

## РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОДНЫХ СИСТЕМ С ВИНТОВЫМИ И ТРОХОИДАЛЬНЫМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ ПОТОКАМИ

А. В. Гапонов

Дается вывод дисперсионного уравнения, описывающего распространение волн в волноводах с релятивистскими винтовыми или трохоидальными пучками. Выяснена роль релятивистских эффектов во взаимодействии таких пучков с замедленными и незамедленными электромагнитными волнами.

В работе [1] было рассмотрено взаимодействие электронов, движущихся по непрямолинейным траекториям, с электромагнитными волнами в волноводных системах. При объяснении механизма взаимодействия и выводе дисперсионного уравнения, описывающего распространение волн в волноводе с электронным потоком, в этой работе, а также в ряде других [2-4], были использованы нерелятивистские уравнения движения электронов. Однако, как уже было отмечено [3,5,6], в тех случаях, когда в нерелятивистском приближении частота свободных колебаний электронов в пучке не зависит от амплитуды (изохронные колебания), учет релятивистских эффектов оказывается существенным, так как с ними может быть связан дополнительный механизм автофазировки, обеспечивающий нарастание электромагнитных волн. Именно такая ситуация имеет место для электронов, движущихся по винтовым траекториям в однородном продольном (по отношению к оси волновода) магнитном поле или по трохоидальным траекториям в скрещенных электрическом и магнитном полях (в релятивистском приближении масса электрона и гиромангнитная частота  $\omega_H = eH_0/mc$  зависят от скорости). Это делает необходимым введение релятивистских поправок в дисперсионные уравнения систем с винтовыми и трохоидальными электронными пучками, описанных в [1] и [4]. (см. [5]). В настоящей работе приводится подробный вывод релятивистского дисперсионного уравнения для такого рода систем при обычных в теории слабых сигналов (в линейном приближении) допущениях и при условии, что концентрация электронов (сила тока в пучке) достаточно мала\*.

### 1. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНОВОДА НЕПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ

Задача о возбуждении волновода тонким непрямолинейным электронным пучком была рассмотрена в [1]; поэтому ниже приводятся лишь окончательные выражения для поля. Запишем фурье-компоненту поля, возбуждаемого в волноводе, в виде суперпозиции нормальных волн [8]\*\*:

\* Результаты, изложенные в настоящей работе, были использованы в докладе на XIII Генеральной Ассамблее URSI в сентябре 1960 г.[7].

\*\* В системе CGSE.

$$E_{\omega} = \sum_s (V_s^+ E_s^+ + V_s^- E_s^-) - \frac{4\pi}{i\omega} (\mathbf{j}_{\omega} \mathbf{Z}_0) \mathbf{Z}_0;$$

$$H_{\omega} = \sum_s (V_s^+ H_s^+ + V_s^- H_s^-), \quad (1)$$

где  $E_s^{\pm} = e_s^{\pm} e^{\mp i k_0 s z}$ ,  $H_s^{\pm} = h_s^{\pm} e^{\mp i k_0 s z}$  — напряженности электрического и магнитного полей нормальных волн на частоте  $\omega$ ,  $\mathbf{Z}_0$  — единичный вектор оси  $z$ , параллельной оси волновода,  $\mathbf{j}_{\omega}$  — фурье-компонента плотности тока  $\mathbf{j}(t) = \int \mathbf{j}_{\omega} e^{i\omega t} d\omega$ .

Согласно [1], для вычисления амплитуд нормальных волн  $V_s^{\pm}$  удобно записать уравнение тонкого электронного пучка, возбуждающего волновод, в параметрической форме  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau, t)$  ( $\tau$  — время пролета электронов до сечения с координатой  $z$ ) и перейти в выражении для  $V_s$  от интегрирования по объему волновода к интегрированию по времени пролета  $\tau$  (т. е. к интегрированию по траекториям электронов\*). Если, кроме того, допустить, что электроны в пучке совершают малые гармонические колебания с частотой  $\omega$  относительно стационарного движения  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\tau)$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\tau) + \mathbf{r}_{1\omega}(\tau) e^{i\omega t} \quad (|\mathbf{r}_{1\omega}| \ll D);$$

$$\tau = \tau_0(z) + \tau_{1\omega}(z) e^{i\omega t} \quad (|\tau_{1\omega}| \ll T)$$

( $D$  и  $T$  — масштабы размеров и времени, определяемые траекторией электронов, структурой и частотой высокочастотного поля), то для амплитуд  $V_s^{\pm}$  будем иметь:

$$V_s^{\pm} = \pm \frac{I_0}{N_s} \left\{ i\omega \int_{\tau_0^{1,2}}^{\tau_0(z)} \mathbf{r}_{1\omega} [\mathbf{G}_s^{\pm} \{ \mathbf{r}_0(\tau) \}]^* d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau_0^{1,2}}^{\tau_0(z)} [\mathbf{r}_{1\omega} + \mathbf{v}_0(\tau) \tau_{1\omega}] E_s^{\mp} \{ \mathbf{r}_0(\tau) \} \right\}, \quad (2)$$

где  $\tau_0^{1,2}$  — время пролета, соответствующее началу и концу пучка,  $I_0$  — постоянная составляющая тока в пучке,  $N_s$  — норма волны,  $\mathbf{v}_0(\tau) = = \dot{\mathbf{r}}_0(\tau)$  — скорость электрона в невозмущенном потоке, знак  $[\ ]^*$  означает комплексно-сопряженную величину, а через  $\mathbf{G}_s^{\pm}$  обозначена сила Лорентца:

$$\mathbf{G}_s^{\pm} = \mathbf{E}_s^{\pm} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{H}_s^{\pm}]. \quad (3)$$

Выражения (2) и (3) получены для волновода без потерь; как показал Л. А. Вайнштейн, их обобщение на случай волновода с потерями сводится к замене  $[\mathbf{G}_s^{\pm}]^* \rightarrow \mathbf{E}_s^{\mp} - c^{-1} [\mathbf{v}_0 \mathbf{H}_s^{\mp}]$  в интеграле в (2).

## 2. ВОЛНОВОД С ВИНТОВЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ, НАПРАВЛЯЕМЫМ ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

1. *Движение электрона в поле электромагнитной волны.*  
В релятивистском приближении движение электрона в постоянном

\* Аналогичная замена переменных была использована Шафрановым [9] при вычислении диэлектрической проницаемости плазмы.

магнитном  $H_0 = z_0 H_0$  и высокочастотных электрическом  $E_~$  и магнитном  $H_~$  полях описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = -e \left\{ E_~ + \frac{1}{c} [\dot{r}, H_0 + H_~] \right\}, \quad (4)$$

где  $m = m_0(1 - \dot{r}^2/c^2)^{-1/2}$ ,  $m_0$  — масса покоя,  $e$  — абсолютная величина заряда электрона, а точка означает полную производную по времени.

Согласно (4), в отсутствие высокочастотного поля электрон, имеющий продольную скорость  $v_z = v_{||}$  и поперечную скорость  $v_{\perp}$ , движется по винтовой линии, описываемой в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$  уравнениями

$$r = r_0 = v_{\perp}/\omega_H, \quad \theta = \theta_0 = \omega_H \tau, \quad z = z_0 = v_{||} \tau, \quad (5)$$

где  $\omega_H = eH_0/mc$  — гиромагнитная частота,  $m = m_0(1 - \beta_{||}^2 - \beta_{\perp}^2)^{-1/2}$ ,  $\beta_{||} = v_{||}/c$ ,  $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$ .

Рассматривал высокочастотное поле электромагнитной волны

$$E_~ = V_0 e(r, \theta) e^{-ikz} e^{i\omega t}, \quad H_~ = V_0 h(r, \theta) e^{-ikz} e^{i\omega t}, \quad (6)$$

как возмущение и считая отклонения траектории электрона от винтовой линии (5) малыми:

$$r = r_0 + r_1, \quad |r_1| \ll D,$$

получим следующие уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} r_1 &= r_1 R_0 + \theta_1 r_0 \theta_0 + z_1 Z_0; \\ \ddot{r}_1 - v_{\perp} \dot{\theta}_1 - \beta_{\perp}^2 x^2 \left( \omega_H^2 r_1 + v_{\perp} \dot{\theta}_1 + \frac{v_{||}}{v_{\perp}} \omega_H \dot{z}_1 \right) &= -\frac{e}{m} V_0 G_r; \\ r_0 \ddot{\theta}_1 + \omega_H \dot{r}_1 + \beta_{\perp}^2 x^2 \left( \omega_H \dot{r}_1 + r_0 \ddot{\theta}_1 + \frac{v_{||}}{v_{\perp}} \dot{z}_1 \right) &= -\frac{e}{m} V_0 G_{\theta}; \\ \ddot{z}_1 + \beta_{||} \beta_{\perp} x^2 \left( \omega_H \dot{r}_1 + r_0 \ddot{\theta}_1 + \frac{v_{||}}{v_{\perp}} \dot{z}_1 \right) &= -\frac{e}{m} V_0 G_z, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $x^2 = (1 - \beta_{||}^2 - \beta_{\perp}^2)^{-1}$ ,  $R_0, \theta_0, Z_0$  — единичные векторы, а  $G_r, G_{\theta}$  и  $G_z$  — компоненты силы Лорентца для волны единичной амплитуды:

$$G = g(r_0, \theta_0) e^{-ikz_0} e^{i\omega t}, \quad g = e + \frac{1}{c} [v_0 h]. \quad (8)$$

Имея в виду использование в дальнейшем формулы (2) для амплитуд нормальных волн, будем искать решения уравнений (7) в виде функций от  $\tau$  и  $t$ :

$$r_1 = r_1(\tau) e^{i\omega t} + \rho_1(\tau) e^{i\omega t},$$

где  $\rho_1(\tau) e^{i\omega t}$  — общее решение однородной ( $G=0$ ) системы, соответствующей (7), которое описывает собственные волны электронного пучка при пренебрежимо малом пространственном заряде [1]. Полагая

в (7)  $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} + i\omega$  и разлагая периодическую функцию  $g(\tau)$  и искомое решение  $r_1(\tau)$  в ряды Фурье:

$$G = \sum_n G_n e^{i(n\omega_H - kv_{||})\tau} e^{i\omega t}; \quad G_n = G_{rn} R_0 + G_{\theta n} \theta_0 + G_{zn} Z_0;$$

$$r_1 = \sum_n r_n e^{i(n\omega_H - kv_{\parallel})\tau} e^{i\omega t}; \quad r_n = r_n R_0 + r_0 \Theta_n \Theta_0 + z_n Z_0, \quad (9)$$

для коэффициентов  $r_n$ ,  $\Theta_n$ ,  $z_n$  получим уравнения:

$$\begin{aligned} & [(\Delta\omega_n)^2 + x^2 \beta_{\perp}^2 \omega_H^2] r_n + i\Delta\omega_n x^2 (1 - \beta_{\parallel}^2) \omega_H r_0 \Theta_n + \\ & + i\Delta\omega_n x^2 \beta_{\parallel} \beta_{\perp} \omega_H z_n = \frac{e}{m} V_0 G_{rn}; \\ & - i\Delta\omega_n x^2 (1 - \beta_{\parallel}^2) \omega_H r_n + (\Delta\omega_n)^2 x^2 (1 - \beta_{\parallel}^2) r_0 \Theta_n + \\ & + (\Delta\omega_n)^2 x^2 \beta_{\parallel} \beta_{\perp} z_n = \frac{e}{m} V_0 G_{\Theta n}; \\ & - i\Delta\omega_n x^2 \beta_{\parallel} \beta_{\perp} \omega_H r_n + (\Delta\omega_n)^2 x^2 \beta_{\parallel} \beta_{\perp} r_0 \Theta_n + \\ & + (\Delta\omega_n)^2 x^2 (1 - \beta_{\perp}^2) z_n = \frac{e}{m} V_0 G_{zn}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} G_{rn} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{e_r + \beta_{\perp} h_z - \beta_{\parallel} h_{\theta}\} e^{-in\xi} d\xi; \\ G_{\Theta n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{e_{\theta} + \beta_{\parallel} h_r\} e^{-in\xi} d\xi; \\ G_{zn} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{e_z - \beta_{\perp} h_r\} e^{-in\xi} d\xi \end{aligned} \quad (11)$$

и  $\Delta\omega_n = \omega - kv_{\parallel} + n\omega_H$ ,  $\xi = \omega_H \tau$ .

Решения уравнений (10) имеют вид:

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{e}{m} V_0 \frac{G_{rn} \Delta\omega_n - i G_{\Theta n} \omega_H}{\Delta\omega_{n-1} \Delta\omega_n \Delta\omega_{n+1}}; \\ r_0 \Theta_n &= \frac{e}{m} V_0 \left\{ \frac{i G_{rn} \omega_H + G_{\Theta n} \Delta\omega_n}{\Delta\omega_{n-1} \Delta\omega_n \Delta\omega_{n+1}} - \frac{G_{zn} \beta_{\parallel} \beta_{\perp} + G_{\Theta n} \beta_{\perp}^2}{(\Delta\omega_n)^2} \right\}; \\ z_n &= \frac{e}{m} V_0 \frac{G_{zn} (1 - \beta_{\parallel}^2) - G_{\Theta n} \beta_{\parallel} \beta_{\perp}}{(\Delta\omega_n)^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Полученные выражения для  $r_n$ ,  $\Theta_n$  и  $z_n$  показывают, что так же, как и в нерелятивистском приближении, возмущение, создаваемое электромагнитной волной в винтовом электронном потоке, относительно велико в том случае, если при некотором  $n = p$

$$|\Delta\omega_p| \equiv |\omega - kv_{\parallel} + p\omega_H| \ll \omega_H, \omega. \quad (13)$$

При выполнении условия (13) ряд (9) для  $r_1$  имеет конечное число „резонансных“ членов порядка  $|\Delta\omega_p|^{-1}$  и  $|\Delta\omega_p|^{-2}$ . Следует, однако, отметить, что теперь (в релятивистском приближении) слагаемые порядка  $|\Delta\omega_p|^{-2}$  появляются не только в  $z_1$ , но и в  $\Theta_1$ . Это указывает на возможность не только продольной, но также и азимутальной группировки электронов. Последняя, как нетрудно видеть, обусловлена зависимостью гиромангнитной частоты  $\omega_H$  от скорости и связана с фазовой неустойчивостью орбитально-устойчивого движения релятивистского электрона в магнитном поле [6].

2. Дисперсионное уравнение для волновода с винтовым пучком.

При весьма малой концентрации электронного потока (малом пространственном заряде) структура поля в волноводе с пучком должна мало отличаться от структуры поля в „холодной“ системе; в частности, постоянные распространения нормальных волн  $k_s$  должны быть близки  $k_{0s}$ \*:

$$k_s - k_{0s} = \delta k_{0s}, \quad |\delta| \ll 1.$$

Если, кроме того, для одной из нормальных волн выполнено условие резонанса (или „синхронизма“)

$$\omega - k_{0s} v_{||} + p \omega_H = \varepsilon k_{0s} v_{||}, \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (14)$$

то и в рядах (1) для поля в волноводе и в рядах (9) для возмущения, создаваемого электромагнитным полем в пучке, можно пренебречь нерезонансными членами. Таким образом, учитывая взаимодействие пучка только с одной из нормальных волн\*\* („синхронной“ в смысле (14)), подставляя (12) в (2) и сохраняя лишь члены порядка  $\delta^{-1} (\delta - \varepsilon)^{-2}$ , получим приближенное дисперсионное уравнение для волновода с винтовым пучком в следующем виде (индекс  $s$ , указывающий номер синхронной волны, в дальнейшем не выписывается):

$$k - k_0 = - \frac{e}{m} \frac{I_0}{v_{||} N} \frac{\omega}{(\omega - k v_{||} + p \omega_H)^2} \{ |G_{zp}|^2 (1 - \beta_{||}^2) - |G_{\theta p}|^2 \beta_{\perp}^2 - (G_{\theta p} G_{zp}^* + G_{\theta p}^* G_{zp}) \beta_{||} \beta_{\perp} + O(\varepsilon, \delta) \}, \quad (15)$$

где  $O(\varepsilon, \delta)$  — остаточный член, содержащий  $\varepsilon$  и  $\delta$  в степени единица и выше. Заметим, что при заданной частоте уравнение (15) является кубическим относительно  $k$  и в случае достаточно малой расстройки  $\varepsilon$  всегда имеет комплексно-сопряженные корни. Это означает, что в волноводе с винтовым пучком на частотах, определяемых условием (14), могут существовать как экспоненциально-спадающие, так и экспоненциально-нарастающие волны.

При  $p = 0$  (т. е.  $\omega \approx k_{0s} v_{||}$ ) дисперсионное уравнение (15) описывает систему типа лампы с бегущей волной, но с винтовым релятивистским пучком; при  $p=0$  и  $\beta_{\perp}=0$  полученное уравнение является, очевидно, релятивистским обобщением дисперсионного уравнения обычной ЛБВ [10].

3. Волновод со слабо релятивистским винтовым пучком. Для слабо релятивистского электронного потока, у которого  $\beta_{||}^2 \sim \beta_{\perp}^2 \sim \beta^2 \ll 1$ , в правой части (15) следует учитывать только слагаемые с наименьшей степенью  $\beta$ . Необходимо, однако, иметь в виду, что в таком пучке электроны движутся по винтовым траекториям, радиус которых, вообще говоря, мал по сравнению с длиной волны, благодаря чему коэф-

\* В рассматриваемой системе наряду с волнами, близкими по структуре нормальным волнам «холодного» волновода, существуют волны, близкие к собственным волнам электронного пучка. Собственные волны винтового пучка благодаря пространственной модуляции с периодом  $D_H = 2\pi v_{||} / \omega_H$  имеют пространственные гармоники постоянные распространения которых при малом пространственном заряде прибли-

женно равны  $k_{эл(p)} \approx \frac{\omega + p \omega_H}{v_{||}}$ . Ниже рассматривается „резонансный“ случай, когда  $k_{эл(p)} \approx k_{0s}$  (условие (14)); при этом, очевидно, постоянные распространения всех собственных волн близки  $k_{0s}$ .

\*\* Предполагается, что волновое число  $k_{0s}$  невырожденное; в противном случае, (а также в случае группы близких волновых чисел  $k_{0s_1} \approx k_{0s_2} \approx \dots \approx k_{0s_m}$ ) необходимо учитывать взаимодействие пучка с несколькими волнами. Эта задача будет рассмотрена в другом месте.

коэффициенты  $G_p$  также могут содержать малый параметр  $\beta_{\parallel}$  или  $\beta_{\perp}$ . Действительно, если допустить для простоты, что  $k_0 c \sim \omega$ ,  $|\nabla|e|| \sim |\nabla|h|| \sim \sim k_0|e|$  и  $\beta_{\parallel} \sim \beta_{\perp} \sim \beta$ , то, согласно (11),  $|G_{zp}|^2 \sim |G_{\theta p \pm 1}|^2 \sim |G_{r p \pm 1}|^2 \sim \sim |e|^2 \beta^{2|p|}$ . Поскольку при не слишком малых токах  $I_r$  поправки  $\delta$  и  $\varepsilon$ , входящие в дисперсионное уравнение, могут быть порядка  $\beta^2$ , указанная зависимость  $G_p$  от  $p$  заставляет учитывать в правой части (15) те члены добавка  $O(\varepsilon, \delta)$ , которые содержат  $\beta$  в более низкой степени, чем слагаемые, выписанные в явном виде.

Таким образом, учитывая, как и раньше, взаимодействие потока только с синхронной волной, подставляя (12) в (2) и сохраняя те члены, которые, согласно сделанным выше оценкам, могут оказаться порядка  $\delta^{-1}(\delta - \varepsilon)^{-2} \beta^2$  и  $\delta^{-1}(\delta - \varepsilon)^{-1}$ , получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\delta(\delta - \varepsilon)^2 = - \frac{I_0}{2U_0} \frac{k_e}{k_0^3 N} \left\{ |G_{zp}|^2 - \beta_{\perp}^2 |G_{\theta p}|^2 + \right.$$

$$\left. + (\delta - \varepsilon) \frac{k_{\parallel}}{2k_H} \left[ -4 \operatorname{Im}(G_{r,p} G_{\theta p}^*) + |G_{r(p-1)}|^2 + 2 \operatorname{Im}(G_{r(p-1)} G_{\theta(p-1)}^*) + \right. \right. \quad (16)$$

$$\left. + |G_{\theta(p-1)}|^2 - |G_{r(p+1)}|^2 + 2 \operatorname{Im}(G_{r(p+1)} G_{\theta(p+1)}^*) - |G_{\theta(p+1)}|^2 + \bar{O}(\varepsilon, \delta) \right\},$$

где  $U_0 = m v_{\parallel}^2 / 2e$  — "продольное" напряжение пучка,  $k_e = \omega / v_{\parallel}$ ,  $k_H = \omega_H / v_{\parallel}$ ,  $\delta = (k - k_0) / k_0$ , а расстройка  $\varepsilon$  определяется формулой (14); отметим, что при вычислении коэффициентов  $G_{\theta p}$  и  $G_{r,p}$ , входящих в правую часть (16), в формулах (11) можно не учитывать магнитное поле.

При очень слабых токах  $I_0$ , когда в правой части (16) можно пренебречь вторым слагаемым, пропорциональным  $(\delta - \varepsilon)$ , дисперсионное уравнение имеет вид\*:

$$\delta(\delta - \varepsilon)^2 \simeq - \frac{I_0}{2U_0} \frac{k_e}{k_0^3 N} \left\{ |G_{zp}|^2 - \beta_{\perp}^2 |G_{\theta p}|^2 \right\}, \quad (16a)$$

характерный для ЛБВ или ЛОВ типа "О" [10, 11] (взаимодействие типа "О" [1]). При достаточно малой фиксированной расстройке  $\varepsilon$  уравнение (16a) всегда имеет комплексно-сопряженные корни, один из которых соответствует нарастающей волне.

В случае взаимодействия электронов с медленной электромагнитной волной на частоте  $\omega \simeq k_0 v_{\parallel}$  ( $p = 0$ ) нарастание волны (усиление) обусловлено, как и в обычной ЛБВ, продольной группировкой электронов и черенковским излучением образовавшихся сгустков. Интересно отметить, что для винтовой пучка усиление оказывается возможным и при взаимодействии с медленными  $E$ -волнами, не имеющими продольной компоненты электрического поля; группировка в этом случае обеспечивается поперечным магнитным полем (первое слагаемое в фигурных скобках (16)) и изменением скорости вращения электронов вследствие изменения массы (второе слагаемое)\*\*.

При  $p \neq 0$  уравнение (16a), также как и (15), имеет комплексно-сопряженные корни для замедленных и для незамедленных волн.

\* В правой части дисперсионного уравнения (19) второй из работ [1] отсутствует слагаемое  $-\beta_{\perp}^2 |G_{\theta p}|^2$ , обусловленное чисто релятивистским эффектом — зависимостью массы электрона от скорости. Необходимое исправление указано в [2]

\*\* Если рассматривать вращающийся электрон как магнитный диполь, то нарастание электромагнитной волны можно объяснить как результат группировки таких диполей в магнитном поле волны и черенковского излучения образовавшихся сгустков.

Нарастание электромагнитных колебаний связано в этом случае с автоназирровкой осцилляторов (вращающихся электронов) [5], причем первый член в фигурных скобках (16а) соответствует группировке за счет смещения вдоль постоянного магнитного поля (пространственная рассортировка), а второй — за счет зависимости частоты колебаний  $\omega_H$  от энергии частицы  $W$  (фазовая рассортировка). Знак минус перед  $|G_{\Theta p}|^2$  обусловлен тем, что  $d\omega_H/dW < 0$ .

Отметим, что правая часть уравнения (15), пригодного для существенно релятивистских пучков, содержит дополнительное слагаемое, пропорциональное  $2\text{Re} [G_{\Theta p} G_{z p}^*] \beta_{\parallel} \beta_{\perp}$ . Нетрудно видеть, что это слагаемое соответствует добавочной пространственной рассортировке осцилляторов, обусловленной различием их продольных скоростей, причем разница в скоростях появляется в результате изменения массы осцилляторов, зависящей, в релятивистском случае, от энергии поперечных колебаний  $W$ .

При относительно сильных токах  $I_0$  (но не настолько сильных, что возникает необходимость учета слагаемых порядка  $(\delta - \epsilon)^2$  и  $(\delta - \epsilon) \beta$  в остаточном члене  $\bar{O}(\epsilon, \delta)$  — в частности, членов, обусловленных пространственным зарядом) и достаточно малой скорости в правой части (16) можно сохранить только слагаемое, пропорциональное  $(\delta - \epsilon)$ . Дисперсионное уравнение при этом оказывается квадратным относительно поправки  $\delta$ :

$$\begin{aligned} \delta(\delta - \epsilon) \simeq & \frac{I_0}{4U_0} \frac{k_e}{k_H k_0^2 N} [4 \text{Im} (G_{r p} G_{\Theta p}^*) - |G_{r(p-1)}|^2 - \\ & - 2 \text{Im} (G_{r(p-1)} G_{\Theta(p-1)}^*) - |G_{\Theta(p-1)}|^2 + |G_{r(p+1)}|^2 - \\ & - 2 \text{Im} (G_{r(p+1)} G_{\Theta(p+1)}^*) + |G_{\Theta(p+1)}|^2], \end{aligned} \quad (16б)$$

т. е. имеет вид, характерный для систем типа „М“ [10, 12] (взаимодействие типа „М“ [1]). Это уравнение уже не содержит релятивистских поправок и совпадает с уравнением (20) второй части работы [1] (с учетом указанной в [1] замены). Возможность появления нарастающих волн при взаимодействии типа „М“ определяется знаком квадратной скобки в (16б) и существенно зависит от структуры поля в волноводе. Отметим, что если  $e_{\Theta}(r_0, \xi)$  и  $e_r(r_0, \xi)$  — действительные функции и  $p = 0$ , то правая часть (16б) с точностью до членов порядка  $\beta^2$  обращается в нуль, откуда следует, что в этом случае на частоте  $\omega \simeq k_0 v_{\parallel}$  взаимодействие типа „М“ не играет роли.

**4. Прямоугольный волновод с винтовым пучком.** Рассмотрим в качестве примера прямоугольный волновод, в котором слабо релятивистский винтовой пучок взаимодействует с волной типа  $TE_{01}$  на частоте  $\omega \simeq k_{TE_{01}} v_{\parallel} + \omega_H$  ( $p = -1$ ). Дисперсионное уравнение (16) в этом случае запишется в виде:

$$\begin{aligned} \delta(\delta - \epsilon)^2 = & \frac{I_0}{4U_0} \frac{4\pi}{c} (a k_{TE_{01}})^{-4} \left[ \frac{1}{2} \pi^2 \frac{\beta_{\perp}^2}{\beta_{\parallel}} + \right. \\ & \left. + (\delta - \epsilon) \frac{\omega^2 a}{\omega_H c} a k_{TE_{01}} \right] \frac{a}{b} \cos^2 \left( \frac{\pi}{a} x \right) \end{aligned} \quad (17)$$

(обозначения приведены на рис. 1). Взаимодействие типа „М“ в рассматриваемом примере (при взаимодействии пучка с „быстрой“ электро-

магнитной волной\*) не приводит к усилению электромагнитных колебаний, а, наоборот, уменьшает нарастание волны, обусловленное взаимодействием типа „О“. Благодаря этому с ростом тока  $I_0$  (при фиксированной скорости электронов и действительной частоте  $\omega$ ) коэффициент нарастания волны  $\text{Im}(\delta)$  уменьшается, начиная с некоторого  $I_0^{\text{opt}}$ , и при дальнейшем увеличении  $I_0$  может упасть до нуля.

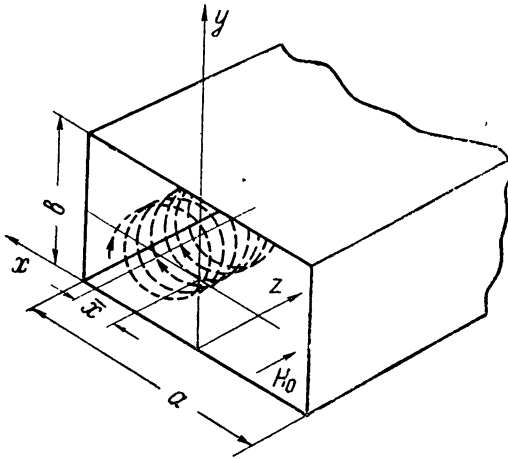


Рис. 1.

Дисперсионное уравнение для волновода, заполненного слабоцентрированной неравновесной магнитоактивной плазмой, все электроны в которой имеют одинаковые скорости  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$ , получается усреднением правой части (17) (в общем случае (15) или (16)) по поперечному сечению. В рассматриваемом случае усреднение сводится к замене  $\cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)$  на  $1/2$ .

**5. Полосковый волновод с винтовым пучком.** Для волны *TEM* в полосковом (ленточном) волноводе, полностью заполненном электронным потоком с винтовыми траекториями, уравнение (15) при  $p = -1$  примет вид:

$$\delta(\delta - \varepsilon)^2 = -\frac{1}{8} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{\beta_{\parallel}^2 n_e^4} \left[ \beta_{\perp}^2 (n_e^2 - 1) - (\delta - \varepsilon) \frac{\omega \beta_{\parallel} n_e}{\omega_H} \right], \quad (17a)$$

где  $\omega_p = (4\pi e^2/m)N_e$ ,  $N_e$  — концентрация электронов,  $n_e$  — показатель преломления среды, заполняющей волновод. Интересно отметить, что при  $n_e = 1$  взаимодействие типа „О“ в такой системе отсутствует; объясняется это тем, что два механизма фазировки вращающихся электронов работают в противоположные стороны (взаимная компенсация двух механизмов фазировки пояснена с квантовой точки зрения в [6]). Взаимодействие типа „М“ на частоте  $\omega \approx \omega_H(1 - \beta_{\parallel} n_e)^{-1}$  ( $p = -1$ ) не приводит к неустойчивости. Однако, как нетрудно видеть, на частоте, соответствующей аномальному эффекту Доплера:  $\omega \approx \omega_H/(\beta_{\parallel} n_e - 1)$  ( $p = 1$ ), знак перед вторым слагаемым в квадратной скобке (17a) меняется на обратный; в этом случае взаимодействие типа „М“ увеличивает коэффициент нарастания колебаний.

**6. Об исследовании дисперсионного уравнения.** Дисперсионное уравнение (15) или (16) связывает постоянные распространения волн, близких волне типа *s* в холодном волноводе, с частотой  $\omega$  (поправки к постоянным распространения остальных нормальных волн, в частности, волны типа  $-s$ , распространяющейся навстречу „синхронной“, много меньше определяемых уравнением (15)). Тем самым полностью решается задача о распространении волн в бесконечной системе\*\*.

\* При  $p \geq 1$  (взаимодействие с медленными электромагнитными волнами) взаимодействие типа «М» приводит, вообще говоря, к неустойчивости. Нетрудно видеть, что эта неустойчивость, сохраняющаяся в случае  $p = 1$  и при  $\beta_{\perp} = 0$ , связана с аномальным эффектом Доплера [13].

\*\* О типах неустойчивости бесконечных систем см., например, [16].



При изучении систем конечной длины следует различать два вопроса: а) исследование автономной (т. е. при равном нулю внешнем сигнале) системы на устойчивость и б) исследование распространения волн с заданной частотой (внешнего сигнала) в устойчивой системе.

Очевидно, что в автономной системе ни постоянную распространения  $k$ , ни частоту колебаний  $\omega$  нельзя считать, вообще говоря, заранее заданными — они определяются дисперсионным уравнением типа (15) совместно с краевыми условиями на концах системы. При исследовании распространения волн в устойчивой системе частоту  $\omega$  (частоту внешнего сигнала) можно считать заданной действительной величиной. Уравнения (15)—(17) определяют в этом случае поправки к постоянным распространения нормальных волн, а краевые условия позволяют выразить их амплитуды через амплитуду входного сигнала.

Мы не будем останавливаться здесь на исследовании условий самовозбуждения и усиления электромагнитных колебаний в волноводах с непрямолинейными электронными потоками. Дисперсионные уравнения (15)—(17) и краевые условия для полей и токов на концах волновода совпадают по форме с дисперсионным уравнением и краевыми условиями обычных ЛБВ и ЛОВ, что избавляет от необходимости их специального исследования. Отметим только, что неустойчивость (генерация) и усиление высокочастотных колебаний оказываются возможными при взаимодействии электронного потока как с замедленными, так и с незамедленными (попутными или встречными по отношению к потоку) электромагнитными волнами (см.: [1]).

### 3 ВОЛНОВОД С ТРОХОИДАЛЬНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ, НАПРАВЛЯЕМЫМ СКРЕЩЕННЫМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ И МАГНИТНЫМ ПОЛЯМИ

1. Движение электрона в поле волны. Модуль скорости частицы движущейся в скрещенных полях  $E_0 = -E_0 Y_0$  и  $H_0 = H_0 X_0$ , в лабораторной системе отсчета  $K$  не остается, вообще говоря, постоянным, и, следовательно, релятивистские уравнения первого приближения, аналогичные (7), имеют в этом случае переменные (периодические) коэффициенты. Поэтому оказывается более удобным рассматривать движение частицы в системе  $K'$ , движущейся относительно  $K$  со скоростью дрейфа  $v_{||} = cE_0/H_0$ . В этой системе\*  $E'_0 = 0$ ,  $H'_0 = H_0(1 - \beta_{||}^2)^{1/2}$  и в нулевом приближении (в отсутствие высокочастотного поля) электроны движутся по окружностям, лежащим в плоскости  $y'z'$  (рис. 2):



Рис. 2.

$$r' = r'_0, \quad \theta' = \theta'_0 = \omega_H t',$$

где  $\omega_H = e H'_0 / m' c$ ,  $m' = m_0 (1 - \beta_{||}^2)^{-1/2}$ ,  $\beta_{||} = v_{||} / c$ .

Уравнения первого приближения, описывающие движение электрона в поле бегущей волны (6), в системе  $K'$  совпадают с (7), если в последних положить  $\beta_{||} = 0$  и учесть другую ориентацию осей

\* В дальнейшем все величины в системе  $K'$  отмечаются штрихами.

координат (заменить  $z$  на  $x'$ ). Если воспользоваться разложениями

$$G' = g'(\tau') e^{-i [k' z'_0(\tau') - \omega' t']} = \sum_n G'_n e^{in\omega'_H \tau'} e^{i\omega' t'};$$

$$r'_1 = \sum_n r'_n e^{in\omega'_H \tau'} e^{i\omega' t'};$$
(18)

$$r'_n = r'_n R'_0 + r'_0 \Theta'_n \Theta'_n + x'_n X'_0; \quad G'_n = G'_{rn} R'_0 + G'_{\Theta n} \Theta'_0 + G'_{xn} X'_0$$

(здесь  $G'_n$  — компоненты Фурье силы Лорентца (8) в системе  $K'$ ,  $z'_0 = r'_0 \cos(\omega'_H \tau')$ ), то для коэффициентов  $r'_n$ ,  $\Theta'_n$  и  $x'_n$  будем, согласно (12), иметь:

$$r'_n = \frac{e}{m'} V'_0 \frac{G'_{rn} \Delta \omega'_n - i G'_{\Theta n} \omega'_H}{\Delta \omega'_{n-1} \Delta \omega'_n \Delta \omega'_{n+1}};$$

$$r'_0 \Theta'_n = \frac{e}{m'} V'_0 \left\{ \frac{i G'_{rn} \omega'_H + G'_{\Theta n} \Delta \omega'_H}{\Delta \omega'_{n-1} \Delta \omega'_n \Delta \omega'_{n+1}} - \frac{\beta_{\perp}^2 G'_{\Theta n}}{(\Delta \omega'_n)^2} \right\};$$
(19)

$$x'_n = \frac{e}{m'} V'_0 \frac{G'_{xn}}{(\Delta \omega'_n)^2}; \quad \Delta \omega'_n = \omega' + n \omega'_H,$$

где  $V'_0 = V_0$  — амплитуда волны.

2. *Возбуждение волновода релятивистским трохидальным\** пучком. В правую часть формулы (2) для амплитуд нормальных волн входят величины  $r_{1\omega}$  и  $\tau_1 \approx -z_{1\omega}/v_{0z}$  ( $v_{0z}$  — продольная составляющая скорости в невозмущенном пучке), измеренные в лабораторной системе  $K$ ; поэтому найденное возмущение  $r'_1$  должно быть пересчитано в  $K$  в соответствии с преобразованием Лорентца. При этом необходимо иметь в виду, что в выражении для  $r'_1$  появляется дополнительно переменная составляющая, связанная с преобразованием времени

$$t' = \kappa(t - z \beta_{\parallel}/c) = \kappa \left[ (t - z_0 \beta_{\parallel}/c) - z_1 \frac{\beta_{\parallel}}{c} \right] = t'_0(t) - z_1 \frac{\beta_{\parallel}}{c} \kappa.$$

Компоненты вектора  $r'_1$  в линейном приближении преобразуются, как нетрудно показать, по формулам:

$$x_1 = x'_1 \{ t'_0(t) \};$$

$$y_1 = y'_1 \{ t'_0(t) \} + \frac{\partial y'_0}{\partial t'_0} \left( -z_1 \frac{\beta_{\parallel}}{c} \kappa \right) = y'_1 - z_1 \beta_{\parallel} \beta'_{0y} \kappa;$$
(20)

$$z_1 = z'_1 \{ t'_0(t) \} \kappa^{-1} - \frac{\partial z'_0}{\partial t'_0} z_1 \frac{\beta_{\parallel}}{c} = \frac{z'_1 \kappa^{-1}}{1 - \beta'_{0z} \beta_{\parallel}},$$

где  $\beta'_{0y} = v'_{0y}/c$ ,  $\beta'_{0z} = v'_{0z}/c$ ,  $v'_{0y}$  и  $v'_{0z}$  — составляющие невозмущенной скорости в системе  $K'$ .

Используя эти соотношения, а также формулы преобразования для силы Лорентца  $G$  (см., например, [14]):

\* В релятивистском приближении траектории электронов в невозмущенном пучке отличны от трохиды [14].

$$\begin{aligned} G'_{\parallel} &= G_{\parallel} - \chi^2 \beta_{\parallel} (\beta_{0\perp} G_{\perp}); \\ G'_{\perp} &= \chi G_{\perp} \quad (\beta_{0\perp} = v_{0\perp}/c), \end{aligned} \quad (21)$$

можно показать, что в первом (линейном) приближении

$$\begin{aligned} \int_{\tau} r_1(\tau) [G_s\{r_0(\tau)\}]^* d\tau &= \int r_1(t) [G_s\{r_0(t), t\}]^* dt = \\ &= \int r'_1(\tau') [G'_s\{r'_0(\tau')\}]^* d\tau'. \end{aligned} \quad (22)$$

Соотношение (21) сильно упрощает выкладки, необходимые для вычисления амплитуд  $V_s$ .

3. *Дисперсионное уравнение для волновода с трохойдальным электронным пучком.* Силу Лорентца  $G'_s$  в (22), действующую на частицу с  $e/m' = 1$  в поле нормальной волны, можно разложить в ряд Фурье, аналогичный (18):

$$G'_s = g'_s(\tau') e^{-i[k'_{0s} z'_0(\tau') - \omega't']} = \sum_n G'_n e^{i(\omega'_0 t' + n\omega'_H \tau')} \quad (23)$$

и отличающийся от (18) значением частоты  $\omega'_0$ . Нетрудно видеть, что частоты и постоянные распространения нормальной волны в системе  $K$  и  $K'$  связаны формулами

$$k'_0 = \chi \left( k_0 - \frac{\omega}{c} \beta_{\parallel} \right), \quad \omega'_0 = \chi(\omega - k_0 v_{\parallel}), \quad (24)$$

в то время как аналогичные выражения для волны (6) с постоянной распространения  $k$  имеют вид:

$$k' = \chi \left( k - \frac{\omega}{c} \beta_{\parallel} \right), \quad \omega' = \chi(\omega - k v_{\parallel}). \quad (24a)$$

Ограничимся, как и в случае винтового пучка, достаточно слабыми токами, когда изменение постоянных распространения нормальных волн, обусловленное присутствием электронного потока, мало:

$$\omega' - \omega'_0 = -\chi v_{\parallel} (k - k_0) = -\chi v_{\parallel} k_0 \delta, \quad |\delta| \ll 1, \quad (25)$$

и допустим, что для одной из нормальных волн („синхронной“) при определенном целом  $p$  выполнено условие резонанса:

$$\omega'_0 + p\omega'_H = \chi(\omega - k_0 v_{\parallel} + p\omega'_H \chi^{-1}) = \chi v_{\parallel} k_0 \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll 1. \quad (26)$$

При этих условиях можно искать поправки к постоянной распространения синхронной волны, пренебрегая влиянием волн других типов. Подставляя (18), (19) и (22) в (2), принимая во внимание (23)–(26) и сохраняя лишь члены порядка  $\delta^{-1}(\delta - \varepsilon)^{-2}$ , получим дисперсионное уравнение для волновода с трохойдальным электронным пучком в следующем виде:

$$\begin{aligned} k - k_0 &= -\frac{e}{m' v_{\parallel} N} \frac{\omega(1 - \beta_{\parallel}^2)^{3/2}}{[\omega - k v_{\parallel} + p\omega'_H(1 - \beta_{\parallel}^2)^{1/2}]^2} \times \\ &\times \{ |G'_{x'p}|^2 - \beta_{\perp}^2 |G'_{\theta'p}|^2 + O_1(\varepsilon, \delta) \}. \end{aligned} \quad (27)$$

Уравнение (27) полностью аналогично (15). Более того, можно показать, что соотношение (22) справедливо и для винтового пучка; отсюда следует, что дисперсионное уравнение (27) пригодно для волноводов как с трохоидальными, так и с винтовыми электронными пучками, если под  $G'_x$  понимать компоненту силы Лорентца в системе  $K'$ , параллельную постоянному магнитному полю  $H'_0$ , а под  $G'_\theta$  — азимутальную компоненту в плоскости, перпендикулярной  $H'_0$ . Выражая все величины в правой части (27) через их значения в лабораторной системе отсчета  $K$ , нетрудно убедиться, что для винтового пучка (27) совпадает с (15). В случае трохоидального пучка переход в  $K$  нецелесообразен, так как приводит к весьма громоздким выражениям.

#### 4. Волновод со слабо релятивистским трохоидальным пучком.

Как уже было отмечено\* в предыдущем разделе, остаточный член  $O_1(\epsilon, \delta)$  при  $\beta^2 \ll 1$  может содержать слагаемые того же порядка, что и выписанные в (27) в явном виде. Повторяя вывод дисперсионного уравнения для этого случая и удерживая члены, которые могут быть порядка  $\delta^{-1}(\delta - \epsilon)^{-2}\beta^2$  и  $\delta^{-1}(\delta - \epsilon)^{-1}$ , получим уравнение, в точности совпадающее с (16), но с заменой  $G_{zp} \rightarrow G_{xp}$ ,  $G_{\theta p} \rightarrow G_{\theta'p}$ ,  $G_{rp} \rightarrow G_{r'p}$  ( $r'$  и  $\theta'$  — полярные координаты в плоскости  $yz$ ).

В ряде случаев более удобной оказывается запись правой части этого уравнения через проекции лорентцовой силы в прямоугольной неподвижной системе координат. Производя необходимые выкладки, получим:

$$\begin{aligned} \delta(\delta - \epsilon)^2 = & -\frac{I_0}{2U_0} \frac{k_z}{k_0^3 N} \left\{ |G_{xp}|^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{r_0 \omega_H}{c} \right)^2 |i(G_{y(p-1)} - G_{y(p+1)}) + \right. \\ & + G_{z(p-1)} + G_{z(p+1)}|^2 + (\delta - \epsilon) \frac{k_0}{2k_H} [ -4 \operatorname{Im}(G_{zp} G_{yp}^*) + |G_{z(p-1)}|^2 + \\ & + 2 \operatorname{Im}(G_{z(p-1)} G_{y(p-1)}^*) + |G_{y(p-1)}|^2 - |G_{z(p+1)}|^2 + \\ & \left. + 2 \operatorname{Im}(G_{z(p+1)} G_{y(p+1)}^*) - |G_{y(p+1)}|^2 ] \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$G_p = G_{xp} X_0 + G_{yp} Y_0 + G_{zp} Z_0 = \frac{\omega_H}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g e^{-ik_0[z_0(\tau) - v_0 \tau]} d\tau.$$

Сходство дисперсионных уравнений показывает, что общие свойства систем с винтовыми и трохоидальными электронными потоками одинаковы; в частности, на волноводы с трохоидальными пучками могут быть распространены замечания, сделанные в разделе 2, относительно характера корней дисперсионного уравнения при сильных и слабых токах (взаимодействие типа „О“ и типа „М“), условий самовозбуждения, усиления и т. д. Примеры теоретического и экспериментального исследования некоторых систем с трохоидальными пучками можно найти в работе [15].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 441 (1959); 2, 450 (1959).
2. В. М. Бокков, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 831 (1959).
3. В. М. Бокков, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 860 (1960).
4. R. H. Pantell, Proc. of the Symp. on millimetre waves, Politechn. press, Brooklyn, New-York, 1959.

5. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 836 (1959).
6. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, 39, 326 (1960).
7. А. В. Гапонов, В. В. Железняков, Доклад на XIII Генеральной Ассамблее URSI, Лондон, сентябрь 1960 г.
8. Л. А. Вайнштейн. Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
9. В. Д. Шафранов, Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, изд. АН СССР, М., 416 (1958).
10. Д. Р. Пирс, Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1952.
11. M. Muller, Proc. IRE, 42, 1651 (1954).
12. R. Wagnecke, Proc. IRE, 38, 486 (1950).
13. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ДАН СССР, 56, 583 (1947); В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 14 (1959).
14. В. Смайт, Электростатика и электродинамика, ИЛ, М., 1954.
15. И. И. Антаков, В. М. Боков, Р. П. Васильев, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 1033 (1960).
16. D. A. Sturrock, Phys. Rev., 112, 1488 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
29 декабря 1960 г.

## RELATIVISTIC DISPERSION EQUATION FOR WAVEGUIDE SYSTEMS WITH HELICAL AND TROCHOIDAL ELECTRON BEAMS

*A. V. Gaponov*

The dispersion equation is obtained for a wave propagation in waveguides with relativistic helical or trochoidal beams. The significance is elucidated of relativistic effects in the interaction between the beams and slow or fast electromagnetic waves.