов $\hat{\Phi}_I(\xi)$, $\hat{\Phi}_{II}(\xi)$, а следовательно, и искомые величины Z_{mn} , T_m :

$$T_0 = A^{-\varphi_0/2\pi}(\mu); \quad Z_{00} = \varphi_0 T_0 \operatorname{sh} x_0; \quad Z_{02} = -Z_{20} = \frac{i}{4} T_0 \varphi_0 d_1(\mu);$$

$$T_1 = A^{-\varphi_1/2\pi}(\mu); \quad Z_{11} = \varphi_1 T_1 \operatorname{sh} x_1; \quad Z_{12} = -Z_{21} = -\frac{i}{4} T_1 \varphi_1 d_1(\mu); \quad (32)$$

$$T_2 = \frac{i}{4} \left(1 - \frac{\varphi_0}{\pi}\right) d_1(\mu); \quad Z_{01} = Z_{10} = -\varphi_0 \varphi_1 \mu^2 / 2\pi A(\mu)$$

и т. д. В (32)

$$x_0 = (\varphi_0/\pi) S(\mu), \quad x_1 = (\varphi_1/\pi) S(\mu), \quad (33)$$

$$S(\mu) = 0,5 \ln A(\mu). \quad (34)$$

Отбрасывая в (22) члены с Δr_m , начиная с некоторого m , можно найти амплитуды N_p , а затем из (26)—величину C .

3. ОКОНЧАТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

a) *Вспомогательные величины* r_0 , $\delta_1 = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13}$, $\delta_2 = \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23}$ можно вычислить по формулам, приведенным в таблицах 1 и 2. Тип полости или номер рисунка, изображающего резонатор, отмечены в первых столбцах этих таблиц, а также непосредственно перед формулами (при наличии двойного знака).

В таблице 1 J_p —функция Бесселя, N_p —функция Неймана, I_0 , I_1 , K_0 , K_1 —модифицированные функции Бесселя [9], N —число резонаторов.

Приведенный способ расчета δ_1 и δ_2 является приближенным и справедлив при условии, что δ_1 , δ_2 , а также отдельные их составляющие

Таблица 1

	$r_0 = r_{e0}$	\hat{v}_{11}	\hat{v}_{12}	\hat{v}_{18}
\exists	$\frac{1}{\gamma_0 L \operatorname{th}(\gamma_0 W)};$	$\gamma_0 = \sqrt{\left(\frac{\varphi_0}{L}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi L}{\lambda \varphi_1}\right)^2$	0
M	$\frac{\operatorname{th}(\gamma_0 W)}{\gamma_0 L}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi L}{\lambda \varphi_1}\right)^2$	$\frac{\partial}{M} \pm 2\epsilon - \frac{2\varphi_1 W}{L}$	0
\exists	$B \pm \frac{1}{kL} \frac{J_p(kR_a) N'_p(kR_c) - N_p(kR_a) J'_p(kR_c)}{J'_p(kR_a) N'_p(kR_c) - N'_p(kR_a) J'_p(kR_c)}$	$\rho = \frac{N\varphi_0}{2\pi}$	$B \pm \left(\frac{2\pi L}{\lambda \varphi_1}\right)^2 \left(1 \pm \frac{2\pi}{N\varphi_1}\right)^{-1} \frac{\partial}{M} \pm 2\sigma N\varphi_1^{-1}; \sigma = \min \left(\frac{R_a}{R_c}, \frac{R_c}{R_a}\right)$	0
K	$B \pm \frac{1}{kL} \frac{J_p(kR_a) N_p(kR_c) - N_p(kR_a) J_p(kR_c)}{J'_p(kR_a) N_p(kR_c) - N'_p(kR_a) J_p(kR_c)}$	$k = 2\pi/\lambda$	$\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi L}{\lambda \varphi_1}\right)^2$	$\frac{\partial}{M} \pm 2\epsilon - \frac{2\varphi_1}{L} R_a - R_c $
M	$B \pm \frac{1}{\gamma_0 L} \frac{I_1(\gamma_0 R_a) K_0(\gamma_0 R_c) + K_1(\gamma_0 R_a) I_0(\gamma_0 R_c)}{I_0(\gamma_0 R_a) K_0(\gamma_0 R_c) - K_0(\gamma_0 R_a) I_0(\gamma_0 R_c)}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi L}{\lambda \varphi_1}\right)^2$	$B \mp 0,5 \frac{L}{\varphi_1 R_a}$	$B \mp 0,5 \frac{L}{\varphi_1 R_a}$
\exists	$B \pm \frac{1}{\gamma_0 L} \frac{I_1(\gamma_0 R_a) K_0(\gamma_0 R_c) + K_1(\gamma_0 R_a) I_0(\gamma_0 R_c)}{I_0(\gamma_0 R_a) K_0(\gamma_0 R_c) - K_0(\gamma_0 R_a) I_0(\gamma_0 R_c)}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi L}{\lambda \varphi_1}\right)^2$	$B \mp 0,5 \frac{L}{\varphi_1 R_a}$	$B \mp 0,5 \frac{L}{\varphi_1 R_a}$
A	$B \pm \frac{1}{\gamma_0 L} \frac{I_1(\gamma_0 R_a) K_1(\gamma_0 R_c) - K_1(\gamma_0 R_a) I_1(\gamma_0 R_c)}{I_0(\gamma_0 R_a) K_1(\gamma_0 R_c) + K_0(\gamma_0 R_a) I_1(\gamma_0 R_c)}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi L}{\lambda \varphi_1}\right)^2$	$B \mp 0,5 \frac{L}{\varphi_1 R_a}$	$B \mp 0,5 \frac{L}{\varphi_1 R_a}$

$\delta_{11}, \delta_{12}, \dots$ не превышают $\sim 0,1$; для резонатора, изображенного на рис. 4б, требуется еще выполнение неравенства $0,5 (2R' a/\lambda)^2 \times \times (1-a/\pi)^{-1} < 0,1$.

б) Амплитуды двух пространственных гармоник с наибольшими фазовыми скоростями $N_0 = N_{e0}$ и $N_1 = N_{e1}$. В таблице 3 даны формулы с учетом δ_0 и δ_1 , в таблице 4—с учетом только δ_0 . Поскольку большая точность при расчете амплитуд не нужна, можно пользоваться таблицей 4. Уже формулы таблицы 4, в отличие от формул из [2-4], выявляют зависимость амплитуд N_0, N_1 от длины волны λ и ширины пространства взаимодействия W . Следует, однако, заметить, что точное равенство $N_0|_{\varphi=\pi} = N_1|_{\varphi=\pi}$ при использовании таблицы 4 выполняется лишь приближенно.

в) Величина $C = Y_{bx}/i\omega\epsilon_0$. Точность формулы для C характеризуем ошибкой $\delta_\omega = \Delta\omega/\omega$, возникающей при определении частоты ω по значению величины $Y_{bx} = i\omega\epsilon_0 C$. Ошибка при определении ω из дисперсионного уравнения всегда меньше, чем δ_ω .

Таблица 2

	δ_{21}	δ_{22}	σ_{23}
4а	$\frac{1}{2} \left(\frac{2l}{\lambda} \right)^2$	$2e^{-2\pi p/l}$	0
4б, в	$\frac{46}{48} \frac{1}{2} \left(\frac{2l}{\lambda} \right)^2 \left(1 \mp \left(\frac{a}{\pi} \right) \right)^{-1}$	$2\sigma_p^{2\pi/a}; \sigma_p = \min \left(\frac{R_a'}{R'}, \frac{R'}{R_a'} \right)$	0
4г, д	$\frac{1}{2} \left(\frac{2l}{\lambda} \right)^2$	$2e^{-\frac{2\pi}{l} R' - R_a }$	$4\text{г} \pm \frac{0,5l}{\pi R_a}$

Таблица 3

$$\begin{aligned} N_0 &= n_0 \frac{1 + \mu^2 (\varphi_0/2\pi) M_1}{1 - \mu^4 (\varphi_0\varphi_1/4\pi^2) M_0 M_1} & N_1 &= n_1 \frac{1 + \mu^2 (\varphi_1/2\pi) M_0}{1 - \mu^4 (\varphi_0\varphi_1/4\pi^2) M_0 M_1} \\ n_0 &= \frac{T_0}{1 + Z_{00}\Delta r_0} = \frac{1/r_0}{(1/r_0) \operatorname{ch} x_0 + \varphi_0 \operatorname{sh} x_0} & n_1 &= \frac{T_1}{1 + Z_{11}\Delta r_1} = \frac{1}{\operatorname{ch} x_1 + (1 + \delta_1) \operatorname{sh} x_1} \\ M_0 &= \frac{\varphi_0 T_0^2 \Delta r_0}{1 + Z_{00}\Delta r_0} = \frac{\varphi_0 \operatorname{ch}^{-2} x_0}{(1/r_0) + \varphi_0 \operatorname{th} x_0} - 1 + \operatorname{th} x_0 & M_1 &= \frac{\varphi_1 T_1^2 \Delta r_1}{1 + Z_{11}\Delta r_1} = n_1 T_1 \delta_1 \end{aligned}$$

Таблица 4

$$N_0 = n_0 \quad N_1 = T_1 \left(1 + \mu^2 \frac{\varphi_1}{2\pi} M_0 \right)$$

Формула для C с учетом только δ_0 имеет вид:

$$C = C_n(\mu) + \Psi(\varphi) + D_0 - d, \quad (35)$$

где

$$C_n(\mu) = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \ln \frac{1 + \mu}{1 - \mu} + 2 \ln \frac{1 - \mu^2}{4\mu} \right]; \quad (36)$$

$$\Psi(\varphi) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\varphi_0}{2\pi} \right)^2 \left[\frac{1}{1 - (\varphi_0/2\pi)^2} + 0,202 \right]; \quad (37)$$

$$D_0 = \frac{\operatorname{ch}^{-2} x_0}{(1/r_0) + \varphi_0 \operatorname{th} x_0}; \quad (38)$$

$$d = \frac{1}{\pi} S(\mu) \left(1 - \frac{\operatorname{th} x_0}{x_0} \right). \quad (39)$$

Более точная формула—с точностью до линейных относительно δ_1 , δ_2 членов (члены с $\delta_1\delta_2$ отброшены)—имеет вид:

$$C = C_n(\mu) + \Psi(\varphi) + D - d + \vartheta, \quad (40)$$

где

$$\vartheta = \frac{1}{\varphi_1} T_1^2 \delta_1 + \left(1 - \frac{\varphi_0}{\pi} \right)^2 \frac{2}{\pi} e^{-2\pi C_\infty(\mu)} \delta_2; \quad (41)$$

$$D = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x_0} \frac{1 + (\varphi_0 - 1/r_0) [\eta - (1/\pi) S(\mu) \varepsilon] (1 + \operatorname{th} x_0)^{-1}}{\frac{1}{r_0} + \varphi_0 \operatorname{th} x_0 - (\varphi_0 - 1/r_0) \varepsilon x_0}; \quad (42)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\operatorname{ch} x_0} \left[\frac{\mu^4}{2A(\mu) S(\mu)} \frac{\varphi_1}{2\pi} T_1 \delta_1 + \frac{2}{S(\mu)} e^{-2\pi C_\infty(\mu)} T_0 \delta_2 \right]; \quad (43)$$

$$\eta = \frac{\mu^2}{\pi} T_1^2 \delta_1 + 2 \left(1 - \frac{\varphi_0}{\pi} \right) \frac{2}{\pi} e^{-2\pi C_\infty(\mu)} \delta_2. \quad (44)$$

В случае резонаторных замедляющих систем с П или К полостями при условиях

$$\lambda > 10L, \quad W > L, \quad (45)$$

обычно выполняющихся в электронных приборах СВЧ, ошибка δ_ω формулы (35) (как показывает сравнение с более точной формулой (40)) не превышает 2,5%, так что формула (35) проще и точнее формул из [2-4]. Ошибка δ_ω формулы (40) по порядку величины не превышает $\max(\delta_1, \delta_2)$.

Заметим, что, добавив к правой части (35) величину ϑ (41), получим формулу, пригодную при $W > 0,5L$, $\lambda > 10L$ с ошибкой в δ_ω меньше 1,5%. При $\mu < 0,6$ или при $(\varphi_0/\pi) < 0,17$ в (35) и (40) можно отбросить величину d с ошибкой, меньшей 0,5%.

ПРИЛОЖЕНИЕ

КОМПЛЕКСНЫЕ ДВУХМЕРНЫЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ $E(x, y)$ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Каждому электростатическому полю $E(x, y)$ в области, свободной от зарядов, можно сопоставить [10] аналитические функции $F(z) = E_x - iE_y$, $\Phi(z) = u - ih$ комплексного переменного $z = x + iy$ (x, y —декартовы координаты). Здесь электростатический потенциал u определяется равенством $E = -\operatorname{grad} u$, а величина h —равенствами (5). Комплексному электростатическому полю $E = E_I + iE_{II}$ поставим в соответствие следующие пары аналитических функций: F_I , F_{II} и Φ_I , Φ_{II} , определяемые вещественной и мнимой частями E_I и E_{II} вектора E , а также $F_+ = F$, F_- и $\Phi_+ = \Phi$, Φ_- , определяемые исходным полем $E_+ = E = E_I + iE_{II}$ и комплексно-сопряженным полем $E_- = E^* = E_I - iE_{II}$. Между величинами с индексами I, II, +, — имеют место очевидные соотношения:

$$B_I = \frac{1}{2} (B_+ + B_-); \\ iB_{II} = \frac{1}{2} (B_+ - B_-), \quad (\text{П.1})$$

в котором под B можно понимать любую из величин F , Φ , E , u , h и ρ ($\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} E$ — плотность заряда). Из определения функций F и Φ и соотношения (П.1) следует, что исходное поле E однозначно определяется любой из указанных выше пар функций.

Функцию Φ назовем аналитическим потенциалом. Обычное название (комплексный потенциал [10]) может привести к путанице, так как электростатический потенциал $u(x, y)$ считается теперь комплексным. Функция F однозначна; функция Φ связана с F соотношением $F = -d\Phi/dz$ [10] и, вообще говоря, неоднозначна.

2. Пусть поле E удовлетворяет условию Флоке (1) при $\varphi \neq 0$. Наложение условия (1) и на потенциал u этого поля приводит к однозначному определению последнего. Если, кроме того, область, в которой задано поле E , односвязна или охватывает только незаряженные проводники, то наложение условия (1) на h однозначно определит h , а следовательно, и аналитический потенциал $\Phi = u - ih$. Таким образом, все величины с индексами + и —, а вследствие (П.1), и с индексами I и II при этом определяются однозначно. Пример области указанного типа — правая полуплоскость $x > 0$, не содержащая зарядов и проводников.

3. Заряд Q , охватываемый контуром L , выражается [11] через контурный интеграл:

$$Q = \frac{\epsilon_0}{i} \oint_L \dot{F}(z) dz. \quad (\text{П.2})$$

Функция F для поля точечного заряда $Q = 2\pi\epsilon_0$, находящегося в начале координат, как легко проверить, имеет вид:

$$F = 1/z. \quad (\text{П.3})$$

4. Простейшее поле, удовлетворяющее условию Флоке, — поле цепочки зарядов $Q_m = 2\pi\epsilon_0 e^{im\varphi}$, расположенных в точках $z = 2\pi i m$ (m — целое число). Функции F и Φ для этого случая обозначим через f_1 и f_0 соответственно. Функция f_1 однозначно определяется (при $\varphi \neq 0$) следующими требованиями: 1) $f_1(z + 2\pi i) = e^{i\varphi} f_1(z)$ (условие Флоке), 2) $f_1(z) \approx 1/z$ при $z \approx 0$, 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(z) = 0$. Этим требованиям удовлетворяют выражения $f_1 = f_{1,+} = -e^{\varphi z/2\pi}/(1 - e^z)$ при $\varphi > 0$ и $f_{1,-} = e^{\varphi z/2\pi}/(1 - e^{-z})$ при $\varphi < 0$.

5. Рассмотрим конформное отображение некоторой области плоскости z на область плоскости ξ . Аналитические потенциалы $\Phi_I[z(\xi)]$, $\Phi_{II}[z(\xi)]$ порождают в плоскости ξ поле $E(\xi) = -\operatorname{grad} \operatorname{Re} \Phi_I[z(\xi)] - i \operatorname{grad} \operatorname{Im} \Phi_{II}[z(\xi)]$. При этом потенциалы u полей $E(z)$ и $E(\xi)$ в соответственных точках плоскостей z и ξ и потоки этих полей через соответственные контуры равны (тем самым, равны заряды соответствующих друг другу проводников).

При выполнении условий $\Phi(z + iL) = e^{i\varphi} \Phi(z)$, $\Phi_-(z + iL) = e^{-i\varphi} \Phi_-(z)$ (см. раздел 1) и $\xi(z + iL) = \xi(z) + \xi_L$ в плоскости ξ справедливы условия Флоке, имеющие вид: $\Phi(\xi + \xi_L) = e^{i\varphi} \Phi(\xi)$, $\Phi_-(\xi + \xi_L) = e^{-i\varphi} \Phi_-(\xi)$.

6. Аналитическими потенциалами

$$\hat{\Phi}_I = -i\Phi_I = -h_I - iu_I, \quad \hat{\Phi}_{II} = -i\Phi_{II} = -h_{II} - iu_{II} \quad (\text{П.4})$$

определяется новое поле $\hat{E} = \hat{E}_I + i\hat{E}_{II}$, векторы которого \hat{E}_I и \hat{E}_{II} получаются в результате поворота векторов E_I , E_{II} исходного поля

на 90° против часовой стрелки. Если исходное поле не охватывало зарядов или охватывало лишь незаряженные проводники, циркуляция нового поля \hat{E} будет равна нулю, и его можно считать новым электростатическим полем.

7. Обозначим через D область, в которой задано электростатическое поле E , а через AB —прямолинейный отрезок силовой линии, принадлежащий границе области D . Зеркально отобразив в прямой AB векторы E_1 и E_{II} , получим непрерывное продолжение поля E и аналитических функций F_1 и F_{II} через отрезок AB на область D' , симметричную D относительно AB . Вследствие принципа непрерывного продолжения [10] при этом получим аналитические функции F_1 , F_{II} и соответствующее им электростатическое поле E во всей области $D + D' + AB$.

8. Пусть область D , где задано поле E , ограничена отрезком прямой AC , часть которого AB находится при потенциале u_A , а остальная часть BC —при потенциале u_C . Для повернутого поля \hat{E} отрезки AB и AC будут силовыми линиями. Аналитически продолжив поле E через прямую AC и вычислив поток этого поля через малый контур, охватывающий точку B , убедимся в том, что здесь появится точечный заряд

$$Q_B = 2\epsilon_0 (u_A - u_C) \quad (\text{П.5})$$

(считаем, что при обходе границы в направлении ABC область остается слева).

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник по волноводам, пер. с англ., изд. Сов. радио, М., 1952.
2. W. Kieep, *Electronics of microwave tubes*, Academic Press Inc., New York, London, 1958.
3. Магнетроны сантиметрового диапазона, пер. с англ., 1, изд. Сов. радио, М., 1950.
4. В. М. Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками, Гостехиздат, М., 1953.
5. W. Walkins haw, J. Appl. Phys., **20**, 634 (1949).
6. Ш. Е. Цимлинг, Радиотехника и электроника, 2, 969 (1957).
7. Р. М. Леонтьева, Радиотехника, 12, 36 (1957).
8. И. Ш. Белуга, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 84 (1959).
9. Г. Б. Двайт, Таблицы интегралов и другие математические формулы, ИЛ, М., 1948.
10. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1958.
11. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, 1, ИЛ, М., 1958.

Поступила в редакцию
10 сентября 1960 г.

RESONATOR DELAYING SYSTEMS DESIGN BY THE EQUIVALENT STATIC METHOD

I. Sh. Belouga

The equivalent static method for the calculating of waveguide connections [1] is generalized for the case of periodic structures and utilized for the finding out the input conductance of interaction space and amplitudes of electromagnetic field space harmonics. In this connection the well known method of the investigating of two-dimensional electrostatic fields with the help of analytical functions is generalized for the case of complex fields, in particular, fields satisfying the Flocke condition [1].

О СПИРАЛЬНЫХ ВОЛНАХ В СПИРАЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

В. П. Шестопалов, А. И. Адонина

С помощью усредненных граничных [1,2] условий получены дисперсионные уравнения и формулы для затухания TE - и TH -спиральных волн в ленточном спиральном волноводе.

ВВЕДЕНИЕ

В большинстве работ, посвященных исследованию распространения электромагнитных волн в спиральном волноводе, предполагается, что пространство, в котором определяется структура поля, обладает цилиндрической симметрией. Применение цилиндрических координат для решения уравнений Максвелла в спиральном волноводе не позволяет разделить электромагнитное поле на TE - и TH -волны; в системе существуют волны, у которых все компоненты поля отличны от нуля. Попытки разделить эти волны на TE и TH носят условный характер [3].

Если уравнения Максвелла записать в специально выбранной спиральной системе координат [4], то электромагнитные волны в спиральном волноводе естественным образом разделяются на два типа волн, которые по аналогии с волнами сплошного цилиндрического волновода можно назвать спиральными TE - и TH -волнами.

Как известно, в цилиндрической системе координат семейство коаксиальных цилиндров $r = \text{const}$ ортогонально семействам плоскостей $z = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ (рис. 1). В спиральной системе координат [4], оставляя по-прежнему семейство коаксиальных цилиндров $r = \text{const}$, вместо параллельных плоскостей $z = \text{const}$ вводится семейство спиральных поверхностей, определяемых уравнением $z = \text{const} + p\varphi/2\pi$, где p —период спиральной поверхности. Координата z в цилиндрической системе координат заменяется координатой $\zeta = z - p\varphi/2\pi$, параллельной z . Семейство $\zeta = \text{const}$ образует второе семейство координатных поверхностей спиральной системы координат. Семейство $\varphi = \text{const}$ образует третью серию координатных поверхностей.

В дальнейшем вместо координаты φ целесообразно пользоваться координатой Φ (рис. 1). Координата Φ численно равна φ , но в то время, как φ изменяется в плоскости $z = \text{const}$, Φ изменяется по спиральной поверхности $\zeta = \text{const}$. Длина дуги в спиральной системе координат записывается в виде

$$ds^2 = dr^2 + (r^2 + p^2/4\pi^2)d\Phi^2 + d\zeta^2 + \frac{p}{\pi} d\Phi d\zeta. \quad (1)$$

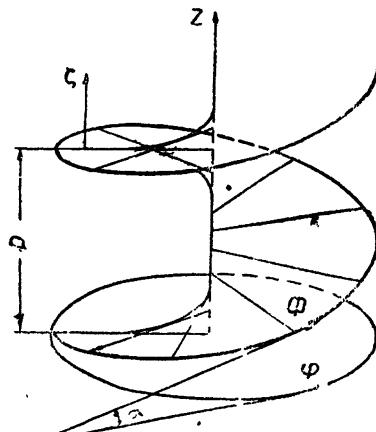


Рис. 1. Цилиндрические и спиральные координаты.

Заметим, что спиральная система координат—не ортогональная система.

Волновое уравнение в спиральной системе координат записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Phi^2} + \left(1 + \frac{p^2}{4\pi^2 r^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{p}{2\pi r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta \partial \Phi} + k^2 \psi = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) может быть выбрано в форме:

$$\psi = R(r)P(\Phi)Z(\zeta),$$

причем переменные разделяются только в том случае, если

$$Z''/Z = - h^2; \quad \frac{P''}{P} = - n^2; \quad \frac{P'Z'}{PZ} = - nh.$$

В спиральной системе координат можно выразить все компоненты поля через комбинации компонент

$$E_\zeta + E_\Phi \sin \alpha, \quad H_\zeta + H_\Phi \sin \alpha$$

подобно тому, как в цилиндрической системе координат для сплошного металлического волновода поперечные составляющие поля выражаются через E_z и H_z .

Эти комбинации представляют собой не что иное, как продольные составляющие электрического и магнитного полей в цилиндрической системе координат. Если положить $E_\zeta + E_\Phi \sin \alpha = 0$, то все компоненты поля в спиральной системе координат будут выражены через $H_\zeta + H_\Phi \sin \alpha$. По аналогии с цилиндрическими волнами этот тип волн называется TH -спиральными волнами. Если же $H_\zeta + H_\Phi \sin \alpha = 0$, то это TE -спиральные волны.

Продольные составляющие электрического и магнитного полей удовлетворяют уравнению (2), и, следовательно, решение для них можно записать в виде:

$$E_\zeta + E_\Phi \sin \alpha = \{ AJ_0(\gamma r) + BN_0(\gamma r) \} e^{i\omega t} e^{-ih\zeta} e^{-in\Phi}; \\ H_\zeta + H_\Phi \sin \alpha = \{ CJ_0(\gamma r) + DN_0(\gamma r) \} e^{i\omega t} e^{-ih\zeta} e^{-in\Phi}. \quad (3)$$

H_{nm} - СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

В работе [4] рассмотрен вопрос о распространении спиральных волн в спиральном волноводе, намотанном из бесконечно тонкого проводника. Границные условия задачи в этом случае сводятся к равенству нулю напряженности электрического поля вдоль направления спиральной нити. Для ленточного спирального волновода можно использовать усредненные граничные условия, полученные в работе [1] и примененные в ряде других работ [2, 5, 6] для исследования распространения волн, обладающих цилиндрической симметрией.

На рис. 2 указаны геометрические параметры исследуемого волновода. В случае H_{nm} -спиральных волн

$$E_\zeta + E_\Phi \sin \alpha = 0,$$

а $H_\zeta + H_\Phi \sin \alpha$ определяется из волнового уравнения (2) и записывается в виде второго равенства (3). Используя уравнения Максвелла в спиральной системе координат, находим все компоненты поля во внутренней (индекс 1) и внешней (индекс 2) областях волновода:

$$\begin{aligned}
 E_{r1} &= B_1 \frac{k_y}{\gamma^2 r} J_v(\gamma r); & E_{r2} &= B_2 \frac{k_y}{\gamma^2 r} H_v^{(2)}(\gamma r); \\
 E_{\Phi 1} &= B_1 \frac{ik}{\gamma \cos \alpha} J'_v(\gamma r); & E_{\Phi 2} &= B_2 \frac{ik}{\gamma \cos \alpha} H_v^{(2)'}(\gamma r); \\
 E_{\zeta 1} &= -B_1 \frac{ikp}{2\pi\gamma r} J'_v(\gamma r); & E_{\zeta 2} &= -B_2 \frac{ikp}{2\pi\gamma r} H_v^{(2)'}(\gamma r); \\
 H_{r1} &= B_1 \frac{ih}{\gamma} J'_v(\gamma r); & H_{r2} &= B_2 \frac{ih}{\gamma} H_v^{(2)'}(\gamma r); \\
 H_{\Phi 1} &= -B_1 \frac{hv}{\gamma^2 r \cos \alpha} J_v(\gamma r); & H_{\Phi 2} &= -B_2 \frac{hv}{\gamma^2 r \cos \alpha} H_v^{(2)}(\gamma r); \\
 H_{\zeta 1} &= B_1 \left(1 + \frac{ph v}{2\pi\gamma^2 r^2} \right) J_v(\gamma r); & H_{\zeta 2} &= B_2 \left(1 + \frac{ph v}{2\pi\gamma^2 r^2} \right) H_v^{(2)}(\gamma r).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Сомножитель $\exp\{i\omega t - ih\zeta - in\Phi\}$ в (4) везде опускается.

Границные условия задачи имеют вид:

$$\begin{aligned}
 E_{s1}(a) &= E_{s2}(a); \\
 E_s(a) &= -\frac{1}{2} i k l' \left\{ H_{\tau 1}(a) - H_{\tau 2}(a) + \frac{i}{k} \operatorname{grad}_s [E_{n1}(a) - E_{n2}(a)] \right\},
 \end{aligned} \tag{5}$$

где s , τ , n —единичные векторы (s направлен вдоль ленты спирали, τ ортогонален s , n перпендикулярен плоскости, в которой лежат s и τ), $l' = (p/\pi) \ln \sin(\pi b/p)$ (p —шаг спирали, $2b$ —ширина металлической ленты).

Учитывая, что

$$E_s = E_\Phi + E_\zeta \sin \alpha; \quad H_\tau = H_\zeta \cos \alpha; \quad \operatorname{grad}_s E_n = -\frac{in}{r} E_r \cos \alpha, \tag{6}$$

перепишем граничные условия следующим образом:

$$E_{\Phi 1}(a) + E_{\zeta 1}(a) \sin \alpha = E_{\Phi 2}(a) + E_{\zeta 2}(a) \sin \alpha; \tag{7}$$

$$E_\Phi(a) + E_\zeta(a) \sin \alpha = -\frac{1}{2} i k l' \left\{ H_{\zeta 1}(a) - H_{\zeta 2}(a) + \frac{n}{ka} [E_{r1}(a) - E_{r2}(a)] \right\} \cos \alpha.$$

Подставляя в (7) значение компонент полей из (4), получим дисперсионное уравнение для H_{nm} -спиральных волн:

$$J'_v(x) = ix_1 \frac{1}{H_v^{(2)'}(x)} \left[1 + \frac{hv}{x^2} \operatorname{tg} \alpha + \frac{n v}{x^2} \right], \tag{8}$$

где

$$x = \gamma a; \quad \gamma^2 = k^2 - h^2; \quad k = \frac{\omega}{c}; \quad h = \frac{\omega}{v_\Phi};$$

$$v = n - \frac{ph}{2\pi}; \quad x_1 = -\frac{p}{\pi^2 a} \ln \sin \frac{\pi b}{p}.$$

Индексы функций Бесселя в (8) $v = n - ph/2\pi$ —дробные; кроме того, v содержит неизвестную величину $h = \omega/v_\Phi$. Так как h —комплексная величина, то индексы функций Бесселя v —также комплексные величины. Таким образом, в дисперсионном уравнении (8) комплекс-

ными величинами являются аргументы ($\gamma^2 = k^2 - h^2$) и индексы функций Бесселя.

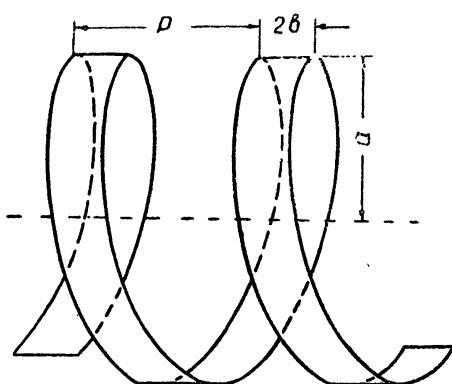


Рис. 2. Спиральный волновод.

спиральный волновод заменяется спирально-проводящим цилиндром. Следовательно, дисперсионное уравнение для спирального волновода с граничными условиями анизотропно-проводящего цилиндра и дисперсионное уравнение для спиральных волн сплошного металлического волновода совпадают. Если требуется определить затухание спиральных волн в спиральном волноводе за счет излучения через щели, то использовать уравнения (9) нельзя.

Интересно также отметить, что (8) напоминает дисперсионное уравнение для цилиндрических H_{nm} -волн в кольцевом волноводе, полученное в работе [2]. Отличие заключается только в том, что в правой части уравнения (8) входит член, содержащий угол намотки спирали α . Таким образом, существует, по-видимому, аналогия между цилиндрическими H_{nm} -волнами кольцевого волновода и спиральными H_{nm} -волнами спирального волновода.

Случай $x_1 \ll 1$ представляет интерес при анализе работы фильтров, используемых в волноводных линиях передачи. При очень узких щелях в спиральном волноводе можно считать, что

$$h = h_0 + \Delta, \quad (10)$$

где h_0 — продольная постоянная распространения спиральной волны с шагом p в сплошном металлическом волноводе, Δ — малая добавка, определяемая отклонениями спирального волновода со щелями от сплошного волновода. Поскольку

$$\gamma = \sqrt{k^2 - h^2} = \sqrt{k^2 - (h_0 + \Delta)^2} = \gamma_0 - \frac{\Delta}{2\gamma_0} (2h_0 - \Delta), \quad (11)$$

поперечная постоянная распространения γ_0 спиральной волны в спиральном волноводе также отличается на малую величину от поперечной постоянной распространения спиральной волны в цилиндрическом волноводе.

Производя соответствующие разложения в (8) вблизи $x_0 = \gamma_0 a$ и используя асимптотические выражения

$$J_v(x_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi x_0}} \cos \left(x_0 - \frac{\pi}{4} - v \frac{\pi}{2} \right); \\ N_v(x_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi x_0}} \sin \left(x_0 - \frac{\pi}{4} - v \frac{\pi}{2} \right), \quad (12)$$

В случае $x_1 \ll 1$ (это соответствует узким щелям в спиральном волноводе при малом шаге спирали) уравнение (8) в первом приближении ($x_1=0$) превращается в дисперсионное уравнение для H_{nm} -спиральной волны в цилиндрическом волноводе:

$$J'_q(x_0) = 0, \quad (9)$$

где

$$x_0 = \gamma_0 a = a \sqrt{k^2 - h_0};$$

$$q = n - ph_0/2\pi.$$

Отметим, что (9) получается также при равенстве нулю второго граничного условия (5), т. е. когда

получим после подстановки (10)–(12) в (8) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x_1 и $\eta = \operatorname{tg} \alpha = p/2\pi a$ следующие выражения для постоянной распространения H_{nm} -спиральной волны в спиральном волноводе:

$$\begin{aligned} h_{H_{nm}} = h_0 + y_1 x_1 + y_1^2 x_1^2 & \left\{ \frac{1}{2h_0} + \frac{a^2 h_0}{x_0} \frac{(n^2/x_0^3)(n-1) - (1/x_0)(n+1)}{1+n^2/x_0^2} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{a^2 h_0}{x_0} \frac{(n/x_0^3)(2-3n+n^2) - (n/x_0^3)(n^2+1) + n/x_0 - (1/x_0)(n-1)}{n^2/x_0^2 - 1} + \\ & \left. + 2 \frac{a^2 h_0}{x_0^2} - 2 \frac{a^2 h_0}{x_0^2 + n^2} + i \frac{a^2 h_0}{x_0} \frac{n^2/x_0^2 - 1}{n^2/x_0^2 + 1} \right\} - \\ & - y_1 x_1 \eta \left\{ \frac{1 + \pi x_0/2}{ah_0(n^2/x_0^2 - 1)} + 4 \frac{ah_0 n}{1 + n^2/x_0^2} - \frac{\pi}{2} \frac{n}{ay_1} \frac{1}{n^2/x_0^2 - 1} \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $y_1 = \pi(x_0^2 + n^2)/2a^2 h_0(n^2/x_0^2 - 1)$. Для аксиально-симметричной волны ($n=0$) выражение для h значительно упрощается:

$$h_{H_{01}} = h_0 = y_1 x_1 + y_1^2 x_1^2 \left(\frac{1}{2h_0} - \frac{3}{2} \frac{a^2 h_0}{x_0^2} - i \frac{a^2 h_0}{x_0} \right) + y_1 x_1 \eta \frac{1 + \pi x_0/2}{ah_0}, \quad (14)$$

где

$$y_1 = -\pi x_0^2 / 2a^2 h_0.$$

Из формулы (13) определяется фазовая скорость и затухание H_{nm} -спиральных волн в спиральном волноводе. Затухание волны пропорционально $\operatorname{Im} h$ и определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta = 20 \lg \frac{E(0)}{E(1)} & = -8,686 \operatorname{Im} h \text{ (дБ·м⁻¹);} \\ \operatorname{Im} h & = y_1^2 x_1^2 \frac{a^2 h_0}{x_0} \frac{n^2/x_0^2 - 1}{n^2/x_0^2 + 1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь x_0 — корни дисперсионного уравнения для спиральной волны в спиральном волноводе (9). Определить эти корни можно графическим способом. Для этого необходимо использовать (12) и записать (9) в виде:

$$\operatorname{tg}(x_0 - \pi/4 - q\pi/2) = q/x_0. \quad (16)$$

Точки пересечения кривых, построенных соответственно для левой и правой части (16), дадут искомое значение x_0 .

Таблица 1

Тип волны	p	a	λ_0	h_0	x_0
H_{01}	0,2	1	0,8	7,03	3,493
H_{02}	0,2	2	0,8	7,11	6,66
H_{01}	0,2	2	0,8	7,65	3,53
H_{01}	0,5	2	0,8	7,725	2,798

В таблице 1 представлены значения h_0 и x_0 спиральной волны с шагом p в цилиндрическом волноводе радиуса a .

На рис. 3 приведены графики затухания H_{nm} -спиральных волн в спиральном волноводе, построенные по формуле (15). Из графиков видим, что при увеличении шага спирали и уменьшении радиуса волновода затухание H_{01} -спиральной волны увеличивается. Затухание H_{02} -спиральной волны на порядок больше затухания H_{01} -волны при одинаковых параметрах спирального волновода.

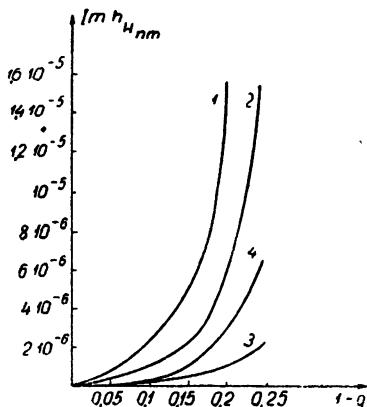


Рис. 3. Зависимость затухания H_{nm} -спиральных волн от коэффициента заполнения $g=2b/p$ в спиральном волноводе.

Из формулы (13) можно определить изменение фазовой скорости H_{nm} -спиральных волн в спиральном волноводе по сравнению с фазовой скоростью спиральной волны в сплошном волноводе. Для H_{01} -спиральной волны это изменение равно

$$h = h_0 + \operatorname{Re} \Delta = h_0 + y_1 x_1 + y_1^2 x_1 \left(\frac{1}{2h_0} - \frac{3}{2} \frac{a^2 h_0}{x_0^2} \right) + y_1 x_1 \eta \frac{1 + \pi x_0 / 2}{ah_0}. \quad (17)$$

Поскольку $\operatorname{Re} \Delta \sim x_1 \sim 10^{-4} \div 10^{-3}$, то изменение фазовой скорости будет очень малым.

E_{nm} -СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

Для E_{nm} -спиральных волн продольная составляющая магнитного поля равна нулю:

$$H_\zeta + H_\Phi \sin \alpha = 0,$$

а продольная составляющая электрического поля с помощью решения волнового уравнения (2) записывается в форме, определяемой (3). Компоненты поля внутри и вне спирального волновода можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{r1} &= A_1 \frac{i h}{\gamma} J'_v(\gamma' r); & E_{r2} &= A_2 \frac{i h}{\gamma'} H_v^{(2)}(\gamma' r); \\ E_{\Phi 1} &= -A_1 \frac{h v}{\gamma'^2 r \cos \alpha} J_v(\gamma' r); & E_{\Phi 2} &= A_2 \frac{h v}{\gamma'^2 r \cos \alpha} H_v^{(2)}(\gamma' r); \\ E_{\zeta 1} &= A_1 \left(1 + \frac{p h v}{2\pi \gamma'^2 r^2} \right) J_v(\gamma' r); & E_{\zeta 2} &= A_2 \left(1 + \frac{p h v}{2\pi \gamma'^2 r^2} \right) H_v^{(2)}(\gamma' r); \\ H_{r1} &= -A_1 \frac{k v}{\gamma'^2 r} J_v(\gamma' r); & H_{r2} &= -A_2 \frac{k v}{\gamma'^2 r} H_v^{(2)}(\gamma' r); \end{aligned} \quad (18)$$

$$H_{\Phi 1} = -A_1 \frac{ik}{\gamma' \cos \alpha} J'_v(\gamma' r); \quad H_{\Phi 2} = -A_2 \frac{ik}{\gamma' \cos \alpha} H_v^{(2)\prime}(\gamma' r);$$

$$H_{\zeta 1} = A_1 \frac{ikp}{2\pi\gamma' r} J'_v(\gamma' r); \quad H_{\zeta 2} = A_2 \frac{ikp}{2\pi\gamma' r} H_v^{(2)\prime}(\gamma' r).$$

Сомножитель $\exp(i\omega t - in\zeta - in\Phi)$ в (18) везде опущен.

Границные условия имеют вид:

$$E_{s1}(a) = E_{s2}(a); \quad (19)$$

$$H_{s1}(a) - H_{s2}(a) = 2ikl'' \left\{ E_\tau(a) - \frac{i}{k} \operatorname{grad}_s H_n(a) \right\},$$

где

$$l'' = (p/\pi) \ln \cos(\pi b/p); \quad \gamma'^2 = k^2 - h'^2; \quad h' = \omega/v_\phi'.$$

В спиральных координатах (19) перепишется в форме:

$$E_{\Phi 1}(a) + E_{\zeta 1}(a) \sin \alpha = E_{\Phi 2}(a) + E_{\zeta 2}(a) \sin \alpha; \quad (20)$$

$$H_{\Phi 1}(a) + H_{\zeta 1}(a) \sin \alpha - H_{\Phi 2}(a) - H_{\zeta 2}(a) \sin \alpha = 2ikl'' \left\{ E_\zeta(a) - \frac{n}{ka} H_r(a) \right\} \cos \alpha.$$

Подставляя выражения (18) в (20), после преобразований получаем дисперсионное уравнение для E_{nm} -спиральных волн:

$$J_v(x') = \frac{ix_2}{x'^2 H_q^{(2)}(x')} \frac{1}{[1 + (h' v a/x'^2) \operatorname{tg} \alpha + n v / x'^2]}, \quad (21)$$

где $x_2 = 1/l''$. Уравнение (21) аналогично уравнению для цилиндрических E_{nm} -волн в кольцевом волноводе [2].

Предположим теперь, что $x_2 \ll 1$. Уравнение (21) будем решать также, как и дисперсионное уравнение (8) для H_{nm} -спиральных волн, используя при этом (12). В результате решение (21) представится в следующем виде:

$$h'_{E_{nm}} = h'_0 + y'_1 x_2 + y_1'^2 x_2^2 \left(\frac{h'_0}{2} + 2 \frac{a^2 h'_0}{x_0'^2 + n^2} - \frac{1}{2} \frac{a^2 h'_0}{x_0'^2} + \frac{a^2 h'_0 n}{x_0'^2} - i \frac{a^2 h'_0}{x_0'} \right) - y'_1 x_2 \eta \frac{\pi}{2} \frac{x'_0}{a h'_0}, \quad (22)$$

где

$$y'_1 = \frac{\pi}{2} \frac{x'_0}{a^2 h'_0 (x_0'^2 + n^2)}. \quad (23)$$

Мнимая часть $h_{E_{nm}}$ определяет затухание E_{nm} -спиральных волн в спиральном волноводе. Величины x'_0 и h'_0 находим из дисперсионного уравнения для E_{nm} -спиральных волн в сплошном металлическом волноводе:

$$J'_q(x'_0) = 0.$$

Заменяя $J'_q(x'_0)$ асимптотическим значением (12), получаем:

$$\cos(x'_0 - \pi/4 - q\pi/2) = 0$$

или

$$h'_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{16} + a^2 \right)^{-1} \left\{ \frac{p \pi}{2} \left(m + \frac{3}{4} + \frac{n}{2} \right) \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{\frac{p^2 \pi^2}{4} \left(m - \frac{1}{4} + \frac{n}{2} \right)^2 - 4 \left(a^2 + \frac{p^2}{16} \right) \left[\pi^2 \left(m + \frac{3}{4} + \frac{n}{2} \right)^2 - a^2 k^2 \right]} \right\} \quad (24)$$

(знак „+“ соответствует прямой волне, знак „—“ обратной волне; $m = 0, 1, 2, \dots$).

Распространение E_{nm} -спиральных волн в спиральном волноводе обладает рядом специфических особенностей. Прежде всего, так как h' пропорционально χ_2 , то с увеличением χ_2 (т. е. с уменьшением коэффициента заполнения $g = 2b/p$) увеличивается и h' , достигая значения $k = 2\pi/\lambda_0$, а затем превышая его. Если $h' = k$, то $\gamma' = 0$. Как только $h' > k$, величина γ' становится чисто мнимой, что соответствует случаю распространения медленных волн.

На рис. 4 представлены графики зависимости постоянной распространения $h'_{E_{11}}$ от коэффициента заполнения $g = 2b/p$. Назовем коэффи-

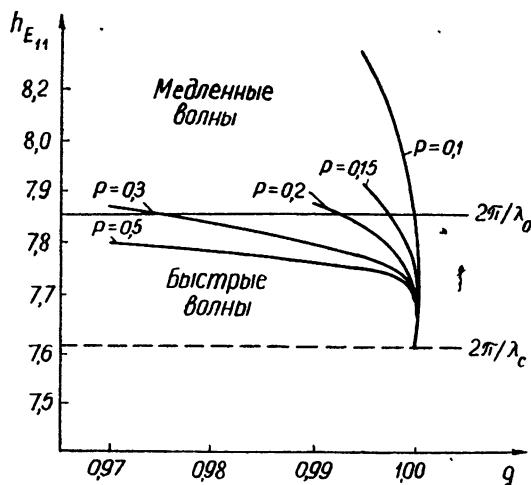


Рис. 4. Зависимость постоянной распространения h' от коэффициента заполнения $g = 2b/p$ для E_{11} -спиральной волны.

циент заполнения, при котором постоянная распространения спиральной волны $h'_{E_{nm}}$ равна постоянной распространения свободного пространства k , критическим коэффициентом заполнения. При увеличении шага спирали критический коэффициент заполнения уменьшается (рис. 4), т. е. при большом шаге спирального волновода волны будут быстрыми даже при относительно широких щелях. С уменьшением шага критический коэффициент заполнения увеличивается. При $2b/p \rightarrow 1$ постоянная распространения $h'_{E_{nm}}$ стремится к значению постоянной распространения для спиральной волны соответствующего шага в сплошном металлическом волноводе, всегда оставаясь больше $h_c = 2\pi/\lambda_c$ — постоянной распространения цилиндрической волны в сплошном металлическом волноводе.

На рис. 5 изображена кривая, точки которой соответствуют для данного p критическим значениям $g_{\text{крит}}$. Все точки, находящиеся выше этой кривой, соответствуют быстрым волнам, а ниже — медленным волнам. На рис. 6 представлены графики затухания E_{11} -спиральных волн (для $a = 2 \text{ см}$, $\lambda_0 = 0,8 \text{ см}$). Из графиков видим, что при уменьшении

p затухание E_{\parallel} волны сильно возрастает. Аналогичный характер распространения имеют все E_{nm} -волны, т. е. для всех типов E_{nm} -волн существуют такие значения $g_{\text{крит}}$, когда могут распространяться или быстрые или медленные спиральные волны.

Рис. 5. Зависимость критических значений коэффициентов заполнения от p для E_{\parallel} -спиральной волны.

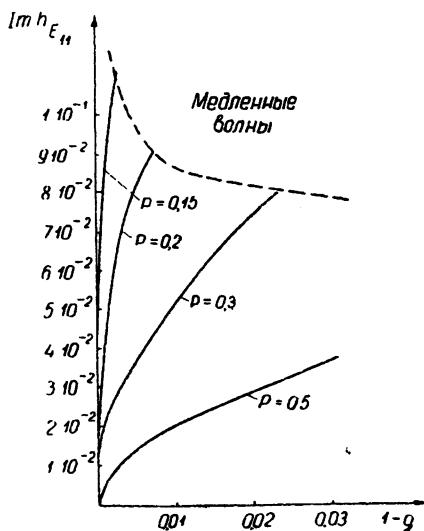
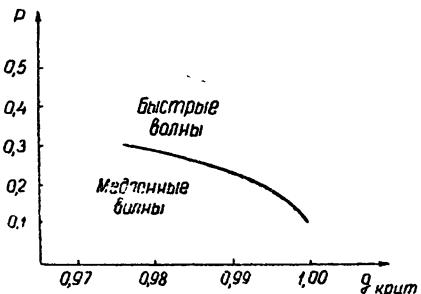


Рис. 6. Зависимость затухания E_{\parallel} -спиральной волны от коэффициента заполнения $g = 2b/p$ в спиральном волноводе.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Я. Мойжес, ЖТФ, 25, 454 (1955).
2. Н. Н. Смирнов, ЖТФ, 28, 1494 (1958).
3. Т. П. Волкова, Н. П. Керженцева, Радиотехника и электроника, 5, 1811 (1960).
4. R. A. Woldron, Quart J. mech. appl. math., 11, 4 (1958).
5. В. П. Шестопалов, Б. В. Кондратьев, ДАН СССР, 125, 794 (1959).
6. В. П. Шестопалов, Радиотехника и электроника, 5, 842 (1960).

Харьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
31 января 1961 г.

ON SPIRAL WAVES IN A SPIRAL WAVEGUIDE

V. P. Shestopalov, A. I. Adonina

By means of averaged boundary conditions [1,2] dispersion equations and attenuation formulas for TE and TH spiral waves were obtained in a tape spiral waveguide.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ В ШИРОКОМ ЭЛЕКТРОННОМ ПОТОКЕ

B. A. Солнцев

С помощью преобразования переменных рассмотрено распространение малого высокочастотного сигнала в широком прямолинейном электронном потоке, скорость которого изменяется по закону бегущей волны. Полученные результаты применены для анализа свойств параметрического усилителя и смесителя частоты с таким потоком. Найдены условия уменьшения коэффициента шума, величина усиления и другие характеристики усилителя.

В электронных параметрических усилителях с продольным взаимодействием, предложенных в работе [1], применяются прямолинейные потоки электронов, скорость которых под действием сигнала накачки изменяется по закону бегущей волны. Распространение малого высокочастотного сигнала в таких потоках и условия возникновения в них параметрического усиления рассматривались теоретически в [1-3] путем составления уравнений для амплитуд волн на комбинационных частотах, имеющихся в потоке. Однако, как показано в наиболее строгой работе [3], такой метод приводит в общем случае к бесконечной системе уравнений, решение которой затруднительно.

В настоящей работе рассматривается другой метод решения задачи, основанный не на записи уравнений для каждой из комбинационных частот, а на преобразовании исходных уравнений к новым переменным. Этот метод оказывается особенно полезным и позволяет получить ряд новых результатов прежде всего при анализе распространения волн в достаточно широких электронных потоках, где плазменная частота ω_p не зависит от частоты сигнала ω .

1. ВЫВОД И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Считая, что электроны движутся только в одном направлении (ось z), из уравнений движения и непрерывности нетрудно получить два нелинейных уравнения, связывающих скорость электронов v , плотность тока J и продольную компоненту электрического поля E :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \eta E; \quad (1)$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} + v \frac{\partial J}{\partial z} = \frac{J}{v} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (1a)$$

где η — отношение заряда к массе электрона.

Ввиду того, что на пучок действуют одновременно поле сигнала накачки E_0 и поле усиливаемого высокочастотного сигнала \tilde{E} , можно записать входящие в уравнения величины в виде суммы двух слагаемых:

$$E = E_0 + \tilde{E}, \quad J = J_0 + \tilde{J}, \quad v = v_0 + \tilde{v}, \quad (2)$$

где v_0 , J_0 — скорость электронов и плотность тока в пучке, модулированном только сигналом накачки (будем называть их нулевыми составляющими), а \tilde{v} и \tilde{i} — составляющие, возникающие под действием высокочастотного полезного сигнала.

Ограничивааясь теорией малого сигнала, будем в дальнейшем предполагать, что $\tilde{v} \ll v_0$, $\tilde{i} \ll J_0$. Тогда для нулевых составляющих v_0 , J_0 получим два уравнения нулевого приближения, совпадающих по форме с (1). Очевидно, что при произвольной высокочастотной накачке v_0 , J_0 зависят от времени и координат; если же накачка отсутствует, то они являются постоянными составляющими соответствующих величин. Здесь мы будем рассматривать поле накачки E_0 , распространяющееся вдоль пучка в виде волны с некоторой скоростью u , так что $E_0 = E_0(z - ut)$. Такая волна поля накачки может быть задана различными способами, например, возбуждением волн пространственного заряда на частоте накачки или же модуляцией пучка по всей его длине достаточно мощной электромагнитной волной, бегущей по специальной волноводной системе. Сюда же относится случай движения пучка в периодическом электростатическом поле, когда $u = 0$.

Нетрудно видеть, что при $E_0 = E_0(z - ut)$ уравнения нулевого приближения допускают решения вида бегущей волны $v_0 = v_0(z - ut)$, $J_0 = J_0(z - ut)$, для которых выполняются условия $v_0 \neq u$ или же, наоборот, $v_0 \equiv u$. Эти условия означают, что волна накачки ни в одной точке не синхронизована с пучком (или наоборот, полностью с ним синхронизована), так что нарастания группировки электронов вдоль пучка не происходит.

В дальнейшем рассматривается наиболее интересный для параметрического усиления случай, когда $v_0 \neq u^*$. При этом из уравнений нулевого приближения легко получить полезное для дальнейших расчетов соотношение между v_0 и J_0 в различных сечениях электронного пучка ξ_1 и ξ_2 :

$$\frac{J_0(\xi_2)}{J_0(\xi_1)} = \frac{1 - u/v_0(\xi_1)}{1 - u/v_0(\xi_2)}. \quad (3)$$

После этих предварительных замечаний о нулевых составляющих перейдем теперь к анализу уравнений первого приближения, получающихся из (1) для малых составляющих \tilde{v} и \tilde{i} :

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (v_0 \tilde{v}) = \eta \tilde{E}; \quad (4)$$

$$v_0 \frac{\partial \tilde{i}}{\partial t} + v_0^2 \frac{\partial \tilde{i}}{\partial z} - i \frac{\partial v_0}{\partial t} = J_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - \left(\frac{\partial J_0}{\partial t} + 2v_0 \frac{\partial J_0}{\partial z} \right) \tilde{v}. \quad (4a)$$

Так как здесь не рассматривается взаимодействие пучка с электромагнитными полями волноводных или замедляющих систем, то поле \tilde{E} , входящее в эти уравнения, является полем пространственного заряда. Для достаточно широких электронных потоков, рассматриваемых в дальнейшем, это поле определяется соотношением

* Можно показать, что при $v_0 \equiv u$ параметрическое усиление в пучке отсутствует, несмотря на периодическое изменение J_0 вдоль пучка.

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} = -\frac{\tilde{i}}{\epsilon_0}, \quad (5)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Учитывая (5), вводя вместо \tilde{v} высокочастотное напряжение $V = v_0 \tilde{v}/\eta$, а также используя соотношение (3), уравнения первого приближения можно привести к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + v_0 \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{u}{v_0} \frac{dv_0}{d\xi} V \right) \right] = -\frac{\tilde{i}}{\epsilon_0}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \tilde{i}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{i}}{\partial z} + \frac{u}{v_0} \frac{dv_0}{d\xi} \tilde{i} = \frac{\eta J_0}{v_0^2} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{u}{v_0} \frac{dv_0}{d\xi} \frac{3v_0 - 2u}{v_0 - u} V \right). \quad (6a)$$

Эти уравнения не допускают разделения переменных; однако их можно значительно упростить путем замены входящих в них как независимых, так и зависимых переменных. За одну из новых независимых переменных естественно принять $\xi = z - ut$, так как коэффициенты уравнений зависят только от этой величины, которая представляет собой продольную координату, отсчитанную в системе, движущейся со скоростью u .

За другую независимую переменную примем время влета электронов в пространство взаимодействия (т. е. в область $z \geq 0$, где на пучок действуют одновременно сигнал накачки и усиливающий высокочастотный сигнал). Время влета τ связано с t соотношением

$$\tau = t - t_0(z, t), \quad (7)$$

где $t_0(z, t)$ — время пролета электронов от плоскости $z = 0$ до плоскости z , определяемое из уравнения

$$t_0(z, t) = \int_{-u}^{z-ut} [v_0(\zeta) - u]^{-1} d\zeta. \quad (8)$$

Зависимые переменные V и \tilde{i} заменим по формулам

$$V' = V [1 - u/v_0(\xi)]; \quad (9)$$

$$i' = \tilde{i} \left[1 - \frac{u}{v_0(\xi)} \right] + \frac{\eta J_0(\xi)}{v_0^3(\xi)} u V. \quad (9a)$$

. При $u \ll c$ V' и i' имеют смысл высокочастотного напряжения и тока в системе координат, движущейся со скоростью u , а формулы (9) получаются из обычных формул преобразования скоростей и токов [4]. Если умножить правые части (9) на релятивистский множитель $[1 - (u/c)^2]^{-1/2}$, то V' и i' сохраняют свой физический смысл при всех значениях скорости накачки u , меньших скорости света. Однако преобразования (9) можно также рассматривать просто как формальную замену переменных и применять их как при $u < c$, так и при $u > c$.

В новых переменных уравнения первого приближения принимают следующий вид:

$$\left[1 - \frac{u}{v_0(-ut)} \right] \frac{\partial^2 V'}{\partial \tau \partial \xi} = -\frac{i'}{\epsilon_0} + u \left[1 - \frac{u}{v_0(\xi)} \right] \left\{ \frac{\partial^2 V'}{\partial \xi^2} + \frac{\beta_p^2(\xi)}{[1-u/v_0(\xi)]^2} V' \right\}; \quad (10)$$

$$\left[1 - \frac{u}{v_0(\xi)} \right]^2 \frac{\partial i'}{\partial \xi} = \frac{\eta J_0(\xi)}{v_0^3(\xi)} \left[1 - \frac{u}{v_0(-ut)} \right] \frac{\partial V'}{\partial \tau}. \quad (10a)$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения, в отличие от исходных уравнений (6), допускают разделение переменных. Полагая

$$V'(\xi, \tau) = V_\xi(\xi) V_\tau(\tau),$$

найдем из (10) уравнение второго порядка для V_ξ :

$$\frac{d^2 V_\xi}{d\xi^2} + \frac{\beta_p^2(\xi)}{[1-u/v_0(\xi)]^2} V_\xi = 0, \quad (11)$$

где

$$\beta_p(\xi) = \omega_p(\xi)/v_0(\xi) = \sqrt{\frac{\eta J_0(\xi)/\epsilon_0 v_0^3(\xi)}{1-u/v_0(\xi)}},$$

V_τ при этом имеет произвольный вид, определяемый лишь граничными условиями. Заметим, что при $u < c$ уравнение (11) для высокочастотного напряжения в движущейся системе координат может быть записано по аналогии с известным уравнением для неоднородного пучка, параметры которого зависят только от продольной координаты (в данном случае ξ).

Кроме двух решений, получаемых из (11), уравнения (10) допускают еще третье решение, не удовлетворяющее (11). Однако, проводя вычисления для простейших случаев (отсутствие сигнала накачки, синусоидальный сигнал накачки), можно убедиться, что это решение не имеет высокочастотного характера и появляется в результате дифференцирования уравнения (4) по времени при переходе к (6). Поэтому в дальнейшем это решение рассматривать не будем.

Таким образом, в итоге всех преобразований задача сведена к нахождению решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (11). Обозначая линейно-независимые решения этого уравнения через $a(\xi)$ и $b(\xi)$ и переходя к исходным переменным, получим следующие общие выражения для высокочастотного напряжения и тока:

$$V(z, t) = \frac{1}{1-u/v_0(z-ut)} [A[t-t_0(z, t)] a(z-ut) + B[t-t_0(z, t)] b(z-ut)]; \quad (12)$$

$$\tilde{i}(z, t) = -\epsilon_0 \left\{ \frac{\partial A[t-t_0(z, t)]}{\partial t} \frac{\partial a(z-ut)}{\partial z} + \frac{\partial B[t-t_0(z, t)]}{\partial t} \times \right. \\ \times \frac{\partial b(z-ut)}{\partial z} + u \frac{\beta_p^2(z-ut)}{[1-u/v_0(z-ut)]^2} [A[t-t_0(z, t)] a(z-ut) + B[t-t_0(z, t)] b(z-ut)] \left. \right\}. \quad (12a)$$

В этих выражениях A и B —произвольные функции, которые должны определяться из граничных условий.

2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Пусть усиливаемый сигнал возбуждает на входе в пространство взаимодействия в плоскости $z = 0$ некоторый высокочастотный ток $i_b(t)$ и высокочастотное напряжение $V_b(t)$. Записывая в этой плоскости выражения (12), получим систему двух дифференциальных уравнений первого порядка для определения функций A и B . Учитывая, что при $z = 0$

$$\tau = t, \xi = -ut,$$

эти уравнения сразу можно записать в виде:

$$A(t) a(-ut) + B(t) b(-ut) = [1 - u/v_0(-ut)] V_s(t); \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} \frac{da(-ut)}{dt} + \frac{dB(t)}{dt} \frac{db(-ut)}{dt} = u \frac{i_b(t)}{\epsilon_0} + \\ + u^2 \frac{\beta_p^2(-ut)}{1 - u/v_0(-ut)} V_b(t). \end{aligned} \quad (13a)$$

Заменяя в (13) функции $a(-ut)$ и $b(-ut)$ через их вторые производные по уравнению (11), складывая с (13a) и интегрируя получающееся соотношение по t , придем к уравнению

$$A(t) a'(-ut) + B(t) b'(-ut) = - \frac{\int i_b(t) dt}{\epsilon_0}, \quad (14)$$

в котором штрихом обозначено дифференцирование по $\xi = -ut$. Соотношение (14) вместе с (13) образует систему алгебраических уравнений относительно функций A и B .

Нетрудно видеть, что определитель соответствующей однородной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(-ut) & b(-ut) \\ a'(-ut) & b'(-ut) \end{vmatrix}$$

является определителем Вронского двух функций a и b и не равен нулю, потому что эти функции являются линейно независимыми решениями уравнения (11). Кроме того, этот определитель является постоянной величиной, так как в уравнении (11) отсутствует член с первой производной. Таким образом, решения системы (13), (14) могут быть записаны в обычном виде:

$$\begin{aligned} A(t) = \frac{1}{\Delta} \left\{ b'(-ut) \left[1 - \frac{u}{v_0(-ut)} \right] V_b(t) + \right. \\ \left. + b(-ut) \frac{\int i_b(t) dt}{\epsilon_0} \right\}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} B(t) = \frac{1}{\Delta} \left\{ -a'(-ut) \left[1 - \frac{u}{v_0(-ut)} \right] V_b(t) - \right. \\ \left. - a(-ut) \frac{\int i_b(t) dt}{\epsilon_0} \right\}. \end{aligned} \quad (15a)$$

Окончательные выражения для высокочастотного тока и высокочастотного напряжения с учетом граничных условий мы получим, если подставим в формулы (12) выражения (15), заменяя в последних везде t

на $t - t_0(z, t)$. Эти выражения и являются решением поставленной задачи. Ниже дан их анализ при синусоидальном сигнале накачки.

3. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНОМ СЛАБОМ СИГНАЛЕ НАКАЧКИ

В предыдущих разделах характер зависимости сигнала накачки от времени не был существенным. Теперь мы будем предполагать, что сигнал накачки изменяется периодически с частотой ω_n , так что длина волны накачки есть $L = 2\pi u/\omega_n$.

При этом (11) является уравнением с периодическими коэффициентами и, как известно, при определенных значениях коэффициентов имеет нарастающие решения. Исследуя эти решения, можно найти условия, при которых возникает параметрическое усиление, величину этого усиления и другие его характеристики.

Здесь будет рассматриваться случай малого сигнала накачки, когда нулевые составляющие скорости электронов и плотности тока пучка можно представить в виде

$$v_0(\xi) = \bar{v} [1 - m \cos(2\pi\xi/L)]; \quad (16)$$

$$J_0(\xi) = \bar{J} [1 + m_i \cos(2\pi\xi/L)], \quad (16a)$$

где черта означает усреднение по ξ , а m , m_i — малые коэффициенты модуляции пучка сигналом накачки по скорости и току. Из (3) следует, что эти коэффициенты связаны соотношением

$$m_i = \frac{m}{\bar{v}/u - 1}. \quad (17)$$

Учитывая (16) и отбрасывая члены второго порядка малости по m , m_i , приведем основное уравнение (11) к уравнению Маттье:

$$\frac{d^2 V_\xi}{d\xi^2} + \frac{\bar{\beta}_p^2}{(1-u/\bar{v})^2} \left[1 + \frac{3m}{1-u/\bar{v}} \cos(2\pi\xi/L) \right] V_\xi = 0. \quad (18)$$

Обозначая

$$x = \frac{\pi\xi}{L}, \quad a = \frac{\bar{\beta}_p^2}{(1-u/\bar{v})^2} \left(\frac{L}{\pi} \right)^2, \quad 16q = \frac{3m}{1-u/\bar{v}} \quad a, \quad (19)$$

запишем это уравнение в форме:

$$\frac{d^2 V_\xi}{dx^2} + [a + 16q \cos(2x)] V_\xi = 0. \quad (20)$$

Как известно, нарастающие решения уравнения Маттье имеются при определенных значениях параметра a , лежащих около значений $a = n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) в n -ой зоне неустойчивости. Отсюда нетрудно получить, что для возникновения параметрического усиления в широком электронном пучке необходимо приближенное выполнение условия:

$$u = \frac{\bar{v}}{1 \pm 2\omega_p/n \omega_n}. \quad (21)$$

Соотношение (21) имеет смысл условия параметрического резонанса между собственными колебаниями электронов частоты ω_p и вы-

нуждающей силой, частота которой определяется частотой сигнала накачки ω_n , пересчитанной в систему координат, движущуюся вместе с электронами.

В это условие не входит частота усиливаемого сигнала ω , т. е. для получения параметрического усиления не требуется определенной связи между ω и ω_n , а достаточно лишь выполнения определенного соотношения между скоростью и частотой волны накачки. Поэтому параметрическое усиление в широком электронном потоке с бегущей волной накачки должно быть весьма широкополосным. Ограничения на ширину полосы усиливаемых частот накладываются так же, как и в параметрическом усилителе с периодическим электростатическим полем, разбросом скоростей электронов в пучке, а также реально всегда имеющейся зависимостью плазменной частоты от ω .

Рассмотрим случай, когда сигнал накачки распространяется на медленной или быстрой волне пространственного заряда. Тогда скорость волны накачки определяется равенством

$$u = \frac{\bar{v}}{1 \pm \frac{\omega_p}{\omega_n}}.$$

Нетрудно видеть, что условие (21) выполняется при этом лишь для $n=2$, т. е. в этом случае параметрическое усиление в широком электронном потоке возможно только во второй зоне неустойчивости, где оно весьма мало. Чтобы в широком электронном пучке получить значительно более эффективное параметрическое усиление в первой зоне неустойчивости, необходимо вводить накачку в электронный пучок независимо от волн пространственного заряда таким образом, чтобы скорость и частота накачки удовлетворяли соотношению (21) при $n=1$. Этого можно добиться, если осуществлять модуляцию электронного пучка по всей его длине с помощью замедляющей системы, у которой соответствующим образом подобрана фазовая скорость волны, модулирующей пучок.

Для более подробного анализа формы высокочастотного тока и напряжения удобно записывать решения полученного уравнения Матье (20) в форме Уиттекера (см. [5]), так как параметр q в этом уравнении мал. Вначале мы ограничимся нулевым приближением этого решения, отбрасывая все слагаемые порядка q и выше. Такое приближение позволяет рассмотреть большинство свойств параметрического усилителя, а учет членов высшего порядка оказывается существенным лишь при оценке минимального коэффициента шума, о чем будет сказано ниже. В первой зоне неустойчивости решения уравнения (20) в нулевом приближении имеют вид:

$$a(x) = e^{\mu x} \sin(x - \sigma), \quad b(x) = e^{-\mu x} \sin(x + \sigma), \quad (22)$$

где

$$\mu = 4q \sin(2\sigma), \quad (23)$$

а новый параметр σ определяется соотношением

$$a = 1 + 8q \cos(2\sigma) \quad (24)$$

и принимает значения от 0 до $\pi/2$.

Используя эти решения и учитывая, что в рассматриваемом сейчас нулевом приближении время пролета записывается элементарно ($t_0 = z/\bar{v}$), можно теперь найти выражения для высокочастотного напряжения и тока. Считая входной сигнал монохроматическим

$$V_B(t) = \hat{V} e^{j\omega t}, \quad i_B(t) = \hat{i} e^{j\omega t},$$

из (12), (15), (19), (22) получим в первой зоне неустойчивости:

$$\begin{aligned} V(z, t) = & \frac{e^{j\omega(t-z/\bar{v})}}{4j \sin(2\sigma)} e^{\pm \mu \bar{\beta}_p z} \left\{ (\hat{V} \pm W \hat{i}) e^{j[\omega_H t - (\omega_H/\bar{v} \pm \bar{\beta}_p) z]} - \right. \\ & - (\hat{V} \mp W \hat{i}) e^{-j[\omega_H t - (\omega_H/\bar{v} \pm \bar{\beta}_p) z]} - (\hat{V} \pm W \hat{i}) e^{j(\pm \bar{\beta}_p z - 2\sigma)} + \\ & \left. + (\hat{V} \mp W \hat{i}) e^{-j(\pm \bar{\beta}_p z - 2\sigma)} \right\} + \sum (-\sigma); \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} i(z, t) = & \frac{e^{j\omega(t-z/\bar{v})}}{4j \sin(2\sigma)} \left\{ - \left(1 + \frac{\omega_H}{\omega} \right) \left(\hat{i} \pm \frac{\hat{V}}{W} \right) e^{j[\omega_H t - (\omega_H/\bar{v} \pm \bar{\beta}_p) z]} + \right. \\ & + \left(1 - \frac{\omega_H}{\omega} \right) \left(\hat{i} \mp \frac{\hat{V}}{W} \right) e^{-j[\omega_H t - (\omega_H/\bar{v} \pm \bar{\beta}_p) z]} - \left(\hat{i} \pm \frac{\hat{V}}{W} \right) e^{j(\pm \bar{\beta}_p z - 2\sigma)} + \\ & \left. + \left(\hat{i} \mp \frac{\hat{V}}{W} \right) e^{-j(\pm \bar{\beta}_p z - 2\sigma)} \right\} + \sum (-\sigma). \end{aligned} \quad (25a)$$

Через $W = W(\omega) = 1/\omega \varepsilon_0 \bar{\beta}_p$ здесь обозначено волновое сопротивление пучка на частоте ω . Верхний знак соответствует плюсу в (21), т. е. медленной волне накачки ($u < \bar{v}$), а нижний — минусу в (21), т. е. быстрой волне накачки; через $\sum (-\sigma)$ обозначены слагаемые, отличающиеся от написанных только измененными знаками σ и соответственно μ .

Как показывают полученные формулы (25), в электронном пучке имеется в нулевом приближении четыре нарастающих и четыре убывающих бегущих волны. Они распространяются на частотах ω , $\omega \pm \omega_H$ со скоростями, равными скоростям волн пространственного заряда на этих частотах.

Скорость нарастания или убывания амплитуд волн определяется постоянной μ , которая с помощью (19), (23) и (24) может быть выражена через параметр a следующим образом:

$$\mu = \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4} \frac{m}{1-u/\bar{v}} a \right)^2 - \left(\frac{a-1}{2} \right)^2} \quad (26)$$

(знак „+“ при $u < \bar{v}$ и „—“ при $u > \bar{v}$).

Отсюда видно, что показатель экспоненты в (25) всегда положителен и выписанные члены соответствуют нарастающим электронным волнам. В остальные члены, обозначенные через $\sum (-\sigma)$, входит μ с обратным знаком; поэтому они дают волны, убывающие по амplitude с ростом координаты z .

Максимальное значение μ получается при $a = 1$, т. е. при точном выполнении соотношения (21), связывающего скорость и частоту накачки с параметрами электронного пучка. При этом усиление в децибелах на единицу длины имеет величину

$$G = 6,51 \frac{m}{|1-u/\bar{v}|} \bar{\beta}_p = 3,26 m \frac{\omega_H}{u} = 6,51 |m| \frac{\bar{\beta}_p}{u}. \quad (27)$$

Начальные амплитуды волн определяются соотношением входных значений высокочастотного тока и напряжения при $z = 0$. При выбранной нами записи тока (2) высокочастотное напряжение и ток в медленной волне находятся в противофазе, а в быстрой—в фазе, т. е.

$$\begin{aligned} i &= -V|W|^{-1} \text{ (медленная волна);} \\ i &= V|W|^{-1} \text{ (быстрая волна).} \end{aligned} \quad (28)$$

Используя эти соотношения, можно составить таблицу 1, показывающую, какие волны возбуждаются в пространстве взаимодействия при различных входных условиях в случае максимального усиления ($a = 1$, $\sigma = \pi/4$). Через М (ω) и Б (ω) обозначены соответственно медленная и быстрая волны на частоте ω . Эта таблица полезна при анализе шумовых свойств усилителя или смесителя частоты.

Таблица 1

Преобразование волн при различных соотношениях скоростей u, v и частот ω_H, ω

Вид волны на входе	Соотношение скоростей	$u < v$	$u > v$
M (ω)		M (ω) Б ($\omega - \omega_H$) при $\omega_H < \omega$ М ($\omega_H - \omega$) при $\omega_H > \omega$	M (ω) Б ($\omega + \omega_H$)
B (ω)		Б (ω) М ($\omega + \omega_H$)	Б (ω) М ($\omega - \omega_H$) при $\omega_H < \omega$ Б ($\omega_H - \omega$) при $\omega_H > \omega$

Заметим, что в случае, когда $\omega_H = 2\omega$, начальная амплитуда одной из волн зависит не только от соотношения напряжения и тока на входе, но и от разности фаз полезного сигнала и сигнала накачки, как и в системах с сосредоточенными постоянными. Действительно, в этом случае частота $\omega - \omega_H$ совпадает по абсолютной величине с ω и амплитуды соответствующих волн складываются либо вычитаются в зависимости от фазы сигнала на входе.

Записывая входной сигнал в виде

$$V = |V| e^{i\varphi_V}, \hat{i} = |i| e^{i\alpha_i},$$

получим, например, следующее выражение для нарастающих волн высокочастотного напряжения:

$$\begin{aligned} V(z, t) &= \frac{e^{\pm \mu \bar{\beta} p z}}{4} \left\{ -j (\hat{V} \pm \hat{W} \hat{i}) e^{j[3\omega t - (3\omega/v \pm \bar{\beta}_p) z]} + \right. \\ &+ 2e^{j3\pi/4} [|V| \sin(\varphi_V - \pi/4) \mp |W| |i| \sin(\varphi_i - \pi/4)] e^{i[\omega t - (\omega/v \pm \bar{\beta}_p) z]} + \\ &\left. + (\hat{V} \pm \hat{W} \hat{i}) e^{j[\omega t - (\omega/v \pm \bar{\beta}_p) z]} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда видно, что от разности фаз входного сигнала и сигнала накачки зависит амплитуда медленной волны пространственного заряда на частоте ω , если $u < v$, и быстрой волны, если $u > v$. Оптимальное значение сдвига фазы, соответствующее максимуму начальной амплитуды волны, определяется соотношением входных значений тока и напряжения. Если на входе имеется только медленная ($\varphi_i = \varphi_V + \pi$) или только быстрая ($\varphi_i = \varphi_V$) волна пространственного заряда, то оптимальная фаза равна $\varphi_V = -\pi/4$ или $3\pi/4$.

Используя полученные выражения для высокочастотного напряжения и тока, интересно, проверить выполнение соотношений Мэнли и Роу [6], определяющих преобразование мощности при прохождении сигнала через нелинейную систему. В рассматриваемом нулевом приближении (члены порядка t , t_1 отброшены) в электронном пучке распространяются волны трех частот, и поэтому указанные соотношения имеют следующий вид:

$$\frac{P_\omega}{\omega} + \frac{P_{\omega-\omega_n}}{\omega-\omega_n} + \frac{P_{\omega+\omega_n}}{\omega+\omega_n} = 0; \quad (30)$$

$$\frac{P_n}{\omega_n} - \frac{P_{\omega-\omega_n}}{\omega-\omega_n} + \frac{P_{\omega+\omega_n}}{\omega+\omega_n} = 0. \quad (30a)$$

Здесь P_ω , $P_{\omega-\omega_n}$, $P_{\omega+\omega_n}$ — мощности соответствующих частот, а P_n — та часть мощности накачки, которая преобразуется на другие частоты, причем $P_n < 0$, когда мощность берется от сигнала накачки, и $P_n > 0$ в противном случае.

Первое соотношение характеризует распределение мощностей по различным частотам. Подставляя в него кинетические мощности четырех нарастающих волн, распространяющихся по электронному потоку, нетрудно убедиться, что они действительно ему удовлетворяют. Из этого соотношения следует, что сумма кинетических мощностей четырех нарастающих волн не равна нулю при $\omega_n \neq 0$, т. е. при $\omega_n \neq 0$ средняя энергия электронов в потоке изменяется под действием сигнала накачки.

Второе соотношение характеризует количественно этот обмен энергией между сигналом накачки и электронным потоком и дает следующее:

$$P_n = \pm \frac{1}{32} \frac{\omega_n}{\omega} \frac{1}{W(\omega)} [|\hat{V} \mp W(\omega) \hat{i}|^2 + |\hat{V} \pm W(\omega) \hat{i}|^2].$$

Отсюда видно, что если $\omega_n \neq 0$, то при $u < v$ мощность передается от электронного потока волне накачки, а при $u > v$ — наоборот.

4. УСЛОВИЯ УМЕНЬШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ШУМА

Рассмотрим теперь возможность уменьшения коэффициента шума в параметрическом усилителе с широким электронным потоком. Из литературы известно [7], что с помощью специального входного устройства, например, отрезка замедляющей системы, можно „охладить“ электронный пучок, т. е. отобрать в некотором диапазоне частот шумы, распространяющиеся на быстрой волне пространственного заряда. Предполагая, таким образом, что амплитуда быстрой шумовой волны может

быть значительно уменьшена, мы должны рассмотреть два основных вопроса:

1) в каких случаях медленная волна шумов на входе не будет возбуждать быстрой нарастающей волны шумов в пространстве взаимодействия,

2) на каких частотах надо отобрать шумы быстрой волны.

Для решения этих вопросов удобно использовать таблицу 1, составленную выше. Из нее сразу видно, что для устранения быстрой нарастающей волны шумов в пространстве взаимодействия необходимо прежде всего отобрать шумы быстрой волны на частоте $\omega_{ш1} = \omega$. Однако медленная волна шумов на этой частоте всегда остается и усиливается в пространстве взаимодействия в такой же степени, как и полезный сигнал. Поэтому выходное устройство (например, замедляющая система), возбуждаемое усиленной быстрой волной полезного сигнала, должно быть как можно слабее связано с усиленной волной пространственного заряда, на которой распространяется усиленный шумовой сигнал.

Кроме частоты $\omega_{ш1} = \omega$, усиленный шумовой сигнал на частоте ω могут дать шумы, имеющиеся на входе на следующих частотах:

$$\omega_{ш2} = |\omega - \omega_n|, \quad \omega_{ш3} = \omega + \omega_n.$$

Подставляя последовательно в таблицу 1 вместо ω эти шумовые частоты, нетрудно получить, что быстрая усиленная волна шума на частоте сигнала ω может возбуждаться не только быстрой входной волной шума на частоте ω , но и следующими шумовыми волнами:

- 1) М ($\omega_{ш3}$) при $u < \bar{v}$;
- 2) М ($\omega_{ш2}$) при $u > v$, $\omega_n < \omega$;
- 3) Б ($\omega_{ш2}$) при $u > \bar{v}$, $\omega_n > \omega$.

Отсюда видно, что в случаях $u < \bar{v}$ и $u > \bar{v}$, $\omega_n < \omega$ нельзя избавиться от быстрой усиленной волны шумов на частоте сигнала, так как в этих случаях она возбуждается имеющимися на входе медленными шумовыми волнами, которые не могут быть отобраны „охлаждающим“ устройством. В частности, в параметрическом усилителе с электростатическим периодическим полем ($\omega_n = 0$) медленная входная волна шума всегда возбуждает и медленную и быструю усиленные волны шума равной амплитуды.

УстраниТЬ быструю усиленную волну шума на частоте сигнала можно лишь при $u > \bar{v}$, $\omega_n > \omega$, если отобрать шумы с быстрой волной на входе не только на частоте $\omega_{ш1} = \omega$, но и на частоте $\omega_{ш2} = \omega_n - \omega$. Только при этих условиях возможно уменьшение коэффициента шума параметрического усилителя с широким электронным потоком за счет „охлаждения“ потока, хотя усиление, как показано выше, возможно при произвольном соотношении частот накачки и полезного сигнала и при скорости волны накачки как большей, так и меньшей скорости электронов.

Для уменьшения широкополосности „охлаждающего“ устройства удобно выбирать $\omega_n \approx 2\omega$, так как при этом условии шумовые частоты $\omega_{ш1}$ и $\omega_{ш2}$, которые должны быть отобраны „охлаждающим“ устройством, одинаковы по величине.

Аналогичным образом можно рассмотреть вопрос об уменьшении шумов в параметрическом смесителе частоты, когда на выходе снимается, например, сигнал разностной частоты $\omega - \omega_n$. При этом для уменьшения коэффициента шума оказывается необходимым выполнение тех же условий, т. е. отбор шума с быстрой волной на частотах ω и $\omega - \omega_n$ при $u > \bar{v}$ и $\omega_n > \omega$.

Таким образом, нулевое приближение высокочастотного напряжения и тока (25) позволяет получить условия, при которых возможно уменьшение коэффициента шума параметрического усилителя или смеcителя частоты. Однако в этом приближении нельзя найти величину минимального коэффициента шума, который определяется уже членами первого порядка. Для его оценки запишем с точностью до членов первого порядка решения уравнения (20):

$$a(x) = e^{\mu x} [\sin(x - \sigma) + q \sin(3x - \sigma)]; \quad (31)$$

$$b(x) = e^{-\mu x} [\sin(x + \sigma) + q \sin(3x + \sigma)] \quad (31a)$$

и выражение для времени пролета электронов

$$t_0(z, t) = \frac{z}{v} + \frac{m_i}{\omega_n} \left[\sin \omega_n \left(t - \frac{z}{v} \right) - \sin \omega_n \left(t - \frac{z}{u} \right) \right]. \quad (32)$$

Тогда, подставляя (31), (32) в (12), (15), мы получим при условии $\omega_n > \omega$ в выражении для высокочастотного напряжения $V(z, t)$ помимо четырех нарастающих волн нулевого приближения еще двенадцать волн первого порядка. Не выписывая здесь полного выражения для $V(z, t)$, которое дано в [9], приведем лишь характеристики тех нарастающих шумовых волн первого порядка, которые сильно связаны с выходным устройством и дают существенный вклад в коэффициент шума. Эти волны распространяются на частоте ω со скоростью, равной скорости быстрой волны усиленного полезного сигнала, а их начальные амплитуды $a_{ш}$ и шумовые частоты $\omega_{ш}$, которыми они возбуждаются, приведены в таблице 2, где через $\hat{V}_m(\omega)$ и $\hat{V}_b(\omega)$ обозначены входные амплитуды напряжения медленной и быстрой шумовых волн на частоте ω в сечении $z = 0$.

Таблица 2

Частоты и амплитуды быстрых нарастающих шумовых волн первого порядка

$\omega_{ш}$	$a_{ш}$
$\omega_n - \omega$	$-\frac{m_i}{8} \left[\left(\frac{3}{2} \frac{v}{u} - \frac{2\omega}{\omega_n} \right) \hat{V}_b(\omega_n - \omega) + \left(\frac{3}{2} \frac{v}{u} + \frac{2\omega}{\omega_n} - 2 \right) \hat{V}_m(\omega_n - \omega) \right]$
ω	$-\frac{m_i}{8j} \left[\left(\frac{3}{2} \frac{v}{u} + \frac{2\omega}{\omega_n} + 2 \right) \hat{V}_b(\omega) + \left(\frac{3}{2} \frac{v}{u} - \frac{2\omega}{\omega_n} \right) \hat{V}_m(\omega) \right]$
$2\omega_n - \omega$	$-\frac{m_i}{8j} \left[\left(\frac{3}{2} \frac{v}{u} - \frac{2\omega}{\omega_n} + 2 \right) \hat{V}_b(2\omega_n - \omega) + \left(\frac{3}{4} \frac{v}{u} - 1 \right) \hat{V}_m(2\omega_n - \omega) \right]$
$\omega_n + \omega$	$\frac{m_i}{8} \left[\left(\frac{3}{2} \frac{v}{u} + \frac{2\omega}{\omega_n} \right) \hat{V}_b(\omega_n + \omega) + \left(\frac{3}{4} \frac{v}{u} - 1 \right) \hat{V}_m(\omega_n + \omega) \right]$

Коэффициент шума параметрического усилителя можно определить по формуле

$$F = 1 + P_s / P_{вн}, \quad (33)$$

где $P_{вн}$ — начальная мощность нарастающих электронных волн, определяемая внешними шумами на входе, P_s — начальная мощность нара-

стающих электронных волн, определяемая шумами электронного потока на входе.

Для оценки относительных измерений коэффициента шума при „охлаждении“ пучка достаточно знать величину P_s , которую можно записать в виде

$$P_s = \frac{\Sigma}{2W(\omega)}, \quad (34)$$

где Σ есть сумма квадратов начальных амплитуд нарастающих шумовых волн.

В соответствии с таблицей 2 для „охлажденного“ пучка Σ записывается следующим образом:

$$\Sigma = \Sigma_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_i}{8} \right)^2 [| \hat{V}_m(\omega) |^2 + 25 | \hat{V}_6(3\omega) |^2 + 0,25 | \hat{V}_m(3\omega) |^2]. \quad (35)$$

При выводе (35) положено $\omega_n \approx 2\omega$, $n \approx \bar{v}$, что соответствует при небольшом пространственном заряде ($\omega_p \ll \omega$) оптимальным характеристикам усилителя.

В „неохлажденном“ пучке величина Σ определяется волнами нулевого приближения:

$$\Sigma = \Sigma_n = \left| \frac{\hat{V}_6(\omega)}{2} \right|^2 + \left| \frac{\hat{V}_6(\omega_n - \omega)}{2} \right|^2 \approx \frac{|\hat{V}_6(\omega)|^2}{2}. \quad (36)$$

В ЛБВ получается примерно такое же значение квадрата начальной амплитуды нарастающей шумовой волны, если $|\hat{V}_m(\omega)| \approx |\hat{V}_6(\omega)|$ (см. [8]).

Используя (33)–(36), можно теперь сравнить коэффициенты шума F_0 и F_n параметрического усилителя с „охлажденным“ пучком и усилителей с „неохлажденным“ пучком (параметрического или ЛБВ), в которых применяются одинаковые электронные пушки. Полагая для простоты.

$$|\hat{V}_m(\omega)| = |\hat{V}_6(\omega)| = V(\omega), \quad |\hat{V}_m(3\omega)| = |\hat{V}_6(3\omega)| = V(3\omega),$$

из указанных формул получаем:

$$F_0 = 1 + \left(\frac{m_i}{8} \right)^2 \left\{ 1 + 25,2 \left[\frac{V(3\omega)}{V(\omega)} \right]^2 \right\} (F_n - 1). \quad (37)$$

Отношение амплитуд шумовых волн на разных частотах определяется конструкцией электронной пушки и может оказаться весьма значительным. Если электронная пушка при работе в ЛБВ, где не происходит перекачки шумов с одной частоты на другую, обеспечивает коэффициент шума $F_\omega = F_n$ на частоте ω и коэффициент шума $F_{3\omega}$ на частоте 3ω , то из (33), (34), (36) найдем

$$\left[\frac{V(3\omega)}{V(\omega)} \right]^2 = \frac{F_{3\omega} - 1}{F_\omega - 1} \quad \frac{W(3\omega)}{W(\omega)} = \frac{1}{3} \frac{F_{3\omega} - 1}{F_\omega - 1}$$

и для F_0 получим окончательно следующее выражение:

$$F_0 = 1 + \left(\frac{m_i}{8} \right)^2 [(F_\omega - 1) + 8,4 (F_{3\omega} - 1)]. \quad (38)$$

Из него видно, что минимальный коэффициент шума F_0 параметрического усилителя с полностью „охлажденным“ пучком (шумы быстрой волны с частоты ω отобраны полностью) определяется в основном шумами тройной частоты, а влияние перекачки шумов с медленной на быструю волну на частоте ω относительно мало. Поэтому для получения малого F_0 шумы электронной пушки, применяемой в параметрическом усилителе с широким электронным потоком, должны быть подавлены на частоте 3ω .

Примененное здесь преобразование переменных позволило рассмотреть задачу о распространении малого высокочастотного сигнала в широком электронном потоке, скорость которого изменяется по закону бегущей волны, и выяснить свойства параметрического усилителя с таким потоком. Аналогичные преобразования оказываются полезными при изучении волн в длинных линиях или средах, параметры которых изменяются по закону бегущей волны. Замена текущего времени на время „влета“ волновых пакетов в длинную линию и переход в движущуюся систему координат позволяют при этом свести задачу к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, аналогичного уравнению неоднородной длинной линии.

Выражаю благодарность А. С. Тагеру за ценные советы и обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. H. Louisell, C. Quate, Proc. IRE, **46**, 707 (1958).
2. W. H. Louisell, J. of Electronics and Control, **6**, 1 (1959).
3. А. С. Тагер, Вопросы радиоэлектроники, Электроника, вып. 4, 34 (1959).
4. Дж. А. Страйтон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М., 1948.
5. Е. Т. Уитткер и Г. И. Ватсон, Курс современного анализа, ч. 1, ГТТИ, М., 1933.
6. L. M. Manley, H. E. Rowe, Proc. IRE, **44**, 904 (1956).
7. R. W. Gould, Proc. IRE, **47**, 419 (1959).
8. Лампа с бегущей волной, пер. с англ., изд. Сов. радио, М., 1952.
9. В. А. Солнцев, Диссертация, Горький, 1960.

Поступила в редакцию
11 октября 1960 г.

PARAMETRIC AMPLIFICATION AND THE FREQUENCY CONVERSION IN A WIDE ELECTRON BEAM

V. A. Solntsev

By the transformation of variables an examination is made of the propagation of a weak high-frequency signal in a wide rectilinear electron beam the speed of which varies in accordance with the traveling wave law. The results obtained are applied to the analysis of the properties of a parametric amplifier and frequency mixer with such a beam. Conditions for the decrease of the noise factor are found, as well as the magnitude of the amplification and other characteristics of the amplifier.

МНОГОЧАСТОТНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ АРГУМЕНТАМИ

B. P. Рубаник

Исследуются многочастотные резонансные колебания в квазилинейных системах с запаздывающими аргументами (1.1) при наличии в системе различных комбинационных и внутренних резонансов. На уравнения указанного типа обобщаются известные асимптотические методы Крылова, Боголюбова и Митропольского для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Разработана общая методика построения приближенных асимптотических решений, которая затем применяется к решению конкретной системы уравнений.

В различных отраслях современной техники — в автоматике и телемеханике, в радиорелейных линиях связи, в радиотехнических устройствах для измерения расстояний, в устройствах радиолокации и радионавигации и в ряде других случаев — приходится встречаться с нелинейными колебательными системами с запаздывающими аргументами, имеющими много степеней свободы и находящимися под воздействием многочастотных возмущающих сил. При этом во многих случаях параметры системы и частоты возмущающих сил медленно изменяются во времени (медленно по отношению к периоду колебаний). При исследовании таких систем без запаздывающих аргументов в ряде работ ([2—4] и др.) широко применяются асимптотические методы, разработанные Крыловым и Боголюбовым [1]. В работах [5, 6] эти методы обобщаются на случай одночастотных свободных и вынужденных колебаний в квазилинейных системах с запаздывающими аргументами.

В настоящей статье асимптотические методы обобщаются на случай многочастотных резонансных колебаний в квазилинейных системах с запаздыванием. При этом учитывается наличие в системе всевозможных комбинационных и внутренних резонансов вида

$$\sum_m p_m \nu_m + \sum_k q_k \omega_k \simeq 0,$$

где ν_m — частоты возмущающих сил, ω_k — частоты собственных колебаний системы, а p_m и q_k — целые числа (если все $p_m = 0$, то имеет место внутренний резонанс).

1. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В ОБЩЕМ ВИДЕ

Будем рассматривать квазилинейную колебательную систему со многими степенями свободы и запаздывающими аргументами, находящуюся под воздействием малых многочастотных возмущающих сил с медленно изменяющимися частотами. Пусть указанная система описывается системой дифференциально-разностных уравнений:

$$dX(t)/dt = \sum_{l=0}^r A_l X(t - \Delta_l) + \varepsilon F[\tau, \theta(t), X(t - \Delta_l), \varepsilon], \quad (1.1)$$

где ϵ —малый положительный безразмерный параметр, $\tau = \epsilon t$ —медленно изменяющийся во времени параметр, X, F —векторы N -мерного евклидова пространства, A_l —постоянные квадратные матрицы порядка ($N \times N$), $d\theta/dt = \psi(\tau)$, θ , ψ —векторы M -мерного евклидова пространства, Δ_l —вещественные неотрицательные величины ($\Delta_0 = 0$, $\Delta_0 < \Delta_1 < \Delta_2 < \dots < \Delta_r$). Кроме того, предполагаем, что компоненты вектор-функции $\psi(\tau)$ определены, положительны и достаточное число раз дифференцируемы на достаточно большом промежутке $[0, T]$; вектор-функция $F(\tau, \theta, X_l, \epsilon)$ определена, непрерывна по τ, θ и достаточное число раз дифференцируема по компонентам X_l и ϵ (при $\tau \in [0, T]$), произвольных θ , достаточно малых ϵ и при X_l , взятых из некоторой достаточно большой области), а также периодична (с периодом 2π) по каждой из компонент вектора θ .

Наряду с системой (1.1) рассмотрим порождающую линейную систему

$$dX(t)/dt = \sum_{l=0}^r A_l X(t - \Delta_l). \quad (1.2)$$

Предположим, что характеристическое уравнение для системы (1.2)

$$D(\rho) = \det \left\| \sum_{l=0}^r A_l e^{-\Delta_l \rho} - E \rho \right\| = 0 \quad (1.3)$$

имеет простой нулевой корень $\rho_0 = 0$ и простые чисто мнимые корни $\rho_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\rho_{3,4} = \pm i\omega_2, \dots$, $\rho_{2K-1, 2K} = \pm i\omega_K$, а остальные корни (1.3)—комплексные с отрицательной вещественной частью. Число чисто мнимых корней всегда будет конечным, хотя в отличие от обыкновенных колебательных систем оно никак не связано с порядком системы. Если уравнение (1.3) не имеет чисто мнимых корней, но имеет корни с очень малой вещественной частью, то в силу непрерывной зависимости решений от параметров можно параметры линейной части системы несколько изменить так, что уравнение (1.3) станет иметь чисто мнимые корни (введенные малые поправки линейных членов отнесем к нелинейным членам).

При сделанных предположениях порождающая система (1.2) имеет семейство частных почти периодических решений

$$X(t) = a_0 \varphi^{(0)} + \sum_{k=1}^K a_k \left[\varphi^{(k)} e^{i(\omega_k t + \sigma_k)} + \bar{\varphi}^{(k)} e^{-i(\omega_k t + \sigma_k)} \right], \quad (1.4)$$

где $\varphi^{(k)}$ —нетривиальные решения систем

$$\left[\sum_{l=0}^r A_l e^{-i\omega_k \Delta_l} - i\omega_k E \right] \varphi^{(k)} = 0 \quad (1.5)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, K; \quad \omega_0 = 0),$$

$\bar{\varphi}^{(k)}$ комплексно сопряжены с $\varphi^{(k)}$, а a_k и σ_k —произвольные постоянные, которые для дальнейшего будем брать так, чтобы порождающее решение (1.4) лежало в области определения вектор-функции F вместе с некоторой своей окрестностью. Наряду с векторами $\varphi^{(k)}$ и $\bar{\varphi}^{(k)}$ вводим еще присоединенные векторы $X^{(k)}$ и $\bar{X}^{(k)}$, которые определяются из систем

$$\left[\sum_{l=0}^r A_l^* e^{i\omega_k \Delta_l} + i\omega_k E \right] X^{(k)} = 0 \quad (1.6)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, K; \quad \omega_0 = 0)$$

и условий нормирования

$$(\varphi^{(k)}, \chi^{(k)}) = 1 \quad (1.7)$$

(A_l^* — транспонированные матрицы).

Предположим далее, что в рассматриваемом промежутке изменения τ выполняются условия резонансов

$$\sum_{m=1}^M p_m^{(\mu, j)} \omega_m (\tau_{\mu, j}) + \sum_{k=1}^K q_k^{(\mu, j)} \omega_k \simeq \omega_j \quad (1.8)$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots, K; \omega_0 = 0; \mu = 1, 2, \dots, R_j),$$

где $p_m^{(\mu, j)}$, $q_k^{(\mu, j)}$ — целые числа (некоторые из них могут быть и нулями), и в этом промежутке нет других резонансов указанного вида.

Введем обозначения

$$\sum_{m=1}^M p_m^{(\mu, j)} \omega_m (\tau) + \sum_{k=1}^K q_k^{(\mu, j)} \omega_k - \omega_j = \varepsilon \delta_{\mu, j} (\tau); \quad (1.9)$$

$$\sum_{m=1}^M p_m^{(\mu, j)} \theta_m (t) + \sum_{k=1}^K q_k^{(\mu, j)} \psi_k (t) - \psi_j (t) = \eta_{\mu, j} (t) \quad (1.10)$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots, K; \mu = 1, 2, \dots, R_j).$$

В силу непрерывной зависимости решений системы (1.1) от параметра ε при достаточно малых ε система (1.1) будет иметь решения, которые мало отличаются от решений порождающей системы (1.2). Будем искать решение системы (1.1), мало отличающееся от почти периодического решения (1.4) порождающей системы, в виде асимптотического ряда

$$X(t) = U_0(a, \psi) + \varepsilon U_1(\tau, a, \psi, \theta) + \varepsilon^2 U_2(\tau, a, \psi, \theta) + \dots, \quad (1.11)$$

где

$$a = \{a_0, a_1, \dots, a_K\}; \quad \psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_K\}; \quad \theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M\};$$

$$U_0(a, \psi) = a_0(t) \varphi^{(0)} + \sum_{k=1}^K a_k(t) [\varphi^{(k)} e^{i\psi_k(t)} + \bar{\varphi}^{(k)} e^{-i\psi_k(t)}],$$

$U_s(\tau, a, \psi, \theta)$ — ограниченные функции, периодические по ψ_k , θ_m с периодом 2π , а $a_k(t)$, $\psi_k(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} da_k/dt &= \varepsilon P_{k,1}(\tau, a, \eta) + \varepsilon^2 P_{k,2}(\tau, a, \eta) + \dots \\ &(k = 0, 1, 2, \dots, K); \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} d\psi_k/dt &= \omega_k + \varepsilon Q_{k,1}(\tau, a, \eta) + \varepsilon^2 Q_{k,2}(\tau, a, \eta) + \dots \\ &(k = 1, 2, \dots, K). \end{aligned}$$

Для определения неизвестных функций $U_1(\tau, a, \psi, \theta)$, $U_2(\tau, a, \psi, \theta)$, ..., $P_{k,1}(\tau, a, \eta)$, $Q_{k,1}(\tau, a, \eta)$, $P_{k,2}(\tau, a, \eta)$, ... подставим выражение (1.11) (с учетом (1.12)) в уравнение (1.1), разложим обе части полученного равенства по степеням ε и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Тогда

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^K i \omega_k a_k (\varphi^{(k)} e^{i\psi_k} + \bar{\varphi}^{(k)} e^{-i\psi_k}) = \\ &= \sum_{l=0}^r A_l \left\{ a_0 \varphi^{(0)} + \sum_{k=1}^K a_k [\varphi^{(k)} e^{i(\psi_k - \Delta l \omega_k)} + \bar{\varphi}^{(k)} e^{-i(\psi_k - \Delta l \omega_k)}] \right\}; \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^K \omega_k \frac{\partial U_1(\tau, a, \psi, \theta)}{\partial \psi_k} + \sum_{m=1}^M v_m \frac{\partial U_1(\tau, a, \psi, \theta)}{\partial \theta_m} = \\
& = \sum_{l=0}^r A_l U_1(\tau, a, \psi - \Delta_l \omega, \theta - \Delta_l \eta) - P_{0,1}(\tau, a, \eta) \varphi^{(0)} - \\
& - \sum_{k=1}^K \left\{ P_{k,1}(\tau, a, \eta) [\varphi^{(k)} e^{i\psi_k} + \bar{\varphi}^{(k)} e^{-i\psi_k}] + \right. \\
& + i a_k Q_{k,1}(\tau, a, \eta) [\varphi^{(k)} e^{i\psi_k} - \bar{\varphi}^{(k)} e^{-i\psi_k}] \Big\} - \quad (1.14) \\
& - \sum_{l=0}^r \Delta_l A_l \left\{ P_{0,1}(\tau, a, \eta) \varphi^{(0)} + \sum_{k=1}^K P_{k,1}(\tau, a, \eta) [\varphi^{(k)} e^{i(\psi_k - \Delta_l \omega_k)} + \right. \\
& + \bar{\varphi}^{(k)} e^{-i(\psi_k - \Delta_l \omega_k)}] + i \sum_{k=1}^K a_k Q_{k,1}(\tau, a, \eta) [\varphi^{(k)} e^{i(\psi_k - \Delta_l \omega_k)} - \\
& - \bar{\varphi}^{(k)} e^{-i(\psi_k - \Delta_l \omega_k)}] \Big\} + F_1^{(0)}(\tau, a, \psi, \theta); \\
& \sum_{k=1}^K \omega_k \frac{\partial U_2(\tau, a, \psi, \theta)}{\partial \psi_k} + \sum_{m=1}^M v_m \frac{\partial U_2(\tau, a, \psi, \theta)}{\partial \theta_m} = \\
& = \sum_{l=0}^r A_l U_2(\tau, a, \psi - \Delta_l \omega, \theta - \Delta_l \eta) - P_{0,2}(\tau, a, \eta) \varphi^{(0)} - \\
& - \sum_{k=1}^K \left\{ P_{k,2}(\tau, a, \eta) [\varphi^{(k)} e^{i\psi_k} + \bar{\varphi}^{(k)} e^{-i\psi_k}] + \right. \\
& + i a_k Q_{k,2}(\tau, a, \eta) [\varphi^{(k)} e^{i\psi_k} - \bar{\varphi}^{(k)} e^{-i\psi_k}] \Big\} - \quad (1.15) \\
& - \sum_{l=0}^r \Delta_l A_l \left\{ P_{0,2}(\tau, a, \eta) \varphi^{(0)} + \sum_{k=1}^K P_{k,2}(\tau, a, \eta) [\varphi^{(k)} e^{i(\psi_k - \Delta_l \omega_k)} + \right. \\
& + \bar{\varphi}^{(k)} e^{-i(\psi_k - \Delta_l \omega_k)}] + i \sum_{k=1}^K a_k Q_{k,2}(\tau, a, \eta) [\varphi^{(k)} e^{i(\psi_k - \Delta_l \omega_k)} - \\
& - \bar{\varphi}^{(k)} e^{-i(\psi_k - \Delta_l \omega_k)}] \Big\} + F_2^{(0)}(\tau, a, \psi, \theta).
\end{aligned}$$

Где

$$F_1^{(0)}(\tau, \alpha, \psi, \theta) = F(\tau, \theta, X_b, \varepsilon) \Bigg|_{\begin{array}{l} \varepsilon = 0; \\ X_b = U_t(\alpha, \psi - \Delta/\omega) \end{array}},$$

а последующие функции $F_s^{(0)}(\tau, a, \psi, \theta)$ определяются через производные функции F и функции $U_p, P_{k,p}, Q_{k,p}$ с индексами $p < s$, т. е. через известные из предыдущих равенств величины. Вследствие громоздкости выражений для $F_s^{(0)}$ мы их не выписываем.

Равенство (1.13) выполняется тождественно в силу равенств (1.5).

Из (1.14) найдем неизвестные вектор-функцию $U_1(\tau, a, \psi, \theta)$ и

скалярные функции $P_{k,1}(\tau, \mathbf{a}, \eta)$, $Q_{k,1}(\tau, \mathbf{a}, \eta)$. Для этого разложим вектор-функцию $\mathbf{F}_1^{(0)}(\tau, \mathbf{a}, \psi, \theta)$ в $(M+K)$ -кратный ряд Фурье, выделим в этом разложении резонансные члены и преобразуем их на основании равенств (1.10). Вектор-функцию $U_1(\tau, \mathbf{a}, \psi, \theta)$ также ищем в виде ряда Фурье:

$$U_1(\tau, \mathbf{a}, \psi, \theta) = \sum_{p_m, q_k} B_{p_m, q_k}^{(1)}(\tau, \mathbf{a}) e^{i(\sum_{m=1}^M p_m \omega_m + \sum_{k=1}^K q_k \omega_k)}. \quad (1.16)$$

Подставляя разложения $U_1(\tau, \mathbf{a}, \psi, \theta)$ и $\mathbf{F}_1^{(0)}(\tau, \mathbf{a}, \psi, \theta)$ в равенство (1.14) и приравнивая коэффициенты у подобных членов, получим следующие уравнения для определения коэффициентов $B_{p_m, q_k}^{(1)}(\tau, \mathbf{a})$:

$$\left\{ i \left[\sum_{m=1}^M p_m \omega_m(\tau) + \sum_{k=1}^K q_k \omega_k \right] E - \sum_{l=0}^r A_l e^{-i\Delta_l} \left[\sum_{m=1}^M p_m \omega_m(\tau) + \sum_{k=1}^K q_k \omega_k \right] \right\} B_{p_m, q_k}^{(1)} = f_{p_m, q_k}^{(1)}(\tau, \mathbf{a}) \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{m=1}^M p_m \omega_m + \sum_{k=1}^K q_k \omega_k \mp \omega_j \gg \epsilon \right); \\ & - \sum_{l=0}^r A_l B_{0,0}^{(1)} = f_{0,0}^{(1)}(\tau, \mathbf{a}) + \sum_{\mu=1}^{R_0} f_{p_m^{(\mu,0)}, q_k^{(\mu,0)}}^{(1)}(\tau, \mathbf{a}) e^{i\eta_{\mu,0}} - \\ & - P_{0,1}(\tau, \mathbf{a}, \eta) \left[\varphi^{(0)} + \sum_{l=0}^r \Delta_l A_l \varphi^{(0)} \right]; \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} & \left[i \omega_j E - \sum_{l=0}^r A_l e^{-i\omega_j \Delta_l} \right] B_{0,1,j}^{(1)} = f_{0,1,j}^{(1)}(\tau, \mathbf{a}) + \sum_{\mu=1}^{R_j} f_{p_m^{(\mu,j)}, q_k^{(\mu,j)}}^{(1)}(\tau, \mathbf{a}) e^{i\eta_{\mu,j}} - \\ & - [P_{j,1}(\tau, \mathbf{a}, \eta) + i a_j Q(\tau, \mathbf{a}, \eta)] \left[\varphi^{(j)} + \sum_{l=0}^r \Delta_l A_l \varphi^{(j)} e^{-i\omega_j \Delta_l} \right] \\ & (j = 1, 2, \dots, K); \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$B_{0,-1,j}^{(1)}(\tau, \mathbf{a}) = \bar{B}_{0,1,j}^{(1)}(\tau, \mathbf{a}), \quad (1.20)$$

где $f_{p_m, q_k}^{(1)}(\tau, \mathbf{a})$ — коэффициенты в разложении Фурье функции $\mathbf{F}_1^{(0)}(\tau, \mathbf{a}, \psi, \theta)$.

Так как в уравнениях (1.17) $\sum_{m=1}^M p_m \omega_m + \sum_{k=1}^K q_k \omega_k \neq \pm \omega_j$, то при

неизвестных в левых частях этих уравнений стоят неосообщенные матрицы; поэтому (1.17) имеют однозначные решения. В уравнениях (1.18) и (1.19) при неизвестных стоят матрицы, определители которых равны нулю. Поэтому эти уравнения разрешимы не всегда, а лишь при выполнении некоторых дополнительных условий. Как известно из линейной алгебры, для разрешимости уравнений (1.18) и (1.19) необходимо и достаточно, чтобы их правые части были ортогональны решениям соответствующих присоединенных однородных систем, т. е. векторам $\chi^{(0)}$ и $\bar{\chi}^{(j)}$. Из указанных условий получаем следующие равенства

для определения неизвестных функций $P_{k,1}(\tau, a, \eta)$, $Q_{k,1}(\tau, a, \eta)$:

$$(f_{0,0}^{(1)}(\tau, a), \chi^{(0)}) + \sum_{\mu=1}^{R_0} (f_{p_m^{(\mu,0)}, q_k^{(\mu,0)}}(\tau, a), \chi^{(0)}) e^{i\eta_{\mu,0}} - \\ - P_{0,1}(\tau, a, \eta) \left[1 + \sum_{l=0}^r \Delta_l(A_l \varphi^{(0)}, \chi^{(0)}) \right] = 0; \quad (1.21)$$

$$(f_{0,1,j}^{(1)}(\tau, a), \chi^{(j)}) + \sum_{\mu=1}^{R_j} (f_{p_m^{(\mu,j)}, q_k^{(\mu,j)}}(\tau, a), \chi^{(j)}) e^{i\eta_{\mu,j}} - [P_{j,1}(\tau, a, \eta) + \\ + ia_j Q_{j,1}(\tau, a, \eta)] \left[1 + \sum_{l=0}^r \Delta_l(A_l \varphi^{(j)}, \chi^{(j)}) e^{-i\Delta_l \omega_j} \right] = 0 \quad (1.22)$$

$$(j = 1, 2, \dots, K),$$

где символом (x, y) обозначено скалярное произведение векторов x и y .

Легко показать, что в уравнениях (1.21) и (1.22) коэффициенты при неизвестных отличны от нуля, и, следовательно, решения $P_{j,1}(\tau, a, \eta)$ и $Q_{j,1}(\tau, a, \eta)$ однозначны. При выполнении условий (1.21), (1.22) уравнения (1.18), (1.19) будут разрешимы, но не однозначно, а лишь с точностью до произвольных аддитивных постоянных, которые для определенности можно взять равными нулю.

Зная выражения $P_{j,1}$, $Q_{j,1}$, U_1 и подставляя их в выражение $F_2^{(0)}$, из равенства (1.15) аналогично предыдущему получаем неизвестные функции $P_{j,2}$, $Q_{j,2}$, U_2 . В свою очередь, зная выражения $P_{j,1}$, $Q_{j,1}$, U_1 , $P_{j,2}$, $Q_{j,2}$, U_2 , можно построить первое и второе приближения для искомого решения системы (1.1). Решение в первом приближении берется в виде:

$$X^{(1)}(t) = U_0(a, \psi), \quad (1.23)$$

где $a_j(t)$ и $\psi_j(t)$ определяются из системы уравнений

$$\frac{da_j}{dt} = \varepsilon P_{j,1}(\tau, a, \eta) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, K); \\ \frac{d\psi_j}{dt} = \omega_j + \varepsilon Q_{j,1}(\tau, a, \eta) \quad (j = 1, 2, \dots, K). \quad (1.24)$$

Решение во втором приближении отыскиваем в виде

$$X^{(2)}(t) = U_0(a, \psi) + \varepsilon U_1(\tau, a, \psi, \theta), \quad (1.25)$$

где $a_j(t)$, $\psi_j(t)$ определяются из системы уравнений

$$\frac{da_j}{dt} = \varepsilon P_{j,1}(\tau, a, \eta) + \varepsilon^2 P_{j,2}(\tau, a, \eta) \\ (j = 0, 1, 2, \dots, K); \quad (1.26)$$

$$\frac{d\psi_j}{dt} = \omega_j + \varepsilon Q_{j,1}(\tau, a, \eta) + \varepsilon^2 Q_{j,2}(\tau, a, \eta) \\ (j = 1, 2, \dots, K).$$

Построение дальнейших приближений не представляет принципиальных затруднений, однако практически первых двух, а часто и одного первого приближения бывает вполне достаточно.

2. ПРИМЕР

В качестве примера применения изложенной выше теории рассмотрим нелинейную колебательную систему с запаздыванием, которая описывается системой дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} dx_1(t)/dt &= x_2(t); \\ dx_2(t)/dt &= ax_2(t) - b [x_1(t) - x_3(t) + x_4(t)] + \\ &\quad + h_1 \cos \theta_1(t) - \beta x_2(t) [x_1(t) - \alpha]^2; \\ dx_3(t)/dt &= cx_4(t) + \gamma [x_3(t) - h_2 \cos \theta_2(t)]^2 x_4(t); \\ dx_4(t)/dt &= -\delta [x_1(t - \Delta) - x_3(t - \Delta) + x_4(t - \Delta)]; \\ d\theta_1(t)/dt &= \nu_1(t); \quad d\theta_2(t)/dt = \nu_2(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

К уравнениям вида (2.1) после некоторых упрощений и преобразований сводятся некоторые электрические системы, состоящие из связанных, удаленных друг от друга колебательных контуров, содержащих нелинейные элементы. Изложенный выше метод построения приближенных решений будет применим к системе (2.1), если потребовать, чтобы нелинейные члены были малы по сравнению с линейными, а величины $\nu_1(t)$ и $\nu_2(t)$ медленно изменялись по сравнению с изменением фазовых углов колебаний.

Для конкретных значений параметров линейной части системы: $a = 8,37 \cdot 10^4$; $b = 113 \cdot 10^8$; $c = 4,1 \cdot 10^4$; $\delta = 7,25 \cdot 10^4$; $\Delta = 1,2 \cdot 10^{-4}$ характеристическое уравнение порождающей линейной системы

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} -\rho & 1 & 0 & 0 \\ -b & a-\rho & b & -b \\ 0 & 0 & -\rho & c \\ -\delta e^{-\Delta\rho} & 0 & \delta e^{-\Delta\rho} & -\delta e^{-\Delta\rho} - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (2.2)$$

имеет простые корни

$$\rho_0 = 0; \quad \rho_{1,2} = \pm i \omega_1 = \pm i 6,23 \cdot 10^4; \quad \rho_{3,4} = \pm i \omega_2 = \pm i 12,62 \cdot 10^4$$

и не будет иметь других чисто мнимых корней и корней с положительной вещественной частью. Тогда для соответствующих собственных векторов системы получаем следующие значения:

$$\varphi^{(0)} = \{1; 0; -1; 0\}; \quad \chi^{(0)} = \{1; -0,12 \cdot 10^4; 0; 1,86\};$$

$$\varphi^{(1)} = \{1; 6,23i \cdot 10^4; 0,41 + 0,16i; -0,25 + 0,63i\};$$

$$\chi^{(1)} = \{-0,13 - 0,29i; (0,27 + 0,15i) \cdot 10^{-4}; 0,13 + 0,29i; -3,2 - 2i\};$$

$$\varphi^{(2)} = \{1; 12,62i \cdot 10^4; 0,235 - 0,182i; 0,561 + 0,724i\};$$

$$\chi^{(2)} = \{-1,2 + 0,17i; (0,0345 - 0,00725i) \cdot 10^{-4}; 1,2 - 0,17i; 0,392 - 1,117i\}.$$

В нашей системе существует внутренний резонанс $\omega_2 \approx 2\omega_1$. Если взять $\nu_1(t) \approx \omega_1$; $\nu_2(t) \approx \omega_1 + \omega_2$, то в первом приближении будет еще сказываться резонанс $\nu_2(t) = 2\omega_2 - \omega_1$. Другие, более сложные резонансные соотношения влияют на решение лишь в высших приближениях.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \eta_{1,0}(t) &= \psi_2(t) - 2\psi_1(t); \quad \eta_{1,1}(t) = \theta_1(t) - \psi_1(t); \\ \eta_{2,0}(t) &= \theta_2(t) - \psi_1(t) - \psi_2(t); \quad \eta_{2,1}(t) = 2\psi_2(t) - \theta_2(t) - \psi_1(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

и станем искать решение в первом приближении в виде:

$$\begin{aligned} x_s(t) = & a_0(t) \varphi_s^{(0)} + a_1(t) [\varphi_s^{(1)} e^{i\psi_1(t)} + \bar{\varphi}_s^{(1)} e^{-i\psi_1(t)}] + \\ & + a_2(t) [\varphi_s^{(2)} e^{i\psi_2(t)} + \bar{\varphi}_s^{(2)} e^{-i\psi_2(t)}] \\ (s = 1, 2, 3, 4), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $a_k(t)$ и $\psi_k(t)$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned} da_0/dt = & \varepsilon P_{0,1}(a_0, a_1, a_2, \eta_{1,0}, \eta_{1,1}, \eta_{2,0}, \eta_{2,1}); \\ da_1/dt = & \varepsilon P_{1,1}(a_0, a_1, a_2, \eta_{1,0}, \eta_{1,1}, \eta_{2,0}, \eta_{2,1}); \\ da_2/dt = & \varepsilon P_{2,1}(a_0, a_1, a_2, \eta_{1,0}, \eta_{1,1}, \eta_{2,0}, \eta_{2,1}); \\ d\psi_1/dt = & \omega_1 + \varepsilon Q_{1,1}(a_0, a_1, a_2, \eta_{1,0}, \eta_{1,1}, \eta_{2,0}, \eta_{2,1}); \\ d\psi_2/dt = & \omega_2 + \varepsilon Q_{2,1}(a_0, a_1, a_2, \eta_{1,0}, \eta_{1,1}, \eta_{2,0}, \eta_{2,1}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\varepsilon P_{k,1}$ и $\varepsilon Q_{k,1}$ находятся из системы (1.22).

Полагая в нелинейных членах $\alpha = 0,02$; $\beta = 25 \cdot 10^8$; $\gamma = 6 \cdot 10^8$; $h_1 = 16 \cdot 10^4$; $h_2 = 0,002$, получим систему:

$$\begin{aligned} da_0/dt = & -30,6 a_1^2 a_2 \sin \eta_{1,0}; \\ da_1/dt = & 33,6 \cdot 10^4 a_1 [(a_0 - 0,02)^2 + a_1^2 + 2a_2^2] - 34,5 \cdot 10^4 a_1 (a_0^2 + 0,39 a_1^2 + \\ & + 0,177 a_2^2) - 26,5 \cdot 10^4 a_1^3 + 12,35 \cos \eta_{1,1} - 0,25 \sin \eta_{1,1} + a_0 a_2 (104,6 \cos \eta_{2,0} + \\ & + 26,3 \sin \eta_{2,0}) - a_2^2 (19,6 \cos \eta_{2,1} - 25,3 \sin \eta_{2,1}) + a_1 a_2 (a_0 - \\ & - 0,02) (6,76 \cos \eta_{1,0} + 366,5 \sin \eta_{1,0}) 10^5; \\ da_2/dt = & -1154 \cdot 10^4 a_2 [(a_0 - 0,02)^2 + 2a_1^2 + a_2^2] + 410 \cdot 10^4 a_2 (a_0^2 + 0,39 a_1^2 + \\ & + 0,177 a_2^2) - 12,4 \cdot 10^4 a_2^3 + a_0 a_1 (430 \cos \eta_{2,0} + 456 \sin \eta_{2,0}) + \\ & + a_1 a_2 (38,4 \cos \eta_{2,1} - 36,75 \sin \eta_{2,1}); \\ d\psi_1/dt = & 6,23 \cdot 10^4 - 1475 \cdot 10^4 [(a_0 - 0,02)^2 + a_1^2 + 2a_2^2] + \\ & + 19,43 \cdot 10^4 (a_0^2 + 0,39 a_1^2 + 0,177 a_2^2) - 12 \cdot 10^4 a_1^2 + \\ & + \frac{1}{a_1} (0,28 \cos \eta_{1,1} + 12,35 \sin \eta_{1,1}) + a_2 (a_0 - 0,02) (67,6 \sin \eta_{1,0} - \\ & - 3665 \cos \eta_{1,0}) 10^4 + \frac{a_0 a_2}{a_1} (104,6 \sin \eta_{2,0} - 26,3 \cos \eta_{2,0}) - \\ & - \frac{a_2^2}{a_1} (19,6 \sin \eta_{2,1} + 25,3 \cos \eta_{2,1}); \\ d\psi_2/dt = & 12,62 \cdot 10^4 + 960 \cdot 10^4 [(a_0 - 0,02)^2 + 2a_1^2 + a_2^2] - \\ & - 93 \cdot 10^4 (a_0^2 + 0,39 a_1^2 + 0,177 a_2^2) - 45 \cdot 10^4 a_2^3 + \\ & + \frac{a_0 a_1}{a_2} (456 \cos \eta_{2,0} - 430 \sin \eta_{2,0}) + a_1 (367,5 \cos \eta_{2,1} + 38,4 \sin \eta_{2,1}). \end{aligned}$$

Систему (2.6) с учетом (2.3) интегрируем численными методами. При этом полагаем, что

$$\nu_1(t) = (6 + 50t) 10^4; \quad \nu_2(t) = (18 + 120t) 10^4.$$

Результаты интегрирования приведены на графиках рис. 1.

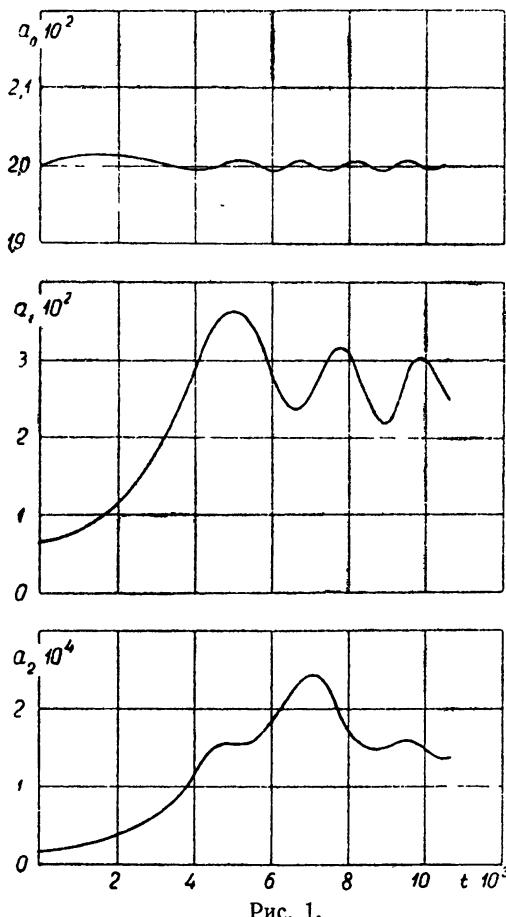


Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

- Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
- Ю. А. Митропольский, Медленные процессы в нелинейных колебательных системах со многими степенями свободы, ПММ, 14, 139 (1950).
- Ю. А. Митропольский, Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, изд. АН УССР, Киев, 1955.
- В. А. Гробов, Сб. Вопросы прочности материалов и конструкций, изд. АН СССР, М., 1959, стр. 219.
- В. П. Рубаник, Укр. матем. ж., 11, 446 (1959).
- В. П. Рубаник, Научн. ежегодник Чернов. ун-та, 4, 63 (1960).

Черновицкий государственный
университет

Поступила в редакцию
26 ноября 1960 г.

MULTIFREQUENCY RESONANCE OSCILLATIONS IN QUASILINEAR SYSTEMS WITH DELAYED ARGUMENTS

V. P. Roubanik

An investigation is made of multifrequency resonance oscillations in quasilinear systems with delayed arguments of the (1.1) type upon presence in the system of different combination and internal resonances. The well-known asymptotic methods of Krylov, Bogoliubov and Mitropolski for systems of ordinary differential equations are generalized on equations of the type indicated. A general method has been worked out for obtaining approximate asymptotic solutions, which is then applied to the solution of a concrete system of equations.

АВТОКОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С ДВУМЯ РЕЛЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Б. Р. Сергиевский

Дается метод точного определения автоколебаний в системах с двумя релейными элементами, имеющими несимметричные характеристики.

В практике автоматического регулирования приходится встречаться с системами, содержащими два элемента с релейными характеристиками. Основные задачи исследования этих систем заключаются в определении параметров автоколебаний, устойчивости и границ устойчивости. Решению этих задач посвящен ряд работ [1-6], которые могут быть разделены на две группы. К первой группе можно отнести работы, в которых отыскание периодических движений производится методом гармонического баланса [1]. Этот метод является приближенным и требует дополнительной проверки. Точное решение получается только в отдельных частных случаях [5]. Вычислительная работа, в особенности при анализе систем с неоднозначными и несимметричными характеристиками, а также внешними возмущающими воздействиями, оказывается весьма трудоемкой. В статьях второй группы используются методы, позволяющие получить точное решение [2-6]. Первой из этой группы является статья [2]. В дальнейшем принятая в ней методика была распространена на определение периодических движений в многокаскадных релейных системах [6].

В настоящей работе метод Лурье [7] распространен на системы регулирования с двумя релейными элементами, имеющими несимметричные характеристики.

Дифференциальные уравнения движения регулируемой системы, содержащей два релейных элемента, можно представить в следующем виде [8,9]:

$$\dot{\eta}_k(t) = \sum_{\alpha=1}^n a_{k\alpha} \eta_\alpha(t) + b_{1k} f_1(\sigma_1) + b_{2k} f_2(\sigma_2) \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (1)$$

$$\sigma_1(t) = \sum_{\alpha=1}^n c_{1\alpha} \eta_\alpha(t); \quad \sigma_2(t) = \sum_{\alpha=1}^n c_{2\alpha} \eta_\alpha(t).$$

Соответствующая этой системе структурная схема изображена на рис. 1.

Алгебраическая система изображающих уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^n (a_{k\alpha} - \delta_{k\alpha} p) \eta_\alpha = -b_{1k} f_1(\sigma_1) - b_{2k} f_2(\sigma_2), \quad (2)$$

где

$$p = \frac{d}{dt}; \quad \delta_{k\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = \alpha, \\ 0 & \text{при } k \neq \alpha, \end{cases}$$

имеет решение

$$\eta_k(p) = -\frac{N_{1k}(p)}{D(p)} f_1(\sigma_1) - \frac{N_{2k}(p)}{D(p)} f_2(\sigma_2) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

где через $D(p)$ обозначен характеристический определитель этой системы

$$D(p) = \begin{vmatrix} a_{11} - p, & a_{12}, & a_{13}, \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - p, & a_{23}, \dots, & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, \dots, & a_{n\bar{n}p} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

а через $N_{1k}(p)$ и $N_{2k}(p)$ — определители, которые получаются из $D(p)$ заменой k -го столбца соответственно значениями b_{1k} и b_{2k} .

Развертывая определитель (4) по степеням p и находя корни, можно определить $\eta_k(t)$. Решение будет определяться характером корней этого определителя.

В практических задачах встречаются следующие случаи: а) корни характеристического полинома различны и не равны нулю, б) среди различных корней полинома имеется один корень, равный нулю, и, наконец, в) среди корней имеются два кратных нулевых корня.

1. Случай. Пусть корни полинома (4) различны и не

равны нулю. Тогда, используя разложение дробей в выражениях (3) на сумму простейших, получим:

$$\eta_k(p) = -\sum_{j=1}^n \frac{1}{D'(p_j)} [N_{1k}(p_j) f_1(\sigma_1) + N_{2k}(p_j) f_2(\sigma_2)] \frac{1}{p - p_j} \quad (5)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

где p_j — корни характеристического полинома (4), $D'(p)$ — производная $D(p)$ по p .

Следуя методике преобразования системы (5) к канонической [7], введем новые переменные $x_{jk}(t)$, удовлетворяющие следующим дифференциальным уравнениям:

$$\dot{x}_{jk}(t) = p_j x_{jk}(t) + F_{jk}, \quad (6)$$

где

$$F_{jk} = N_{1k}(p_j) f_1(\sigma_1) + N_{2k}(p_j) f_2(\sigma_2)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n).$$

В новых переменных уравнение (5) будет иметь вид:

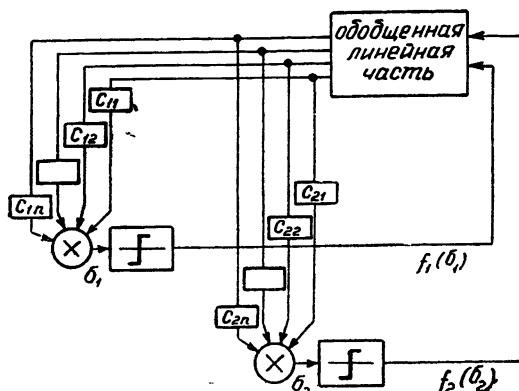


Рис. 1.

$$\eta_k(t) = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{D'(p_j)} x_{jk}(t), \quad (7)$$

а управляющие сигналы $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ —

$$\sigma_1(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\mu_{1j}(t)}{D'(p_j)}, \quad \sigma_2(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\mu_{2j}(t)}{D'(p_j)}, \quad (8)$$

где

$$\mu_{1j}(t) = - \sum_{k=1}^n c_{1k} x_{jk}(t), \quad \mu_{2j}(t) = - \sum_{k=1}^n c_{2k} x_{jk}(t).$$

Таким образом, полная система канонических уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{jk}(t) &= p_j x_{jk}(t) + F_{jk}; \\ \sigma_1(t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\mu_{1j}(t)}{D'(p_j)}; \quad \mu_{1j}(t) = - \sum_{k=1}^n c_{1k} x_{jk}(t); \\ \sigma_2(t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\mu_{2j}(t)}{D'(p_j)}; \quad \mu_{2j}(t) = - \sum_{k=1}^n c_{2k} x_{jk}(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим случай, когда релейные элементы имеют характеристику общего вида (рис. 2а). Предположим, что в системе возникли автоколебания, характер которых изображен на рис. 2б. Период и амплитуда автоколебаний определяются параметрами системы, характеристиками релейных элементов и видом внешнего возмущающего воздействия. В настоящей работе рассмотрен случай, когда внешнее возмущающее воздействие отсутствует.

Возьмем за начало отсчета времени моменты изменения управляющих функций $f_1(\sigma_1)$ и $f_2(\sigma_2)$, т. е. моменты, когда управляющий сигнал $\sigma_1(t)$, изменяясь, достигает значений σ_{12} и σ_{11} , а $\sigma_2(t)$ — значений σ_{21} и σ_{22} . Таким образом, следует рассмотреть четыре интервала, которые определяются значениями управляющих сигналов $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$. В первом интервале $f_1(\sigma_1) = f_3$, а $f_2(\sigma_2) = f_2$; во втором $f_1(\sigma_1) = f_3$, $f_2(\sigma_2) = f_4$; в третьем $f_1(\sigma_1) = f_1$, $f_2(\sigma_2) = f_4$ и, наконец, в четвертом интервале $f_1(\sigma_1) = f_1$ и $f_2(\sigma_2) = f_2$. При этих условиях для перечисленных интервалов дифференциальные уравнения системы (9) могут быть записаны в следующем виде:

$$\dot{x}_{jk}^{(m)}(t) = p_j x_{jk}^{(m)}(t) + F_{jk}^{(m)}; \quad (10)$$

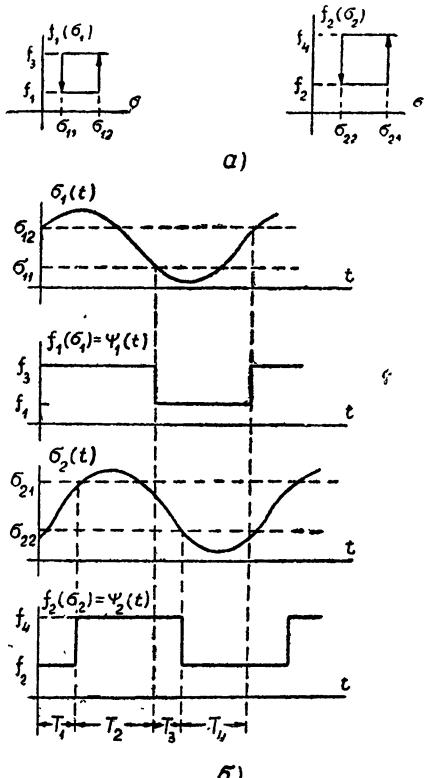


Рис. 2

$$\sigma_1^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\mu_{1j}^{(m)}(t)}{D'(p_j)}; \quad \sigma_2^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\mu_{2j}^{(m)}(t)}{D'(p_j)},$$

где

$$\mu_{1j}^{(m)}(t) = - \sum_{k=1}^n c_{1k} x_{jk}^{(m)}(t); \quad \mu_{2j}^{(m)}(t) = - \sum_{k=1}^n c_{2k} x_{jk}^{(m)}(t);$$

$$\begin{aligned} F_{jk}^{(1)} &= f_3 N_{1k}(p_j) + f_2 N_{2k}(p_j); & F_{jk}^{(2)} &= f_3 N_{1k}(p_j) + f_4 N_{2k}(p_j); \\ F_{jk}^{(3)} &= f_1 N_{1k}(p_j) + f_4 N_{2k}(p_j); & F_{jk}^{(4)} &= f_1 N_{1k}(p_j) + f_2 N_{2k}(p_j) \\ (j &= 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n; m = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

Решением n первых уравнений системы (10) будет

$$x_{jk}^{(m)}(t) = x_{jk}^{(m)}(0) e^{p_j t} - \frac{F_{jk}^{(m)}}{p_j} (1 - e^{p_j t}) \quad (m = 1, 2, 3, 4), \quad (11)$$

но так как переменные $x_{jk}^{(m)}(t)$ должны быть непрерывны, для определения $x_{jk}^{(m)}(0)$ при автоколебательном движении необходимо выполнение следующих условий:

$$x_{jk}^{(m)}(0) = x_{jk}^{(m+3)}(T_{m+3}) \quad (m = 1, 2, 3, 4). \quad (12)$$

При развертывании этих соотношений (а также последующих формул) следует иметь в виду круговую перестановку индексов: если индекс больше четырех, то нужно записывать 1 вместо 5, 2 вместо 6, 3 вместо 7 и 4 вместо 8.

Используя условие (12), найдем:

$$x_{jk}^{(m)}(t) = - \frac{1}{p_j} (M_{jk}^{(m)} e^{p_j t} + F_{jk}^{(m)}) \quad (m = 1, 2, 3, 4), \quad (13)$$

где

$$M_{jk}^{(1)} = (f_1 - f_3) A_j^{(1)} N_{1k}(p_j) + (f_2 - f_4) B_j^{(1)} N_{2k}(p_j);$$

$$M_{jk}^{(2)} = -(f_1 - f_3) B_j^{(2)} N_{1k}(p_j) + (f_2 - f_4) A_j^{(2)} N_{2k}(p_j);$$

$$M_{jk}^{(3)} = -(f_1 - f_3) A_j^{(3)} N_{1k}(p_j) - (f_2 - f_4) B_j^{(3)} N_{2k}(p_j);$$

$$M_{jk}^{(4)} = (f_1 - f_3) B_j^{(4)} N_{1k}(p_j) - (f_2 - f_4) A_j^{(4)} N_{2k}(p_j),$$

а $A_j^{(m)}$ и $B_j^{(m)}$ определяются по формулам:

$$A_j^{(m)} = \frac{1 - e^{p_j(T_{m+2} + T_{m+3})}}{1 - e^{p_j T}}; \quad B_j^{(m)} = - \frac{(1 - e^{p_j(T_{m+1} + T_{m+2})}) e^{p_j T_{m+3}}}{1 - e^{p_j T}}. \quad (14)$$

Подставив полученные значения $x_{jk}^{(m)}(t)$ во второе и третье уравнения (10), найдем изменения $\sigma_1^{(m)}(t)$ и $\sigma_2^{(m)}(t)$, которые при условиях (рис. 2б)

$$\begin{aligned} \sigma_2^{(1)}(T_1) &= \sigma_{21}, & \sigma_1^{(2)}(T_2) &= \sigma_{11}, \\ \sigma_2^{(3)}(T_3) &= \sigma_{22}, & \sigma_1^{(4)}(T_4) &= \sigma_{12} \end{aligned} \quad (15)$$

позволяют получить систему трансцендентных уравнений для определения T_1 , T_2 , T_3 и T_4 , т. е. периода автоколебаний.

Эта система трансцендентных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
& f_1 \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{1j}}{p_j} A_i^{(1)} e^{p_j T_1} + f_2 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{2j}}{p_j} (1 + B_j^{(1)} e^{p_j T_1}) + \\
& + f_3 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{1j}}{p_j} (1 - A_j^{(1)} e^{p_j T_1}) - f_4 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{2j}}{p_j} B_j^{(1)} e^{p_j T_1} = \sigma_{21}; \\
& - f_1 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{1j}}{p_j} B_j^{(2)} e^{p_j T_2} + f_2 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{2j}}{p_j} A_j^{(2)} e^{p_j T_2} + \\
& + f_3 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{1j}}{p_j} (1 + B_j^{(2)} e^{p_j T_2}) + f_4 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{2j}}{p_j} (1 - A_j^{(2)} e^{p_j T_2}) = \sigma_{11}; \quad (16) \\
& f_1 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{1j}}{p_j} (1 - A_j^{(3)} e^{p_j T_3}) - f_2 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{2j}}{p_j} B_j^{(3)} e^{p_j T_3} + \\
& + f_3 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{1j}}{p_j} A_j^{(3)} e^{p_j T_3} + f_4 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{2j}}{p_j} (1 + B_j^{(3)} e^{p_j T_3}) = \sigma_{22}; \\
& f_1 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{1j}}{p_j} (1 + B_j^{(4)} e^{p_j T_4}) + f_2 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{2j}}{p_j} (1 - A_j^{(4)} e^{p_j T_4}) - \\
& - f_3 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{1j}}{p_j} B_j^{(4)} e^{p_j T_4} + f_4 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{2j}}{p_j} A_j^{(4)} e^{p_j T_4} = \sigma_{12},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_{1j} &= \sum_{k=1}^n c_{1k} \frac{N_{1k}(p_j)}{D'(p_j)}, \quad \bar{\gamma}_{2j} = \sum_{k=1}^n c_{1k} \frac{N_{2k}(p_j)}{D'(p_j)}, \\
\bar{\gamma}_{1j} &= \sum_{k=1}^n c_{2k} \frac{N_{1k}(p_j)}{D'(p_j)}, \quad \bar{\gamma}_{2j} = \sum_{k=1}^n c_{2k} \frac{N_{2k}(p_j)}{D'(p_j)}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Для существования автоколебательного движения необходимо удовлетворить также условиям переключения, которые для каждого интервала в общем виде можно записать следующими неравенствами:

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_1^{(1)}(+0) &> 0, \quad \dot{\sigma}_2^{(2)}(T_1 + 0) > 0, \\
\dot{\sigma}_1^{(3)}(T_2 + 0) < 0, \quad \dot{\sigma}_2^{(4)}(T_3 + 0) < 0. \quad (18)
\end{aligned}$$

Подставляя найденные из системы трансцендентных уравнений (16) T_1, T_2, T_3 и T_4 в (13), можно определить изменение канонических переменных $x_{jk}^{(m)}(t)$ и, следовательно, по формуле (7) найти выражения для исходных переменных $\eta_k^{(m)}(t)$.

Для случая симметричных характеристик вида двухпозиционного поляризованного реле (рис. 3) в системе (16) следует положить $f_1 = -f_3$ и $f_2 = -f_4$, а также $\sigma_{11} = -\sigma_{12}$ и $\sigma_{22} = -\sigma_{21}$. Тогда для определения периода автоколебаний можно ограничиться нахождением только двух неизвестных T_1 и T_2 , т. е. полупериода. Система трансцендентных уравнений в этом случае будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} f_1 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{1j}}{p_j} \left(1 - \frac{2e^{p_j T_1}}{1 + e^{p_j(T_1+T_2)}} \right) - f_2 \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{2j}}{p_j} \frac{1 - e^{p_j(T_1+T_2)}}{1 + e^{p_j(T_1+T_2)}} = \sigma_{22}; \\ f_1 \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{1j}}{p_j} \frac{1 - e^{p_j(T_1+T_2)}}{1 + e^{p_j(T_1+T_2)}} + f_2 \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{2j}}{p_j} \left(1 - \frac{2e^{p_j T_2}}{1 + e^{p_j(T_1+T_2)}} \right) = -\sigma_{11}. \end{aligned} \quad (19)$$

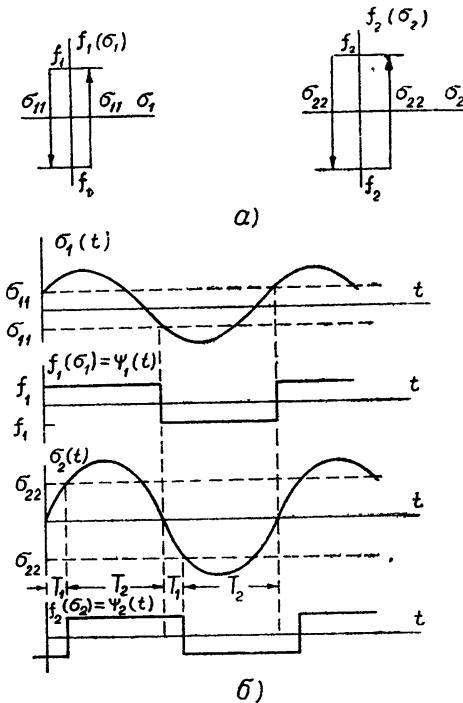


Рис. 3.

Если в системе имеется один релейный элемент (второго нет), то $\bar{\gamma}_{1j} = \bar{\gamma}_{2j} = \gamma_{2j} = 0$ и уравнение для определения периода автоколебаний [1]

$$f_3 \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{1j}}{p_j} \operatorname{th} \frac{p_j T}{2} = -\sigma_{12}.$$

2 случай. Если характеристический полином (4) имеет один корень, равный нулю ($p_n = 0$), то определение автоколебаний производится следующим образом. Выражения для определения канонических переменных $x_{jk}^{(m)}(t)$ ($j \leq n-1$) остаются такими же, как и в первом случае (13). Поскольку $p_n = 0$, то

$$\dot{x}_{n,k}^{(m)}(t) = F_{n,k}^{(m)}$$

и, следовательно,

$$x_{n,k}^{(m)}(t) = F_{n,k}^{(m)}t + C_1^{(m)}. \quad (20)$$

Подставляя значения $x_{jk}^{(m)}(t)$ и $x_{n,k}^{(m)}(t)$ в (9), получим выражения для $\sigma_1^{(m)}(t)$ и $\sigma_2^{(m)}(t)$, в которых произвольные постоянные определяются из следующих условий для начала каждого интервала:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(1)}(0) = \sigma_{12}, \quad \sigma_1^{(2)}(0) = \sigma_1^{(1)}(T_1), \quad \sigma_1^{(3)}(0) = \sigma_{11}, \quad \sigma_1^{(4)}(0) = \sigma_1^{(3)}(T_3), \\ \sigma_2^{(2)}(0) = \sigma_{21}, \quad \sigma_2^{(3)}(0) = \sigma_2^{(2)}(T_2), \quad \sigma_2^{(4)}(0) = \sigma_{22}, \quad \sigma_2^{(1)}(0) = \sigma_2^{(4)}(T_4). \end{aligned}$$

После определения постоянных уравнение периода находится из условий (15). Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & (f_1 - f_3) \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{1j}}{p_j} [A_j^{(1)}(e^{p_j T_1} - 1) - B_j^{(2)}(e^{p_j T_2} - 1)] + \\ & + (f_2 - f_4) \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{2j}}{p_j} [B_j^{(1)}(e^{p_j T_1} - 1) + A_j^{(2)}(e^{p_j T_2} - 1)] - \\ & - f_2 \gamma_{2n} T_1 - f_3 \gamma_{1n} (T_1 + T_2) - f_4 \gamma_{2n} T_2 + \sigma_{12} - \sigma_{11} = 0; \\ & (f_1 - f_3) \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{1j}}{p_j} [B_j^{(4)}(e^{p_j T_4} - 1) + A_j^{(1)}(e^{p_j T_1} - 1)] - \end{aligned} \quad (21)$$

$$-(f_2 - f_4) \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{2j}}{p_j} [A_j^{(4)} (e^{p_j T_4} - 1) - B_j^{(1)} (e^{p_j T_1} - 1)] -$$

$$-f_1 \bar{\gamma}_{1n} T_4 - f_2 \bar{\gamma}_{2n} (T_1 + T_4) - f_3 \bar{\gamma}_{1n} T_1 + \sigma_{22} - \sigma_{21} = 0;$$

$$f_1 \bar{\gamma}_{1n} (T_3 + T_4) + f_2 \bar{\gamma}_{2n} (T_1 + T_4) + f_3 \bar{\gamma}_{1n} (T_1 + T_2) + f_4 \bar{\gamma}_{2n} (T_2 + T_3) = 0;$$

$$f_1 \bar{\gamma}_{1n} (T_3 + T_4) + f_2 \bar{\gamma}_{2n} (T_1 + T_4) + f_3 \bar{\gamma}_{1n} (T_1 + T_2) + f_4 \bar{\gamma}_{2n} (T_2 + T_3) = 0.$$

Полученная система может быть решена таким образом. Из последних двух уравнений находим T_1 и T_2 через неизвестные T_3 и T_4 . После этого из первых двух уравнений исключаются T_1 и T_2 и графически находятся T_3 и T_4 .

Исходные переменные находятся по формуле преобразования (7) после предварительного определения канонических переменных $x_{jk}^{(m)}(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) и $x_{nk}^{(m)}(t)$.

З случай. Если характеристический определитель (4) имеет двухкратный нулевой корень, то, обозначая $D(p) = p^2 D_1(p)$ и разлагая (3) на простейшие дроби, можно записать выражения для $\eta_k(t)$ в следующем виде:

$$\eta_k(t) = - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{p_j^2 D'_1(p_j)} x_{jk}(t) - \frac{1}{D_1^2(0)} x_{n-1,k}(t) - \frac{1}{D_1(0)} x_{n,k}(t). \quad (22)$$

Преобразуя выражения для $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ к новым переменным, получим следующую систему канонических уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{jk}(t) &= p_j x_{jk}(t) + F_{jk}; \\ x_{n-1,k}(t) &\equiv F_{n-1,k}; \\ \dot{x}_{n,k}(t) &= F_{n,k}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\sigma_1(t) = \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\mu_{1j}(t)}{p_j^2 D'_1(p_j)} + \frac{\mu_{1,n-1}(t)}{D_1^2(0)} + \frac{\mu_{1n}(t)}{D_1(0)},$$

$$\sigma_2(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\mu_{2j}(t)}{p_j^2 D'_1(p_j)} + \frac{\mu_{2,n-1}(t)}{D_1^2(0)} + \frac{\mu_{2n}(t)}{D_1(0)}$$

$$(j = 1, 2, \dots, n-2; \quad k = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$\mu_{1j}(t) = - \sum_{k=1}^n c_{1k} x_{jk}(t); \quad \mu_{2j}(t) = - \sum_{k=1}^n c_{2k} x_{jk}(t);$$

$$\mu_{1,n-1}(t) = - \sum_{k=1}^n c_{1k} x_{n-1,k}(t); \quad \mu_{2,n-1}(t) = - \sum_{k=1}^n c_{2k} x_{n-1,k}(t)$$

$$\mu_{1n}(t) = - \sum_{k=1}^n c_{1k} x_{n,k}(t); \quad \mu_{2n}(t) = - \sum_{k=1}^n c_{2k} x_{n,k}(t);$$

$$F_{jk} = N_{1k}(p_j) f_1(\sigma_1) + N_{2k}(p_j) f_2(\sigma_2);$$

$$F_{n-1,k} = [N'_{1k}(0) D_1(0) - D'_1(0) N_{1k}(0)] f_1(\sigma_1) +$$

$$+ [N'_{2k}(0) D_1(0) - D'_1(0) N_{2k}(0)] f_2(\sigma_2); \\ F_{n,k} = N_{1k}(0) f_1(\sigma_1) + N_{2k}(0) f_2(\sigma_2).$$

Рассмотрим, как и ранее, случай общей характеристики релейных элементов (рис. 2). Последовательность решения при определении $x_{jk}^{(m)}(t)$ ($m = 1, 2, 3, 4$) такая же, как и в случае различных корней. Поэтому выражения для $x_{jk}^{(m)}(t)$, $\mu_{1j}^{(m)}(t)$ и $\mu_{2j}^{(m)}(t)$ сохраняются и будут справедливы только до $j = n - 2$.

Выражения для $x_{n-1,k}^{(m)}(t)$ и $x_{n,k}^{(m)}(t)$ в соответствии с (23) имеют вид:

$$\begin{aligned} x_{n-1,k}^{(m)}(t) &= F_{n-1,k}^{(m)} t + C_1^{(m)}; \\ x_{n,k}^{(m)}(t) &= F_{n,k}^{(m)} \frac{t^2}{2} + C_2^{(m)} t + C_3^{(m)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из условий непрерывности

$$x_{n,k}^{(m)}(T_m) = x_{n,k}^{(m+1)}(0)$$

находим одно уравнение для определения постоянных $C_2^{(m)}$:

$$\sum_{m=1}^4 T_m C_2^{(m)} = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^4 F_{n,k}^{(m)} T_m^2. \quad (25)$$

Остальные уравнения следуют из условий

$$\dot{x}_{n,k}^{(m)}(T_m) = \dot{x}_{n,k}^{(m+1)}(0). \quad (26)$$

Решая полученную систему уравнений, получим:

$$C_2^{(m)} = F_{n,k}^{(m)} a_n^{(m)} + F_{n,k}^{(m+1)} b_n^{(m)} + F_{n,k}^{(m+2)} c_n^{(m)} + F_{n,k}^{(m+3)} d_n^{(m)},$$

где

$$a_n^{(m)} = -\frac{T_m}{2T} (T_m + 2T_{m+1}); \quad b_n^{(m)} = -\frac{T_{m+1}^2}{2T}; \quad c_n^{(m)} = \frac{T_{m+2}^2}{2T}; \quad (27)$$

$$d_n^{(m)} = \frac{T_{m+3}}{2T} (T_{m+3} + 2T_{m+2}); \quad T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \\ (m = 1, 2, 3, 4).$$

Из системы уравнений, полученной на основании условий (26), следует также соотношение:

$$\sum_{m=1}^4 F_{n,k}^{(m)} T_m = 0. \quad (28)$$

Кроме этого соотношения, из условий непрерывности для $x_{n-1,k}(t)$

$$x_{n-1,k}^{(m)}(T_m) = x_{n-1,k}^{(m+1)}(0)$$

получим зависимость

$$\sum_{m=1}^4 F_{n-1,k}^{(m)} T_m = 0. \quad (29)$$

Сравнивая (28) и (29), мы видим, что $F_{n-1,k}^{(m)} = F_{n,k}^{(m)}$. Поэтому $\dot{x}_{n,k}^{(m)}(t) = x_{n-1,k}^{(m)}(t)$ и первые четыре уравнения (24) можно заменить соотношениями

$$x_{n-1,k}^{(m)}(t) = F_{n,k}^{(m)} t + C_2^{(m)}, \quad (30)$$

в которых $C_2^{(m)}$ известны.

Постоянные $C_3^{(m)}$ остаются неопределенными и находятся из других условий. Подставляя значения $x_{j,k}^{(m)}(t)$, $x_{n-1,k}^{(m)}(t)$ и $x_{n,k}^{(m)}(t)$ в четвертое и пятое уравнения (23), получим выражения для управляющих воздействий $\sigma_1^{(m)}(t)$ и $\sigma_2^{(m)}(t)$ в отдельные интервалы, в которых, помимо неизвестных T_1 , T_2 , T_3 и T_4 , входят также неизвестные постоянные $C_3^{(m)}$. Постоянная $C_3^{(1)}$ находится из условия $\sigma_1^{(1)}(t) = \sigma_{12}$ при $t=0$ (рис. 2б). Из аналогичных условий для второго интервала находим $C_3^{(2)}$, имея в виду, что при $t=0$ (для второго интервала) $\sigma_1^{(2)}(0) = \sigma_1^{(1)}(T_1)$. Таким же образом определяются $C_3^{(3)}$ и $C_3^{(4)}$.

Используя условия (15), можно записать систему трансцендентных уравнений для определения интервалов T_1 , T_2 , T_3 и T_4 в следующем виде:

$$\begin{aligned} & (f_1 - f_3) \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\gamma_{1j}}{p_j} [A_j^{(1)} (e^{p_j T_1} - 1) - B_j^{(2)} (e^{p_j T_2} - 1)] + \\ & + (f_2 - f_4) \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\gamma_{2j}}{p_j} [A_j^{(2)} (e^{p_j T_2} - 1) + B_j^{(1)} (e^{p_j T_1} - 1)] - f_2 \gamma_{2,n-1} T_1 - \\ & - f_3 \gamma_{1,n-1} (T_1 + T_2) - f_4 \gamma_{2,n-1} T_2 - f_1 \gamma_{1,n} (A_n^{(1)} T_1 + D_n^{(2)} T_2) - \\ & - f_2 \gamma_{2,n} \left(A_n^{(2)} T_2 + B_n^{(1)} T_1 + \frac{T_1^2}{2} \right) - f_3 \gamma_{1,n} \left(B_n^{(2)} T_2 + C_n^{(1)} T_1 + \frac{T_1^2}{2} + \frac{T_2^2}{2} \right) - \\ & - f_4 \gamma_{2,n} \left(C_n^{(2)} T_2 + D_n^{(1)} T_1 + \frac{T_2^2}{2} \right) + \sigma_{12} - \sigma_{11} = 0; \\ & - (f_1 - f_3) \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\bar{\gamma}_{1j}}{p_j} [A_j^{(3)} (e^{p_j T_3} - 1) - B_j^{(2)} (e^{p_j T_4} - 1)] + \\ & + (f_2 - f_4) \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\bar{\gamma}_{2j}}{p_j} [A_j^{(2)} (e^{p_j T_4} - 1) - B_j^{(3)} (e^{p_j T_3} - 1)] - \\ & - f_1 \bar{\gamma}_{1,n-1} T_3 - f_3 \bar{\gamma}_{1,n-1} T_2 - f_4 \bar{\gamma}_{2,n-1} (T_2 + T_3) - \\ & - f_1 \bar{\gamma}_{1,n} \left(C_n^{(3)} T_3 + D_n^{(2)} T_2 + \frac{T_3^2}{2} \right) - f_2 \bar{\gamma}_{2,n} (A_n^{(2)} T_2 + D_n^{(3)} T_3) - \\ & - f_3 \bar{\gamma}_{1,n} \left(A_n^{(3)} T_3 + B_n^{(2)} T_2 + \frac{T_2^2}{2} \right) - \\ & - f_4 \bar{\gamma}_{2,n} \left(B_n^{(3)} T_3 + C_n^{(2)} T_2 + \frac{T_2^2}{2} + \frac{T_3^2}{2} \right) + \sigma_{21} - \sigma_{22} = 0; \\ & f_1 \gamma_{1,n} \left(A_n^{(1)} T_1 + B_n^{(4)} T_4 + C_n^{(3)} T_3 + D_n^{(2)} T_2 + \frac{T_3^2}{2} + \frac{T_4^2}{2} \right) + \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
& + f_2 \gamma_{2,n} \left(A_n^{(2)} T_2 + B_n^{(1)} T_1 + C_n^{(4)} T_4 + D_n^{(3)} T_3 + \frac{T_1^2}{2} + \frac{T_4^2}{2} \right) + \\
& + f_3 \gamma_{1,n} \left(A_n^{(3)} T_3 + B_n^{(2)} T_2 + C_n^{(1)} T_1 + D_n^{(4)} T_4 + \frac{T_1^2}{2} + \frac{T_2^2}{2} \right) + \\
& + f_4 \gamma_{2,n} \left(A_n^{(4)} T_4 + B_n^{(3)} T_3 + C_n^{(2)} T_2 + D_n^{(1)} T_1 + \frac{T_2^2}{2} + \frac{T_3^2}{2} \right) = 0; \\
f_1 \bar{\gamma}_{1,n} & \left(A_n^{(1)} T_1 + B_n^{(4)} T_4 + C_n^{(3)} T_3 + D_n^{(2)} T_2 + \frac{T_3^2}{2} + \frac{T_4^2}{2} \right) + \\
& + f_2 \bar{\gamma}_{2,n} \left(A_n^{(2)} T_2 + B_n^{(1)} T_1 + C_n^{(4)} T_4 + D_n^{(3)} T_3 + \frac{T_1^2}{2} + \frac{T_4^2}{2} \right) + \\
& + f_3 \bar{\gamma}_{1,n} \left(A_n^{(3)} T_3 + B_n^{(2)} T_2 + C_n^{(1)} T_1 + D_n^{(4)} T_4 + \frac{T_1^2}{2} + \frac{T_2^2}{2} \right) + \\
& + f_4 \bar{\gamma}_{2,n} \left(A_n^{(4)} T_4 + B_n^{(3)} T_3 + C_n^{(2)} T_2 + D_n^{(1)} T_1 + \frac{T_2^2}{2} + \frac{T_3^2}{2} \right) = 0.
\end{aligned}$$

В этой системе $A_j^{(m)}$ и $B_j^{(m)}$ ($m=1,2,3,4; j = 1,2,\dots, n-2$) определяются по формулам (14), γ_{1j} , γ_{2j} , γ_{1j} и γ_{2j} ($j = 1,2,\dots, n-2$) — по формулам (17), а остальные коэффициенты — из соотношений

$$\begin{aligned}
A_n^{(m)} & = \frac{1}{2T} (T_{m+2} + T_{m+3})^2; \\
B_n^{(m)} & = -\frac{1}{2T} [T_m (T_m + 2T_{m+1}) - T_{m+3} (T_{m+3} + 2T_{m+2})]; \\
C_n^{(m)} & = -\frac{1}{2T} (T_m + T_{m+1})^2; \\
D_n^{(m)} & = -\frac{1}{2T} (T_{m+1}^2 - T_{m+2}^2),
\end{aligned} \tag{32}$$

где

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

Зная значения интервалов T_1 , T_2 , T_3 и T_4 в автоколебательном режиме, по формулам (13) для $j = 1,2,\dots, n-2$, (24) и (27) легко определить канонические переменные

$$x_{jk}^{(m)}(t) \quad (j = 1,2,\dots, n-2), \quad x_{n-1,k}^{(m)}(t), \quad x_{n,k}^{(m)}(t).$$

а затем по формуле (22) — исходные переменные $\eta_k(t)$.

Система уравнений (31) является общей системой, из которой могут быть получены зависимости для частных характеристик релейных элементов. Во всех случаях к уравнениям периода следует добавить условия переключения

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_1^{(1)}(0) & > 0, & \dot{\sigma}_1^{(3)}(0) & < 0, \\
\dot{\sigma}_2^{(2)}(0) & > 0, & \dot{\sigma}_2^{(4)}(0) & < 0.
\end{aligned}$$

Перейдем к исследованию устойчивости автоколебательных режимов, которое производим методом малых возмущений [1]. Рассмотрим непериодический процесс, близкий к периодическому. Начальные значения для функций $x_{jk}^*(t)$ в каждом интервале при возмущенном движении отличаются от начальных значений при установившемся автоколебательном движении $x_{jk}(t)$ и могут быть записаны в следующем виде:

$$x_{jk}^{(m)*}(0) = x_{jk}^{(m)}(0) + F_{jk}^{(m)} \eta_{jko}^{(m)} \quad (m = 1, 2, 3, 4), \quad (33)$$

где $x_{jk}^{(m)}(0) = -(1/p_j)(M_{jk}^{(m)} + F_{jk}^{(m)})$, $\eta_{jko}^{(m)}$ —малые величины, определяющие отклонение начальных функций от их значений при установившемся автоколебательном движении.

Границы интервалов определяются теми же условиями, что и при автоколебательном движении, т. е. граничными значениями управляющих воздействий $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$, равными σ_{11} , σ_{12} , σ_{21} , σ_{22} . При этих начальных условиях изменение функции в каждом интервале

$$x_{jk}^{(m)*}(t) = -\frac{1}{p_j} M_{jk}^{(m)} e^{p_j t} - \frac{1}{p_j} F_{jk}^{(m)} + F_{jk}^{(m)} e^{p_j t} \eta_{jko}^{(m)}. \quad (34)$$

Подставляя функции $x_{jk}(t)$ во второе и третье уравнения (10), найдем значения для управляющих сигналов $\sigma_1^{(2)*}(t)$, $\sigma_1^{(4)*}(t)$, $\sigma_2^{(1)*}(t)$ и $\sigma_2^{(3)*}(t)$.

Конец каждого интервала движения определяется условиями (15), при которых длительности интервалов будут отличаться от длительности при автоколебательном движении. Для определения изменения интервалов ΔT_{10} , ΔT_{20} , ΔT_{30} и ΔT_{40} при возмущенном движении возьмем разности

$$\sigma_2^{(1)*}(T'_1) - \sigma_2^{(1)}(T_1), \quad \sigma_2^{(3)*}(T'_3) - \sigma_2^{(3)}(T_3),$$

$$\sigma_1^{(2)*}(T'_2) - \sigma_1^{(2)}(T_2), \quad \sigma_1^{(4)*}(T'_4) - \sigma_1^{(4)}(T_4),$$

где T'_1 , T'_2 , T'_3 , T'_4 — концы соответствующих моментам перехода управляющих функций $f_1(\sigma_1)$ и $f_2(\sigma_2)$ от f_1 к f_3 и f_2 к f_4 и обратно при возмущенном движении. Эти разности при отбрасывании членов, содержащих малые величины выше первого порядка, для s -го периода дают следующую систему разностных уравнений относительно ΔT_{10} , ΔT_{20} , ΔT_{30} , ΔT_{40} и приращений $\eta_{jko}^{(1)}$, $\eta_{jko}^{(2)}$, $\eta_{jko}^{(3)}$, $\eta_{jko}^{(4)}$:

$$\begin{aligned} \Delta T_{1s} \sum_{j=1}^n \bar{Q}_j^{(1)} e^{p_j T_1} - \sum_{j=1}^n \frac{e^{p_j T_1}}{D'(p_j)} \sum_{k=1}^n c_{2k} F_{jk}^{(1)} \eta_{jks}^{(1)} &= 0; \\ \Delta T_{2s} \sum_{j=1}^n Q_j^{(2)} e^{p_j T_2} - \sum_{j=1}^n \frac{e^{p_j T_2}}{D'(p_j)} \sum_{k=1}^n c_{1k} F_{jk}^{(2)} \eta_{jks}^{(2)} &= 0; \\ \Delta T_{3s} \sum_{j=1}^n \bar{Q}_j^{(3)} e^{p_j T_3} - \sum_{j=1}^n \frac{e^{p_j T_3}}{D'(p_j)} \sum_{k=1}^n c_{2k} F_{jk}^{(3)} \eta_{jks}^{(3)} &= 0; \\ \Delta T_{4s} \sum_{j=1}^n Q_j^{(4)} e^{p_j T_4} - \sum_{j=1}^n \frac{e^{p_j T_4}}{D'(p_j)} \sum_{k=1}^n c_{1k} F_{jk}^{(4)} \eta_{jks}^{(4)} &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\bar{Q}_j^{(1)} = (f_1 - f_3) A_j^{(1)} \bar{\gamma}_{1j} + (f_2 - f_4) B_j^{(1)} \bar{\gamma}_{2j};$$

$$\begin{aligned} Q_j^{(2)} &= - (f_1 - f_3) B_j^{(2)} \gamma_{1j} + (f_2 - f_4) A_j^{(2)} \gamma_{2j}; \\ \bar{Q}_j^{(3)} &= - (f_1 - f_3) A_j^{(3)} \bar{\gamma}_{1j} - (f_2 - f_4) B_j^{(3)} \bar{\gamma}_{2j}; \\ Q_j^{(4)} &= (f_1 - f_3) B_j^{(4)} \gamma_{1j} - (f_2 - f_4) A_j^{(4)} \gamma_{2j}; \end{aligned}$$

$A_j^{(m)}$ и $B_j^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3, 4$) определяются по формулам (14). К четырем уравнениям (35) следует добавить еще четыре, которые получим, образуя разности

$$x_{jk}^{(m)*}(T'_1) - x_{jk}^{(m)}(T_1) = F_{jk}^{(m+1)} \eta_{jks}^{(m+1)} \quad (m = 1, 2, 3, 4). \quad (36)$$

Подставляя в (36) значения $x_{jk}^{(m)*}(T'_1)$ из (33) и $x_{jk}^{(m)}(T_1)$ из (13), найдем следующую систему разностных уравнений:

$$\begin{aligned} -M_{jk}^{(1)} \Delta T_{1s} + F_{jk}^{(1)} \eta_{jks}^{(1)} &= F_{jk}^{(2)} \eta_{jks}^{(2)} e^{-p_j T_1}; \\ -M_{jk}^{(2)} \Delta T_{2s} + F_{jk}^{(2)} \eta_{jks}^{(2)} &= F_{jk}^{(3)} \eta_{jks}^{(3)} e^{-p_j T_2}; \\ -M_{jk}^{(3)} \Delta T_{3s} + F_{jk}^{(3)} \eta_{jks}^{(3)} &= F_{jk}^{(4)} \eta_{jks}^{(4)} e^{-p_j T_3}; \\ -M_{jk}^{(4)} \Delta T_{4s} + F_{jk}^{(4)} \eta_{jks}^{(4)} &= F_{jk}^{(1)} \eta_{jks}^{(1)} e^{-p_j T_4}. \end{aligned} \quad (37)$$

Решение ищем в виде

$$\begin{aligned} \eta_{jks}^{(1)} &= C_{jk}^{(1)} z^s; \quad \eta_{jks}^{(2)} = C_{jk}^{(2)} z^s; \quad \eta_{jks}^{(3)} = C_{jk}^{(3)} z^s; \quad \eta_{jks}^{(4)} = C_{jk}^{(4)} z^s; \quad \eta_{jks}^{(1)} = C_{jk}^{(1)} z^{s+1}; \\ \Delta T_{1s} &= A_1 z^s; \quad \Delta T_{2s} = A_2 z^s; \quad \Delta T_{3s} = A_3 z^s; \quad \Delta T_{4s} = A_4 z^s. \end{aligned}$$

После подстановки и исключения из разностных уравнений (34) и (36) $C_{jk}^{(1)}$, $C_{jk}^{(2)}$, $C_{jk}^{(3)}$, $C_{jk}^{(4)}$ получим систему

$$\begin{aligned} A_1 z \sum_{j=1}^n \bar{Q}_j^{(1)} a_j^{(1)} + A_2 \sum_{j=1}^n \bar{Q}_j^{(2)} b_j^{(1)} + A_3 \sum_{j=1}^n \bar{Q}_j^{(3)} c_j^{(1)} + A_4 \sum_{j=1}^n \bar{Q}_j^{(4)} d_j^{(1)} &= 0; \\ A_1 z \sum_{j=1}^n Q_j^{(1)} a_j^{(2)} + A_2 z \sum_{j=1}^n Q_j^{(2)} a_j^{(2)} + A_3 z \sum_{j=1}^n Q_j^{(3)} b_j^{(2)} + A_4 z \sum_{j=1}^n Q_j^{(4)} c_j^{(2)} &= 0; \\ A_1 z \sum_{j=1}^n \bar{Q}_j^{(1)} c_j^{(3)} + A_2 z \sum_{j=1}^n \bar{Q}_j^{(2)} d_j^{(3)} + A_3 z \sum_{j=1}^n \bar{Q}_j^{(3)} a_j^{(3)} + A_4 z \sum_{j=1}^n \bar{Q}_j^{(4)} b_j^{(3)} &= 0; \\ A_1 z \sum_{j=1}^n Q_j^{(1)} b_j^{(4)} + A_2 z \sum_{j=1}^n Q_j^{(2)} c_j^{(4)} + A_3 z \sum_{j=1}^n Q_j^{(3)} d_j^{(4)} + A_4 z \sum_{j=1}^n Q_j^{(4)} a_j^{(4)} &= 0, \end{aligned} \quad (38)$$

из которой следует характеристическое уравнение в виде полинома от z степени n .

Коэффициенты $a_j^{(m)}$, $b_j^{(m)}$, $c_j^{(m)}$ и $d_j^{(m)}$ определяются по формулам

$$a_j^{(m)} = \frac{e^{-p_j(T_{m+1} + T_{m+2} + T_{m+3})}}{1 - z e^{-p_j T}};$$

$$b_j^{(m)} = \frac{1}{1 - z e^{-p_j T}};$$

$$c_j^{(m)} = \frac{e^{-p_j T_m+1}}{1 - ze^{-p_j T}};$$

$$d_j^{(m)} = \frac{e^{-p_j (T_{m+1} + T_{m+2})}}{1 - ze^{-p_j T}};$$

$$\bar{Q}_j^{(2)} = -(f_1 - f_3) B_j^{(2)} \bar{\gamma}_{1j} + (f_2 - f_4) A_j^{(2)} \bar{\gamma}_{2j};$$

$$\bar{Q}_j^{(4)} = (f_1 - f_3) B_j^{(4)} \bar{\gamma}_{1j} - (f_2 - f_4) A_j^{(4)} \bar{\gamma}_{2j};$$

$$Q_j^{(1)} = (f_1 - f_3) A_j^{(1)} \gamma_{1j} + (f_2 - f_4) B_j^{(1)} \gamma_{2j};$$

$$Q_j^{(2)} = -(f_1 - f_3) A_j^{(3)} \gamma_{1j} - (f_2 - f_4) B_j^{(3)} \gamma_{2j};$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

Для системы с устойчивыми автоколебаниями

$$|z_m| < 1 \quad (m + 1, 2, 3, 4, \dots, n + 1),$$

т. е. все корни характеристического уравнения в конечных разностях должны лежать внутри круга единичного радиуса.

Дробно-линейным преобразованием

$$z = \frac{y + 1}{y - 1} \quad (39)$$

характеристическое уравнение может быть преобразовано к виду, для которого справедлив критерий Раута—Гурвица.

Вывод характеристического уравнения для случая, когда определитель (4) имеет один и два кратных нулевых корня, производится аналогично рассмотренному случаю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Гольдфарб, Автоматика и телемеханика, 8, 349 (1947).
2. Ю. И. Неймарк, Сб. Памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 1955.
3. В. А. Троицкий, ПММ, 20, 627 (1956).
4. А. М. Летов, Устойчивость нелинейных регулируемых систем, ГИТЛ, М., 1955.
5. Ту Сюй-янь, Тэй Луй-ви, Автоматика и телемеханика, 20, 90 (1959).
6. Ю. И. Неймарк, Л. П. Шильников, Автоматика и телемеханика, 20, 1459 (1959).
7. А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, ГИТЛ, М.—Л., 1951.
8. Ю. В. Долголенко, Труды ЛПИ им. Калинина, 192, 171 (1958).
9. Б. Р. Сергиевский, Электросвязь, 1, 53 (1959).

Поступила в редакцию
28 сентября 1960 г.

AUTOOSCILLATIONS IN SYSTEMS WITH TWO RELAY ELEMENTS

B. R. Sergievski

A method is given for the rigorous determination of autooscillations in systems with 2 relay elements having asymmetrical characteristics.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ «В БОЛЬШОМ» СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ГЭС С УРАВНИТЕЛЬНЫМИ РЕЗЕРВУАРАМИ

Г. В. Аронович

Выясняются условия применимости гипотезы идеальных регуляторов при анализе устойчивости в большом стационарных режимов ГЭС с уравнительным резервуаром.

Анализ устойчивости стационарных режимов в напорных сооружениях гидроэлектростанций обычно проводится в предположении, что на турбинах установлены так называемые „идеальные“ регуляторы скорости, поддерживающие мощность на выходе системы постоянной [1–3]. Это позволяет определять сходимость к равновесию гидравлических процессов в напорной части ГЭС независимо от истинного действия регуляторов турбин, от электромеханических качаний роторов агрегатов и пр. Вопрос о допустимости гипотезы идеальных регуляторов—это прежде всего вопрос о законности такого самостоятельного рассмотрения гидравлических процессов отдельно от других процессов в системе.

Исследования Андреевой и Картвелишвили [4, 5] устойчивости в малом стационарных режимах некоторых энергостановок в целом (включая их гидротехнические сооружения, первичные двигатели с регуляторами и электрическое оборудование) показали, что существуют условия (например, работа станций вблизи предела мощности), когда устойчивость определяется сложным взаимодействием гидравлических, механических и электрических процессов в системе. В этих условиях предположение об идеальных регуляторах будет несправедливым*.

В настоящей заметке на основе рассмотрения модели ГЭС с уравнительным резервуаром делается попытка выяснить некоторые условия применимости гипотезы идеальных регуляторов при анализе устойчивости стационарных режимов этой системы в большом (а не только в малом).

Рассмотрим изолированную работу гидроэлектрической установки с напорной деривацией и простым цилиндрическим уравнительным резервуаром, имеющей один гидрогенераторный агрегат. Пусть дифференциальные уравнения, описывающие процессы в системе, имеют следующий вид (см. рис. 1):

уравнение расхода трубопровода

$$F \frac{dz}{dt} = fv - Q, \quad (1)$$

уравнение деривации (в предположении прямого течения)

$$\frac{L}{g} \frac{dv}{dt} + z + Pv^2 = 0, \quad (2)$$

* Влияние изменения мощности на устойчивость в малом рассматривалось также в работе [6].

уравнение расхода турбины (ковшевой)

$$Q = c\alpha \sqrt{2g(H+z)}, \quad (3)$$

уравнение агрегата

$$J \frac{d\omega}{dt} = \eta_1 \gamma \frac{Q(H+z)}{\omega} - M_c, \quad (4)$$

уравнение чувствительного элемента регулятора (массой регулятора пренебрегаем)

$$T_k \frac{d\eta}{dt} + \delta\eta + \varphi = 0, \quad (5)$$

уравнение сервомотора (регулятор с жесткой обратной связью)

$$T_s \frac{d\mu}{dt} = f(\eta - \mu). \quad (6)$$

Здесь $\varphi = (\omega - \omega_0)/\omega_{\text{ном}}$ — относительное изменение угловой скорости агрегата, $\alpha = \alpha_0(1 + \mu)$ — открытие сопла (пропорциональное относительному смещению поршня сервомотора), остальные обозначения обычные. Характеристику сервомотора $f(\sigma)$ ($\sigma \equiv \eta - \mu$) считаем линеаризуемой, удовлетворяющей условиям $f(\sigma)\sigma > 0$ и $f(0) = 0$. Считаем также, что коэффициент полезного действия агрегата $\eta_1 = \text{const}$ и его электрический момент со- противления $M_c = \text{const}$.

Введем безразмерные переменные:

$$y = v/v_0, \quad x = z/Pv_0^2, \quad q = Q/Q_0, \quad \omega_1 = \omega/\omega_{\text{ном}}$$

и обозначим

$$\beta = Pv_0^2/H, \quad T_1 = FPv_0^2/fv_0, \quad T_2 = Lv_0/gPv_0^2, \quad T_3 = J\omega_{\text{ном}}^2/\eta_1 \gamma Q_0 H,$$

$$m_c = M_c \omega_{\text{ном}} / \eta_1 \gamma Q_0 H = \text{const}, \quad T_4 = T_k, \quad T_5 = T_s.$$

Тогда уравнения (1)–(6) примут вид:

$$T_1 \frac{dx}{dt} = y - q; \quad (1a)$$

$$T_2 \frac{dy}{dt} + x + y^2 = 0; \quad (2a)$$

$$q = c \frac{\alpha}{Q_0} \sqrt{2gH(1 + \beta x)}; \quad (3a)$$

$$T_3 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{q(1 + \beta x)}{\omega_1} - m_c; \quad (4a)$$

$$T_4 \frac{d\eta}{dt} + \delta\eta + \varphi = 0; \quad (5a)$$

$$T_5 \frac{d\mu}{dt} = f(\eta - \mu), \quad (6a)$$

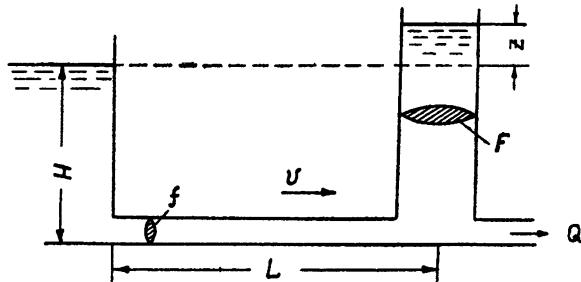


Рис. 1.

где $\mu = (\alpha - \alpha_0)/\alpha_0$.

В стационарном режиме $x_0 = -1$, $y_0 = 1$, $q_0 = 1$, $\eta = \varphi = \mu = 0$; отсюда

$$q_0 = \frac{\alpha_0}{Q_0} \sqrt{2gH(1-\beta)}; \quad m_c = \frac{1-\beta}{\omega_{10}}.$$

Полагая $x = -1 + \xi_1$, $y = 1 + \xi_2$, $q = 1 + \xi_3$, $\omega_1 = \omega_{10} + \varphi \equiv \omega_{10} + \xi_4$, $\eta = \xi_5$, $\mu = \xi_6$, получим уравнения (1а)–(6а) в возмущениях:

$$T_1 \frac{d\xi_1}{dt} = \xi_2 - \xi_3; \quad (7)$$

$$T_2 \frac{d\xi_2}{dt} + \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_2^2 = 0; \quad (8)$$

$$\xi_3 = (1 + \xi_6) \sqrt{1 + \frac{\beta\xi_1}{1-\beta}} - 1; \quad (9)$$

$$T_3 \frac{d\xi_4}{dt} = \frac{(1 + \xi_3)(1 - \beta + \beta\xi_1)}{\omega_{10} + \xi_4} - m_c; \quad (10)$$

$$T_4 \frac{d\xi_5}{dt} + \delta\xi_5 + \xi_4 = 0; \quad (11)$$

$$T_5 \frac{d\xi_6}{dt} = f(\xi_5 - \xi_6). \quad (12)$$

(Здесь всегда $1 - \beta + \beta\xi_1 > 0$.)

Предположим сначала, что постоянные времени T_i удовлетворяют следующему неравенству:

$$T_4, T_5 \ll T_3 \ll T_1, T_2. \quad (13)$$

В соответствии с (13) часть дифференциальных уравнений задачи можно рассматривать как содержащие малый параметр при производных и можно разделить все движения в системе на „самые быстрые“ (ξ_5 , ξ_6), „менее быстрые“ (ξ_4) и „медленные“ (ξ_1 , ξ_2) [7].

Приближенными уравнениями самых быстрых движений будут уравнения:

$$T_4 \frac{d\xi_5}{dt} + \delta\xi_5 + \xi_4 = 0, \quad \xi_4 = \text{const}, \quad (14)$$

$$T_5 \frac{d\xi_6}{dt} = f(\xi_5 - \xi_6). \quad (15)$$

Точки фазовых подпространств $\delta\xi_5 + \xi_4 = 0$ и $\xi_5 - \xi_6 = 0$ являются (для данной характеристики сервомотора f и $\delta > 0$) устойчивыми состояниями равновесия для самых быстрых движений*. Следовательно, если в начальный момент времени изображающая точка не находилась вблизи этих подпространств, то, перемещаясь по траекториям самых быстрых движений, она обязательно придет к этим подпространствам и в дальнейшем будет двигаться внутри них.

* Соответствующее характеристическое уравнение в данной задаче распадается на два независимых уравнения.

В соответствии с (9), (10) приближенное уравнение менее быстрых движений имеет вид:

$$T_3 \frac{d\xi_4}{dt} = \frac{(1 - \xi_4/\delta) \sqrt{1 + \beta\xi_1/(1 - \beta)} (1 - \beta + \beta\xi_1)}{\omega_{10} + \xi_4} - \frac{1 - \beta}{\omega_{10}} \equiv F_3(\xi_1, \xi_4), \quad (16)$$

$$\xi_1 = \text{const},$$

где $\xi_6 = \xi_5 = -\xi_4/\delta$. Состоянием равновесия этих движений будет подпространство $F_3(\xi_1, \xi_4) = 0$, причем легко убедиться, что всегда $\partial F_3 / \partial \xi_4 < 0$, и, следовательно, это состояние равновесия устойчиво. Из уравнения $F_3(\xi_1, \xi_4) = 0$ получим, что

$$\xi_4 = \frac{\beta\xi_1 + (1 - \beta + \beta\xi_1) [\sqrt{1 + \beta\xi_1/(1 - \beta)} - 1]}{m_c + (1 - \beta + \beta\xi_1) \delta^{-1} \sqrt{1 + \beta\xi_1/(1 - \beta)}}. \quad (17)$$

Медленному движению отвечают уравнения (1), (2), в которых в соответствии с (9) и (17)

$$\xi_3 = \frac{(\delta m_c - \beta\xi_1) \sqrt{1 + \beta\xi_1/(1 - \beta)} - \delta m_c}{\delta m_c + (1 - \beta + \beta\xi_1) \sqrt{1 + \beta\xi_1/(1 - \beta)}}. \quad (18)$$

С другой стороны, если бы на турбине был установлен идеальный регулятор, то нестационарный процесс в системе описывался бы уравнениями (1), (2) и уравнением постоянства мощности*

$$N = \gamma \eta_1 Q (H + z) = \text{const}. \quad (19)$$

Определив из (19) Q , легко получим, что

$$(\xi_3)_{N=\text{const}} = - \frac{\beta\xi_1}{1 - \beta + \beta\xi_1}. \quad (20)$$

Сравнивая (18) с (20), видим, что оба выражения будут сколь угодно близки друг к другу при $\delta \rightarrow +0$, т. е. когда чувствительный элемент будет астатическим**.

Пусть теперь соотношение между постоянными времени имеет следующий вид:

$$T_4, T_5 \ll T_1, T_3 \ll T_2 \quad (21)$$

(случай, более часто встречающийся на практике).

Самые быстрые движения, которым отвечают параметры T_4 и T_5 , при этом исключаются из рассмотрения аналогично тому, как это сделано выше. Однако отделить менее быстрые движения от медленных в общем случае здесь не удастся, так как параметры T_1, T_3 будут существенными для процессов в системе (соответствующие состояния равновесия неустойчивы). Поэтому, вообще говоря, поведение системы будет описываться совокупностью уравнений (7)–(10), в которых $\xi_6 = -\xi_4/\delta$. Если, однако, считать, как и выше, что регулятор все время поддерживает угловую скорость вращения ротора агрегата неизменной: $\dot{\xi}_4 = 0$ (астатическое регулирование при пренебрежимо малой

* Такая система уравнений качественно исследована в работе [8].

** При $\delta \rightarrow +0$

$$\xi_6 = -1 + \left(\frac{1 - \beta}{1 - \beta + \beta\xi_1} \right)^{3/2}.$$

массе чувствительного элемента), то и в этом случае можно приравнять правую часть уравнения (10) нулю, откуда для ξ_3 получим выражение (20), соответствующее гипотезе идеального регулятора (т. е. опять сведем задачу к системе уравнений (1), (2), (19)).

Таким образом, предположение об идеальном регуляторе практически оправдано, если система регулирования (сама по себе устойчивая) обладает малой (теоретически бесконечно малой) степенью неравномерности.

Это рассмотрение может быть распространено и на другие более сложные случаи.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Thoma, Zur Theorie des Wasserschlossen bei selbstätig geregelten Turbinenanlagen, Oldenbourg, München, 1910.
2. Н. А. Картвелишвили, Изв. АН СССР, ОТН, 11, 75 (1958).
3. C. Jaeger, Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, 59-A-270, 1, (1959).
4. И. П. Андреева, Труды МЭИ, 19, 95 (1956).
5. Н. А. Картвелишвили, Изв. АН СССР, ОТН, 11, 75 (1958).
6. O. Gaden et L. Vogel, Bull. technique de la Suisse romande, 10, 117 (1951).
7. A. A. Андronov, A. A. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959, гл. X.
8. Г. В. Аронович, Л. Н. Белюстина, Инженерный сборник АН СССР, 13, 131, (1952).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
7 февраля 1961 г.

CONTRIBUTION TO THE QUESTION OF STABILITY IN THE LARGE OF STATIONARY REGIMES OF HYDROELECTRIC POWER STATIONS WITH SURGE TANKS

G. V. Aronovitch

The conditions are clarified of the applicability of the ideal regulators hypothesis upon analysis of stability in the large, of stationary regimes of hydroelectric power stations with the surge tanks.

ПОЛУЧЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С РАЗЛИЧНЫМИ ЗАКОНАМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

C. Г. Кузин

Рассматриваются устройства для получения дискретных случайных величин с различными законами распределения, которые легко можно изменять. Приводятся схемы, позволяющие увеличить точность получения заданного закона распределения. Изложены некоторые экспериментальные результаты.

Будем рассматривать конечное множество событий x_i , закон распределения вероятностей для которых задан в виде $p_i = p(x_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$); $x=x_i$, если событие не произошло в данный момент времени, и $x=x_i$, если событие произошло в данный момент времени.

Если события x_i несовместимы и образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

В статье описывается устройство, позволяющее получать на выходе случайную величину с законом распределения, который может быть установлен по желанию экспериментатора. Такой "генератор", работающий с определенной тактовой частотой, позволяет получать

а) случайные величины, закон распределения которых указывает вероятность возбуждения в данный момент времени каждого выхода схемы, причем всегда возбуждается один и только один из возможных выходов, поскольку в этом случае случайному событию является возбуждение или невозбуждение выходов, закон распределения можно называть пространственным;

б) случайные величины, которыми являются промежутки времени между двумя следующими друг за другом возбуждениями одного и того же выхода; тогда закон распределения, который можно назвать временным, указывает вероятность появления каждого возможного значения величины промежутка времени;

в) случайные величины, значения которых в данный момент времени могут быть не независимы от ее значений в предшествующие моменты; примером такой зависимости является вероятностный процесс типа однородной дискретной цепи Маркова, который описывается матрицей вероятностей перехода $\{p_{ij}\}$; в случае пространственного распределения члены матрицы будут означать вероятности возбуждения j -го выхода в данный момент времени, если в предшествующий момент был возбужден i -ый выход.

1. Для получения дискретных случайных величин с различными законами распределения строится логическая сеть с n входами и k выходами. Пусть случайное событие a_i заключается в возбуждении j -го входа, а случайное событие b_i — в возбуждении i -го выхода сети. Зная логическую структуру сети и вероятности $p(a_j)$, можно определить вероятности $p(b_i)$. Действительно, для сетей, реализующих элементарные логические функции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, между входами a_1, a_2 и выходом b справедливо:

$$p(b) = p(a_1 a_2) = p(a_1)p(a_2/a_1); \quad (1.1)$$

$$p(b) = p(a_1 V a_2) = p(a_1) + p(a_2) - p(a_1 a_2); \quad (1.2)$$

$$p(\bar{b}) = 1 - p(b). \quad (1.3)$$

Всякую не тождественно ложную функцию алгебры логики $b=f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ можно записать в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы через конъюнцию, дизъюнцию и отрицание. Поэтому, применяя формулы (1.1)–(1.3), можно выразить вероятность сложного события через вероятности составляющих его элементарных событий.

Пусть имеется равномерное распределение $p(a_j)=1/n$ вероятности возбуждения каждого из n входов некоторой логической сети, причем в данный момент времени может возбуждаться один и только один из входов.

Если логическая сеть рис. 1 реализует функцию

$$b_i = \bigvee_{j=l_i+1}^{l_i+m_i} a_j, \quad (1.4)$$

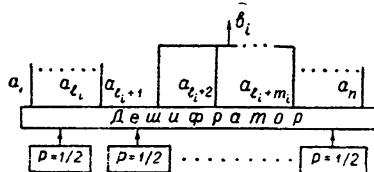


Рис. 1.

то на k ее выходах получается дискретная случайная величина с законом распределения $p(b_i)=m_i/n$. Меняя число m_i элементов в дизъюнкциях (1.4), можно получать различные законы распределения вероятностей возбуждения выходов b_i .

Если каждое элементарное событие a_j входит только

в одну дизъюнкцию, то в данный мо-

мент времени возбуждается один и только один выход.

Случайную величину с равномерным законом распределения $p(a_j)=1/n$ можно получить при помощи обычного дешифратора, если возбуждение любого из r входов является независимым событием, происходящим в данный момент времени с вероятностью $p=1/2$. В этом случае нетрудно показать, что в данный момент времени с вероятностью $p=1/2^r$ может возбудиться один и только один из 2^r возможных выходов дешифратора. Блок-схема „генератора“ случайных величин с пространственным законом распределения изображена на рис. 1.

2. Получить событие с вероятностью наступления в данный момент времени $p\simeq 1/2$ можно при помощи обыкновенного триггера. После включения анодного питания хорошо симметризованный триггер становится в каждое из двух своих устойчивых состояний с вероятностью $p\simeq 1/2$. Для определенности будем считать появление высокого напряжения на левом аноде триггера за наступление события d ; тогда высокое напряжение на правом аноде будет событием \bar{d} . Принимая за выход какой-либо анод триггера и периодически подавая анодное питание, можно получить случайную последовательность, в которой события появляются с вероятностью $p\simeq 1/2$. Однако в результате различных причин эта вероятность отличается от $1/2$ и меняется со временем. Практически удавалось получать вероятности $0,52\pm 0,53$ одного состояния и $0,48\pm 0,47$ другого.

Применив схему рис. 2, реализующую функцию алгебры логики

$$c = d_1 d_2 V \bar{d}_1 \bar{d}_2, \quad (2.1)$$

можно получить вероятность, более близкую к $p=1/2$. Действительно, пусть вероятности состояний для одного триггера

$$\begin{aligned} p(d_1) &= 1/2 + \varepsilon_1, \\ p(\bar{d}_1) &= 1/2 - \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

и для другого

$$\begin{aligned} p(d_2) &= 1/2 + \varepsilon_2, \\ p(\bar{d}_2) &= 1/2 - \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1/2$. Тогда вероятность возбуждения выхода c в данный момент времени, согласно (1.1), (1.2), запишется в виде:

$$p(c) = p(d_1)p(d_2) + p(\bar{d}_1)p(\bar{d}_2), \quad (2.4)$$

так как события $d_1, d_2; \bar{d}_1, \bar{d}_2$ независимы, а события $d_1\bar{d}_1$ и $d_2\bar{d}_2$ несовместимы.

Подставляя (2.2) и (2.3) в (2.4), получим:

$$p(c) = 1/2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2, \quad (2.5)$$

т. е. вероятность возбуждения в данный момент времени входа c отличается от $p=1/2$ на величину второго порядка малости по отношению к ε_1 и ε_2 .

Соединяя такие схемы последовательно друг с другом, можно получить вероятность возбуждения выхода схемы, сколь угодно близкую к $p=1/2$. Очевидно, общая формула при $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\dots=\varepsilon_n=\varepsilon < 1/2$ будет иметь вид:

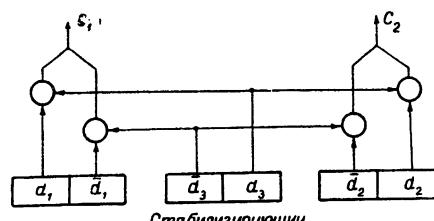
$$p(c) = 1/2 + 2^{n-1}\varepsilon^n, \quad (2.6)$$

где n — число триггеров. Практически уже на двух триггерах можно получить вероятность возбуждения выхода, очень близкую к $p=1/2$.

Для возбуждения входов дешифратора (рис. 1) можно использовать r схем, аналогичных изображенной на рис. 2. Однако примерно

таких же результатов с меньшим количеством триггеров можно добиться, применяя схему рис. 3. Действительно, рассматривая дешифратор на два входа, который реализует функции алгебры логики

$$\begin{aligned} c_1 &= d_1 d_3 \vee \bar{d}_1 \bar{d}_3; \\ c_2 &= d_2 d_3 \vee \bar{d}_2 \bar{d}_3, \end{aligned} \quad (2.7)$$



Стабилизирующий триггер

Рис. 3.

подсчитаем вероятность появления каждой конъюнкции:

$$\begin{aligned} c_1 c_2 &= d_1 d_2 d_3 \vee \bar{d}_1 \bar{d}_2 \bar{d}_3; \\ \bar{c}_1 c_2 &= \bar{d}_1 d_2 d_3 \vee d_1 \bar{d}_2 \bar{d}_3; \\ c_1 \bar{c}_2 &= d_1 \bar{d}_2 d_3 \vee \bar{d}_1 d_2 \bar{d}_3; \\ \bar{c}_1 \bar{c}_2 &= \bar{d}_1 \bar{d}_2 \bar{d}_3 \vee d_1 \bar{d}_2 \bar{d}_3. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Подставляя значения $p(d_1)=p(d_2)=p(d_3)=1/2+\varepsilon$ в (2.7), получим значения вероятностей

$$p(c_1 c_2) = 1/4 + 3\varepsilon^2;$$

$$p(\bar{c}_1 c_2) = 1/4 - \varepsilon^2;$$

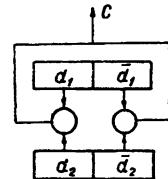


Рис. 2.

$$\begin{aligned} p(c_1 \bar{c}_2) &= 1/4 - \varepsilon^2; \\ p(\bar{c}_1 c_2) &= 1/4 - \varepsilon^2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

для которых выполняется условие $\sum_{i=1}^4 p_i = 1$. В выражении (2.9) обычно малая величина ε входит во второй степени; поэтому отличие распределения вероятностей возбуждения выходов дешифратора от равномерного очень небольшое.

Возможен другой способ получения случайных событий с вероятностями $p \approx 1/2$, который осуществляется схемой рис. 4, реализующей функцию алгебры логики. Элемент τ дает запаздывание на единицу времени

$$c_t = d_t c_{t-1} \vee \bar{d}_t \bar{c}_{t-1}. \quad (2.10)$$

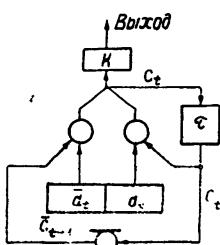


Рис. 4.

Пусть, как и ранее, $p(d_1) = 1/2 + \varepsilon$, $p(\bar{d}_1) = 1/2 - \varepsilon$; тогда эта схема реализует процесс Маркова со следующей матрицей переходов:

	c_t	\bar{c}_t
c_{t-1}	$1/2 + \varepsilon$; $1/2 - \varepsilon$	$1/2 - \varepsilon$; $1/2 + \varepsilon$
\bar{c}_{t-1}	$1/2 - \varepsilon$; $1/2 + \varepsilon$	$1/2 + \varepsilon$; $1/2 - \varepsilon$

(2.11)

Если интересоваться вероятностью возбуждения выхода схемы в момент $t=n+k$ (при известном ее состоянии в момент $t=n$), то этот процесс, как нетрудно видеть, будет описываться матрицей переходов [1]:

	c_{n+k}	\bar{c}_{n+k}
c_n	$1/2 + 2^{k-1} \varepsilon^k$; $1/2 - 2^{k-1} \varepsilon^k$	$1/2 - 2^{k-1} \varepsilon^k$; $1/2 + 2^{k-1} \varepsilon^k$
\bar{c}_n	$1/2 - 2^{k-1} \varepsilon^k$; $1/2 + 2^{k-1} \varepsilon^k$	$1/2 + 2^{k-1} \varepsilon^k$; $1/2 - 2^{k-1} \varepsilon^k$

(2.12)

При $\varepsilon < 1/2$ с ростом k члены матрицы (2.12) стремятся к значению $1/2$. Следовательно, подавая через коммутатор K каждое k -ое значение выхода c_t на выход схемы, можно получить на нем случайное событие с вероятностью наступления в данный момент времени, тем более близкой к $p=1/2$, чем больше k и меньше ε .

3. Имея случайную величину с пространственным законом распределения, можно получить случайную величину с временным законом распределения по схеме рис. 5. Промежуток времени, через который появится следующий импульс задающего генератора, зависит от того, какой выход „генератора“ случайной величины с пространственным законом распределения возбужден предшествующим импульсом. Так как возбуждение этих выходов подчинено определенному закону распределения, то и промежуток времени будет случайной величиной с тем же самым законом распределения.

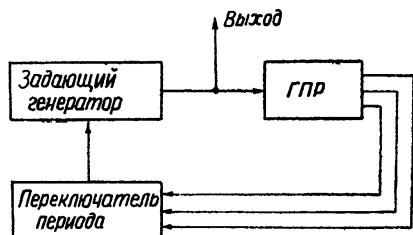


Рис. 5.

Однородную дискретную цепь Маркова с конечным числом состояний можно получить по схеме рис. 6. Вероятность возбуждения выхода b_i в момент t зависит от того, какой выход был возбужден в момент $t-1$. Возбуждение на вторые входы клапанов подается с выходов „генератора“ случайной величины с пространственным законом распределения.

С целью экспериментальной проверки изложенного был построен „генератор“ случайной величины с пространственным законом распределения. На четырех триггерах с экспериментально измеренными относительными частотами $p(d_1) = 0,486$; $p(d_2) = 0,475$; $p(d_3) = 0,540$; $p(d_4) =$

$=0,495$ получено равновероятное распределение, а также распределения, имеющие максимумы. Рассчитанные и экспериментально полученные значения вероятностей приведены в таблице 1 (для длительности эксперимента в 3000 тактов).

Рис. 6.

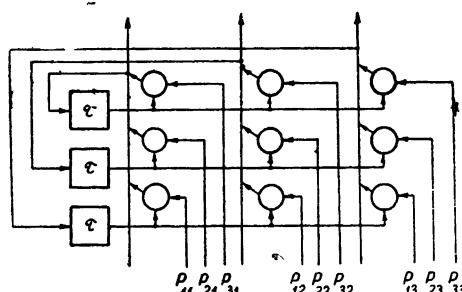


Таблица 1

Равномерное распределение		Распределение с максимумом в середине		Распределение с максимумом сбоку	
теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.
0,125	0,110	0,0625	0,0640	0,1250	0,1100
0,125	0,120	0,1250	0,1100	0,1875	0,1810
0,125	0,130	0,1875	0,1950	0,2500	0,2500
0,125	0,128	0,2500	0,2500	0,1875	0,1950
0,125	0,115	0,1875	0,1810	0,1250	0,1250
0,125	0,125	0,1250	0,1250	0,0640	0,0800
0,125	0,120	0,0625	0,0800	0,0640	0,0640
0,125	0,127	—	—	—	—

Работа схемы рис. 3 проверялась экспериментально при включенном и выключенном „стабилизирующем“ триггере. Результаты приведены в таблице 2 ($p(d_1)=0,26$, $p(d_2)=0,62$, $p(d_3)=0,46$).

Таблица 2

Вероятности комбинаций	без „стабилизации“		со „стабилизацией“	
	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.
$c_1 c_2$	0,16	0,17	0,22	0,22
$c_1 c_2$	0,49	0,46	0,28	0,29
$c_1 c_3$	0,09	0,09	0,28	0,30
$c_1 c_2$	0,28	0,28	0,22	0,24

Следует отметить, что экспериментальные результаты удовлетворительно совпадают с теоретическими.

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность А. С. Алексееву, внимательно просмотревшему статью в рукописи и сделавшему ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, ГИТТЛ. М.—Л., 1950.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
31 декабря 1960 г.

THE PRODUCTION OF DISCRETE RANDOM VALUES WITH DIFFERENT DISTRIBUTION LAWS

S. G. Kouzin

An examination is made of installations for the production of discrete random values with different distribution laws easily to be altered. Circuits are referred to which enable to increase the accuracy of production of a given distribution law. Some experimental results are given.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

ЭТАЛОННОРИВАНИЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ НА ВОЛНЕ 3,2 см

В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий

Применяемые до настоящего времени в радиоастрономии методы абсолютных измерений сигналов сантиметровых волн не обеспечивают точности выше $10 \pm 15\%$. Авторами теоретически и экспериментально разработан метод прецизионного измерения радиоизлучения Луны и дискретных источников на волнах сантиметрового диапазона путем сравнения с тепловым излучением двух эталонов соответствующих угловых размеров, образующих систему дополнительных экранов. Применение таких эталонов позволяет устранить ошибку, вносимую дифракцией фона радиоизлучения земли на эталонах. Метод является развитием методов Троицкого, Цейтлина [1,2], Уайтхерста [3] и Молчанова [4]; он обеспечивает точность абсолютных измерений порядка одного процента. Метод был применен для прецизионного измерения радиотемпературы Луны на волне 3,2 см. Измерения проводились на вертикальной поляризации радиометром с зеркалом, диаметр которого 1,5 м; порог чувствительности приемника 0,2°К при постоянной времени 16 сек. Ширина диаграммы 1,3° обеспечивала почти равномерную «освещенность» диска Луны; вследствие этого измеряемая величина радиотемпературы Луны практически равна усредненной по ее диску яркостной температуре. В качестве первого эталона применялся абсолютно черный диск — искусственная луна с видимыми угловыми размерами, близкими к угловым размерам Луны. Вторым эталоном являлась черная плоскость, перекрывающая главный лепесток диаграммы, с отверстием в середине, равным по размерам диску.

Оба эталона помещались на высоте порядка 15 ± 20 ° над горизонтом. При обработке результатов измерений учитывалось поглощение в атмосфере, а также разница в угловых размерах Луны и эталона излучения. Средняя по диску радиотемпература Луны на волне 3,2 см оказалась равной

$$\bar{T}_L = \frac{1}{\Omega_L} \int_{\Omega_L} T_L d\Omega = 210^\circ + 13,5^\circ \cos(\Omega t - 55^\circ).$$

Общая систематическая ошибка проведенных измерений, по нашим оценкам, не превосходит $\pm 2,5\%$. В дальнейшем при создании более выгодных условий измерений погрешность метода может быть уменьшена по крайней мере в 2 раза.

Пересчет от средней радиотемпературы к яркостной температуре центра диска приводит к значению $T_{L \text{ ярк}} = 226^\circ$. Эта величина согласуется со значением, приводимым в работе [2], в пределах точности измерений, достигнутой в последней.

Подробно результаты настоящей работы будут опубликованы позднее [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 393 (1961).
2. К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 600 (1961).
3. R. N. Whithurst, J. Kopeland, F. H. Mitchell, Proc. IRE, 45, 1410 (1957).
4. А. П. Молчанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 722 (1960).
5. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ СОЛНЦА В ДИАПАЗОНЕ ВОЛН 3÷7 мм

A. Г. Кисляков

Исследование спектра радиоизлучения Солнца проводилось с помощью широкополосного модуляционного радиометра, работающего в диапазоне волн от 3,2 мм и короче. Излучение, принятое антенной радиометра, анализировалось путем помещения между антенной и входом радиометра волноводных запредельных фильтров с различными критическими частотами.

Можно показать, что разность отклонений на выходе радиометра при антенне, наведенной на Солнце и на область неба рядом с Солнцем, равна

$$\alpha_C(f_i) \propto \int_{f_i}^{f_{\text{пр}}} T_C(f) A(f) L(f) \beta(f) df. \quad (1)$$

Здесь f_i — критическая частота волноводного фильтра, $T_C(f)$ — эффективная температура по диску Солнца на частоте f , $A(f)$ — частотная характеристика антенны, $L(f)$ — коэффициент передачи атмосферы Земли на частоте f , $\beta(f)$ — частотная характеристика радиометра, а $f_{\text{пр}}$ — достаточно высокая частота, такая, что при $f > f_{\text{пр}}$ $\beta(f) \sim 0$. На рис. 1 представлен (в относительных единицах) график зависимости $\alpha_C(f_i)$, полу-

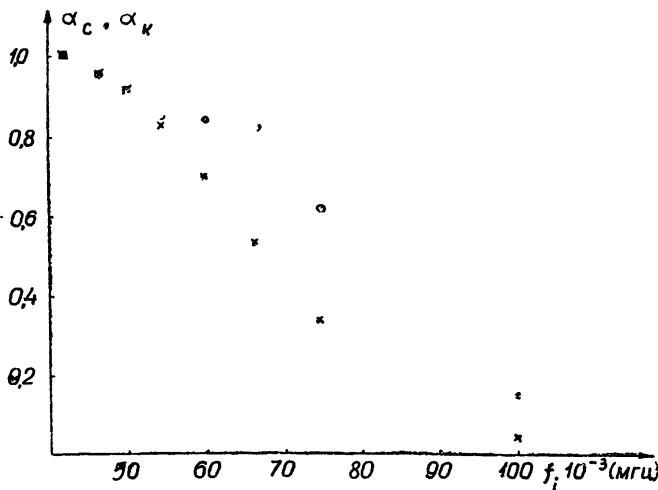


Рис. 1. ○ — усредненные по семи экспериментальным записям значения $\alpha_C(f_i)$; × — калибровочные точки $\alpha_k(f_i)$.

ченный в результате усреднения семи экспериментальных записей. На этом же графике отложены калибровочные точки. Калибровка радиометра производилась по тепловому излучению поглощающего клина в волноводе, нагретого до температуры около 300°C. При калибровке вместо антенны подключался отрезок волновода с нагретым клином, между клином и входом радиометра ставился аттенюатор. Разница отклонений на выходе радиометра при введенном и выведенном аттенюаторе равна

$$\alpha_k(f_i) \propto \int_{f_i}^{f_{\text{пр}}} \beta(f) df. \quad (2)$$

Используя соотношения (1) и (2), нетрудно получить, что

$$q = \frac{\alpha_C(f_j) - \alpha_C(f_i)}{\alpha_K(f_j) - \alpha_K(f_i)} \approx \frac{\int_{f_i}^{f_j} T_C(f) A(f) L(f) \beta(f) df}{\int_{f_i}^{f_j} \beta(f) df}, \quad (3)$$

где $f_j > f_i$. Применяя к интегралу в числителе (3) теорему о среднем, имеем:

$$T_C(\bar{f}) \approx q/A(\bar{f}) L(\bar{f}), \quad (4)$$

где $f_i < \bar{f} < f_j$. Таким образом, для определения спектра радиоизлучения Солнца по полученным экспериментальным данным необходимо знать функции $A(f)$ и $L(f)$ и частоту \bar{f} .

Функция $L(f)$ может быть легко рассчитана. Величина коэффициента поглощения в атмосферных газах на уровне моря известна с достаточной степенью точности из экспериментов, проводившихся во всем интересующем нас диапазоне [1]. Описываемые здесь измерения радиоизлучения Солнца выполнялись на высоте 3150 метров над уровнем моря (в районе горы Эльбрус). Принимая во внимание тот факт, что поглощение в газах стандартной атмосферы убывает по экспоненциальному закону с ростом высоты над уровнем моря [2, 3], можно рассчитать коэффициент передачи всей оставшейся толщи атмосферы.

Результаты расчета приведены на рис. 2. Как видно из графика, в большей части интересующего нас частотного интервала атмосфера поглощает не более 15% падающей мощности. Два частотных интервала, которые заняты линией поглощения кислорода, при обработке экспериментальных данных не использовались.

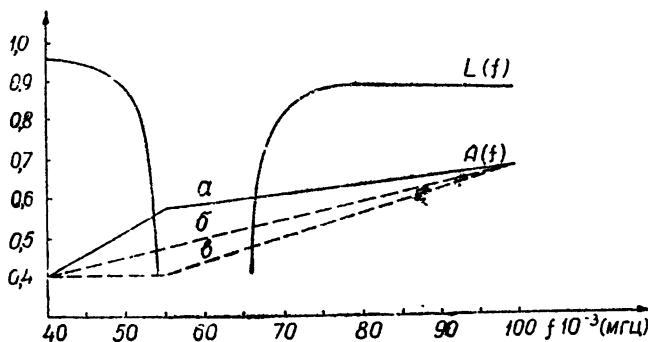


Рис. 2. Коэффициент передачи атмосферы и антенные характеристики радиометра.

Для наблюдений была применена зеркальная параболическая антенна диаметром около метра. Размеры облучателя зеркала были выбраны таким образом, что на самой длинной волне рабочего диапазона облучение зеркала оптимально. С укорочением рабочей волны диаграмма направленности облучателя сужается и облучается меньшая часть зеркала, причем почти во всем рабочем диапазоне КНД антенны остается постоянным. При укорочении рабочей длины волны уменьшается часть мощности, идущая вне зеркала, а также падает уровень боковых лепестков (вследствие усиления неравномерности облучения зеркала). Учет всех перечисленных факторов, а также результаты измерений ширины диаграммы направленности антенны по Солнцу, привели к выводу, что наиболее вероятным видом функции $A(f)$ является верхняя ломаная кривая на рис. 2. Однако обработка опытных данных производилась и при предположении, что вид $A(f)$ сильно отличается от наиболее вероятного (штриховые линии на рис. 2).

Частота \bar{f} находилась для каждого частотного интервала из уравнения

$$\int_{f_i}^{f_j} A(f) L(f) \beta(f) df = A(\bar{f}) L(\bar{f}) \int_{f_i}^{f_j} \beta(f) df,$$

т. е. считалось, что функция $T_C(f)$ постоянна в каждом из интервалов $[f_i, f_j]$. Функции $L(f)$ и $A(f)$ аппроксимировались в каждом интервале соответствующим полиномом. Частотная характеристика радиометра $\beta(f)$ была определена графическим дифференцированием калибровочной кривой, построенной по точкам $a_k(f_i)$.

Результаты обработки экспериментальных данных представлены на рис. 3. Вер-

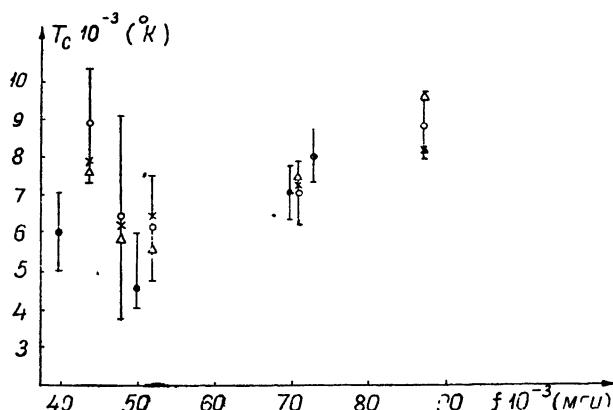


Рис. 3. Спектр радиоизлучения Солнца. Точки \circ соответствуют $A(f)$ вида a , Δ — b и \times — v на рис. 2. Черными кружками отмечены данные работы [4-7].

тикальными штрихами показана относительная неопределенность значений температуры Солнца, обусловленная разбросом экспериментальных точек $a_C(f_i)$. Каждая группа величин $T_C(\bar{f})$, рассчитанных для определенного вида $A(f)$, привязывалась к значению эффективной температуры Солнца на волне 4 м.м., найденному ранее в работах [4, 5]. Полученные результаты, как видно из графика на рис. 3, довольно определенно указывают на существование минимума интенсивности радиоизлучения Солнца вблизи волны 6 м.м. Если нанести на график на рис. 3 значения T_C , полученные ранее различными исследователями на отдельных волнах [4-7], то оказывается, что они дают спектр радиоизлучения Солнца, подобный полученному в настоящей работе.

Следует отметить два фактора, которые по различным причинам не были учтены при обработке опытных данных. Во-первых, согласование поглощающего клина с волноводом проверялось только на волне около 4 м.м. КСВН клина на этой волне не хуже 1,1 (длина клина 20 м.м.). Предполагалось, что во всем остальном диапазоне волн согласование клина не нарушается. Заметим, что на волнах короче 4 м.м. (в интересующем нас диапазоне волн до 3-х м.м.) возникновение сильного рассогласования мало вероятно (просто вследствие малого изменения длины волны), а учет рассогласования на длинноволновом краю диапазона привел бы к тому, что рост $T_C(\bar{f})$ с укорочением длины волны стал бы более резким.

Во-вторых, потери в антенном фидере измерялись также на одной волне (около 4 м.м.). Оказалось, что они не превышают 0,8 дБ. Фидер был выполнен из стандартного волновода 8-мм диапазона. Наиболее вероятно, что потери в таком фидере несколько увеличиваются с ростом частоты. Учет этого эффекта привел бы к углублению минимума в кривой $T_C(\bar{f})$.

Исследование спектра радиоизлучения Солнца будет продолжено после некоторого усовершенствования аппаратуры и методики измерения.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. W. Straiton, C. W. Tolbert, Proc. IRE, 48, 898 (1960).
2. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 4, 21 (1959).
3. E. Weger, J. Meteorology, 2, 159 (1960).

4. R. J. Coates, Proc. IRE, **46**, 122 (1958).
5. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 433 (1961).
6. R. N. Whitehurst, J. Copeland, F. H. Mitchell, J. Appl. Phys., **28**, 295 (1957).
7. R. N. Whitehurst, F. H. Mitchell, Proc. IRE, **44**, 1879 (1956).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
3 марта 1961 г.

ПОГЛОЩЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ВО ВРЕМЯ МАГНИТНОЙ БУРИ 1 апреля 1960 г.

Е. А. Бенедиктов, Ю. С. Коробков

В последних числах марта—первой половине апреля 1960 г. была отмечена сильная магнито-ионосферная буря, последовавшая после интенсивной хромосферной вспышки на Солнце 29. III. 1960 [1]. Вспышка сопровождалась эффектом Деллинжера (внезапным увеличением поглощения радиоволн в ионосфере) и всплеском радиоизлучения в широком диапазоне частот. Величина поглощения космического радиоизлучения во время эффекта Деллинжера 29 марта в Горьком на частоте 25 мгц составила 1,65 дБ. Первого апреля, когда магнитная буря достигла своего максимума, в Горьком в течение нескольких часов наблюдались резкие изменения интенсивности космического радиоизлучения на частотах 18,6 и 25 мгц.

В отличие от аналогичных наблюдений, проведенных во время магнитной бури 15. VII. 1959 [2], запись интенсивности радиоизлучения на обеих частотах проводилась непрерывно. Днем 1 апреля до полудня существенных аномалий на записях радиоизлучения обнаружено не было. В 11 час 44 мин* было отмечено резкое увеличение поглощения, вызванное солнечной вспышкой и продолжавшееся до ~ 13 час 20 мин и сопровождавшееся мощным всплеском радиоизлучения на частотах 18,6 и 25 мгц. Величина поглощения при этом составила 4,3 дБ на частоте 25 мгц и 7,55 дБ на частоте 18,6 мгц. В 15 час 34 мин было зарегистрировано шестиминутное уменьшение интенсивности радиоизлучения с максимальным ослаблением в 1 и 1,7 дБ соответственно на частотах 25 и 18,6 мгц. В 17 час 48 мин началась серия непрерывно следующих друг за другом периодов значительного ослабления интенсивности радиоизлучения. Наибольшая величина ослабления (4 дБ на частоте 18,6 мгц) была отмечена в 18 час 36 мин.

На рис. 1 показаны изменения интенсивности радиоизлучения J для описываемого интервала времени. Пунктирными линиями обозначены примерные уровни невозмущенного сигнала. Запись на частоте 25 мгц сдвинута вниз по сравнению с записью на частоте 18,6 мгц. Резкие изменения интенсивности радиоизлучения прекратились к 20 час. В 23 час 46 мин было отмечено еще одно небольшое ослабление сигнала (0,5 дБ на 18,6 мгц), продолжавшееся примерно пять минут.

Основной особенностью полученных во время магнитной бури 1 апреля результатов является (как и для бури 15. VII. 1959) то обстоятельство, что отношение коэффициентов ослабления радиоизлучения на разных частотах Γ_1 (18,6 мгц) и Γ_2 (25 мгц) равно обратному отношению квадратов этих частот. В частности, 1 апреля величина отношения Γ_1/Γ_2 уменьшалась до значений $1,45 \pm 1,5$, тогда как $f_2^2/f_1^2 = 1,78^{**}$.

Предположим, как это сделано в [2], что отклонение от квадратичного закона вызвано большой величиной эффективного числа соударений ν электронов с ионами и нейтральными молекулами в области, где происходит поглощение радиоволн. В этом случае, поскольку для наших частот выполняется соотношение [3]

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\omega_2^2 + \nu^2}{\omega_1^2 + \nu^2},$$

* Здесь и ниже время московское.

** Интересно отметить, что для эффекта Деллинжера, наблюдавшегося в этот же день около полудня, величина отношения Γ_1/Γ_2 равна 1,76, что совпадает (в пределах ошибок) с отношением $f_2^2/f_1^2 = 1,78$.

получаем для $\Gamma_1/\Gamma_2 = 1,5$, что $v \sim 1,4 \cdot 10^7$ сек $^{-1}$. Для нормальной ионосферы это значение v соответствует высотам порядка $65 \div 70$ к.и. Такие высоты области поглощения во время магнитных возмущений имеют место в полярных районах. Возможно, что и механизм ионизации нижних слоев ионосферы во время сильных магнитных бурь в умеренных широтах таков же, как и в полярных районах, и, в частности, вызывается корpusкулярными потоками.

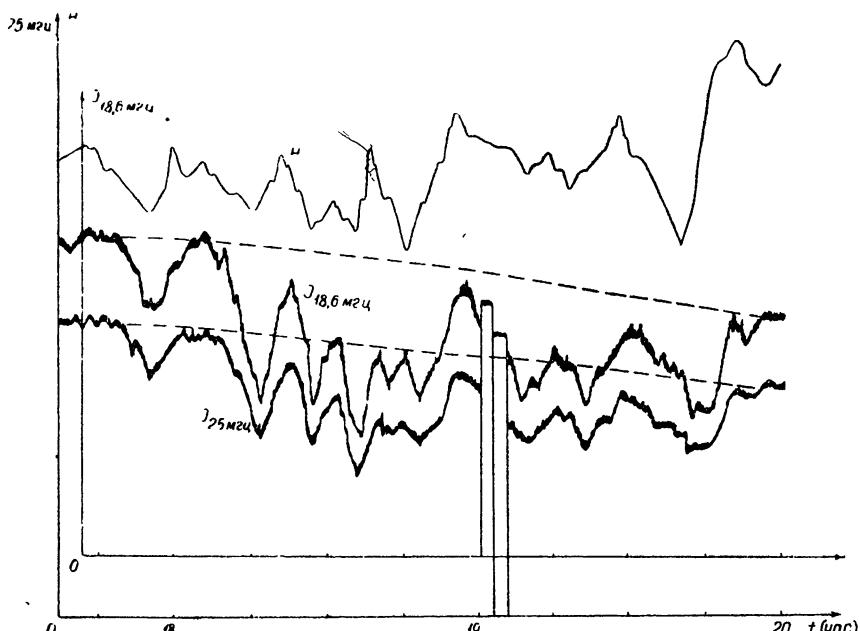


Рис. 1.

В связи с этим следует заметить, что первого апреля, как и 15. VII. 1959, в Москве наблюдалось полярное сияние. Интересно также, что изменение интенсивности радиоизлучения в двухчасовой период, показанный на рис. 1, хорошо коррелирует с изменениями горизонтальной составляющей земного магнитного поля H (см. верхнюю кривую на рис. 1) в Москве (ИЗМИРАН), находящейся приблизительно на той же широте, что и Горький. Аналогичное сопоставление с данными магнитного поля для Войейкова (Ленинградская область), расположенного значительно севернее, обнаруживает гораздо меньшую корреляцию между указанными величинами. Связь подобного вида между возмущениями магнитного поля и поглощением радиоволн в ионосфере отмечена недавно для полярных районов [4, 5]. Сдвиг областей аномального поглощения из полярных районов в более умеренные широты во время основной фазы магнитной бури, который, по-видимому, наблюдался 15. VII. 1959 и 1. IV. 1960, обсуждается в [6].

В заключение авторы выражают благодарность Г. Г. Гетманцеву за помощь в проведении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Космические данные, №№ 3 и 4 (1960).
2. Е. А. Бенедиктов, Ю. С. Коробков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 333 (1960).
3. В. Л. Гинзбург, Распространение радиоволн в плазме, Физматгиз, М., 1961.
4. W. H. Campbell, H. Leinbach, J. Geoph. Res., 66, 25 (1961).
5. S. Ziaudin, Canad. J. Phys., 38, 1714 (1960).
6. T. Obayashi, Y. Nakaga, J. Radio Res. Lab. Report Ionosph. and Space, Res. Japan, 14, 1 (1960).

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ЧЕРЕНКОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НЕРАВНОВЕСНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

M. C. Kovner

В последнее время появился ряд работ, посвященных неустойчивости потока заряженных частиц в неравновесной плазме, находящейся во внешнем магнитном поле ([1–4] и др.). Во всех указанных работах предполагается, что фазовая скорость волны значительно превосходит дисперсию скоростей, вызванную тепловым движением частиц.

В настоящей заметке рассмотрено возбуждение волн в плазме потоком заряженных частиц, фазовая скорость которых удовлетворяет неравенствам:

$$v_{T1} \cos \alpha \ll v_\phi \ll v_{T2} \cos \alpha, \quad (1)$$

где α — угол между направлением волнового вектора k и внешним магнитным полем H_0 , v_{T1} — средняя тепловая скорость частиц сорта γ . Поток частиц предполагается неограниченным, однородным и движущимся вдоль постоянного внешнего магнитного поля H_0 со скоростью v_0 . При $\alpha = 0$, когда выполнены условия (1), возбуждение продольных волн рассматривалось в [4].

В отсутствие потока, считая выполненным неравенства

$$\omega \ll \omega_H, \omega_{01}; |\omega - \omega_{H\gamma}| \gg k v_{T1} \cos \alpha; \quad (2)$$

$$\frac{k^2 v_{T1}^2}{\omega_{H\gamma}^2} \sin^2 \alpha \ll 1$$

(где $\omega_{H\gamma} = e_\gamma H_0/m_\gamma$; индексы $\gamma = 1, 2, 3, 4$ относятся соответственно к ионам и электронам плазмы, ионам и электронам потока) и используя тензор диэлектрической проницаемости, приведенный в [1] (см. также [1]), запишем дисперсионное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} & k^6 c^6 + \frac{1}{\omega^2 - \Omega_H^2 \cos^2 \alpha} \left\{ k^4 c^4 \frac{\omega^2}{\omega_{01}^2} \left[2\omega_{01}^4 - \omega_{02}^2 (\omega^2 - \Omega_H^2) \frac{c^2}{v_{T2}^2} \right] - \right. \\ & \left. - k^2 c^2 \frac{\omega^4}{\Omega_H^2 \cos^2 \alpha} \left[\omega_{01}^4 + \Omega_H^2 \frac{\omega_{02}^2 c^2}{v_{T2}^2} (1 + \cos^2 \alpha) \right] + \frac{\omega_{01}^2 \omega^6 \omega_{02}^2}{\Omega_H^2 \cos^2 \alpha} \frac{c^2}{v_{T2}^2} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В уравнение (3) вошел лишь параметр, характеризующий тепловое движение электронов. Влияние же теплового движения ионов плазмы на распространение в силу условия (1) и первого из условий (2) незначительно. В формулах (2), (3) $\omega_{0\gamma}^2 = 4\pi N_\gamma e^2/m_\gamma$. В предельном случае, когда

$$v_{mg}^2 \gg v_{zb}^2, \quad (4)$$

где $v_{mg}^2 \simeq H_0^2/4\pi\rho N$, $v_{zb}^2 \simeq (m/M)v_{T1}^2$, ρ — плотность плазмы и угол α не очень близок к $\pi/2$, решениями уравнения (3) будут:

$$c^2 k_1^2 = \frac{\omega^2 - \Omega_H^2}{\omega^2 - \Omega_H^2 \cos^2 \alpha} \frac{M}{m} \frac{c^2}{v_{T2}^2} \omega^2; \quad (5)$$

$$c^2 k_{2,3}^2 = \frac{\omega_{01}^2 \omega^2}{\Omega_H^2 - \omega^2} \frac{\Omega_H (1 + \cos^2 \alpha) \pm \sqrt{\Omega_H^2 \sin^4 \alpha + 4\omega^2 \cos^2 \alpha}}{2 \Omega_H \cos^2 \alpha}.$$

Если выполнено неравенство, обратное (4), то

$$c^2 k_1^2 = \frac{M}{m} \frac{c^2}{v_{T2}^2} \omega^2; \quad c^2 k_{2,3}^2 = \frac{\omega_{01}^2 \omega^2}{\Omega_H (\Omega_H \cos \alpha \pm \omega) \cos \alpha}. \quad (6)$$

В выражениях (5), (6) первая волна — магнитозвуковая, а две другие соответствуют магнитогидродинамическим волнам.

При наличии потока заряженных частиц, концентрация которых много меньше плотности частиц в неподвижной плазме:

$$N_s \ll N, \quad (7)$$

соотношения для инкрементов (декрементов) волн приведены в общем виде в работе [6]. Для неустойчивости, связанной с излучением Вавилова—Черенкова, получаем, что инкремент (декремент) j -ой волны равен

$$\mu_j = \operatorname{Im} \sqrt[3]{-1} \left\{ \frac{\omega^2 \omega_{0j}^2 c^2 k_j^2 E}{a_1 \frac{\partial}{\partial \omega} (c^2 k_j^2) \prod_{1 \leq q \neq j \leq 3} (c^2 k_j^2 - c^2 k_q^2)} \right\}^{1/3} \Big|_{\omega = \mathbf{k}v_0}. \quad (8)$$

В (8) при выполнении условий (1)

$$E = k^4 c^4 \cos^2 \alpha + \frac{\omega_{01}^2 \omega^2}{\omega^2 - \Omega_H^2} k^2 c^2 (1 + \cos^2 \alpha) - \frac{\omega_{01}^4 \omega^4}{\Omega_H^2 (\omega^2 - \Omega_H^2)}, \quad (9)$$

$$a_1 = -\frac{\omega_{01}^2 (\omega^2 - \Omega_H^2 \cos^2 \alpha)}{\omega^2 - \Omega_H^2},$$

а $c^2 k_j^2$ определяются формулами (5), (6).

Формула (8) написана в том случае, когда влиянием теплового движения в плазме на затухание, а также тепловым движением в потоке можно пренебречь.

Если же влияние теплового движения в потоке на устойчивость является определяющим и поглощение в плазме существенно, то для инкремента (декремента) волн получается выражение:

$$\mu_j = -i c^2 k_j^2 \left[a_1 \frac{\partial (c^2 k_j^2)}{\partial \omega} \prod_{1 \leq q \neq j \leq 3} (c^2 k_j^2 - c^2 k_q^2) \right]^{-1} \left\{ F(\delta) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\omega - \mathbf{k}v_0) P \right\}, \quad (10)$$

где

$$P = \sum_{\gamma=3}^4 \frac{\omega_{0\gamma}^2}{k v_{T\gamma} \cos \alpha} \left[E \frac{\omega^2}{k^2 v_{T\gamma}^2 \cos^2 \alpha} - D \frac{\omega}{\omega_{H\gamma}} \operatorname{tg} \alpha + 2A \frac{k^2 v_{T\gamma}^2}{\omega_{H\gamma}^2} \sin^2 \alpha \right];$$

$$F(\delta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{02}^2 \omega}{k v_{T2} \cos \alpha} \left\{ E \frac{\omega^2}{k^2 v_{T2}^2 \cos^2 \alpha} \left[\left(\frac{M T_2^3}{m T_1^3} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{k v_{T1} \cos \alpha} \right)^2} + 1 \right] + D \frac{\omega}{\omega_{H\gamma}} \operatorname{tg} \alpha \left[\left(\frac{M}{m} \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{k v_{T1} \cos \alpha} \right)^2} - 1 \right] \right\};$$

$$D = \omega_{01}^2 \frac{\omega}{\Omega_H} \frac{\sin 2\alpha}{\omega^2 - \Omega_H^2} \left(k^2 c^2 \Omega_H^2 - \frac{\omega^2 \omega_{01}^2}{\cos^2 \alpha} \right);$$

$$A = k^2 c^2 \left(\omega_{01}^2 \frac{\omega^2 - \Omega_H^2 \cos^2 \alpha}{\omega^2 - \Omega_H^2} - \frac{\omega_{02}^2 \omega^2}{k^2 v_{T2}^2} \right) + \frac{\omega_{01}^2 \omega^2}{\omega^2 - \Omega_H^2} \left(\omega_{01}^2 - \frac{\omega_{02}^2 \omega^2}{k^2 v_{T2}^2 \cos^2 \alpha} \right).$$

Автор признателен Б. Н. Гершману за интерес к работе и дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 14 (1959).
2. М. С. Ковнер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 631, 746 (1960).
3. К. Н. Степанов, А. Б. Кциенко, ЖТФ, 31, 167 (1961).
4. М. С. Ковнер, ЖЭТФ, 40, 527 (1961).
5. М. С. Ковнер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 444 (1961).
6. М. С. Ковнер, ЖТФ (в печати).

О ТЕПЛОВОМ ИЗЛУЧЕНИИ В ПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ

В. П. Силин

Обычно при рассмотрении теплового излучения в прозрачной среде пренебрегают пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости. Восполнить этот пробел мы и постараемся ниже. При этом мы получим явные формулы для спектральной плотности теплового излучения в изотропной и негиротропной среде, а для случая анизотропной среды ограничимся лишь некоторыми общими соотношениями.

В интересующем нас случае изотропной и негиротропной среды тензор диэлектрической проницаемости имеет вид*:

$$\epsilon_{ij}(\omega, k) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \epsilon^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon^l(\omega, k), \quad (1)$$

где ϵ^{tr} и ϵ^l — продольная и поперечная диэлектрические проницаемости**.

Используя результаты работы [2] для флюктуаций электромагнитного поля, имеем (см. также [1]):

$$(E^{(l)})_\omega^2 = \frac{2\hbar}{(2\pi)^3} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\pi T} \frac{\operatorname{Im} \epsilon^l(\omega, k)}{|\epsilon^l(\omega, k)|^2}; \quad (2)$$

$$(E^{(tr)})_\omega^2 = \frac{4\hbar}{(2\pi)^3} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\pi T} \frac{\operatorname{Im} \epsilon^{tr}(\omega, k)}{|\epsilon^{tr}(\omega, k) - k^2 c^2 / \omega^2|^2}. \quad (3)$$

В пределе прозрачной среды эти формулы принимают вид:

$$(E^{(l)})_\omega^2 = \frac{\hbar}{(2\pi)^2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\pi T} \delta [\epsilon^l(\omega, k)]; \quad (4)$$

$$(E^{(tr)})_\omega^2 = \frac{2\hbar}{(2\pi)^2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\pi T} \delta \left[\epsilon^{tr}(\omega, k) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right]. \quad (5)$$

Подставляя эти выражения в формулу

$$\frac{1}{4\pi} (E^{(l)})_\omega^2 \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \epsilon^l(\omega, k)) + \frac{1}{4\pi} (E^{(tr)})_\omega^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\omega \left[\epsilon^{tr}(\omega, k) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right] \right), \quad (6)$$

определенную спектральную плотность энергии электромагнитного поля в прозрачной изотропной среде [1]***, получим следующие выражения для плотности энергии продольных и поперечных волн:

$$\frac{dW^l}{dk} = \frac{\hbar}{2(2\pi)^3} \sum_i \frac{kc}{n_{\parallel}^{(l)}(k)} \operatorname{cth} \frac{\hbar k c}{2\pi T n_{\parallel}^{(l)}(k)}; \quad (7)$$

$$\frac{dW^{tr}}{dk} = \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \sum_i \frac{k c}{n_{\perp}^{(l)}(k)} \operatorname{cth} \frac{\hbar k c}{2\pi T n_{\perp}^{(l)}(k)}. \quad (8)$$

Здесь продольные ($n_{\parallel}^{(l)}$) и поперечные ($n_{\perp}^{(l)}$) показатели преломления определяются соответственно формулами****:

* С общими положениями электродинамики сред с пространственной дисперсией можно ознакомиться в книге [1].

** В пределе для равного нулю волнового вектора продольная и поперечная диэлектрические проницаемости совпадают. При этом возникает комплексная диэлектрическая проницаемость, учитывающая лишь частотную дисперсию. На необходимость этого, а также и последующих примечаний мне указал В. Л. Гинзбург, которому приношу свою признательность.

*** Не должно вызывать удивления отсутствие магнитного поля в выражении (6). Для исключения магнитного поля мы воспользовались уравнениями Максвелла. Последняя процедура удобна потому, что нам известны выражения (4) и (5) для флюктуаций электрического поля. Действительно, эти формулы после подстановки в выражение (6), определяющее плотность энергии поля, отнесенную к интервалу частот $d\omega$ и интервалу волновых векторов dk , сразу позволяют получить соотношения (7) и (8). Последние выписаны раздельно потому, что области прозрачности для продольных и поперечных волн, вообще говоря, различны.

**** Как обычно, показатель преломления представляет собой отношение $n = ck/\omega$.

$$\epsilon^l \left(k c / n_{\parallel}^{(l)}(k), k \right) = 0; \quad (9)$$

$$\epsilon^{tr} \left(k c / n_{\perp}^{(l)}(k), k \right) - n_{\perp}^{(l)*}(k) = 0. \quad (10)$$

При этом показатели преломления являются функциями волнового вектора.

Часто представляет интерес говорить о соответствующей зависимости от частоты. В этом случае вместо уравнений (9) и (10) надо пользоваться следующими:

$$\epsilon^l \left(\omega, n_{\parallel}^{(l)}(\omega) \omega/c \right) = 0; \quad (9a)$$

$$\epsilon^{tr} \left(\omega, n_{\perp}^{(l)}(\omega) \omega/c \right) - n_{\perp}^{(l)*}(\omega) = 0. \quad (10a)$$

Соответственно этому вместо (7) и (8) можно записать^{*}:

$$\frac{dW^l}{d\omega} = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^3} \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2\pi T} \sum_i n_{\parallel}^{(l)*}(\omega) \frac{d \left[\omega n_{\parallel}^{(l)}(\omega) \right]}{d\omega}; \quad (11)$$

$$\frac{dW^{tr}}{d\omega} = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3} \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2\pi T} \sum_i n_{\perp}^{(l)*}(\omega) \frac{d \left[\omega n_{\perp}^{(l)}(\omega) \right]}{d\omega}. \quad (12)$$

Равноправие продольных и поперечных колебаний поля, вытекающее из написанных формул, является довольно естественным.

В случае произвольной анизотропной среды вместо формулы (6) имеем [1]:

$$\frac{1}{4\pi} (E_i E_j)_\omega \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \omega \left[\epsilon_{ij}(\omega, k) - \delta_{ij} \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{k_i k_j c^2}{\omega^2} \right] \right\}. \quad (13)$$

Не ставя перед собой задачу рассмотрения общего анизотропного случая, укажем лишь, что решение уравнений поля

$$\frac{\omega^2}{c^2} A_{ij} E_j \equiv \left[\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega, k) - k^2 \delta_{ij} + k_i k_j \right] E_j = - \frac{\omega^2}{c^2} K_i, \quad (14)$$

где в правой части стоит случайная индукция K_i , удовлетворяющая соотношению см., например, (9.31) в [1])

$$(K_i K_j)_\omega = - \frac{i \hbar}{(2\pi)^3} \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2\pi T} [\epsilon_{ij}(\omega, k) - \epsilon_{ji}^*(\omega, k)], \quad (15)$$

позволяет получить для флюктуационного поля следующие выражения:

$$(E_i E_j)_\omega = - \frac{i \hbar c^2}{(2\pi)^3 \omega^2} \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2\pi T} \left\{ A_{ji}^{*-1} - A_{ij}^{-1} \right\}. \quad (16)$$

Формула (16) наряду с формулой (13) позволяет, в принципе, получить плотность теплового излучения и в анизотропной среде.

В заключение рассмотрим пример нерелятивистской электронной плазмы. Для частот, близких к ленгмюровской частоте ω_L , и длин волн, много больших дебаевского радиуса, продольная диэлектрическая проницаемость плазмы имеет вид:

$$\epsilon^l(\omega, k) \simeq 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3\pi T}{m} \frac{k^2}{\omega^2} \right).$$

При этом формула (11) принимает вид:

$$\frac{dW^l}{d\omega} = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 v_T^3} \operatorname{cth} \left(\frac{\hbar \omega}{2\pi T} \right) \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_L^2}{\omega_L^2}}, \quad (11a)$$

* Так как $\operatorname{cth}(\hbar \omega / 2\pi T) = 1 + 2 [\exp(\hbar \omega / \pi T) - 1]^{-1}$, эти формулы, очевидно, являются обобщением распределения Планка. Сами по себе выражения (7), (8) и (11), (12) очевидны и могут быть непосредственно получены из соображений о существовании осцилляторов поля. Получение таких формул в нашем изложении лишний раз подтверждает правильность спектральной плотности энергии электромагнитного поля (6) и теории флюктуаций электромагнитного поля в среде с пространственной дисперсией (см. [1, 2]).

где $v_T = \sqrt{3\kappa T/m}$. В этой же области частот пространственная дисперсия поперечной диэлектрической проницаемости мало существенна, поэтому

$$\frac{dW^{tr}}{d\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \operatorname{ctn} \left(\frac{\hbar\omega}{2\kappa T} \right) \sqrt{\frac{\omega^3 - \omega_L^2}{\omega^2}}. \quad (12a)$$

Сравнение формул (11а) и (12а) показывает, что в рассмотренной области спектральная плотность энергии продольного поля оказывается существенно больше та-ко-вой для поперечного поля.

Выражаю признательность В. Л. Гинзбургу за обсуждение настоящего сообщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред, Атомиздат, М., 1961.
2. В. П. Силин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 198 (1959).

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию
6 декабря 1960 г.

О ВЛИЯНИИ ФЛЮКТУАЦИЙ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ НА ПРОЦЕСС УСТАНОВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ГЕНЕРАТОРЕ С ДВУМЯ УСТОЙЧИВЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

С. А. Ахманов

Предметом настоящей заметки является обсуждение вопроса о роли флюктуаций начальных условий в процессе установления колебаний в генераторе с двумя устойчивыми состояниями. В некоторых случаях, в генераторе рассматриваемого типа возбуждение того или иного состояния определяется только начальными условиями и, следовательно, статистика начальных условий сильно влияет на характер стационарного движения. Последнее обстоятельство может представить известный интерес с точки зрения задачи обнаружения и выделения сигналов.

Проанализируем эту задачу на примере одноконтурного параметрического генератора. Покажем, что, многократно возбуждая параметрические колебания в колебательном контуре, можно производить биномиальные испытания над функцией распределения фазы колебания, являющегося суперпозицией сигнала и шума.

Действительно, известно, что в автономном параметрическом генераторе возможны два устойчивых состояния, характеризуемые различными значениями фазы стационарных колебаний* [1,2]. Возбуждение того или иного состояния в автономном генераторе зависит исключительно от начальных условий, а именно от начальной фазы θ_0 предосцилляционных колебаний в контуре генератора в момент его запуска.

Рассмотрим сначала случай, когда предосцилляционные колебания являются суперпозицией сигнала с частотой, равной частоте параметрической генерации и узкополосного шума. В этом случае функция распределения $W(\theta_0)$ является стационарной; если известна связь между вероятностями возбуждения стационарных состояний $P_{1,2}$ и $W(\theta_0)$, то, измеряя $P_{1,2}$ (что сводится к измерению вероятности выпадения чисел 0, 1 на выходе фазового детектора), можно получить информацию о величине отношения сигнала/шум.

Приведенные ниже оценки имеют целью проиллюстрировать высказанные положения.

В качестве примера рассмотрим параметрический генератор с переменной емкостью и нелинейным сопротивлением**. Если колебания в таком генераторе представить в виде $x = A(\tau) \cos[\tau - \theta(\tau)]$, где $\tau = pt/2$, p —частота накачки, A и θ —медленно меняющиеся амплитуда и фаза, то соответствующие укороченные уравнения примут вид:

* Отсчитываемых от фазы накачки и сдвинутых друг относительно друга на π .

** Выбор такой нелинейности в рассматриваемой задаче связан с тем, что в этом случае фаза устанавливается быстрее амплитуды, и процесс ее установления носит монотонный характер.

$$2 \frac{dA}{dt} = A \left[-\delta + \frac{m}{2} \cos(2\vartheta) - \gamma A^2 \right]; \quad (1)$$

$$2 \frac{d\vartheta}{dt} = h - \frac{m}{2} \sin(2\vartheta). \quad (2)$$

Здесь m —коэффициент модуляции емкости, $\delta=1/Q$, Q —добротность контура, $h=4\omega_0^2/p^2-1$, γ —коэффициент при кубическом члене в характеристике нелинейного сопротивления, ω_0 —резонансная частота контура. Предосцилляционные колебания на контуре в момент $t=0$ представим в виде $x=A_h(\tau)\cos[\tau-\vartheta_h(\tau)]$, где $A_h(\tau)$ и $\vartheta_h(\tau)$ —медленно меняющиеся случайные функции, если предосцилляционные колебания являются суперпозицией узкополосного шума и сигнала с частотой $p/2$.

Поскольку нас интересует лишь принципиальная сторона дела, положим для простоты $h=0$. (В реальных условиях $h/m \approx 0,01$ и учет конечности h в рассматриваемой задаче необходим лишь для оценок влияния флюктуаций расстройки на процесс выделения сигнала из шума.) В этом случае стационарные фазы определяются выражением $\sin(2\vartheta_{0i})=0$ и $\vartheta_{0i}=0; \pi/2; -\pi/2; \pi$. Фазы $\vartheta_{01}=0; \vartheta_{02}=\pi$ соответствуют параметрическому возбуждению, а $\pi/2; -\pi/2 (\cos 2\vartheta = \cos \pi = -1)$ — подавлению колебаний.

Решение уравнения (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \arctg \left[\tg \vartheta_h \exp \left(-\frac{1}{4} mpt \right) \right]; \\ \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)_{t=0} &= -\frac{1}{4} mp \frac{\tg \vartheta_h}{1 + \tg^2 \vartheta_h}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) легко видеть, что $P_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} W(\vartheta_h) d\vartheta_h$ и $P_2 = \int_{\pi/2}^{-\pi/2} W(\vartheta_h) d\vartheta_h$. Значениям $\vartheta_h = \pm \pi/2$

соответствует сепаратриса на фазовой плоскости. Если при $t=0$ $W(\vartheta_h)=1/2\pi$, то $P_{1,2}=1/2$. Этот факт с высокой степенью точности был подтвержден экспериментально в [2].

При наличии сигнала $x_1=A_c \cos(\tau-\vartheta_c)$ функция $W(\vartheta_h)$ модифицируется; воздействием малого сигнала на возбужденный параметрический генератор мы будем пренебрегать*. Если шум нормальный и спектр его симметричен относительно частоты ω_0 , функция $W(\vartheta_h)$ при малых отношениях сигнал/шум $k^2=A_c^2/\sigma^2$ имеет вид [3]:

$$W(\vartheta_h) = \frac{1}{2\pi} + \frac{k}{2} \frac{\cos(\vartheta_h - \vartheta_c)}{\sqrt{2\pi}} \quad (4)$$

и

$$P_{1,2} = 1/2 \pm (k/\sqrt{2\pi}) \cos \vartheta_c.$$

Под отношением сигнал/шум на выходе параметрического генератора будем понимать отношение

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{вых}} = \frac{\Delta p}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \cos \vartheta_c,$$

где Δp —абсолютное изменение вероятности $P_{1,2}$, связанное с наличием сигнала, ε —погрешность измерения вероятностей $P_{1,2}$.

Величина ε определяется числом испытаний n ; если испытания производятся через интервалы времени, превышающие время корреляции случайного процесса $\vartheta_h(t)$ (именно такие условия представляются практически выполнимыми), величина n может быть оценена с помощью неравенства Чебышева. Число испытаний n , позволяю-

* Отметим, что в рассматриваемой задаче уравнения (1), (2) являются приближенными. Действительно, внешний сигнал и шум надо рассматривать, вообще говоря, не только как начальные условия, но и как внешнюю силу. Однако, если сигнал и шум мало и время корреляции фазы предосцилляционных колебаний в контуре параметрического генератора $\tau_c \sim 1/\delta\omega_0$ существенно превышает величину определяемую из (3) времени, характеризующего скорость установления фазы $2/m\omega_0$, т. е. $m/2 > \delta$, можно воспользоваться приближением флюктуационных начальных условий. Последнее условие является, как известно, условием параметрического возбуждения; возможно получение величины $m/2 \approx 103$.

щее измерить вероятности $P_{1,2}$ по относительным частотам с погрешностью не более ϵ , равно $n=p(1-p)/\epsilon^2\eta$, где p —вероятность наступления события в данном испытании ($p\simeq 1/2$) и η —вероятность того, что погрешность будет превышать ϵ ; вместо η удобнее иногда вводить величину $R=1-\tau$, которая может быть названа надежностью. Окончательная формула для n имеет вид:

$$n = \frac{2\pi p(1-p)}{1-R} \frac{(S/N)_{\text{вых}}^2}{(S/N)_{\text{вх}}^2} \frac{1}{\cos^2\vartheta_c}. \quad (5)$$

Для $p\simeq 1/2$, $R=0,99$, $(S/N)_{\text{вх}}=k=0,1$ (-20 дБ по мощности), $\vartheta_c=0$ или π и $(S/N)_{\text{вых}}=10$ имеем $n\simeq 10^6$.

Время измерения $T_{\text{изм}}$ определяется, в первую очередь, временем установления стационарной фазы $\tau_\phi \simeq 2/\pi\omega_0$; однако удобнее измерять фазу на выходе уже в режиме установившихся колебаний. Поэтому примем, что $T_{\text{изм}}$ определяется средним временем установления амплитуды колебаний

$$\bar{t}_y = \frac{1}{\beta} \ln \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A_y}{\sigma},$$

где $\beta=(m/2-\delta)\omega_0/2$ —инкремент, A_y —установившаяся амплитуда, σ^2 —дисперсия воздействующего шума. Возьмем для примера $f_0=5 \cdot 10^6$ Гц, $m=0,4$; $\delta=0,02$, $A_y/\sigma=10^6$; тогда $\bar{t}_y \simeq 10^{-8}$ сек, т. е. в рассматриваемом случае $T_{\text{изм}}$ не превышает нескольких десятков секунд. При менее жестких требованиях к $(S/N)_{\text{вых}}$ и R значение $T_{\text{изм}}$ может быть уменьшено.

По измеренным $P_{1,2}$ может быть рассчитана величина k , а если известна σ , то и A_c . Если неизвестна ϑ_c , введение фазовращателя перед параметрическим генератором позволяет (за счет соответствующего увеличения времени измерения) измерить как ϑ_c , так и A_c . Наконец, с рассматриваемой схемой возможно обнаружение сигнала с частотой, отличной от $p/2$. Для этого случая представим внешний сигнал в виде

$$x_1 = A_c \cos \left[\tau + \frac{2\Delta\omega}{p} \tau - \vartheta_c^0 \right],$$

где $\Delta\omega=\omega_c-p/2$. При малых расстройках $2\Delta\omega/p \ll 1$ можно пользоваться формулой (4) для $W(\vartheta_n)$, где ϑ_c положить равной $\vartheta_c^0 + 2\Delta\omega t/p$. При этом функция распределения начальной фазы становится нестационарной: $W(\vartheta_n, \tau)$; поэтому при периодических запусках параметрического генератора с произвольной частотой появится периодичность в возбуждении состояний 1, 2. При частоте запусков $\simeq \Delta\omega$ поведение фазы на выходе параметрического генератора будет аналогично случаю $\omega_c = p/2^*$ („квазистационарный“ случай).

Резюмируя изложенное, отметим, что определенным преимуществом рассматриваемого метода является простая возможность проведения биномиальных испытаний над одномерной функцией распределения фазы суперпозиции сигнала и шума. Ячейка, в которой производятся испытания, является однокаскадной; в связи с этим отпадает ряд обычных трудностей, связанных с необходимостью значительного усиления сигнала и шума и, следовательно, исключаются дополнительные источники шумов, искажений и флюктуаций параметров.

Флюктуации амплитуды и фазы принимаемого сигнала и флюктуации параметров параметрического генератора приводят, естественно, к необходимости увеличения длительности времени наблюдения. Оценим роль флюктуаций параметров параметрического генератора. Для этого рассмотрим случай $h \neq 0$; теперь стационарные фазы ϑ_{0i} даются соотношением $\sin(2\vartheta_{0i})=2h/m \ll 1$. Отметим, что при $W(\vartheta_n)=1/2\pi$ $P_{1,2}=1/2$ независимо от значений стационарных фаз.

Относительные флюктуации „выходного сигнала“ $\delta p/\Delta p$, связанные с флюктуациями m и h в том случае, если разность $\vartheta_{0i}-\vartheta_c$ мала (т. е. условия выделения близки к оптимальным), вычислим, производя разложение в ряд. При $h \neq 0$ $\Delta p=(k/\sqrt{2\pi}) \cos X \times (\vartheta_0-\vartheta_c)$, и если $\vartheta_0-\vartheta_c \ll 1$, то $\delta p/\Delta p=\bar{m}^2/m^2 + \bar{h}^2/h^2$ и может быть сделана $\sim 10^{-4}$ и менее.

Результаты биномиальных испытаний над фазой с помощью параметрического генератора могут, вообще говоря, искажаться за счет флюктуаций фазы в режиме развитой генерации. Для оценки этих искажений надо включить в уравнения (1), (2)

* Возможно также применение запусков в случайные моменты времени.

флюктуационные внешние силы. Проведенный расчет* показывает, что флюктуации стационарных фаз малы, если выполнено условие

$$\sqrt{N_0 m \omega_0 / 2} \ll mA_y, \quad (6)$$

где N_0 спектральная плотность шума. Если основным источником шума является собственный шум параметрического генератора, неравенство (6) хорошо выполняется.

В заключение отметим, что рассмотренная задача, как указал нам С. М. Рытов, во многом аналогична исследованной ранее Лошаковым и Хайкиным [4] задаче о влиянии флюктуаций начальных условий на стационарные состояния кипп-реле. Здесь при определенных условиях (если схема кипп-реле достаточно симметризована) можно проводить статистические испытания над величиной случайного напряжения. В принципе, возможны и другие системы, в которых флюктуации начальных условий сильно влияют на характер стационарного движения. Рассматриваемый метод, основанный на использовании параметрического генератора, может, по-видимому, представить известный интерес в физических экспериментах, как, например, в опытах по обнаружению гравитационных волн [5-7].

Приношу искреннюю признательность С. М. Рытову за ценные замечания, высказанные при обсуждении работы, и С. Д. Гвоздоверу за внимание к работе и советы при ее выполнении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Мандельштам, Собр. трудов, 2, изд. АН СССР, М., 1947, стр. 83.
2. F. Steiger, Rev. Sci. Instr., 30, 241 (1959).
3. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1960.
4. Л. Н. Лошаков, С. Э. Хайкин, ЖЭТФ, 6, 858 (1936).
5. J. Webber, Phys. Rev., 117, 308 (1960).
6. В. Б. Брагинский, Д. Д. Иваненко, Г. И. Рукман, ЖЭТФ, 38, 1005 (1960).
7. И. Л. Берштейн, М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, 37, 1832 (1959).
8. И. Л. Берштейн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 995 (1960).

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
7 января 1961 г.

ОЦЕНКА ЭМИССИОННЫХ СВОЙСТВ ПРЕССОВАННОГО КАТОДА НА ОСНОВЕ АЛЮМИНАТОВ БАРИЯ**

А. И. Жадан

В настоящей работе сообщается о результатах исследования эмиссионных свойств прессованного катода, изготовленного из смеси 90% порошка W Mo и 10% порошка алюминатов бария BaCO_3 BaAl_2O_4 $\text{Ba}_3\text{Al}_2\text{O}_6$. Последние были получены путем сплавления 5 молей BaCO_3 и 2 молей Al_2O_3 при температуре $t = 1750^\circ\text{C}$ в атмосфере CO_2 . Как показали испытания, такой катод обладает сравнимой устойчивостью к отравляющему воздействию остаточных газов и может работать при давлении порядка $p \approx 10^{-4}$ мм рт. ст. Кроме того, активированный катод, подвергнутый воздействию воздуха, не теряет эмиссионной способности, допуская трех и четырехкратное повторное активирование, что делает перспективным его применение в разборных системах. Имея в виду последнее, была сделана оценка эмиссионных свойств в условиях, приближающихся к рабочим, т. е. при давлении $p = 2 \cdot 10^{-5} - 4 \cdot 10^{-5}$ мм рт. ст. непосредственно под откачкой. Для уменьшения влияния случайных факторов активирование катодов и снятие вольтамперных характеристик производились в строго одинаковых условиях.

Исследуемый катод нужно, по-видимому, считать сложной системой, состоящей частью из покрытого активной пленкой металла, а частью—из типичного полупроводника. Поэтому, как показал Бондаренко [1], метод прямой Ричардсона в этом случае

* Этому вопросу посвящена также недавно опубликованная работа [8].

** Содержание работы доложено на VII научно-технической конференции Таганрогского радиотехнического института (март 1960 г.).

не может дать истинных значений термоэмиссионных постоянных. В целях сравнения результатов с данными, опубликованными рядом авторов (см., например, [2]), определение работы выхода производилось как методом прямой Ричардсона, так и расчетом по уравнению:

$$j_S = 120,4 T_k^2 e^{-\epsilon \varphi_T / kT_k}, \quad (1)$$

причем плотность тока эмиссии находилась по точке отклонения характеристики $j_a^{2/3} = f(u_a)$ от прямой линии и путем экстраполяции к нулевому полю кривых Шоттки:

$$\ln j_{SE} = \ln j_S + \frac{\epsilon^{3/2} u_a^{1/2}}{kT_{\text{Ш}} d^{1/2}}. \quad (2)$$

Методика и результаты эксперимента. Все катоды для уменьшения краевого эффекта поля снабжались стаканообразными молибденовыми экранами с отверстием в дне, в плоскости которого располагалась эмиттирующая поверхность. В боковой поверхности экрана вблизи эмиттирующей поверхности также имелось отверстие для пирометрирования. Температура катода определялась оптическим пирометром с учетом поправок на поглощение в стекле и изменение коэффициента монохроматической излучательной способности молибдена в зависимости от температуры. Эти поправки были значительны и при T_k ярк. = 1200°C в сумме составили, например, $+140^{\circ}\text{C}$.

На рис. 1 представлены вольт-амперные характеристики одного из исследованных катодов диаметром $D_k = 0,5 \text{ см}$ при расстоянии анод-катод $d = 0,1 \text{ см}$. На рис. 2 для этого катода приведены опытные и рассчитанные из „закона 3/2“ зависимости $j_a^{2/3} = f(u_a)$ при $T_k = 1493^{\circ}\text{K}$. Построение прямой Ричардсона (рис. 3) привело к значениям $A = 1,180 a \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{град}^{-2}$ и $\varphi_0 = 2,21 \text{ в}$. Наибольшие отклонения для φ_0 и катодов, испытанных в аналогичных условиях, колебались в пределах $\Delta \varphi = \pm 0,2 \text{ в}$, а для A иногда возрастили более чем в три раза. Используя кривые Шоттки (рис. 4) и соотношение

$$\lg j_{SE} = \lg j_S + 9,54 \frac{\sqrt{u_a}}{T_{\text{Ш}}}, \quad (3)$$

полученное из (2) подстановкой значений ϵ и k , и выражая u_a в вольтах, имеем для того же катода: $A = 1,35 a \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{град}^{-2}$ и $\varphi_0 = 2,23 \text{ в}$. Это расхождение объясняется, по-видимому, большим наклоном прямых Шоттки по сравнению с теоретическим значением, вследствие чего определенная таким образом величина j_S получается заниженной. Наконец, расчет по уравнению (1) дает следующие значения φ_T для трех характерных температур: $\varphi_{T=1438^{\circ}\text{K}} = 2,79 \text{ в}$, $\varphi_{T=1493^{\circ}\text{K}} = 2,77 \text{ в}$ и $\varphi_{T=1553^{\circ}\text{K}} = 2,83 \text{ в}$.

В таблице 1 приведены определенные, согласно (3), температуры Шоттки $T_{\text{Ш}}$ для этих же рабочих температур, а также отношение $T_k/T_{\text{Ш}} = \beta$, характеризующее степень неоднородности поверхности. Для оценки сферы действия неоднородности поверхности по работе выхода (иначе говоря, сферы действия „поля пятен“) была использована описанная в [3] методика, согласно которой

$$\epsilon \Delta V = 2,3 kT \lg (j_{S_0}/j), \quad (4)$$

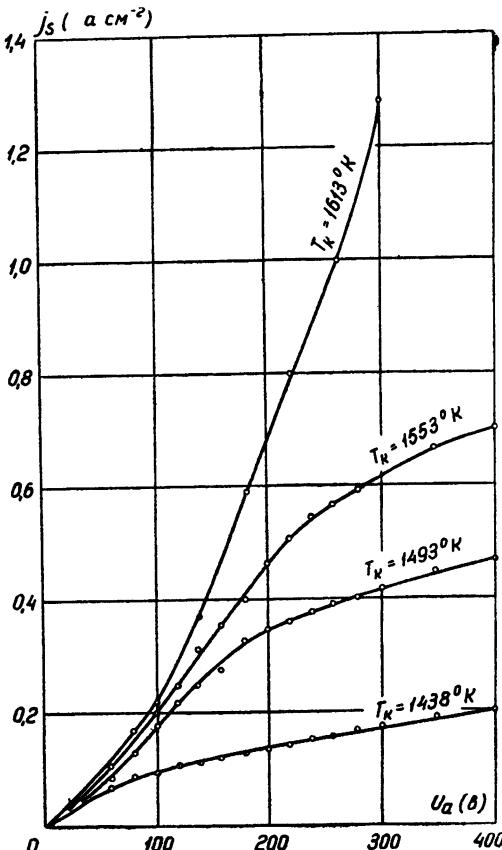


Рис. 1.

где $\Delta V = f[j(u_a)] = f_1[E_a]$ — барьер поля пятен над областями с $\varphi = \varphi_{\min}$, причем $d\Delta V / dE_a = -x_{kp}$ — расстояние, на котором поле пятен компенсируется внешним полем, j_{S_0} — плотность тока эмиссии, соответствующая уничтожению поля пятен (находится из кривых Шоттки по точке перехода к нормальному эффекту Шоттки), $j = j(E_a)$ — значения плотности тока, соответствующие аномальной области Шоттки. Подставляя в (4) значения постоянных и выражая ΔV в вольтах, имеем для $T_k = 1493^\circ K$:

$$\Delta V = 0,296 \lg (j_{S_0} / j). \quad (4a)$$

По найденным для различных $j(E_a)$ значениям ΔV построен график зависимости $\Delta V = f(E_a)$ (рис. 5); по нему найдены несколько значений x_{kp} . Данные для четырех значений E_a представлены в таблице 2, из которой видно, что при уменьшении E_a ΔV сильно возрастает и x_{kp} достигает значительной величины.

Осуждение результатов и выводы. Определенные методом прямой Ричардсона постоянные A и φ_0 значительно отличаются от приведенных в литературе [2, 4] для сходных катодов. Это объясняется не только различной технологией изготовления но и, по-видимому, различными условиями активирования. Поведение φ_T при переходе от $T_k = 1438^\circ K$ к $T_k = 1493^\circ K$ и от $T_k = 1493^\circ K$ к $T_k = 155^\circ K$ (изменение,

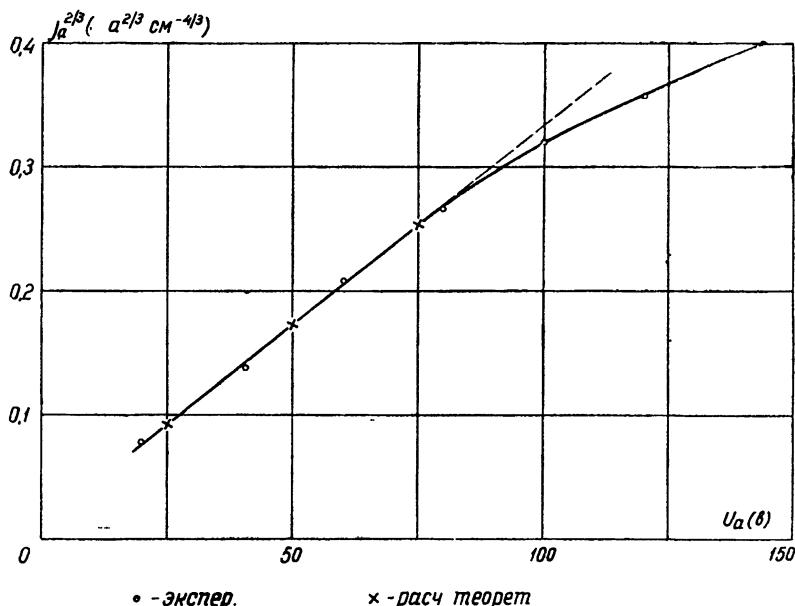


Рис. 2. Зависимость $j_a^{2/3}$ от u_a :
○○○ — экспериментальные значения, ××× — теоретические значения.

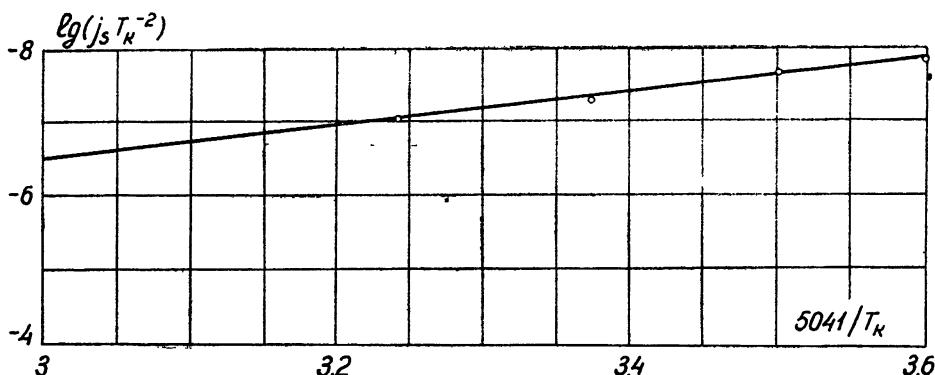


Рис. 3.

Таблица 1

T_K ($^{\circ}$ K)	1438	1493	1553
T_W ($^{\circ}$ K)	280	323	336
$\beta = T_K / T_W$	5,15	4,78	4,63

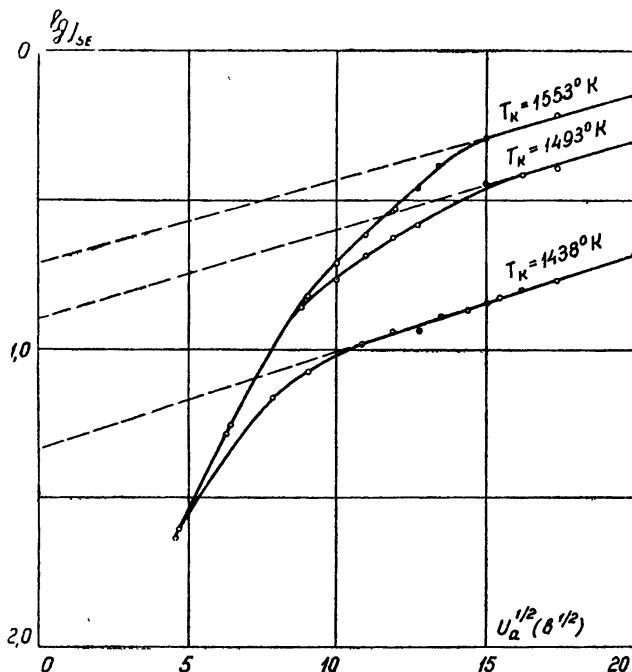


Рис. 4.

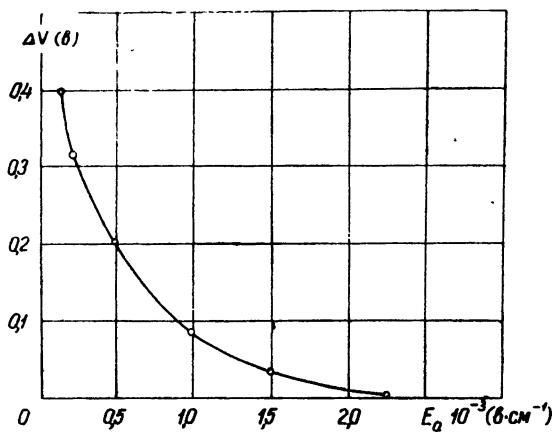


Рис. 5.

знака температурного коэффициента) подтверждает предположение о полупроводниковом характере отдельных элементов катода. Об этом же свидетельствуют и значения β . Кстати, подсчет по данным [2] дает $\beta \approx 10$. Стремление оценить сферу дей-

Таблица 2

$u_a (в)$	$E_a (в \cdot см^{-1})$	$\Delta V (в)$	$x_{kp} (мк)$
10	$0,1 \cdot 10^3$	0,4	5,35
50	$0,5 \cdot 10^3$	0,2	3
100	10^3	0,09	1,6
150	$1,5 \cdot 10^3$	0,06	0,64

ствия поля пятен обусловлено тем фактом, что пятнистость в той или иной степени может влиять на условия токопрохождения в лампе, приводя, например, к появлению дефектов "тонкой структуры" анодно-сеточных характеристик [5]. Поэтому найденные выше значения ΔV и x_{kp} позволяют хотя бы ориентировочно определить пригодность использования описанного катода в конкретных приборах.

ЛИТЕРАТУРА

- Б. В. Бондаренко, Научные доклады высшей школы — Радиотехника и электроника, 3, 184 (1958).
- E. S. Rittner, W. C. Rutledge and R. H. Ahlert, J. Appl. Phys., 28, 1468 (1957).
- Л. Н. Добрецов, Электронная и ионная эмиссия, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
- Р. Соррола, R. Hughes, Proc. IRE, 44 351 (1956).
- Н. В. Черепинин, Электронные лампы для широкополосных усилителей, Госэнергоиздат, М.—Л., 1958.

Таганрогский радиотехнический
институт

Поступила в редакцию
13 мая 1960 г.

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Ю. И. Неймарк и Л. П. Шильников

В заметке приводятся условия устойчивости периодических движений квазилинейной системы вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= \omega_j(t) + \mu f_j(t; x_1, \dots, x_n; \mu); \\ \dot{x}_{m_1+2i-1} &= -p_i x_{m_1+2i} + \omega_{m_1+2i-1}(t) + \mu f_{m_1+2i-1}(t; x_1, \dots, x_n; \mu); \\ \dot{x}_{m_1+2i} &= p_i x_{m_1+2i-1} + \omega_{m_1+2i}(t) + \mu f_{m_1+2i}(t; x_1, \dots, x_n; \mu); \\ \dot{x}_s &= \lambda_s x_s + \omega_s(t) + \mu f_s(t; x_1, \dots, x_n; \mu) \\ (j &= 1, \dots, m_1; \quad i = 1, \dots, m_2; \quad s = m_1 + 2m_2 + 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\text{Re } \lambda_s \neq 0$, ω_a и f_a — периодические функции t периода 2π . При этом относительно ω_a и f_a и поверхностей разрыва $s_\beta(t; x_1, \dots, x_n; \mu) = 0$ ($\beta = 1, \dots, r$) функций f_1, \dots, f_n предполагаются выполненными условия, сформулированные в статье [6]. Полученные условия являются обобщением результатов работ [1—5] для случая гладких правых частей и результатов работы [8] для случая разрывных правых частей уравнений.

Как известно, задача об устойчивости периодического движения сводится к исследованию устойчивости неподвижной точки некоторого точечного отображения. В основе дальнейшего лежит следующая лемма.

Лемма. Для устойчивости неподвижной точки $M^*(0, \dots, 0)$ линейного отображения вида

$$\begin{aligned}\bar{x}_j &= x_j + \mu \sum_{l=1}^m A_{jl} x_l + \mu \sum_{l=m+1}^n A'_{jl} x_l ; \\ \bar{x}_{m+2i-1} &= \cos \gamma_i x_{m+2i-1} - \sin \gamma_i x_{m+2i} + \mu \sum_{l=1}^n B_{m+2i-1-l} x_l ; \\ \bar{x}_{m+2i} &= \sin \gamma_i x_{m+2i-1} + \cos \gamma_i x_{m+2i} + \mu \sum_{l=1}^n B_{m+2i-l} x_l ; \\ \bar{x}_k &= \sum_{l=m+2m_1+1}^n a_{kl} x_l + \mu \sum_{l=1}^n c_{kl} x_l \\ (j &= 1, \dots, m; \quad i = 1, \dots, m_1; \quad k = m+2m_1+1, \dots, n),\end{aligned}$$

где все γ_i не сравнимы между собой и с нулем по $\text{mod } 2\pi$, достаточно выполнения следующих условий:

- 1) корни уравнения $|a_{ij} - \delta_{ij}|z| = 0$ должны лежать внутри единичного круга;
- 2) корни уравнения $\Delta(\sigma) = |A_{ij} - \delta_{ij}| \sigma| = 0$ должны иметь знаки действительных частей, противоположные знаку μ ;

$$\begin{aligned}3) \quad \mu [(B_{m+2j-1-m+2j-1} + B_{m+2j-m+2j}) \cos \gamma_j + (B_{m+2j-m+2j-1} - \\ - B_{m+2j-1-m+2j}) \sin \gamma_j] < 0 \\ (j = 1, \dots, m_1).\end{aligned}$$

При нарушении хотя бы одного из этих условий неподвижная точка будет неустойчивой.

В нерезонансном случае, т. е. при условии, что при $\mu=0$ система (1) не имеет характеристических показателей ($m_1=0$) и числа p_1, \dots, p_{m_2} , попарно не сравнимы по $\text{mod } 1$, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Для того, чтобы периодическое решение системы (1), обращающееся при $\mu=0$ в периодическое решение

$$x_i^0(t) = \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

системы (1) с $\mu=0$, было устойчиво при малых μ , достаточно, чтобы $\operatorname{Re} \lambda_s < 0$ ($s = -2m_2-1, \dots, n$) и, кроме того, выполнялись неравенства

$$\begin{aligned}\mu \sum_{j=0}^R \left\{ \int_{t_0^j}^{t_0^{j+1}} \left(\left[\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_{k-1}} \right] + \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_k} \right] \right) dt + \left([f_{k-1}]_{t=t_0^j+0} - [f_k]_{t=t_0^j-0} \right) \times \right. \\ \times \left[\frac{ds_j}{\partial x_{k-1}} \right]_{t=t_0^j} \left(\frac{d[s_j]_{t=t_0^j}}{dt_0^j} \right)^{-1} + \left([f_k]_{t=t_0^j+0} - [f_k]_{t=t_0^j-0} \right) \times \\ \times \left. \left[\frac{ds_j}{\partial x_k} \right]_{t=t_0^j} \left(\frac{d([s_j]_{t=t_0^j})}{dt_0^j} \right)^{-1} \right\} < 0 \\ (k = m_1+i; \quad i = 1, \dots, m_2), \quad (3)\end{aligned}$$

где t_0^1, \dots, t_0^R ($t_0^0 = 0, t_0^{R+1} = 2\pi, R=r$) — моменты времени пересечения фазовой траектории (2) с поверхностями s_k ($k=1, \dots, r$).

Здесь и ниже функция, заключенная в квадратные скобки, вычислена при $x_t = x_i^0(t)$ и $\mu=0$.

Рассмотрим случай резонанса N рода. Пусть $p_1=N_1/N, \dots, N_{m_3}/N$, где N_1, \dots, N_{m_3} — целые числа, а $Np_{m_1+1}, \dots, Np_{m_2}$ не сравнимы с 1 и между собой по $\text{mod } 1$, и пусть $\omega_i(t) \equiv 0$ ($i=1, \dots, m_1+2m_3$). Порождающие решения в рассматриваемом случае записываются в виде:

$$\begin{aligned}
x_j^0(t) &= x_j^*; \\
x_{m_1+2i-1}^0(t) &= x_{m_1+2i-1}^* \cos(p_i t) - x_{m_1+2i}^* \sin(p_i t); \\
x_{m_1+2i}^0(t) &= x_{m_1+2i-1}^* \sin(p_i t) + x_{m_1+2i}^* \cos(p_i t); \\
x_s^0(t) &= \varphi_s(t)
\end{aligned} \tag{4}$$

($j=1, \dots, m_1; i=1, \dots, m_3; s=m_1+2m_3+1, \dots, n$),

где x_1^*, \dots, x_m^* ($m=m_1+2m_3$) — корни уравнений

$$\begin{aligned}
\Phi_I(x_1^*, \dots, x_m^*) &= \sum_{k=0}^R \int_{t_0^k}^{t_0^{k+1}} [f_j] dt = 0; \\
\Phi_{m_1+2i-1}(x_1^*, \dots, x_m^*) &= \sum_{k=0}^R \int_{t_0^k}^{t_0^{k+1}} ([f_{m_1+2i-1}] \cos(p_i t) + \\
&\quad + [f_{m_1+2i}] \sin(p_i t)) dt = 0; \\
\Phi_{m_1+2i}(x_1^*, \dots, x_m^*) &= \sum_{k=0}^R \int_{t_0^k}^{t_0^{k+1}} (-[f_{m_1+2i-1}] \sin(p_i t) + \\
&\quad + [f_{m_1+2i}] \cos(p_i t)) dt = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

($j=1, \dots, m_1; i=1, \dots, m_3$),

в которых t_0^1, \dots, t_0^R ($t_0^0 = 0, t_0^{R+1} = 2\pi N, R = rN$) определяются из системы $[s_k]_{t=t_0^k} = 0$ ($k=1, \dots, rN$).

Теорема 2. Для устойчивости при малых μ периодического решения периода $2\pi N$, обращающегося при $\mu=0$ в (4), достаточно, чтобы $\operatorname{Re}\lambda_s < 0$ ($s = m_1 + 2m_3 + 1, \dots, n$), выполнялись неравенства типа (3) для $k=m_1+2m_3+2i$ ($i=1, \dots, m_2-m_3$) и $R=rN$ и корни уравнения

$$\Delta(\sigma) = \left| \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j^*} - \delta_{ij} \sigma \right| = 0 \quad (i, j=1, \dots, m) \tag{6}$$

имели действительные части одного знака с $-\mu$. При невыполнении одного из этих условий периодическое движение неустойчиво.

В случае, когда система (1) автономна, т. е. все $\omega_i(t) \equiv 0$, а f_i и s_i не зависят от t , допустим, что $p_1=N_1/N, \dots, p_{m_3}=N_{m_3}/N$ ($m_3 \neq 0$), а $Np_{m_3+1}, \dots, Np_{m_2}$ не сравнимы с 1 и между собой по mod 1. Порождающие периодические решения периода $2\pi N$ будут записываться в следующем виде:

$$\begin{aligned}
x_j^0(t) &= x_j^*; \quad x_{m_1+2i-1}^0(t) = x_{m_1+2i-1}^* \cos(p_i t) - x_{m_1+2i}^* \sin(p_i t); \\
x_{m_1+2i}^0(t) &= x_{m_1+2i-1}^* \sin(p_i t) + x_{m_1+2i}^* \cos(p_i t); \\
x_{m_1+2m_3-1}^0(t) &= x_{m_1+2m_3-1}^* \cos(p_{m_3} t); \\
x_{m_1+2m_3}^0(t) &= x_{m_1+2m_3-1}^* \sin(p_{m_3} t); \\
x_s^0(t) &= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

($j=1, \dots, m_1; i=1, \dots, m_3-1; s=m_1+2m_3+1, \dots, n$),

где x_1^*, \dots, x_m^* ($m=m_1+2m_3-1$) — корни уравнений вида (5) для $j=1, \dots, m_1$, $i=1, \dots, m_3-1$ и кроме того, $i=m_3-1/2$, причем $p_i=m_3-1/2=p_{m_3}$.

Теорема 3. Для устойчивости периодического решения с периодом, близким к $2\pi N$, и совпадающего при $\mu=0$ с (7), достаточно, чтобы $\operatorname{Re}\lambda_s < 0$ ($s=m_1+2m_3+1, \dots, n$), корни уравнения

$$\Delta(\sigma) = \left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j^*} - \delta_{ij} \sigma \right| = 0 \quad (i, j=1, \dots, m=m_1+2m_3-1) \quad (8)$$

имели действительные части одного знака с $-\mu$ и выполнялись неравенства типа (3) для $k=m_1+2m_3+2i$ ($i=1, \dots, m_2-m_3$).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андronов и А. А. Витт, ЖТФ, 4, 122 (1934); Собрание трудов А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 1956, стр. 161.
2. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956.
3. И. И. Блехман, ДАН СССР 104, 809 (1955).
4. И. И. Блехман, ДАН СССР 112, 183 (1957).
5. J. K. Hale, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, 5, 1960.
6. Ю. И. Неймарк, Л. П. Шильников, Известия ОН АН СССР, Механика и машиностроение, 5 (1959).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 мая 1961 г.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СХЕМ

B. P. Телесин

Эта работа содержит описание одного метода использования нелинейных колебательных контуров для построения схем, аналогичных импульсным схемам на электронных лампах. В частности, описываются схемы, аналогичные емкостному релаксатору, мультивибратору, триггеру. В статьях [1,2], описаны построенные по близкому принципу схемы феррорезонансных триггеров, подробное теоретическое рассмотрение работы которых приводится в [3]. Схемы этого рода имеют амплитудную дискриминацию состояний и пытаются немодулированным синусоидальным током, что выгодно отличает их от схем на параметронах.

Мы использовали колебательные контуры с нелинейной емкостью, в качестве которой может служить полупроводниковый диод; емкость последнего зависит от величины запирающего напряжения. Физические процессы в нелинейных колебательных контурах достаточно полно описаны в литературе (см., например, [4,5]). Поэтому остановимся лишь на важной для нас неоднозначности резонансной кривой. На рис. 1а показана зависимость амплитуды J_0 колебаний в контуре от смещения u на диоде при фиксированной частоте и амплитуде питающего тока. Нелинейный элемент H , используемый далее для построения схем, показан на рис. 1б. Катушки L_1 и L_2 индуктивно связаны. Напряжение, снимаемое с L_2 , выпрямляется диодом D_2 и сглаживается реостатно-емкостным фильтром Φ . На том же рисунке показана зависимость напряжения v на выходе фильтра от смещения u на диоде D_1 . Таким образом, схему рис. 1б можно рассматривать как усилитель, для которого u является входным напряжением, а v — выходным. Коэффициент усиления элемента $k = dv/du$ зависит от добротности контура, коэффициента трансформации и входного напряжения. Знак k определяется использованием той или иной ветви характеристики и полярностью включения диода D_2 . Перемена полярности включения D_2 дает дополнительные возможности при построении схем.

Переходя к рассмотрению конкретных схем, мы будем пользоваться некоторыми терминами, применяемыми при описании схем на электронных лампах. Будем говорить, что элемент H открыт, если колебания в нем определяются ветвью 1 характеристики, и заперт, если колебания в нем определяются ветвью 2. На схемах элемент H будем обозначать так, как это показано на рис. 1в.

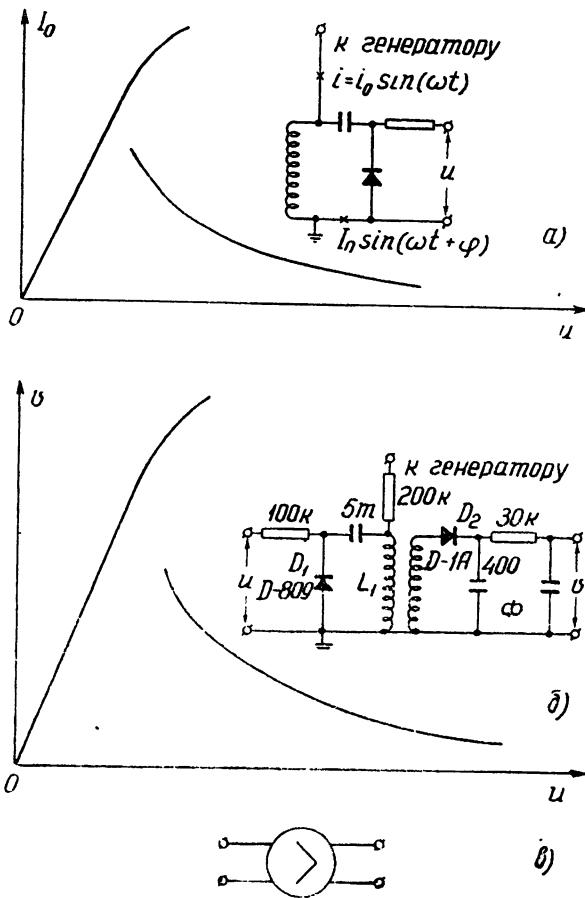


Рис. 1.

Емкостный релаксатор (рис. 2а). Процессы в этой схеме описываются системой уравнений:

$$RC \frac{du}{dt} + u = v; \quad v = v(u).$$

Предполагая, что каждая ветвь характеристики линейна (рис. 2б), положим:

$$\begin{aligned} v &= k_1 u && \text{(для ветви 1);} \\ v &= v_0 - k_2 u && \text{(для ветви 2)}, \end{aligned} \tag{1}$$

где k_1, k_2 положительны. Тогда зависимость $u(t)$ определяется формулами:

$$u(t) = \begin{cases} U_1 \exp\left(\frac{k_1 - 1}{RC}t\right); & u(0) = U_1; \\ \left(U_2 - \frac{v_0}{k_2 + 1}\right) \exp\left(-\frac{k_2 + 1}{RC}t\right) + \frac{v_0}{k_2 + 1}; & u(0) = U_2. \end{cases} \tag{2}$$

$$u(t) = \begin{cases} U_1 \exp\left(\frac{k_1 - 1}{RC}t\right); & u(0) = U_1; \\ \left(U_2 - \frac{v_0}{k_2 + 1}\right) \exp\left(-\frac{k_2 + 1}{RC}t\right) + \frac{v_0}{k_2 + 1}; & u(0) = U_2. \end{cases} \tag{3}$$

Эти соотношения отвечают первой и второй ветвям характеристики.

Пусть в момент $t=0$ $u(0)=U_1$, $v(0)=V'$. Тогда в соответствии с формулами (1) и (2) напряжение v будет экспоненциально нарастать и, достигнув величины V' , скачкообразно уменьшится до V_2 . Далее v будет изменяться согласно (1) и (3) и, если $U_1 > v_0(k_2+1)^{-1}$, то достигнув величины V_1 , v скачкообразно увеличится до V' .

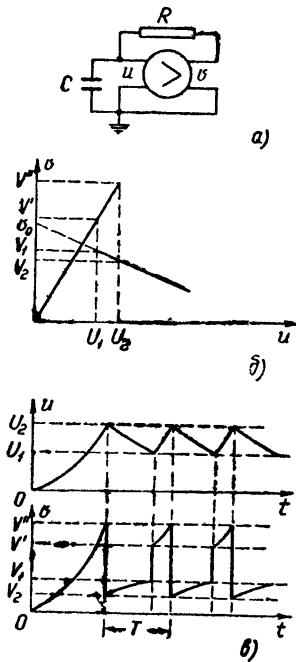


Рис. 2.

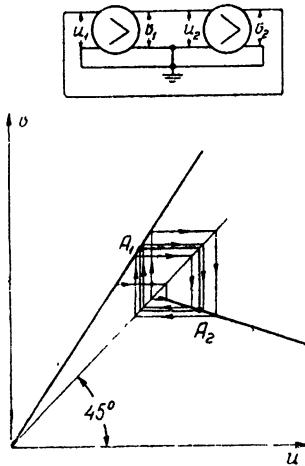


Рис. 3.

и т. д. Предполагается, что время скачка, определяемое, в основном, добротностью контура, мало по сравнению с RC .

Период колебаний описываемого релаксатора

$$T = \frac{RC}{k_1-1} \ln \frac{U_2}{U_1} + \frac{RC}{k_2+1} \ln \left[\left(U_2 - \frac{v_0}{k_2+1} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(U_1 - \frac{v_0}{k_1-1} \right)^{-1} \right].$$

Формы напряжений u , v показаны на рис. 2в.

Триггер (рис. 3). Рассмотрим схему триггера, предполагая, что характеристики элементов идентичны и соответствуют рис. 2б и формуле (1). Из схемы видно, что $u_1 = v_2$ и $u_2 = v_1$. Нетрудно убедиться в том, что возможными состояниями равновесия будут лишь те, в которых $v(v(u_1)) = u_1$; $v(v(u_2)) = u_2$ (см. точки A_1 , A_2 на рис. 3). Эти состояния будут устойчивы при $k_1 k_2 < 1$. На рис. 3 показано, что триггер приходит в одно из состояний равновесия из любого начального состояния. Перевод триггера из одного устойчивого состояния в другое осуществляется подачей на вход запертоего элемента огибающего импульса достаточной длительности.

Мультивибратор (рис. 4). Предполагается, что характеристики элементов одинаковы и определяются формулой (1). Медленные процессы в мультивибраторе на разных этапах его работы можно описать следующим образом:

I. H_1 открыт, H_2 заперт:

$$u_0 + u_c + RC\dot{u}_c = v_0 - k_1 k_2 (u_0 + RC\dot{u}_c); \quad u_c|_{t=0} = k_1 V_1 - U_1;$$

II. H_1 заперт, H_2 открыт:

$$u_0 + u_c + RC\dot{u}_c = k_1 [v_0 - k_2 (u_0 + RC\dot{u}_c)]; \quad u_c|_{t=0} = V_1 - \frac{U_1}{k_1},$$

где

$$\dot{u}_c = du_c/dt.$$

Период мультивибратора определяется выражением

$$T = (k_1 k_2 + 1) R C \ln \frac{[(k_1 k_2 + 1) u_0 + k_1 V_1 - U_1 - v_0] \left[k_1 v_0 + \frac{U_1}{k_1} - V_1 - (k_1 k_2 + 1) u_0 \right]}{\left[(k_1 k_2 + 1) u_0 + V_1 - \frac{U_1}{k_1} - v_0 \right] [k_1 v_0 + U_1 - k_1 V_1 - (k_1 k_2 + 1) u_0]}.$$

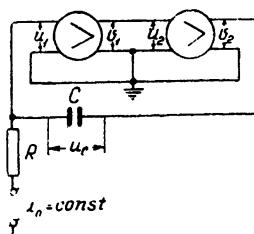


Рис. 4.

Заметим, что с достаточной точностью T выражается соотношением $T \approx (6 \pm 8) RC$.

Основные данные элементов, использованных в эксперименте, были приведены на рис. 1б. Подстройка контуров производилась карбонильными сердечниками. Максимальная частота переключения при частоте питающего генератора 6 мгц составляет примерно 50 ± 70 кгц. Ток, потребляемый от генератора одним элементом, составляет $0,1 \pm 0,2$ ма при мощности порядка 2 ± 4 мвт.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. J. Sborg, Electronics, 25, 121 (1952).
2. R. W. Rutishauser, Electronics, 27, 152 (1954).
3. К. К. Седова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 4, 142 (1958).
4. К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы, Гостехиздат, М., 1948.
5. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

Отделение прикладной математики
математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступила в редакцию
3 марта 1961 г.

О ПОЛУЧЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ НА МАШИНАХ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ

A. С. Алексеев, В. А. Дозоров, М. Л. Тай

В электронных машинах непрерывного действия, предназначенных для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, единственной независимой переменной является время. Это существенно ограничивает возможности таких машин. С другой стороны, известно, что в механических дифференциальных анализаторах [1] независимой переменной может быть любая величина.

Основным элементом механического дифференциального анализатора является интегрирующая ячейка, которая непрерывно производит умножение z на dx (где z — расстояние интегрирующего ролика от центра диска, x — угол поворота диска) и на выходном валу ролика дает интеграл от этого произведения. Аналогично этому в электронных машинах непрерывного действия интегрирование по координате, не являющейся временем, может быть осуществлено с помощью последовательного соединения множительного и интегрирующего (по времени) блоков. Действительно,

$$\int z \dot{x} dt = \int z dx.$$

Эту операцию выполняет каждая из ячеек A на рис. 1, если на входы ее подаются z и \dot{x} .

Заметим, что применению для этих целей множительных устройств на следящих системах посвящена работа [2], результаты которой остались, по-видимому, мало известными и, во всяком случае, не вошли в специальную литературу по вычислительной технике.

Рассмотренная схема позволяет воспроизводить на машине непрерывного действия функции, являющиеся решениями соответствующих дифференциальных уравнений. В самом деле, пусть для решения некоторой нелинейной системы необходима функция $y=f(x)$, которая является решением дифференциального уравнения

$$z_n = f_1(z_{n-1}, z_{n-2}, \dots, z_1, y, x)$$

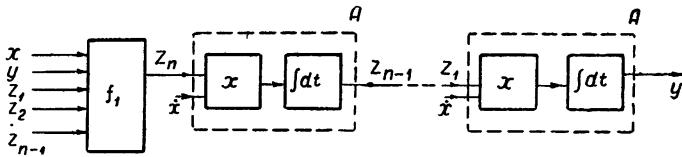


Рис. 1.

с начальными условиями

$$z_{n-1}(0) = z_{n-1}^0, z_{n-2}(0) = z_{n-2}^0, \dots, z_1(0) = z_1^0, y(0) = y^0,$$

где f_1 — функция, реализуемая на машине непрерывного действия, а $z_i = d^i y / dx^i$. Тогда блок-схема рис. 1 с заданными начальными условиями дает на выходе последнего интегратора необходимую функцию $f(x)$, причем значение \dot{x} , как правило, удается брать непосредственно из схемы решения исходной задачи.

Единственным существенным недостатком этой схемы является накопление ошибки на интеграторах с течением времени. Это ограничивает круг задач, в которых она может применяться. Однако существует, по крайней мере, два случая, когда использование этого метода не приводит к накоплению больших ошибок: 1) если время между заданием начальных условий и окончанием решения мало и 2) если замкнутая система обладает достаточной степенью устойчивости и астатичности по отношению к малым ошибкам, возникающим на входах и внутри блоков.

Предложенный метод проверялся на примере получения функциональной зависимости $y = x^{-3/2}$ на машине непрерывного действия ЭМУ-8. Эта функция получалась как решение уравнения $dy/dx = -(3/2)ux^{-1}$ с ошибкой, не превышающей 5% при медленно меняющемся значении x .

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Bush, S. H. Caldwell, J. Frankl. Inst., 240, 255 (1945).
2. D. F. Gearick, IRE Trans, TRC-1, 3 (1955).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
3 апреля 1961 г.

О МИРОВОМ ЦЕНТРЕ ДАННЫХ МЕЖДУНАРОДНОГО ГЕОФИЗИЧЕСКОГО ГОДА

Мировой центр данных Б (МЦД Б) собирает, хранит и распространяет первичные данные Международного геофизического года/Международного геофизического сотрудничества (МГГ/МГС) и результаты их научного анализа (публикации). Эти материалы поступают в МЦД от всех стран, участвующих в проведении наблюдений и их обработке по следующим разделам исследований:

Метеорология. Синоптические наблюдения наземных станций и на кораблях.
Аэрология. Актинометрия. Озон. Атмосферики. Атмосферное электричество. Химизм атмосферы и осадков. Испарения. Серебристые облака.

Геомагнетизм и земные токи.

Полярные сияния и свечение ночного неба.

Ионосфера.

Солнечная активность.

Космические лучи.

Широты и долготы.

Гляциология.

Океанография. Судовые наблюдения и наблюдения на береговых станциях.

Ракеты и спутники.

Сейсмология. Стандартные сейсмические и микросейсмические наблюдения. Специальные исследования по изучению структуры и деформации земной коры.

Гравиметрия. Измерения силы тяжести. Земные приливы.

Ядерная радиация. Измерения концентраций радиоактивного аэрозоля земли, воздуха. Измерение естественной радиоактивности воздуха. Определение общего количества продуктов распада и радиоактивного углерода в морской воде. Исследование образцов осадков. Исследование содержания трития в «доатомный» период гляциологическими методами

Со всеми материалами, хранящимися в МЦД Б, можно работать непосредственно в читальных залах центра. Центр выполняет также заказы на копирование материалов, хранящихся в МЦД.

Стоимость копирования следующая: 1. Микрофильм на 35-мм рольной пленке: а) негативы с кадром 18×24 мм — 1 коп за кадр (страницу), б) позитивы с кадром 18×24 мм — 0,4 коп. 2. Фотокопии размером 20×30 см — 12 коп. за лист. Стоимость фотокопий других размеров определяется пропорционально размерам отпечатка.

Заказы на копировку материалов МГГ/МГС необходимо направлять по адресу: Москва, ІВ-296, Молодежная ул., 3, МЦД, тел. В 0-05-87.

Заказ должен быть оформлен двумя подписями — руководителя учреждения и главного бухгалтера. Выполненные заказы высылаются наложенным платежом по адресу, указанному в заказе.

Информация об имеющихся материалах осуществляется с помощью каталогов и библиографических списков, высыпаемых бесплатно по запросу.

Читальные залы МЦД (Молодежная, 3) работают с 8.30 до 16.30. Перерыв на обед с 12.00 до 13.00.