ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IV, № 3 *РАДИОФИЗИКА* *1961*

О ПОНЯТИИ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМ

Ф. В. Бункин

Дается обобщение понятия эффективной температуры, строго определенной только для случая двухуровневых квантовых систем, на случай сколь угодно сложных систем, находящихся в неравновесном, но стационарном состоянии. Так же, как и в частном случае двухуровневых систем, величина эффективной температуры определяет интенсивность флюктуаций в системе. Специально обсуждаются системы с отрицательными потерями и отрицательными эффективными температурами.

1. В последнее время в квантовой радиофизике в связи с теоретическими исследованиями систем, обладающих отрицательными энергетическими потерями (квантовые усилители и генераторы), стало широко использоваться понятие отрицательной эффективной температуры $T_{эфф}$ квантовой системы. Это понятие имеет строгое определение лишь применительно к так называемым двухуровневым системам. Под последними понимается идеальный газ*, состоящий из таких частиц, которые при заданной интересующей нас частоте ω обладают лишь двумя энергетическими уровнями ε_1 и ε_2, такими, что $\varepsilon_2-\varepsilon_1=\hbar\omega$. Для двухуровневых систем эффективная температура, по определению, равна [1–7]

$$T_{эфф} = \frac{\hbar\omega}{k} \Big/ \ln \frac{\overline{N}_1 g_2}{\overline{N}_2 g_1}, \tag{1}$$

где k—постоянная Больцмана, а $\overline{N}_i$ и g_i—соответственно средняя населенность и статистический вес (степень вырождения) уровня ε_i.

Известно, что величина $T_{эфф}$, определяемая формулой (1), носит вспомогательный характер, но чрезвычайно удобна при расчетах собственных флюктуаций (шумов) в квантовых усилителях и генераторах. Удобство заключается в том, что интенсивность этих флюктуаций на частоте ω, обусловленных, как известно, спонтанным излучением частиц системы, может быть легко оценена путем применения флюктуационно-диссипационной теоремы (обобщенной формулы Найквиста) [8–10], в которую необходимо подставить вместо действительной температуры T эффективную температуру $T_{эфф}$[2–7]. Так же, как и в случае термодинамически равновесных систем, где интенсивность флюктуаций на частоте ω определяется поглощательными свойствами системы на этой частоте и ее абсолютной температурой T, в случае двухуровневых систем, обладающих отрицательной эффективной температурой, интенсивность флюктуаций определяется величиной (точнее, модулем) этой температуры и величиной, характеризующей отрицательные потери. Введение понятия эффективной температуры системы, являющегося самим по себе вспомогательным, оправдано именно с

* Под идеальным газом здесь понимается, как всегда, всякая система слабо взаимодействующих «частиц», например, система спинов парамагнитного кристалла.

этой точки зрения, т. е. с точки зрения анализа собственных флюктуаций в такой системе.

Если для двухуровневых систем величина $T_{эфф}$ имеет ясный смысл, определяемый формулой (1) (хотя далее и будет показано, что такое определение носит частный характер), то в общем случае, когда система либо не представляет собою идеального газа, либо представляет идеальный газ, составленный из таких частиц, которые имеют много пар энергетических уровней (а не одну), удовлетворяющих условию $(\varepsilon_i - \varepsilon_k) = \hbar\omega$, понятие ее эффективной температуры не определено. Тем не менее, и применительно к таким системам это понятие используется (см., например, [11]), однако лишь в качественном смысле.

Цель настоящего сообщения состоит в том, чтобы дать последовательное количественное определение эффективной температуры $T_{эфф}$ для сколь угодно сложной квантовой системы, находящейся в произвольном стационарном (т. е. неизменном во времени), вообще говоря, термодинамически неравновесном состоянии. Вводимое нами понятие эффективной температуры в определенном смысле обобщает известное понятие отрицательной абсолютной температуры, которое применимо к системам с ограниченным (сверху) энергетическим спектром (например, спиновая система в магнитном поле) [12,13]. Для двухуровневых систем наше определение $T_{эфф}$ при некоторых дополнительных условиях (см. ниже) переходит в определение (1). При переходе системы в состояние термодинамического равновесия эффективная температура $T_{эфф} = T$*.

2. При обобщении понятия эффективной температуры $T_{эфф}$ системы, находящейся в произвольном стационарном состоянии, естественно исходить из требования того, чтобы так же, как и в случае двухуровневых систем, величина $T_{эфф}$ вместе с другой величиной, характеризующей поглощение (положительное или отрицательное) энергии в системе, полностью определяли бы спектральную интенсивность стационарных флюктуаций в ней. Короче говоря, эффективную температуру данной неравновесной системы необходимо определить так, чтобы флюктуации в ней описывались флюктуационно-диссипационной теоремой в своей обычной форме, при условии замены действительной температуры T на величину $T_{эфф}$. Этот подход нуждается, однако, в одном уточнении, связанном по существу с упомянутым выше вспомогательным характером понятия эффективной температуры.

Флюктуационно-диссипационная теорема, сформулированная для термодинамически равновесных систем [8—10], дает значение спектральной интенсивности $(x^2)_\omega$ равновесных флюктуаций определенной физической величины x:

$$(x^2)_\omega = \frac{\hbar\alpha''(\omega)}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}\right\} \equiv \frac{\hbar\alpha''}{2\pi}\,\mathrm{cth}\,\frac{\hbar\omega}{2kT}, \tag{2}$$

где T—абсолютная температура системы, не зависящая ни от выбора частоты ω, ни от выбора физической величины x, а $\alpha''(\omega)$—мнимая часть соответствующего величине x адмитанса $\alpha(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega)$, характеризующая потери энергии в системе. Таким образом, для термодинамически равновесной системы значение ее абсолютной температуры T определяет (согласно (2)) спектральную интенсивность

* При подготовке настоящей статьи к печати я был любезно ознакомлен В. С. Троицким и В. Б. Цареградским с рукописью их статьи [16], посвященной этому же вопросу.

флюктуаций любой относящейся к данной системе физической величины (если, разумеется, задана соответствующая функция $\alpha''(\omega)$).

Заранее ясно, что такой универсальностью, вообще говоря, не будет обладать эффективная температура $T_{эфф}$, т. е. при заданном (неравновесном) состоянии системы значение $T_{эфф}$ будет в общем случае зависеть как от выбора физической величины x, так и от частоты ω, на которой рассматривается интенсивность флюктуаций $(x^2)_\omega$. Можно назвать лишь один класс преобразований величин $y = Lx$, относительно которого величина $T_{эфф}$ заведомо инвариантна—это линейные интегро-дифференциальные преобразования (L—линейный интегро-дифференциальный оператор). То, что такие преобразования действительно оставляют величину $T_{эфф}$ неизменной, следует из того, что спектральные интенсивности флюктуаций $(y^2)_\omega$ и $(x^2)_\omega$ связаны между собой известным соотношением

$$(y^2)_\omega = |K(i\omega)|^2 (x^2)_\omega, \tag{3}$$

где $K(i\omega) = \exp(-i\omega t) L \exp(i\omega t)$. На основании (2) и (3) заключаем, что преобразованию $y = Lx$ соответствуют преобразования $\alpha_y'' = |K|^2 \alpha_x''$ и $T_{эфф\ y} = T_{эфф\ x}$.

Таким образом, нельзя говорить об эффективной температуре данной неравновесной системы, не отмечая, к какой физической величине она относится. На эту особенность эффективной температуры не обращалось внимания, по-видимому, потому, что это понятие использовалось только применительно к специальному вопросу об электромагнитных флюктуациях в квантовых усилителях и генераторах. При этом величина x выбиралась автоматически—это дипольный момент P (электрический или магнитный) используемого молекулярного пучка или кристалла. Спектральная интенсивность флюктуаций этого дипольного момента $(P^2)_\omega$ определяет спонтанное излучение возбужденных молекул в таких системах, т. е. шум в квантовых усилителях и генераторах*. В дальнейшем, когда мы будем говорить об эффективной температуре системы с отрицательными потерями, мы всегда будем иметь в виду, что нас интересуют вопросы спонтанного излучения в такой системе, а следовательно, эффективная температура определена по отношению к ее дипольному моменту; при этом под величиной $\alpha(\omega)$ следует понимать поляризуемость системы $\varkappa(\omega) = \varkappa'(\omega) + i\varkappa''(\omega)$. Однако большинство полученных ниже результатов (во всяком случае до раздела 5) имеет общий характер.

3. Для того, чтобы получить явное выражение для величины $T_{эфф}$ через параметры, характеризующие систему и ее состояние, необходимо, в свою очередь, получить явное выражение для спектральной интенсивности флюктуаций $(x^2)_\omega$ какой-то определенной физической величины x, относящейся к данной системе, через интересующие нас параметры. Затем, представив это выражение в форме (2), мы найдем искомое представление для $T_{эфф}$.

Рассмотрим некоторую систему, находящуюся в неравновесном, но стационарном состоянии. Мы можем определить это состояние, рассматривая его как смесь различных квантовых стационарных состояний с заданными вероятностями w_n каждого квантового состояния n. При термодинамическом равновесии $w_n = w_n^0 \equiv C \exp(-E_n/kT)$ —

* То, что в данном случае эффективная температура $T_{эфф}$ определяется по отношению к дипольному моменту системы, является следствием того, что используются дипольные переходы молекул. Если бы использовались, например, молекулярные квадрупольные переходы, то в качестве величины x необходимо было бы выбрать квадрупольный момент образца.

распределение Гиббса. Пусть относящаяся к данной системе величина x испытывает флюктуации (стационарные во времени), причем среднее ее значение в отсутствие внешних воздействий на систему (отличных от тех, которые обусловливают данную неравновесность состояния) равно нулю. Средняя спектральная интенсивность $(x^2)_\omega$ этих флюктуаций, очевидно, равна

$$(x^2)_\omega = \sum_n w_n (x^2)_{\omega n}, \qquad \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2)_\omega \, d\omega, \tag{4}$$

где $(x^2)_{\omega n}$—средняя спектральная интенсивность в n-ом квантовом состоянии системы. Согласно [10] (формула (87.8)), имеем:

$$(x^2)_\omega = \frac{1}{2} \sum_m |x_{nm}|^2 \{ \delta(\omega + \omega_{nm}) + \delta(\omega + \omega_{mn}) \}, \tag{5}$$

где x_{nm}—матричный элемент оператора $\hat{x}$ относительно n-го и m-го стационарных состояний с энергиями E_n и E_m, $\omega_{nm} = (E_n - E_m)/\hbar$.

Определим теперь необходимую нам для дальнейшего мнимую часть $\alpha''(\omega)$ адмитанса системы $\alpha(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega)$, соответствующего величине x*. Аналогично (4) имеем:

$$\alpha''(\omega) = \sum_n w_n \alpha''_n(\omega), \tag{6}$$

где $\alpha''_n(\omega)$ — мнимая часть адмитанса системы в n-ом квантовом состоянии. Согласно [10] (формула (87.15)),

$$\alpha''_n(\omega) = \frac{\pi}{\hbar} \sum_m |x_{nm}|^2 \{ \delta(\omega - \omega_{nm}) - \delta(\omega + \omega_{mn}) \}. \tag{7}$$

Содержание флюктуационно-диссипационной теоремы для термодинамически равновесных систем заключается в том, что при $w_n = w_n^0 \equiv C \exp(-E_n/kT)$ между величинами $(x^2)_\omega$ и $\alpha''(\omega)$, определяемыми формулами (4)—(7), устанавливается универсальное соотношение (2). Нашей задачей будет установить соотношение между этими величинами, не предполагая w_n гиббсовским распределением.

Будем рассматривать величины $(x^2)_\omega$ и $\alpha''(\omega)$ при $\omega > 0$ $[(x^2)_{-\omega} = (x^2)_\omega,\ \alpha''(-\omega) = -\alpha''(\omega)]$. Тогда формулы (5) и (7) можно преобразовать, учитывая свойства δ-функций, к следующему виду:

$$\begin{aligned}(x^2)_{\omega n} = \frac{1}{2} \Bigg\{ \sum_{E_m > E_n} |x_{nm}|^2 \delta(\omega - \omega_{mn}) - \sum_{E_m < E_n} |x_{nm}|^2 \delta(\omega - \omega_{nm}) \Bigg\} + \\ + \sum_{E_m < E_n} |x_{nm}|^2 \delta(\omega - \omega_{nm});\end{aligned} \tag{8}$$

$$\alpha''_n(\omega) = \frac{\pi}{\hbar} \Bigg\{ \sum_{E_m > E_n} |x_{nm}|^2 \delta(\omega - \omega_{mn}) - \sum_{E_m < E_n} |x_{nm}|^2 \delta(\omega - \omega_{nm}) \Bigg\}. \tag{9}$$

Обозначение $E_m > E_n$ ($E_m < E_n$) под знаком суммы означает суммирование по всем состояниям m, энергия E_m которых больше (меньше) энергии E_n исходного состояния n. Сравнивая правые части (8) и (9), замечаем, что выражение, стоящее в фигурных скобках в правой ча-

---

* Физический смысл величины $\alpha(\omega)$, а также конкретные выражения для нее см. в [10], гл. XIII.

сти (8), равно $\hbar\alpha''_n(\omega)/\pi$. Если это учесть, то после умножения (8) на w_n и суммирования по всем n, на основании (4) и (6), получаем искомое соотношение

$$(x^2)_\omega = \frac{\hbar}{\pi}\alpha''(\omega)\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT_{\text{эфф}}} - 1}\right\}, \tag{10}$$

где эффективная температура $T_{\text{эфф}}$ определяется формулой

$$T_{\text{эфф}}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{k}\Bigg/\ln\frac{\sum\limits_n w_n \sum\limits_{E_m>E_n} |x_{nm}|^2\,\delta(\omega-\omega_{mn})}{\sum\limits_n w_n \sum\limits_{E_m<E_n} |x_{nm}|^2\,\delta(\omega-\omega_{nm})}. \tag{11}$$

В том случае, когда матричные элементы x_{nm} зависят только от энергий E_n и E_m, а плотность энергетических уровней достаточно велика (макроскопическое тело), выражение для $T_{\text{эфф}}$ может быть представлено в другой форме, если дополнительно предположить, что $w_n = f(E_n)$. Именно, переходя в (11) от суммирования к интегрированию, получим:

$$T_{\text{эфф}} = \frac{\hbar\omega}{k}\Bigg/\ln\frac{\int\limits_0^\infty f(E)\,|\langle E|\hat{x}|E+\hbar\omega\rangle|^2\rho(E)\,\rho(E+\hbar\omega)\,dE}{\int\limits_0^\infty f(E+\hbar\omega)\,|\langle E|\hat{x}|E+\hbar\omega\rangle|^2\rho(E)\,\rho(E+\hbar\omega)\,dE}. \tag{11a}$$

Введем величину $\Theta(\omega)$, являющуюся характерной для рассматриваемой системы энергией:

$$\Theta(\omega) = -\frac{\int\limits_0^\infty f(E)\,|\langle E|\hat{x}|E+\hbar\omega\rangle|^2\rho(E)\,\rho(E+\hbar\omega)\,dE}{\int\limits_0^\infty f'(E)\,|\langle E|\hat{x}|E+\hbar\omega\rangle|^2\rho(E)\,\rho(E+\hbar\omega)\,dE}.$$

Очевидно, что в состоянии термодинамического равновесия $\Theta(\omega)\equiv kT$. Естественно думать, что величина квантовых флюктуаций, так же, как и в случае равновесия, будет определяться отношением $\hbar\omega/\Theta(\omega)$. Действительно, предполагая, что $\hbar\omega/\Theta(\omega) \ll 1$, разложим правую часть (11а) в ряд по степеням этого отношения. Тогда

$$kT_{\text{эфф}}(\omega) = \Theta(\omega)\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{\Theta}\left[\Theta^2\frac{\int\limits_0^\infty f''(E)\,|\langle E|\hat{x}|E+\hbar\omega\rangle|^2\rho(E)\,\rho(E+\hbar\omega)\,dE}{\int\limits_0^\infty f(E)\,|\langle E|\hat{x}|E+\hbar\omega\rangle|^2\rho(E)\,\rho(E+\hbar\omega)\,dE} - 1\right] + \cdots\right\}.$$

При этом флюктуационно-диссипационная теорема (10) принимает вид:

$$(x^2)_\omega = \frac{\Theta(\omega)}{\pi\omega}\alpha''(\omega)\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{\Theta}\left[\qquad\right] + \cdots\right\},$$

где [ ] — выражение, стоящее в квадратных скобках в предыдущей формуле.

Условие на малость частоты $\hbar\omega \ll \Theta(\omega)$ является условием классичности флюктуаций. Другим возможным физическим условием малости частоты является условие квазистатичности, т. е. условие $\omega \ll 1/\tau$, где τ—характерное для системы время релаксации микропроцессов (для электронного газа, например, это—время свободного пробега). При выполнении этого условия величина Θ (так же, как и α'') перестает зависеть от частоты и равна $\Theta(0)$.

Получим выражение для $\Theta(0)$ в случае неравновесного электронного газа (плазмы), предполагая, что величиной x является плотность электрического тока; при этом величина $\alpha''(\omega)$, очевидно, равна $\omega\sigma(\omega)$, где $\sigma(\omega)$ —проводимость. Мы можем считать, что рассматриваемая нами система состоит из одного электрона, имеющего при заданной энергии $\varepsilon = mv^2/2$ среднее время свободного пробега $\tau(\varepsilon)$. Тогда $|\langle \varepsilon | \hat{\dot{x}} | \varepsilon \rangle|^2$ пропорционально энергии ε, а $\rho(\varepsilon)$ пропорционально $\tau(\varepsilon)$. При этом для $\Theta(0)$ получаем:

$$\Theta(0) = -\left\{\overline{\varepsilon\tau(\varepsilon)} \Big/ \overline{\varepsilon\tau(\varepsilon)\frac{d\ln f}{d\varepsilon}}\right\},$$

где черта сверху означает усреднение по функции распределения электронов f в пространстве скоростей.

4. Легко проверить, что при $w_n = w_n^0$ $T_{эфф} = T$, независимо от знака T. Отсюда следует, что флюктуационно-диссипационная теорема строго применима и к системам с отрицательной абсолютной температурой. Заметим, что при $T_{эфф} < 0$ всегда $\alpha''(\omega) < 0$ (это видно из формул (9) и (11)) и поэтому, пользуясь свойством нечетности функции $\operatorname{cth}\xi$, в этом случае можно написать:

$$(x^2)_\omega = \frac{\hbar}{\pi}|\alpha''(\omega)|\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{-\hbar\omega/k|T_{эфф}|} - 1}\right\} = \\ = \frac{\hbar}{2\pi}|\alpha''| \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2k|T_{эфф}|}. \tag{12}$$

Таким образом, что касается спектральной интенсивности флюктуаций в системе, то знак соответствующей (величине x) эффективной температуры $T_{эфф}$ (в частности, знак абсолютной температуры системы) не играет роли. Это утверждение следует понимать так, что при заданной величине положительных или отрицательных энергетических потерь в системе, т. е. при заданном значении $|\alpha''(\omega)|$, спектральная интенсивность $(x^2)_\omega$ определяется лишь модулем $|T_{эфф}|$ (в частности, модулем $|T|$). Этот вывод приводит, однако, к следующему парадоксу.

Рассмотрим некоторую двухуровневую систему, линейные размеры которой малы по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi c/\omega$. Если система находится в тепловом равновесии и имеет при этом абсолютную температуру T, то спектральная интенсивность I_ω ее теплового излучения, обусловленного спонтанными переходами частиц с верхнего уровня ε_2 на нижний ε_1, очевидно, равна

$$I_\omega = \hbar\omega \overline{N}_2 W_{сп} \gamma(\omega), \tag{13}$$

где $W_{сп} = (4\omega^3/3\hbar c^3)\,|p_{12}|^2 g_1$—вероятность спонтанного перехода частицы с уровня ε_2 на уровень ε_1 (p_{12} — матричный элемент дипольного момента частицы), $\gamma(\omega)$—форм-фактор линии, нормированный условием $\int\limits_0^\infty \gamma(\omega)\, d\omega = 1$.

Допустим теперь, что осуществлена инверсия населенностей в системе, т. е. система переведена в неравновесное состояние, описываемое отрицательной абсолютной температурой ($-T$). Очевидно, что спектральная интенсивность I'_ω ее некогерентного излучения в этом случае определяется выражением

$$I'_\omega = \hbar\omega \overline{N}_1 W'_{\text{сп}}\, \gamma(\omega), \tag{14}$$

где $W'_{\text{сп}} = W_{\text{сп}} g_2/g_1$.

На основании (13) и (14) получаем:

$$I'_\omega / I_\omega = \frac{\overline{N}_1 g_2}{\overline{N}_2 g_1} = e^{\hbar\omega/kT}. \tag{15}$$

Существенно, что при переходе рассматриваемой системы из „состояния T" в „состояние ($-T$)" величина, характеризующая поглощение в системе и пропорциональная ($\overline{N}_1/g_1 - \overline{N}_2/g_2$) (мнимая часть $\varkappa''$ ее поляризуемости $\varkappa$), меняет лишь свой знак, оставаясь неизменной по абсолютной величине. Таким образом, в данном случае перевод системы из „состояния T" в „состояние ($-T$)" происходит при неизменном значении $|\alpha''(\omega)|$, но спектральная интенсивность I_ω флюктуационного (спонтанного) излучения при этом увеличивается в $\exp(\hbar\omega/kT)$ раз. Поскольку интенсивность I_ω должна быть пропорциональна спектральной интенсивности дипольного момента $(P^2)_\omega$ рассматриваемой системы, этот результат противоречит сделанному выше общему выводу о неизменности величины $(x^2)_\omega$ при переходе от T к ($-T$) при неизменном значении $|\alpha''|$.

Причина этого противоречия заключается в том, что величина $(P^2)_\omega$, определяемая формулой (10), содержит в себе нулевые колебания дипольного момента, которым формально соответствует член 1/2. Нулевые колебания дипольного момента не принимают участия в электромагнитном излучении системы, и поэтому на самом деле интенсивность $I_\omega \sim (P^2)'_\omega$, где

$$(P^2)'_\omega = \frac{\hbar}{\pi} \frac{\varkappa''(\omega)}{\exp(\hbar\omega/kT_{\text{эфф}}) - 1}. \tag{16}$$

Отсюда получаем полное согласие с результатом (15).

5. Остановимся теперь специально на практически важном случае двухуровневых систем, т. е. предположим, что система представляет собою идеальный газ частиц*, причем каждая частица обладает лишь двумя энергетическими уровнями ε_1 и $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \hbar\omega_0$. Для простоты предположим, что эти уровни невырождены. Мы будем считать, что линейные размеры системы малы по сравнению с длиной волны $\lambda = c/\omega$, и поэтому будем учитывать эффект когерентности спонтанного излучения [14, 15]. Как уже было сказано выше, для двухуровневых систем эффективная температура обычно определяется формулой (1) (в данном

* См. сноску на стр. 493.

случае необходимо положить $g_1 = g_2 = 1$). Выясним, что дает в этом случае наше определение эффективной температуры (11) и когда оно переходит в определение (1).

Известно [14, 15], что квантовое состояние двухуровневой системы N частиц может быть описано двумя числами R и M, являющимися аналогами абсолютного значения полного момента и проекции полного момента на выделенную ось системы N электронных спинов. Соответственно, эти числа могут принимать следующие значения (целые или полуцелые):

$$M = \frac{N_2 - N_1}{2}; \quad R = \frac{N}{2}, \ \frac{N}{2} - 1, \ldots, |M|,$$

где N_1 и N_2—населенности уровней ε_1 и ε_2 ($N_1 + N_2 = N$). Очевидно, что энергия системы в состоянии (R, M) равна

$$E_{R,M} = N_1\varepsilon_1 + N_2\varepsilon_2 = N\varepsilon_1 + \left(\frac{N}{2} + M\right) \hbar\omega_0, \tag{17}$$

т. е. не зависит от числа R.

Определим согласно (11) эффективную температуру рассматриваемой двухуровневой системы, находящейся в состоянии $n = (R, M)$. В данном случае величина $T_{эфф}$ будет отлична от нуля только на частоте $\omega = \omega_0$, а от сумм, стоящих в числителе и знаменателе формулы (11), останется лишь по одному члену.

Переходу $n \to m$ с $E_m = E_n + \hbar\omega_0$ соответствует в нашем случае переход $(R, M) \to (R, M+1)$, а переходу $n \to m$ с $E_m = E_n - \hbar\omega_0$ переход $(R, M) \to (R, M-1)$. Для соответствующих (см. (11)) матричных элементов полного дипольного момента системы

$$\hat{P} = \sum_i \hat{p}_i$$

($\hat{p}_i$— дипольный момент отдельной частицы) имеем (см. [14, 15]):

$$|\langle R, M | \hat{P} | R, M \pm 1 \rangle|^2 = |p_{12}|^2 \left\{ \begin{array}{l} (R-M)\ (R+M+1) \\ (R+M)\ (R-M+1) \end{array} \right. , \tag{18}$$

где p_{12}—матричный элемент оператора $\hat{p}_i$ относительно уровней ε_1 и ε_2. Следовательно, в состоянии (R, M) величина $T_{эфф}$ равна

$$T_{эфф} = \frac{\hbar\omega_0}{k} \Big/ \ln \frac{(R-M)\ (R+M+1)}{(R+M)\ (R-M+1)}. \tag{19}$$

Мнимая часть поляризуемости системы $\varkappa''$ в любом состоянии (R, M) не зависит от числа R и, согласно (9) и (18), равна*

$$\varkappa''_{R,M} = -\frac{2\pi}{\hbar} |p_{12}|^2 M\, \gamma(\omega) = \frac{\pi}{\hbar} |p_{12}|^2 (N_1 - N_2)\, \delta(\omega - \omega_0). \tag{20}$$

Из выражения (19) легко видеть, что знак величины $T_{эфф}$ всегда противоположен знаку M; при $N_2 > N_1$ эффективная температура $T_{эфф} < 0$ (при этом также $\varkappa''_{R,M} < 0$). При $M = 0$, т. е. при уравнивании населен-

* При этом, согласно (16), интенсивность спонтанного излучения системы в свободном пространстве $I_\omega \sim (\ddot{P}^2)_\omega$ равна $I_\omega = J_0 (R + M)\ (R - M + 1)\ \delta(\omega - \omega_0)$, что совпадает с результатом работы [14].

ностей уровней ($N_1 = N_2$), эффективная температура обращается в бесконечность.

Известно [14, 15], что при $R = N/2$ (все спины параллельны) спонтанное излучение системы когерентно. Формула (19) в этом случае приводит к следующему выражению для эффективной температуры:

$$T_{\text{эфф}} = \frac{\hbar\omega_0}{k} \Big/ \ln \frac{N_1 (1 + N_2)}{N_2 (1 + N_1)}. \qquad (21)$$

При $N_1 \gg 1$ и $N_2 \gg 1$ с точностью до членов порядка N_i^{-1} отсюда получаем:

$$T_{\text{эфф}} \approx \frac{\hbar\omega_0}{k} \frac{N_1 N_2}{N_1 - N_2}. \qquad (22)$$

Приведенные выражения для эффективной температуры показывают, что задание одних лишь населенностей N_1 и N_2 энергетических уровней ε_1 и ε_2 двухуровневой системы еще не определяет, вообще говоря, ее эффективную температуру. Это объясняется тем, что задание населенностей N_1 и N_2 определяет квантовое число $M = (N_2 - N_1)/2$, но не определяет число R, т. е. задание N_1 и N_2 не определяет еще фазовых соотношений между состояниями отдельных частиц системы. Отсюда ясно, что формула (1), в которую входят лишь населенности (средние) уровней, не может быть справедливой в общем случае. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Температура $T_{\text{эфф}}$, определяемая формулой (19), соответствует чистому квантовому состоянию системы (R, M). Если состояние системы описывается функцией распределения $w_{R, M}$, то, согласно (11), имеем

$$T_{\text{эфф}} = \frac{\hbar\omega_0}{k} \Big/ \ln \frac{\overline{(R-M)\ (R+M+1)}}{\overline{(R+M)\ (R-M+1)}}, \qquad (23)$$

где средние

$$\overline{(R \pm M)\,(R \mp M+1)} = \sum_{R=\left\{\begin{smallmatrix}0\\1/2\end{smallmatrix}\right.}^{N/2} \sum_{M=-R}^{R} w_{R,\,M}\,(R \pm M)\ (R \mp M + 1). \qquad (24)$$

Мнимая часть поляризуемости системы $\varkappa''(\omega)$ при этом определяется формулой (20) с заменой величин M и $(N_1 - N_2)$ соответственно на $\overline{M}$ и $(\overline{N}_1 - \overline{N}_2)$.

Для сравнения общей формулы (23) с формулой (1) целесообразно преобразовать выражение (23) к другому виду. Для этого воспользуемся тем, что $M = N/2 - N_1 = -N/2 + N_2$. Тогда легко установить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \overline{(R-M)\ (R+M+1)} &= \overline{N}_1\,(1 + A/\overline{N}_1); \\ \overline{(R+M)\ (R-M+1)} &= \overline{N}_2\,(1 + A/\overline{N}_2), \end{aligned} \qquad (25)$$

где

$$A = \overline{R^2} + \overline{R} - \overline{M^2} - N/2. \qquad (26)$$

Заметим, что из неотрицательности левых частей выражений (25)* следует:

$$1 + A/\overline{N}_{1,2} \geqslant 0. \qquad (27)$$

* Это видно из того, что $|M| \leqslant R$

Подстановка (25) в (23) приводит к следующему удобному выражению для эффективной температуры $T_{\text{эфф}}$ двухуровневой сисгемы в общем случае:

$$T_{\text{эфф}} = \frac{\hbar\omega_0}{k}\left[\ln\frac{\overline{N_1}}{\overline{N_2}} + \ln\frac{1+A/\overline{N_1}}{1+A/\overline{N_2}}\right]^{-1}. \tag{28}$$

Эта формула совпадает с формулой (1) при $A=0$*.

Таким образом, с точки зрения принятого нами критерия правильности определения эффективной температуры неравновесной системы (см. раздел 2) обычно используемая формула (1) справедлива лишь при условии $A=0$. Можно показать, что при гиббсовском распределении $w^0_{R,M} = Cg_{R,M}\exp(-E_{R,M}/kT)$, где энергия $E_{R,M}$ определяется формулой (17), а статистический вес $g_{R,M}$ равен [14]

$$g_{R,M} = \frac{N!\,(2R+1)}{\left(\frac{N}{2}+R+1\right)!\left(\frac{N}{2}-R\right)!},$$

параметр A обращается, как и должно быть, в нуль при любом знаке T. Легко также показать, что каноническое распределение $w^0_{R,M}$ является не единственным распределением, удовлетворяющим условию $A=0$. В общем случае произвольного $w_{R,M}$ эффективная температура двухуровневой системы определяется формулой (28). Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из этой формулы.

При фиксированных значениях населенностей $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$, т. е. при фиксированном поглощении $\varkappa''(\omega)$ системы, величина эффективной температуры $T_{\text{эфф}}$ представляет собою монотонную функцию A. Рассмотрим отдельно случаи $\overline{N_1} > \overline{N_2}$ и $\overline{N_1} < \overline{N_2}$.

а) $\overline{N_1} > \overline{N_2}$. В этом случае всегда $T_{\text{эфф}} \geqslant 0$, и, согласно (27), $A \geqslant -\overline{N_2}$. Таким образом, $A_{\text{мин}} = -\overline{N_2}$. Максимальное значение величины A, очевидно, соответствует случаю (см. (26)), когда число R фиксировано и равно $N/2$; при этом $A_{\text{макс}} = N\overline{N_1} - \overline{N_1^2} = N\overline{N_2} - \overline{N_2^2}$. На основании (28) получаем:

$$T_{\text{эфф}} = \begin{cases} 0 & \text{при } A = A_{\text{мин}} = -\overline{N_2}; \\ \dfrac{\hbar\omega_0}{k}\Big/\ln\dfrac{\overline{N_1}(N+1) - \overline{N_1^2}}{\overline{N_2}(N+1) - \overline{N_2^2}} & \text{при } A = A_{\text{макс}}. \end{cases}$$

б) $\overline{N_1} < \overline{N_2}$. В этом случае всегда $T_{\text{эфф}} \leqslant 0$ и $A \geqslant -\overline{N_1}$, $A_{\text{мин}} = -\overline{N_1}$ и $A_{\text{макс}} = N\overline{N_1} - \overline{N_1^2} = N\overline{N_2} - \overline{N_2^2}$. На основании (28) получаем:

$$T_{\text{эфф}} = \begin{cases} -0 & \text{при } A = A_{\text{мин}} = -\overline{N_1}; \\ -\dfrac{\hbar\omega_0}{k}\Big/\ln\dfrac{\overline{N_2}(N+1) - \overline{N_2^2}}{\overline{N_1}(N+1) - \overline{N_1^2}} & \text{при } A = A_{\text{макс}}. \end{cases} \tag{29}$$

* При $A \neq 0$ формулы (1) и (28) дают одинаковый результат $T_{\text{эфф}} = \infty$ только при $\overline{N_1} = \overline{N_2}$. Интенсивность спонтанного излучения при этом конечна и на основании формулы, приведенной в сноске на стр. 500, равна

$$I_\omega = J_0\,(\overline{R^2} + \overline{R} - \overline{M^2})\,\delta(\omega-\omega_0)$$

Таким образом, для получения минимальных флюктуаций в системе (например, шумов в квантовых усилителях), необходимо стремиться к тому, чтобы при заданных $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ значение параметра A было бы минимальным. Согласно выражению (26), это условие, в свою очередь, означает, что при фиксированном $\overline{M}$ должно быть минимальным число $(\overline{R^2} + \overline{R})$ и максимальным число $\overline{M^2}$ *. Отсюда, в частности, следует, что в чистом состоянии (R, M) минимуму флюктуаций соответствует случай $R = |M|$.

Можно легко оценить изменение чувствительности квантового усилителя при изменении параметра A от значения $A_{мин} = -\overline{N_1}$ до значения $A_{макс} = N\overline{N_1} - \overline{N_1^2}$. Мы будем рассматривать при этом оптимальный режим работы, когда абсолютная температура стенок резонатора и передающих линий равна нулю и все собственные шумы усилителя обусловлены спонтанным излучением активного вещества. Известно (см., например, [5,6]), что при $T_{эфф} = -0$ чувствительность усилителя такова, что возможно зарегистрировать поток квантов, равный $\Delta\nu$ *сек*$^{-1}$, где $\Delta\nu$—ширина полосы усиления (один квант за время $\tau = 1/\Delta\nu$); это значение чувствительности соответствует входной шумовой температуре усилителя, равной $\hbar\omega_0/k \ln 2$. Очевидно, что при $A = A_{макс}$ чувствительность усилителя должна быть хуже в $\eta = I_{\omega\, макс}/I_{\omega\, мин}$ раз, где $I_{\omega\, макс}$ и $I_{\omega\, мин}$—интенсивности спонтанного излучения системы соответственно при $A = A_{макс}$ и $A = A_{мин}$. На основании (16) и (29) получаем следующее выражение для фактора η:

$$\eta = (\overline{N_2}/\overline{N_1} + N - \overline{N_1^2}/\overline{N_1})\ (\overline{N_2}/\overline{N_1} - 1)^{-1}. \tag{30}$$

Автор благодарен А. М. Прохорову за полезное обсуждение рассмотренных в статье вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. M. Purcell, R V. Pound, Phys. Rev., **81**, 279 (1951).
2. M. W. Muller, Phys. Rev., **106**, 8 (1957).
3. R. V. Pound, Ann. Phys., **1**, 24 (1957).
4. M. W. P. Strandberg, Phys. Rev., **106**, 617 (1957).
5. K. Shimoda, H. Takahasi, C. H. Townes, J. Phys. Soc. Japan, **12**, 686 (1957).
6. J. Weber, Phys. Rev., **108**, 537 (1957); Rev. Mod. Phys., **31**, 681 (1959).
7. J R. Singer, Masers, New—York, 1959.
8. H. Nyquist, Phys. Rev., **32**, 110 (1928).
9. H. B. Callen, T. A. Welton, Phys. Rev., **83**, 34 (1951).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957.
11. Н. Г. Басов, О. Н Крохин, Ю. М. Попов, ЖЭТФ, **38**, 1001 (1960).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, ГИТТЛ, М., 1951.
13. N. Ramsey, Phys. Rev., **103**, 20 (1956).
14. R. H. Dicke, Phys. Rev., **93**, 99 (1954).
15. В. М. Файн, УФН, **64**, 273 (1958).
16. В. С. Троицкий, В. Б. Царегрдский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, 505 (1961).

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию
10 ноября 1960 г.

* Этот же результат можно было бы, разумеется, получить на основании выражения для интенсивности спонтанного излучения, приведенного в сноске на стр. 502.

ON THE CONCEPT OF EFFECTIVE TEMPERATURE FOR STATIONARY NONEQUILIBRIUM SYSTEMS

F. V. Bunkin

A generalization is given of the concept of effective temperature (strictly determined only for two-level quantum systems) in the case of nonequilibrium complex systems, which are in an arbitrary stationary state. Just as in the particular case of two-level systems, the magnitude of the effective temperature determines the intensity of fluctuations in the system. Systems with negative losses and negative effective temperatures are specially discussed.