

11. А. М. Родичев, В. А. Игнатченко, ФММ, **9**, 903 (1960).  
 12. К. А. Горюнина, А. А. Грачев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 581 (1959).  
 13. Nguyen Van Dang, С. г. Acad sci., **246**, 2357 (1958); **246**, 3034 (1958); J. Phys. et radium, **19**, 20 (1958); **20**, 222 (1959).

Институт физики Сибирского отделения  
 АН СССР

Поступила в редакцию  
 14 декабря 1960 г.

### К ТЕОРИИ УДАРНОГО ДЕМПФЕРА

М. И. Фейгин

В работе [1] исследовалась динамика простого ударного демпфера и определялись его оптимальные параметры, соответствующие наилучшему виброгашению в рамках основного периодического режима. В настоящем сообщении рассматривается более сложная модель, в которой ударник  $m$  и основная колеблющаяся масса  $M$  связаны пружиной с коэффициентом упругости  $K_2$ . Основной целью исследования является выяснение эффекта от постановки такой пружины. В случае настройки демпфера  $K_2/m = K/M$ , мы придем к исследованию следующей системы уравнений, в которой все безразмерные переменные и коэффициенты совпадают с принятыми в работе [1]:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \omega^2 \xi + \mu \omega^2 (\xi - \eta) &= \sin \tau; \\ \ddot{\eta} + \omega^2 (\eta - \xi) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

при  $|\eta - \xi| < d$ . При  $\eta - \xi = \pm d$  происходит мгновенный удар. Доударные скорости  $\dot{\xi}_0$  и  $\dot{\eta}_0$  связаны с послеударными скоростями  $\dot{\xi}'_0$  и  $\dot{\eta}'_0$  соотношениями

$$(1 + \mu) \dot{\xi}'_0 = (1 - \mu R) \dot{\xi}_0 + \mu (1 + R) \dot{\eta}_0; \quad (1 + \mu) \dot{\eta}'_0 = (1 + R) \dot{\xi}_0 + (\mu - R) \dot{\eta}_0. \quad (2)$$

Заметим, что совпадение частоты внешней силы с одной из собственных частот линейной системы, получаемой из (1) при  $d = \infty$ , имеет место при  $\omega^2 = \epsilon_1^2, \epsilon_2^2$ , где  $\epsilon_1^2, \epsilon_2^2$  — корни уравнения  $\epsilon^4 - (2 + \mu) \epsilon^2 + 1 = 0$  ( $\epsilon_1^2 > \epsilon_2^2$ ).

В пятимерном фазовом пространстве системы (1), (2) нас интересуют лишь траектории в некоторой области  $G$ , заключенной между плоскостями  $\eta - \xi = \pm d$ , на которых происходит удар (обозначим их  $\Pi_+$  и  $\Pi_-$ ). Под основным периодическим режимом в данной модели будем понимать симметричное движение с периодом внешней силы, в течение которого происходит один удар массы  $m$  о правый ограничитель и один удар о левый. В фазовом пространстве этому режиму соответствует траектория в области  $G$ , которая состоит из симметричных отрезков, идущих с поверхности  $\Pi_+$  на  $\Pi_-$ , затем опять на  $\Pi_+$  и т. д. Концы этих отрезков траекторий соответствуют моментам ударов, а движение изображающей точки по ним длится полпериода  $\pi$ .

Изучение основного периодического режима сводится к исследованию неподвижных точек преобразования  $\Pi_+$  (или  $\Pi_-$ ) в себя. Решая (1) и (2), составляем уравнения точечного преобразования и, варьируя их по всем переменным вблизи неподвижной точки преобразования, обычным образом [2] получаем характеристическое уравнение  $\chi(z) = 0$ . Последнее для основного периодического режима имеет вид:

$$\begin{vmatrix} z + \cos \omega \epsilon_1 \pi & \sin \omega \epsilon_1 \pi & z + \cos \omega \epsilon_2 \pi & \sin \omega \epsilon_2 \pi & 0 & -2\mu \\ -\omega \epsilon_1 \sin \omega \epsilon_1 \pi & \omega \epsilon_1 (z + \cos \omega \epsilon_1 \pi) & -\omega \epsilon_2 \sin \omega \epsilon_2 \pi & \omega \epsilon_2 (z + \cos \omega \epsilon_2 \pi) & -\mu & 0 \\ g_1 (z + \cos \omega \epsilon_1 \pi) & g_1 \sin \omega \epsilon_1 \pi & g_2 (z + \cos \omega \epsilon_2 \pi) & g_2 \sin \omega \epsilon_2 \pi & 0 & 2 \\ -g_1 \omega \epsilon_1 \sin \omega \epsilon_1 \pi & g_1 \omega \epsilon_1 (z + \cos \omega \epsilon_1 \pi) & -g_2 \omega \epsilon_2 \sin \omega \epsilon_2 \pi & g_2 \omega \epsilon_2 (z + \cos \omega \epsilon_2 \pi) & 1 & 0 \\ 0 & z \omega \epsilon_1 (g_1 - 1) & 0 & z \omega \epsilon_2 (g_2 - 1) & \frac{R(1 + \mu)}{1 + R} & Y \\ z (g_1 - 1) & 0 & z (g_2 - 1) & 0 & 0 & 1 + \mu \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $g_1^{-1} = 1 - \epsilon_1^2$ ,  $g_2^{-1} = 1 - \epsilon_2^2$ , а  $Y$  — функция параметров и начальной фазы  $\tau_0$ .

Область существования и устойчивости ограничена в пространстве параметров бифуркационными поверхностями  $N_{+1}$ ,  $N_{-1}$  и  $N_{\varphi}$ , уравнения которых получаются из  $\chi(z) = 0$  путем подстановки  $z = +1$ ,  $-1$  и  $e^{j\varphi}$  [3]. Другая возможная бифуркация рассматриваемого периодического режима может иметь место из-за появления лишних ударов за полуцикл. Уравнение соответствующей поверхности  $C_{\tau}$  получим из условий  $\eta(\tau^*) - \xi(\tau^*) = \pm d$ ,  $\dot{\eta}(\tau^*) - \dot{\xi}(\tau^*) = 0$ , где параметр  $\tau^*$  изменяется в пределах  $\tau_0 \leq \tau^* \leq \tau_0 + \pi$ .

Ограничимся случаем  $\omega = \varepsilon_2$ . Тогда  $\sin \tau_0 = \pm 1$  и уравнение (3) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{z(z-1)^2(1+R)}{1+\varepsilon_1^2} \left[ \frac{2z\varepsilon_2^4}{1+\varepsilon_1^2} - Y \sin \varepsilon_2^2 \pi \right] + \frac{z(z-1)(z+\cos \varepsilon_2^2 \pi) \varepsilon_2^2}{1+\varepsilon_1^2} \times \\ & \times \left[ (1+\mu)(1+3R) + z \frac{\varepsilon_1^4(3+R) - \varepsilon_2^2(1+3R)}{1+\varepsilon_1^2} \right] - (z^2 + 2z \cos \varepsilon_2^2 \pi + 1) \left( 1 + \mu + \right. \\ & \left. + z \frac{\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2}{1+\varepsilon_1^2} \right) \left[ z \frac{R\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^4}{1+\varepsilon_1^2} - R(1+\mu) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$Y = - \frac{4\varepsilon_1^4}{\pi(1+\varepsilon_1^2)} - \frac{1-\varepsilon_2^4}{1+\varepsilon_1^2} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi \varepsilon_2^2}{2} + \frac{4d\varepsilon_1^4}{\pi \sin \tau_0} \right),$$

а уравнениями  $C_{\tau}$  будут

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \frac{\sin \tau_0}{2} \left\{ \frac{\pi \left[ \sin \varepsilon_2^2 t - \operatorname{tg} \frac{\varepsilon_2^2 \pi}{2} (\cos \varepsilon_1^2 t - \cos t) \right]}{2(\varepsilon_1^2 - 1)} - \left[ \frac{\varepsilon_1^4 \left( \frac{\pi}{2} - t \right)}{1 - \varepsilon_1^4} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\pi(1+\mu)(1-R)}{2(\varepsilon_1^2 - 1)(1+R)} \right] \sin t \right\} + d \cos t = \pm d; \\ \Phi'(t) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $t = \tau^* - \tau_0$ .

Исследование (4), (5) показывает, что граница  $C_{\tau}$  отсекает от области устойчивости при малых  $R$  и  $d$  незначительную часть, соответствующую повторному удару массы  $m$  об ограничитель, о который она ударялась перед этим. На рис. 1 штриховкой выделена область существования и устойчивости для значения  $\mu = 0,05$ .

Для расчета оптимальных параметров демфера исследуем решение (1), (2);  $\xi(\tau)$ , соответствующее основному периодическому режиму. Ограничиваясь частотами, близкими к резонансной частоте  $\omega \approx \varepsilon_2$ , и разлагая  $\xi(\tau)$  в ряд Фурье, получаем выражения первой и кратных гармоник:

$$\Psi_1^2 = \left[ \frac{\pi \varepsilon_2^2}{4} \frac{(1+\mu)(1-R)}{1+R} \right]^2 + \frac{\mu^2}{(\varepsilon_1^2 - 1)^2} (d^* - d)^2 + \Delta \Psi_1^2, \quad (6)$$

$$\Psi_n^2 = \left[ \frac{\mu n^2}{(\varepsilon_1^2 - 1)(n^2 - 1)(n^2 - \varepsilon_2^4)} \right]^2 + \Delta \Psi_n^2 \quad (n = 3, 5, 7, \dots),$$

где

$$d^* = \frac{\varepsilon_1^2 - 1}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2} \left[ \frac{1}{4(1 - \varepsilon_2^2)} + \frac{2 + \varepsilon_1^2}{\mu(1 + \varepsilon_1^2)} + \frac{\pi \varepsilon_2^2}{4\mu} (1 - \varepsilon_2^2) \operatorname{tg} \frac{\pi \varepsilon_2^2}{2} \right], \quad (7)$$

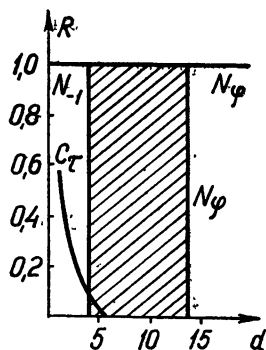


Рис. 1.

а  $\Delta\Psi_1^2$  и  $\Delta\Psi_n^2$  — малые величины порядка  $\Delta\omega = \omega - \varepsilon_2$ . Из (6) следует, что параметры  $d$  и  $R$  с точностью до  $\Delta\omega$  влияют лишь на амплитуду первой гармоники. Поэтому оптимальный зазор  $d = d^*$ . Однако дополнительное исследование показывает, что для  $\mu < 0,5$  значение  $d^*$  выходит из области основного режима. На рис. 2 (кривая 1) приведена зависимость  $d_{\text{опт}}(\mu)$ , вычисленная из условия наибольшей близости  $d_{\text{опт}}$  к  $d^*$ , при котором еще имеет место основной режим. На этом же рисунке амплитуды первой и третьей гармоник при  $d = d_{\text{опт}}$  для частного случая  $R = 0,55$  изображены кривыми 2 и 3;

Полученные основные характеристики показывают, что ударный динамический демпфер, работающий в основном периодическом режиме, уменьшает вибрации значительно эффективней простого ударного демпфера. Для сравнения на рис. 2 (кривые 4 и 5) пунктиром приведены зависимости  $\Psi_1(\mu)$  и  $d_{\text{опт}}(\mu)$  оптимально настроенного в рамках основного периодического режима простого ударного демпфера, взятые из работы [1].

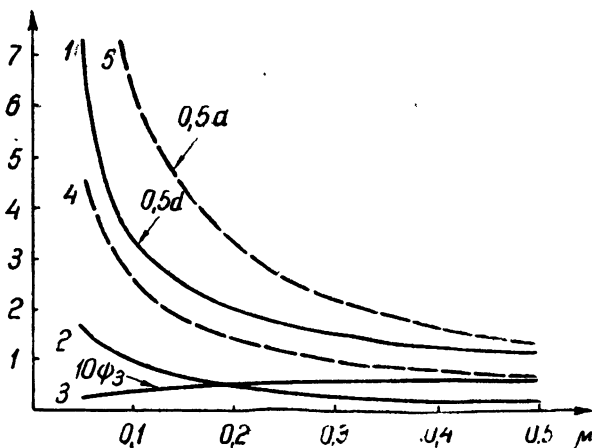


Рис. 2.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. Н. Фейгин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 607 (1959).
2. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 41 (1958).
3. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 2, 95 (1958).

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
12 января 1961 г.

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЦИФРОВЫМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМИ УСТРОЙСТВАМИ

Л. Н. Волгин, Л. И. Смоляр

Цель данной заметки — показать возможность применения некоторых алгебраических методов к расчету линейных автоматических систем с цифровыми вычислительными устройствами.

Известно, что системы, состоящие из непрерывных и дискретных элементов, описываются рациональными функциями с вещественными коэффициентами от одной переменной  $z$  ( $z$ -преобразование), которая соответствует оператору сдвига на время  $T$ :

$$z = \exp(-pT), \quad (1)$$

причем непрерывные системы описываются правильными дробями, и только дискретные системы могут иметь изображения в виде неправильных дробей [1,2]. Именно поэтому использование дискретных элементов создает широкие возможности изменения свойств систем. Применение цифровых вычислительных устройств в системах автоматического управления позволяет значительно улучшить их динамические характеристики.