

ДИНАМИКА ПРОСТЕЙШЕГО ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА С АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫМ ТИПОМ ПОИСКА*

Г. А. Новинская

С помощью точечных отображений исследуется одна модель экстремального регулятора с автоколебательным типом поиска максимума.

В настоящей работе рассматривается динамика экстремального регулятора**, структурная схема которого изображена на рис. 1, а уравнения движения могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} T\dot{\varphi} + \varphi &= f(u); \\ \dot{u} &= \eta; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\eta = \Phi[\dot{u}(t-\Theta), \dot{\varphi}(t-\Theta)],$$

где

$$\Phi[\dot{u}, \dot{\varphi}] = \begin{cases} +1 & \text{при } \dot{u} > 0, \dot{\varphi} > -\Delta \text{ или } \dot{u} < 0, \dot{\varphi} < -\Delta \\ -1 & \text{при } \dot{u} < 0, \dot{\varphi} > -\Delta \text{ или } \dot{u} > 0, \dot{\varphi} < -\Delta \end{cases}, \tag{2}$$

причем изменение знака Φ может происходить с запаздыванием лишь том случае, если в течение Θ единиц времени до момента этого изменения величины \dot{u} и $\dot{\varphi} + \Delta$ не меняли свои знаки.

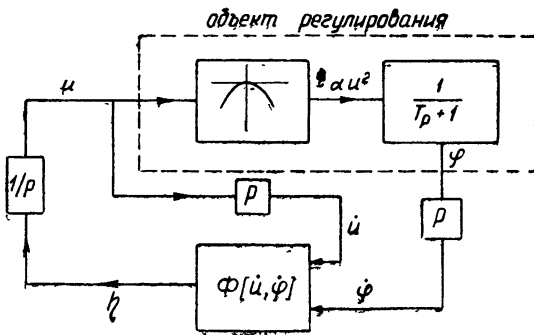


Рис. 1.

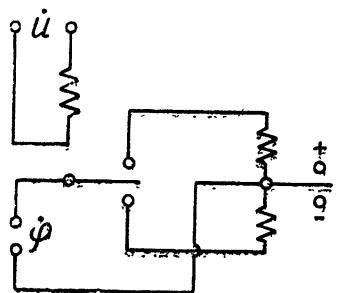


Рис. 2.

Нелинейная функция $\Phi[\dot{u}, \dot{\varphi}]$ может быть реализована с помощью двух поляризованных реле (рис. 2).

Функция $f(u)$ имеет один или два максимума. Ради определенности в первом случае предполагается, что $f(u) = -au^2$, а во втором график $f(u)$ составляется из отрезков двух парабол.

Обращение Θ в нуль соответствует предположению, что реле сра-

* Работа представляет собой изложение основных результатов дипломной работы Г. А. Новинской, выполненной под руководством Ю. И. Неймарка в 1959 году.

** Описание такой конкретной схемы содержится, например, в [3].

батывают мгновенно и что мгновенно реализуются выходные значения реверсивного устройства и дифференциаторов. Существенно, что в предельном случае при $\Theta=0$ уравнения (1) не дают полного описания движений рассматриваемой системы.

В работе выясняется характер поиска системой максимального значения величины φ , находятся амплитуды и периоды колебаний в установившемся режиме и выясняется их зависимость от параметров T , α , Δ и Θ .

1. *Случай одного максимума и исчезающе малого запаздывания Θ .* Фазовое пространство системы составлено из двух плоскостей u , φ , склеенных вдоль линии

$$\varphi = T\Delta - \alpha u^2. \quad (3)$$

На одной из этих плоскостей $\eta=+1$, на другой $\eta=-1$. В области $\varphi < T\Delta - \alpha u^2$, где $\dot{\varphi} > -\Delta$, уравнения движения изображающей точки имеют вид:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \eta t; \\ \varphi &= C_1 e^{-\eta T} - \alpha(t^2 + at + b), \end{aligned} \quad (4)$$

где $C_1 = \varphi_0 + \alpha b$, $a = 2(\eta u_0 - T)$, $b = u_0^2 - 2T(\eta u_0 - T)$. Исключая из (4) время t , получим уравнение фазовой траектории:

$$\varphi = C e^{-\eta u T} - \alpha(u^2 - 2\eta T u + 2T^2), \quad (5)$$

где

$$C = e^{\eta u_0 T} (\varphi_0 + \alpha u_0^2 - 2\alpha \eta T u_0 + 2\alpha T^2).$$

Как только изображающая точка попадает на линию (3), происходит, согласно (2), изменение знака η и изображающая точка переходит на другую плоскость. Семейства фазовых траекторий на плоскостях $\eta = +1$ и $\eta = -1$ симметричны друг другу относительно оси φ . Вид фазовых траекторий в области $\varphi > -\Delta$ на плоскости $\eta = +1$ изображен на рис. 3. Отметим, что $\dot{\varphi} = 0$ на линии $\varphi = -\alpha u^2$.

В области, где $\dot{\varphi} < -\Delta$, фазовые траектории представляют из себя прямые $u = u_0$, параллельные оси φ , вдоль которых движение изображающей точки происходит по закону:

$$\varphi = (\varphi_0 + \alpha u_0^2) e^{-\eta T} - \alpha u_0^2. \quad (6)$$

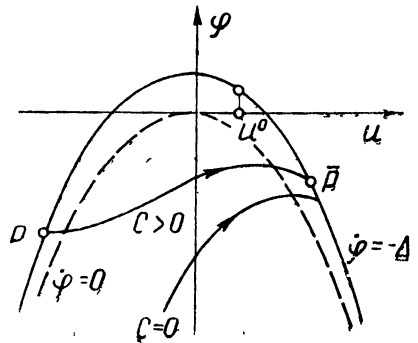


Рис. 3.

Действительно, допустим, что η меняет знак с запаздыванием по времени, равным Θ . Тогда координата u будет меняться с течением времени следующим образом. Пусть при $t=0$ $u(0)=u_0$ и изображающая точка начинает движение по плоскости $\eta = +1$. Тогда в течение времени Θ изображающая точка будет двигаться по плоскости $\eta = -1$, а при $t=2\Theta$ произойдет изменение η на -1 , согласно (2). При этом $u(\Theta)=u_0+\Theta$. Затем изображающая точка будет Θ единиц времени двигаться по плоскости $\eta = -1$, а при $t=2\Theta$ опять согласно (2) произойдет изменение η на $+1$, причем $u(2\Theta)=(u_0+\Theta)-\Theta=u_0$, и т. д. Если теперь устремим Θ к нулю, то получим, что $u(t)=u_0$ при любых t и $\dot{\varphi}(t) < -\Delta$.

Согласно (6), изображающая точка из области, где $\dot{\varphi} < -\Delta$, попадает через конечный промежуток времени на линию (3); затем ее движение будет происходить либо по плоскости $\eta = +1$, либо по плоскости $\eta = -1$, как было описано выше. При этом изображающая точка из области, где $\dot{\varphi} > -\Delta$, выйти уже не может. Таким образом, для исследования поставленной задачи достаточно ограничиться областью, где $\dot{\varphi} > -\Delta$.

Для отыскания периодических движений системы прибегнем к методу точечных преобразований. Из вида системы (1) следует, что траектории плоскости $\eta = +1$ симметричны относительно оси траекториям плоскости $\eta = -1$. Траектории плоскости $\eta = +1$ имеют единственную точку контакта с кривой переключения (3) $u^0 = \Delta/2\alpha$. Поэтому для исследования движений системы достаточно рассмотреть точечное преобразование $Q = S\Pi$, где Π — преобразование, переводящее точки кривой (3), для которых $-\infty < u < u^0$, по траекториям плоскости $\eta = +1$ в точки кривой (3), для которых $u > u^0$, а S — преобразование симметрии относительно оси φ , переводящее точку (u, φ) в точку $(-u, \varphi)$. Для построения преобразования Π предположим, что при $t=0$ $u(0) = -x$, $\varphi(0) = \varphi_0 = T\Delta - \alpha x^2$, а при $t = \tau$ $u(\tau) = y$, $\varphi(\tau) = \varphi_1 = T\Delta - \alpha y^2$, где τ — время движения изображающей точки по траектории плоскости $\eta = +1$ от точки $P(-x, \varphi_0)$ до точки $\bar{P}(y, \varphi_1)$ (см. рис. 3). В результате несложных выкладок получаем выражение для преобразования Π в следующем виде:

$$[\Delta - 2\sigma(y - T)]e^{y/T} = (\Delta + 2\alpha x + 2\alpha T)e^{-x/T}, \quad (7)$$

откуда следует, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta + 2\alpha x}{2\alpha y - \Delta} e^{-\frac{x+y}{T}} > 0,$$

так как $2\alpha y > \Delta$.

Простую неподвижную точку преобразования Q найдем, положив в (7) $x = y = u^*$, в результате чего получим уравнение для определения u^* :

$$u^* = \left(\frac{\Delta}{2\alpha} + T \right) \operatorname{th} \frac{u^*}{T}. \quad (8)$$

Из того факта, что кривая, заданная уравнением (7), имеет при $x \rightarrow \infty$ асимптоту $y = \frac{\Delta}{2\alpha} + T$, вытекает существование, по крайней мере, одной простой неподвижной точки преобразования Q , так при $x = -\Delta/2\alpha$ величина $y = \Delta/2\alpha$. С другой стороны, нетрудно убедиться в том, что уравнение (8) имеет не более одного положительного корня.

Таким образом, из всего сказанного выше следует, что преобразование Q имеет при любых значениях параметров T , α , Δ единственную простую устойчивую неподвижную точку $-u^*$, определяемую уравнением (8). Соответствующая диаграмма Ламерея изображена на рис. 4.

Устойчивой простой неподвижной точке преобразования Q соответствует устойчивый периодический режим работы системы, период $2\tau^*$ которого равен $4u^*$ (рис. 5).

2. Рассмотрим теперь экстремальный регулятор в предположении, что $\Delta = 0$, но $\Theta > 0$. Фазовое пространство системы в этом случае состоит из двух листов u , φ , склеенных вдоль двух линий переключений:

$$\varphi = f_1(u) = -\alpha(u^2 + 2Tu + 2T^2) + 2\sigma T(u + \Theta + T)e^{-\theta/T}, \quad u < -\Theta; \quad (9)$$

$$\varphi = f_2(u) = -\alpha(u^2 - 2Tu + 2T^2) - 2\alpha T(u - \Theta - T)e^{-\theta/T}, \quad u > \Theta. \quad (10)$$

Изучение движения изображающей точки показывает, что существует область F , ограниченная кривыми (9), (10), частью параболы $\varphi = -\alpha u^2$ и частью линии $\varphi = -\alpha(\Theta^2 + 2T\Theta + 2T^2) + 2\alpha T^2 e^{-\theta/T}$ (см. рис. 6), такая, что изображающая точка, начав движение вне F , обязательно приходит в F , а движения, начинающиеся в F , выйти из области F не могут. Поэтому для исследования периодических движений системы можно ограничиться областью F фазового пространства.

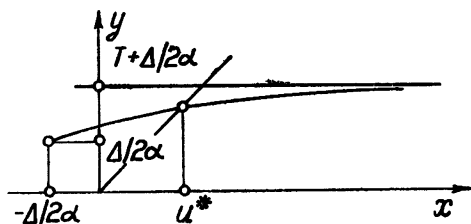


Рис. 4.

В силу симметрии фазовых траекторий листа $\eta = +1$ траекториям листа $\eta = -1$, рассмотрим лишь отображение $Q = S\Pi$, где Π — преобра-

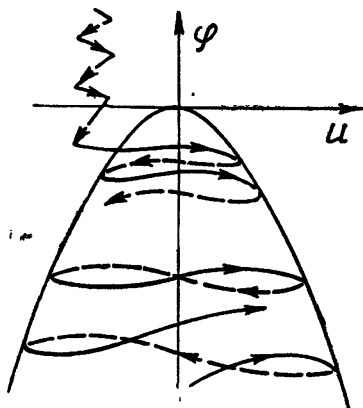


Рис. 5.

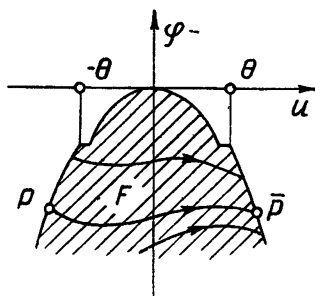


Рис. 6.

зование линии (9) в линию (10) по траекториям листа $\eta = +1$, а S — преобразование симметрии относительно оси φ . Предположим опять, что при $t=0$ $u(0) = -x$, $\varphi(0) = f_1(-x)$, а при $t=\tau$ $u(\tau) = y$, $\varphi(\tau) = f_2(y)$, где τ — время перехода изображающей точки по траектории листа $\eta = +1$ с линии (9) на линию (10). В результате получим выражение для преобразования Π в следующем виде:

$$(T + \Theta - y)e^{y/T} = (\Theta + T - x + 2xe^{-\theta/T}) e^{-x/T}. \quad (11)$$

Из анализа фазовых траекторий следует, что при увеличении x увеличивается и y , т. е. $dy/dx > 0$. Кроме того, нетрудно убедиться в том, что $y(\Theta) > \Theta$ и, как следует из (11), $\Theta < y(x) < \Theta + T$, причем $y \rightarrow \Theta + T$ при $x \rightarrow \infty$. Поэтому преобразование Q имеет при любых значениях параметров системы, по крайней мере, одну простую неподвижную точку.

Диаграмма Ламерея преобразования Π изображена на рис. 7. Подставляя в (11) $x = y = u^*$, получим уравнение для определения координаты u^* простой неподвижной точки преобразования Q :

$$(T + \Theta - u^*) (e^{2u^*/T} - 1) = 2u^* e^{-\theta/T}. \quad (12)$$

Уравнение (12) может иметь не более одного положительного корня,

отличного от нуля, так как вторая производная от левой его части отрицательна при всех $u^* > \theta$. Следовательно, преобразование Q имеет при всех значениях параметров единственную простую устойчивую неподвижную точку $-u^*$, определяемую уравнением (12).

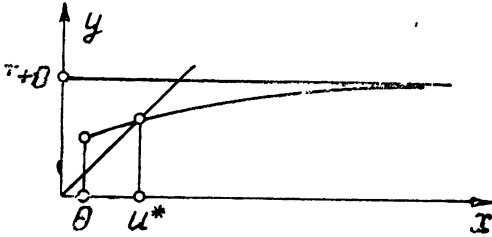


Рис. 7.

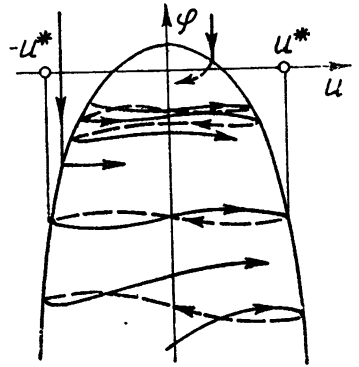


Рис. 8.

Устойчивой простой неподвижной точке преобразования Q соответствует устойчивый периодический режим работы системы, период $2\tau^*$ которого равен $4u^*$ (рис. 8).

3. Рассмотрим теперь случай, когда нелинейная характеристика объекта регулирования имеет два максимума (рис. 9), а запаздывание θ исчезающе мало. При этом уравнения движения системы имеют вид:

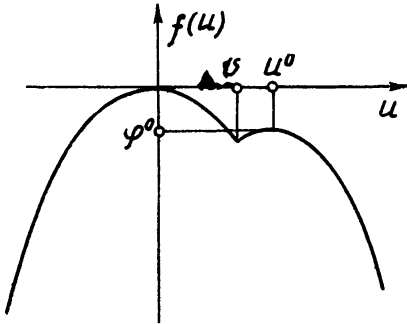


Рис. 9.

$$\begin{aligned} T\dot{\varphi} + \varphi &= f(u); \\ \dot{u} &= \eta; \\ \eta &= \Phi[\dot{u}, \dot{\varphi}], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$f(u) = \begin{cases} -\alpha_1 u^2 & (u < v); \\ \varphi^0 - \alpha_2 (u - u^0)^2 & (u > v); \end{cases} \quad (14)$$

$$u^0 > 0; \quad 0 > \varphi^0 > -\alpha_1 u^{02}; \quad v = \frac{\alpha_2 u^0 - \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 u^{02} + \varphi^0 (\alpha_2 - \alpha_1)}}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Переключение (изменение величины функции Φ) в этом случае происходит на линии

$$\varphi = T\Delta + f(u). \quad (15)$$

Диаграмма Ламерея точечного преобразования, переводящего точки линий (15) в точки этой же линии по траекториям листов $\eta = +1$ и $\eta = -1$, при $\Delta = 0$ имеет вид, изображенный на рис. 10.

Согласно вышеизложенному, система при $\Delta > 0$ может иметь устойчивый предельный цикл C_1 , симметричный относительно оси φ , амплитуда u_1^* которого определяется из уравнения

$$u_1^* = (\Delta/2\alpha_1 + T)\text{th}(u_1^*/T), \quad (16)$$

и устойчивый предельный цикл C_2 , симметричный относительно линии

$u = u^0$ (относительно оси правой параболы), с амплитудой u_2^* , определяемой из уравнения

$$u_2^* = (\Delta/2\alpha_2 + T) \operatorname{th}(u_2^*/T). \quad (17)$$

Область существования цикла C_1 задается условием

$$u_1^* < v \quad (18)$$

или

$$v > (\Delta/2\alpha_1 + T) \operatorname{th}(v/T), \quad (19)$$

а область существования цикла C_2 — условием

$$u_2^* < u^0 - v = w = \frac{-\alpha_1 u^0 + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 u^{02} + \varphi^0(\alpha_2 - \alpha_1)}}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (20)$$

или

$$w > (\Delta/2\alpha_2 + T) \operatorname{th}(w/T). \quad (21)$$

Таким образом, в пространстве параметров системы $\Delta, \alpha_1, \alpha_2, u^0, \varphi^0$ неравенства (19) и (21) выделяют области существования устойчивых предельных циклов C_1 и C_2 . Эти области имеют общую часть, если (18) и (20) выполняются одновременно. Это имеет место, например, при достаточно малых $\Delta > 0$, так как $u_1^*|_{\Delta=0} = u_2^*|_{\Delta=0}$, а $du_1^*/d\Delta > 0$ и $du_2^*/d\Delta > 0$.

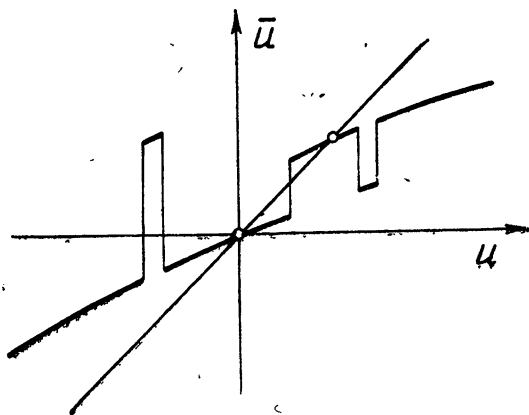


Рис. 10.

Кроме предельных циклов C_1 и C_2 , может существовать устойчивый несимметричный предельный цикл C_3 , опирающийся на левую ветвь левой параболы и на правую ветвь правой параболы.

Обозначим через Δ_1 и Δ_2 такие значения Δ , при которых (19) и (21) соответственно обращаются в равенства, и выделим на плоскости u^0, φ^0 область A , ограниченную с одной стороны параболой $\varphi^0 = -\alpha_1 u^{02}$, а с другой — линией, для которой $\Delta_1 = \Delta_2$. Для случая $\alpha_1 > \alpha_2$ эта область изображена на рис. 11а, а для случая $\alpha_1 < \alpha_2$ — на рис. 11б. Исследования показали, что для $(u^0, \varphi^0) \in A$ (см. рис. 11) $\Delta_1 > \Delta_2$, т. е. при увеличении Δ сначала исчезает предельный цикл C_2 , а затем C_1 . Если же точка (u^0, φ^0) находится выше линии $\Delta_1 = \Delta_2$, то при увеличении Δ сначала исчезает предельный цикл C_1 , а затем C_2 .

Из сказанного вытекает следующее. Если при некотором Δ изо-

бражающая точка системы движется по циклу C_2 или C_3 , то в том случае, когда $(u^0, \varphi^0) \in A$, изображающую точку системы можно вывести на цикл C_1 путем непрерывного изменения величины Δ . Чтобы перейти от движения по C_2 к движению по C_1 , необходимо увеличить

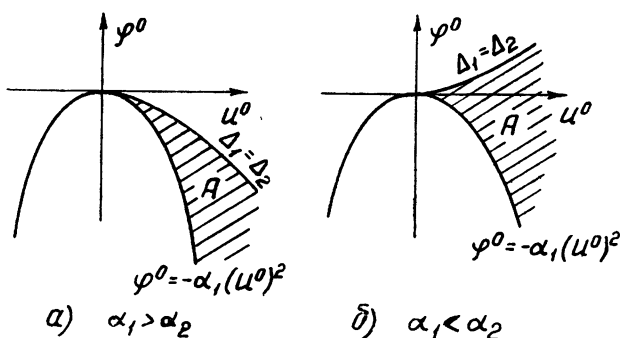


Рис. 11.

Δ до Δ_2 , а для перехода от движения по C_3 к движению по C_1 необходимо Δ уменьшить до Δ_1 .

Циклы C_1 , C_2 и C_3 изображены на рис. 12.

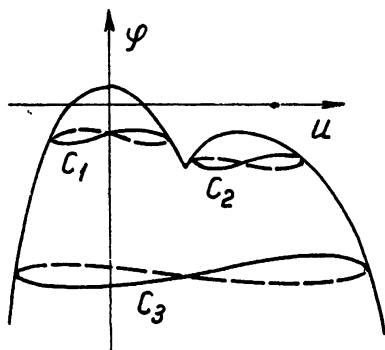


Рис. 12.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
2. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, [1, 41] (1958).
3. А. Г. Ивахненко, Самонастраивающиеся системы автоматического регулирования, изд. АН УССР, 1957.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 декабря 1960 г.

DYNAMICS OF SIMPLEST EXTREMAL REGULATOR WITH AUTOOSCILLATING SEARCH

G. A. Novinskaya

A model of extremal regulator with autooscillating search of maximum is investigated by means of pointwise transformation,