ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IV, № 3 РАДИОФИЗИКА *1961*

О ШУМАХ ВОЗБУЖДЕННОЙ СРЕДЫ С ДВУМЯ УРОВНЯМИ

В. С. Троицкий, В. Б. Цареградский

Дается обобщение теоремы Каллена и Велтона на случай стационарно возбужденной среды с двумя уровнями и рассматриваются условия ее применимости для расчета шумов молекулярных усилителей.

В практике молекулярных генераторов и усилителей в качестве диэлектрика используется возбужденная среда, причем контур генератора или усилителя может быть представлен состоящим из конденсатора с возбужденной средой и индуктивности. Возникает вопрос о величине спектральной плотности ЭДС шумов, генерируемой активной средой в эквивалентном конденсаторе. В ряде работ [2–5] для расчета таких шумов применяется формула Найквиста или (в общем случае) формула Каллена и Велтона, причем за температуру возбужденной среды берется некоторая эффективная отрицательная температура. Однако, насколько нам известно, законность подобного расчета нигде строго не доказана, хотя, может быть, в какой-то мере и аргументирована в [2]. В работе [1] сделана попытка строгого обоснования, но автор пришел к неверному результату. Поэтому нам представляется целесообразным дать вывод формулы Каллена и Велтона для стационарной возбужденной среды с двумя уровнями и установить границы ее возможного применения для расчета шумов молекулярных усилителей*.

Предположим, что имеется система, на которую действует приложенная извне сила

$$V = V_0 \sin(\omega t) = \frac{1}{2}\,[\tilde{V}_0 e^{-i\omega t} + \tilde{V}_0{}^* e^{i\omega t}];\quad \tilde{V}_0 = iV_0.$$

Для дальнейшего конкретизируем систему и сделаем ряд упрощающих предположений. Будем рассматривать систему молекул только с двумя уровнями, состоящую из N_+ молекул на верхнем и N_- молекул на нижнем уровнях. Предположим, во-первых, что расстояние между молекулами в системе таково, что корреляция в актах излучения и поглощения отдельных молекул отсутствует, т. е. можно считать их излучение некогерентным [8,9], и, во-вторых, что эта система стационарна. В молекулярном усилителе на аммиаке подобной средой, удовлетворяющей второму и, по-видимому (как это показывает эксперимент), первому требованию, является пучок активных молекул, пролетающих через резонатор.

Следуя работам [12,14], запишем уравнение Шредингера для волновой функции ψ в виде:

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}_0\psi + V_0 \sin(\omega t)\,\hat{Q}\psi, \tag{1}$$

* Как стало известно авторам после написания этой статьи, аналогичная работа выполнена Бункиным [20].

где $\hat{H}_0$—невозмущенный гамильтониан системы, $V\hat{Q}$—гамильтониан возмущения, а $\hat{Q}$—оператор, характеризующий среду. В отсутствие возмущения имеем систему собственных значений энергии системы E_n согласно

$$H_0\psi_n = E_n\psi_n.$$

Если в начальный момент система находилась в состоянии с энергией E_n, то вероятность последующего перехода в единицу времени с изменением энергии на величину кванта $\hbar\omega$ [10,11,16] будет равна

$$W = \frac{\pi V_0^2}{2\hbar} \{\rho (E_n + \hbar\omega) | \langle E_n + \hbar\omega | \hat{Q} | E_n \rangle |^2 + + | \langle E_n - \hbar\omega | \hat{Q} | E_n \rangle |^2 \rho (E_n - \hbar\omega)\}. \tag{2}$$

Здесь и далее $\langle E_n \pm \hbar\omega | \hat{Q} | E_n \rangle$ — матричный элемент оператора $\hat{Q}$, взятый по состояниям (E_n; $E_n \pm \hbar\omega$), а $\rho (E_n \pm \hbar\omega)$—плотность состояний с энергией $E_n \pm \hbar\omega$. Два члена в приведенном выражении соответствуют переходам с поглощением и излучением кванта системой. Для того, чтобы получить энергию, поглощаемую из источника в единицу времени на частоте ω, необходимо взять разность обоих членов и умножить (2) на $\hbar\omega$. В результате получим:

$$P' (\omega) = \frac{\pi\hbar\omega V_0^2}{2\hbar} \{ | \langle E_n + \hbar\omega | \hat{Q} | E_n \rangle |^2 \rho (E_n + \hbar\omega) - - | \langle E_n - \hbar\omega | \hat{Q} | E_n \rangle |^2 \rho (E_n - \hbar\omega)\}. \tag{3}$$

В практически интересных случаях уровни энергии системы E_n имеют вполне определенную ширину. Поэтому нужно усреднить (3) по всевозможным начальным состояниям $E_{n\alpha}$ уровня E_n с весом $f(E_{n\alpha})$. Вводя плотность начальных состояний $\rho (E_{n\alpha})$, найдем среднюю мощность, поглощаемую системой, в виде:

$$P (\omega) = \frac{\pi\hbar\omega V_0^2}{2\hbar} \int\limits_{E_{n\alpha}} f (E_{n\alpha}) \rho (E_{n\alpha}) \{| \langle E_{n\alpha} + \hbar\omega | \hat{Q} | E_{n\alpha} \rangle |^2 \rho (E_{n\alpha} + \hbar\omega) - - | \langle E_{n\alpha} - \hbar\omega | \hat{Q} | E_{n\alpha} \rangle |^2 \rho (E_{n\alpha} - \hbar\omega)\} \, dE_{n\alpha}. \tag{4}$$

Введем обозначения

$$C_+ = \frac{\pi V_0^2}{2\hbar} \int\limits_{E_{n\alpha}} f (E_{n\alpha}) \rho (E_{n\alpha}) | \langle E_{n\alpha} + \hbar\omega | \hat{Q} | E_{n\alpha} \rangle |^2 \rho (E_{n\alpha} + \hbar\omega) \, dE_{n\alpha};$$

$$C_- = \frac{\pi V_0^2}{2\hbar} \int\limits_{E_{n\alpha}} f (E_{n\alpha}) \rho (E_{n\alpha}) | \langle E_{n\alpha} - \hbar\omega | \hat{Q} | E_{n\alpha} \rangle |^2 \rho (E_{n\alpha} - \hbar\omega) \, dE_{n\alpha}. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что C_+ и C_- суть вероятности индуцированного поглощения и излучения кванта $\hbar\omega$ системой соответственно. Принимая во внимание равенство вероятностей

$$C_-/N_+ = C_+/N_- \tag{6}$$

индуцированного испускания и поглощения кванта одной молекулой [10, 11] и равенство (5), будем иметь вместо (4)

$$P(\omega) = \hbar\omega C_{+}\,(1 - N_{+}/N_{-}). \tag{7}$$

С другой стороны, поглощенная из поля мощность может быть выражена через отклик системы на возмущающую силу. Наличие возмущения, как известно [14], приводит к отличному от нуля среднему значению оператора $\hat{Q}$ и пропорциональному с точностью до первого порядка теории возмущения величине этой силы:

$$\overline{\hat{Q}} = \frac{1}{2}\,(\alpha \tilde{V}_0 e^{-i\omega t} + \alpha^* \tilde{V}_0^* e^{i\omega t}), \tag{8}$$

где $\alpha = \alpha' - i\alpha''$ — коэффициент пропорциональности, характеризующий систему. Пользуясь (8), можно выразить изменение внутренней энергии U системы через характеристику α [14]:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{dU}{dt} = \overline{\frac{\partial \hat{H}}{\partial t}} = \frac{\partial V}{\partial t}\,\overline{\hat{Q}} = \\ &= -\frac{i\omega}{2}\,(\tilde{V}_0 e^{-i\omega t} - \tilde{V}_0^* e^{i\omega t})\,\overline{\hat{Q}} = \frac{\omega}{2}\,\alpha'' V_0^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Сравнивая (7) и (9), находим:

$$\begin{aligned} \alpha''(\omega) = \pi\left(1 - \frac{N_{+}}{N_{-}}\right) \int\limits_{E_{n\alpha}} f(E_{n\alpha})\,\rho(E_{n\alpha})\,|\langle E_{n\alpha} + \\ + \hbar\omega\,|\,\hat{Q}\,|\,E_{n\alpha}\rangle|^2\,\rho(E_{n\alpha} + \hbar\omega)\;dE_{n\alpha}. \end{aligned} \tag{10}$$

В отличие от $\overline{\hat{Q}}$ дисперсия $\overline{\hat{Q}^2}$ оператора $\hat{Q}$ не равна нулю в отсутствие внешней силы, что связано с наличием флюктуаций в системе. Используя правило перемножения матриц, выразим дисперсию через матричные элементы оператора $\hat{Q}$ как

$$\begin{aligned} \overline{\hat{Q}^2_{E_{n\alpha}}} = \langle E_{n\alpha}\,|\,\hat{Q}\,|^2\,E_{n\alpha}\rangle = \sum_{\hbar\omega}\{\langle E_{n\alpha} + \\ + \hbar\omega\,|\,\hat{Q}\,|\,E_{n\alpha}\rangle\;\langle E_{n\alpha}\,|\,\hat{Q}\,|\,E_{n\alpha} + \hbar\omega\rangle + \\ + \langle E_{n\alpha} - \hbar\omega\,|\,\hat{Q}\,|\,E_{n\alpha}\rangle\;\langle E_{n\alpha}\,|\,\hat{Q}\,|\,E_{n\alpha} - \hbar\omega\rangle\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Заменяя сумму на интеграл и принимая во внимание эрмитовость оператора $\hat{Q}$, перепишем (11) в виде

$$\begin{aligned} \overline{\hat{Q}^2_{E_{n\alpha}}} = \int\limits_{\omega} \hbar\,\{|\langle E_{n\alpha} + \hbar\omega\,|\,\hat{Q}\,|\,E_{n\alpha}\rangle|^2\,\rho(E_{n\alpha} + \hbar\omega) + \\ + |\langle E_{n\alpha} - \hbar\omega\,|\,\hat{Q}\,|\,E_{n\alpha}\rangle|^2\,\rho(E_{n\alpha} - \hbar\omega)\}\;d\omega. \end{aligned} \tag{12}$$

Усредненная дисперсия $\overline{\hat{Q}^2}$ найдется интегрированием по начальным уровням $E_{n\alpha}$:

$$\overline{\hat{Q}^2} = \int\limits_{\omega}\int\limits_{E_{n\alpha}} \hbar\rho(E_{n\alpha}) f(E_{n\alpha}) \{ |\langle E_{n\alpha} + \hbar\omega | \hat{Q} | E_{n\alpha}\rangle|^2 \rho(E_{n\alpha} + \hbar\omega) + \\ + |\langle E_{n\alpha} - \hbar\omega | \hat{Q} | E_{n\alpha}\rangle|^2 \rho(E_{n\alpha} - \hbar\omega)\} \, d\omega \, dE_{n\alpha}. \tag{13}$$

Учитывая (5), (6) и (10), получим:

$$\overline{\hat{Q}^2} = \int\limits_{\omega} \frac{\pi}{\hbar} \left[\frac{1 + \frac{N_+}{N_-}}{1 - \frac{N_+}{N_-}} \right] \alpha''(\omega) \, d\omega. \tag{14}$$

Вводя эффективную температуру системы $T_{\text{эфф}}$, определяемую соотношением

$$N_+/N_- = e^{-\hbar\omega/kT_{\text{эфф}}}, \tag{15}$$

и переходя к спектральным плотностям, найдем для $\overline{\hat{Q}^2}(\omega)$ выражение вида

$$\overline{\hat{Q}^2}(\omega) = \frac{2\alpha''(\omega)}{\pi\omega} \Theta(\omega, T_{\text{эфф}}), \tag{16}$$

где

$$\Theta(\omega, T_{\text{эфф}}) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT_{\text{эфф}}} - 1}.$$

Для среды, находящейся в тепловом равновесии, $T_{\text{эфф}}$ равна ее истинной (кинетической) температуре и (16) переходит в формулу Каллена и Велтона. Для возбужденной среды, т. е. среды с нарушенным равновесным распределением N_+ и N_- молекул по рассматриваемым уровням, должна быть взята эффективная температура $T_{\text{эфф}}$, определяемая из (15).

На рис. 1 приведены кривые зависимости $T_{\text{эфф}}$, $\Theta(\omega, T_{\text{эфф}})$ и $\alpha''(\omega)\,\Theta(\omega, T_{\text{эфф}})$ от отношения N_+/N_-. Из кривых видно, что при $N_+ > N_-$ эффективная температура отрицательна; если $N_- = 0$ (полностью возбужденная среда), то $T_{\text{эфф}} = -0$, $\Theta = -\hbar\omega/2$, но поскольку $\alpha''(\omega) < 0$, то (как и должно быть) $\overline{\hat{Q}^2}(\omega) > 0$.

Заметим, что в случае $T_{\text{эфф}} = -0$ (все молекулы на верхнем уровне), как и для абсолютного нуля истинной температуры (все молекулы на нижнем уровне), флюктуации определяются только флюктуациями вакуума.

Проведенный расчет показывает, что для двухуровневой среды флюктуационно-диссипационная теорема Каллена и Велтона справедлива и для некогерентных флюктуаций при любом распределении N_+ и N_-. Необходимо отметить, что в случае среды со многими близлежащими уровнями простого соотношения типа (15) для эффективной температуры не получается. При этом каждый близлежащий уровень дает некоторый вклад в шумы, пропорциональный своей температуре.

Применим полученное соотношение для нахождения флюктуаций в электрических системах, содержащих среду рассматриваемого типа. Если предположить, что в замкнутой электрической системе течет ток $\vec{I}$ под действием ЭДС $\vec{\mathcal{E}}$, то мощность, диссипирующая в системе,

$$P = \vec{I}\vec{\mathcal{E}},$$

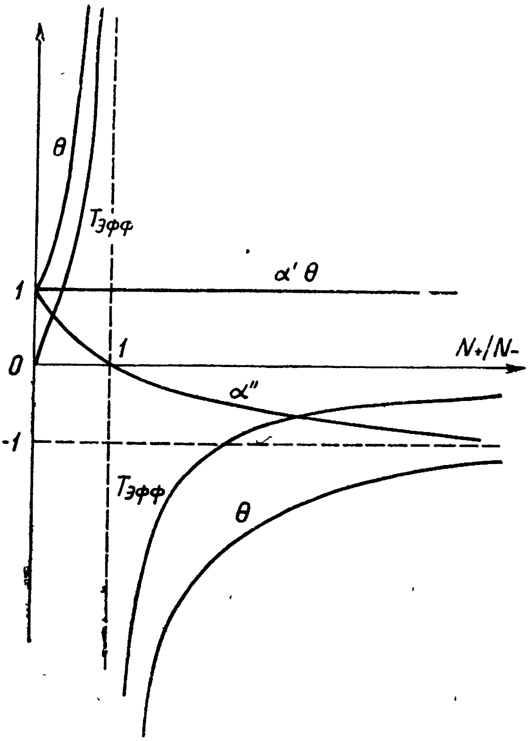

Рис. 1 График зависимости $T_{эфф}$ (в единицах $\hbar\omega/k$), Θ (ω, $T_{эфф}$) (в единицах $\hbar\omega/2$), α'' и $\alpha''\Theta$ (в безразмерных единицах) от отношения N_+/N_-.

где стрелка указывает на комплексные величины. Сравнивая последнее с (9), находим:

$$\vec{\mathcal{E}}(\omega) = \frac{dV}{dt}; \quad \vec{I}(\omega) = \overline{\hat{Q}}.$$

Обозначим через $\vec{Z}(\omega) = R(\omega) + if(\omega)$ импеданс системы. Используя (8) и (9), найдем:

$$\frac{\vec{I}}{\vec{\mathcal{E}}} = \frac{1}{\vec{Z}(\omega)} = \frac{\alpha \tilde{V}_0 e^{-i\omega t} + \alpha^* \tilde{V}_0^* e^{i\omega t}}{-i\omega\left[\tilde{V}_0 e^{-i\omega t} - \tilde{V}_0^* e^{i\omega t}\right]},$$

откуда

$$\alpha''(\omega) = \omega R(\omega) \left| Z(\omega) \right|^{-2}. \tag{17}$$

Подставив эти соотношения в (16), получим:

$$\overline{\mathcal{E}^2}(\omega) = \frac{2}{\pi} R(\omega)\, \Theta(\omega, T_{эфф}). \tag{18}$$

При $k \left| T_{эфф} \right| \gg \hbar\omega$ выражение (18) переходит в формулу Найквиста:

$$\overline{\mathcal{E}^2}(\omega) = \frac{2}{\pi} R(\omega)\, k T_{эфф}.$$

Остановимся несколько подробнее на молекулярном усилителе пучкового типа. Как указывалось, полученная формула справедлива для некогерентного излучения. Последнее всегда имеет место лишь при расстояниях между молекулами более длины волны; поэтому для реальных колебательных систем порядка нескольких длин волн, в которых размещена рассматриваемая среда, полученное выражение, вообще говоря, неприменимо. Однако когерентные шумы интенсивны лишь в области $T_{\text{эфф}} = \pm\infty$ $(N_+/N_- \simeq 1)$ [8, 9] и, по-видимому, достаточно малы в практически интересных случаях $T_{\text{эфф}} = -0$ $(N_+/N_- \to \infty)$, что подтверждается экспериментальными результатами [18, 19].

Аппроксимируем резонатор молекулярного усилителя контуром с одной степенью свободы, в конденсаторе которого находится диэлектрик с электрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$. Сопротивление такого конденсатора

$$\frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C_0 \varepsilon} = \frac{\varepsilon''}{\omega C_0 |\varepsilon|^2} - \frac{i\varepsilon'}{\omega C_0 |\varepsilon|^2},$$

где C_0 — емкость в отсутствие диэлектрика.

Наличие диэлектрика приводит к появлению активной составляющей сопротивления

$$R_g(\omega) = \varepsilon''(\omega)/\omega C_0 |\varepsilon|^2,$$

которое отрицательно при $N_+ > N_-$ [17]. Согласно доказанной теореме спектральная плотность шума отрицательного сопротивления

$$\overline{\mathcal{E}^2}(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon''(\omega)}{\omega C_0 |\varepsilon|^2} \Theta(\omega, T_{\text{эфф}}) \tag{19}$$

или

$$\overline{\mathcal{E}^2}(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon''(\omega)}{\omega C_0 |\varepsilon|^2} kT_{\text{эфф}}$$

при $k|T_{\text{эфф}}| \gg \hbar\omega$. Если взять конкретное выражение для ε [17], то из (19) получается соотношение, совпадающее с использованным в работах [3—5].

ЛИТЕРАТУРА

1. M. W. Muller, Phys. Rev., **106**, 8 (1957).
2. R. V. Pound, Ann. Phys., **1**, 24 (1957).
3. J. P. Gordon, L. D. White, Proc. IRE, **46**, 1588 (1958).
4. M. L. Stich, J. Appl. Phys., **29**, 782 (1958).
5. J. C. Helmer, M. W. Muller, IRE Trans., M. T. T.—**6**, 210 (1958).
6. M. W. P. Stranberg, Phys. Rev., **106**, 617 (1957).
7. J. Weber, Phys. Rev., **108**, 537 (1957).
8. R. H. Dicke, Phys. Rev., **93**, 99 (1954).
9. В. М. Файн, УФН, **64**, 273 (1958).
10. Л. Шифф, Квантовая механика, ИЛ, М., 1957.
11. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, Л., 1956.
12. H. B. Callen, T. A. Welton, Phys. Rev., **83**, 34 (1951).
13. E. M. Purcell, Phys. Rev., **69**, 681 (1946).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957.
15. Ф. В. Бункин, А. Н. Ораевский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **2**, 181 (1959).
16. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Квантовая механика, ГИТТЛ, М., 1948.
17. Н. Г. Басов и А. Н. Прохоров, УФН, **47**, 485 (1955).
18. L. E. Alsop, J. A. Giorgmaine, C. H. Townes, T. C. Wang, Phys. Rev., **107**, 1450 (1957).
19. J. C. Helmer, Phys. Rev., **107**, 902 (1957).
20. Ф. В. Бункин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **4**, 493 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 12 ноября 1960 г.

ON NOISES OF A TWO-LEVEL EXCITED MEDIUM

V. S. Troitsky, V. B. Tsaregradsky

A generalization is given of Callen's and Welton's theorem in the case of a stationary two-level excited medium. Conditions are considered for its application to the calculation of molecular amplifiers noises.