ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IV, № 3 *РАДИОФИЗИКА* *1961*

РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН НАД СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Ф. Г. Басс

С помощью граничных условий, выведенных в работе [1], рассматривается распространение радиоволн над поверхностью со случайными неровностями. Получены коэффициенты отражения и функция ослабления для среднего поля, распространяющегося над поверхностью со случайными неровностями.

1. В работе [1] были выведены граничные условия для среднего электромагнитного поля на поверхности со случайными неровностями. Если предположить, что случайные неровности статистически однородны, т. е. корреляционная функция высоты поверхности в разных точках $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$ зависит только от $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$, то граничные условия на поверхности $z=0$ имеют следующий вид*:

$$E_{x,y} = \mp \xi H_{y,x} + \frac{\overline{\zeta^2}}{2\pi} \int dS \left\{ V(\rho) \left[\Delta_\rho \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho_{x,y}} E_z - \right.\right.$$

$$- \nabla_{r'} E_z \nabla_\rho \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho_{x,y}} + \frac{\partial \nabla_{r'} E_\perp}{\partial z} \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho_{x,y}} - \frac{\partial E_\perp}{\partial z} \nabla_\rho \left. \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho_{x,y}} \right] + \tag{1}$$

$$\left. + V''(\rho) \left[E_z \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho_{x,y}} - \frac{\partial E_{x,y}}{\partial z} W(\rho) \right] \right\}.$$

Здесь $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$—средние электрическое и магнитное поля, ξ—среднее значение импеданса, $\overline{\zeta^2}$—средний квадрат неровности, W—коэффициент корреляции между неровностями в двух разных точках,

$$V(\rho) = \frac{e^{ik\rho}}{\rho}; \qquad V''(\rho) = \lim_{z \to 0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}},$$

$\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ зависят от $\boldsymbol{r}'$. Интегрирование в (1) производится по $\boldsymbol{r}'$.

Пользуясь граничным условием (1), рассмотрим задачу об отражении плоской волны от границы раздела, т. е. будем искать решение волнового уравнения для компонент электрического поля в виде суммы плоских волн типа $e^{i(k_x x + k_y y \pm k_z z)}$.

Подставляя такие решения в граничное условие (1), легко убедиться, что из (1) следует первый закон Снеллиуса: волна падающая и волна отраженная лежат в одной плоскости и угол падения равен углу отражения. В случае неоднородности случайных неровностей плоские волны не удовлетворяют одновременно волновому уравнению и граничным условиям (1) и, следовательно, не могут служить решением искомой задачи.

---

* В граничном условии (1) опущены члены, соответствующие статистическим неоднородностям импеданса. Как было указано Е. Л. Фейнбергом, изменение эффективного импеданса за счет его флюктуаций всегда пренебрежимо мало по сравнению со средним его значением. В связи с этим во всех формулах работы [1] величина γ_{12} должна быть отброшена.

2. Рассмотрим случай, когда неровности и однородны и изотропны, т. е. когда W зависит лишь от расстояния между точками r и r'. Выберем плоскость падения за координатную плоскость xz. Граничное условие (1) при этих допущениях распадается на два независимых граничных условия: одно для вертикальной; другое для горизонтальной поляризаций.

Коэффициенты отражения мы определим для вертикальной поляризации как отношение отраженного магнитного поля к падающему, а для горизонтальной поляризации—как отношение отраженного электрического поля к падающему.

Из уравнений Максвелла можно выразить электрическое поле через магнитное для вертикальной поляризации и магнитное поле через электрическое для горизонтальной поляризации. Решение уравнений Максвелла будем искать в виде $H_y = (e^{-ik_z z} + R_в e^{ik_z z}) H_{0y} e^{ik_x x}$ для вертикальной поляризации ($H_x = H_z = 0$) и $E_y = (e^{-ik_z z} + R_г e^{ik_z z}) \times$ $\times E_{0y} e^{ik_x x}$ —для горизонтальной поляризации ($E_x = E_z = 0$). Подставляя электромагнитное поле в граничные условия (1) и производя интегрирование по углам, для $R_в$ и $R_г$ получаем следующие выражения:

$$R_в(\Theta) = \left[1 - \frac{\xi + \sin\Theta F_в(\Theta)}{\cos\Theta}\right]\left[1 + \frac{\xi + \sin\Theta F_в(\Theta)}{\cos\Theta}\right]^{-1}; \tag{2}$$

$$R_г(\Theta) = -1 + 2[\xi + F_г(\Theta)]\cos\Theta. \tag{3}$$

Здесь $R_в(\Theta)$ и $R_г(\Theta)$ — коэффициенты отражения для вертикальной и горизонтальной поляризаций соответственно, Θ—угол падения,

$$F_в = k^2\bar{\zeta}^2\frac{\cos^2\Theta}{\sin\Theta} + i\bar{\zeta}^2\int_0^\infty d\rho e^{ik\rho}\left\{\frac{k}{2}[J_0(k_x\rho)\Delta_+ W(\rho) - \right.$$
$$- J_2(k_x\rho)\Delta_- W(\rho)]\frac{\cos(2\Theta)}{\sin\Theta} - J_1(k_x\rho)\frac{d}{d\rho}\Delta_+ W(\rho) -$$
$$- k^2\cos^2\Theta J_1(k_x\rho)\frac{dW(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[J_1(k_x\rho)\frac{dW(\rho)}{d\rho}\right] -$$
$$\left. - k\frac{\cos^2\Theta}{\sin\Theta}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}[J_0(k_x\rho)W(\rho)]\right\}; \tag{4}$$

$$F_г = k^2\bar{\zeta}^2 + ik\bar{\zeta}^2\int_0^\infty d\rho e^{ik\rho}\left\{\frac{1}{2}[J_0(k_x\rho)\Delta_+ W(\rho) + J_2(k_x\rho)\Delta_- W(\rho)] - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}[J_0(k_x\rho)W(\rho)]\right\} \qquad (k_x = k\sin\Theta). \tag{5}$$

Рассмотрим различные предельные случаи. Пусть $kl \ll 1$ (l—характерный размер неровностей). Тогда

$$R_в = \left\{1 - \frac{1}{\cos\Theta}\left[\xi - \frac{ik\bar{\zeta}^2}{2l}\int_0^\infty \frac{1}{x}\frac{dW}{dx}dx\cos(2\Theta)\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{1 + \frac{1}{\cos\Theta}\left[\xi - \frac{ik\bar{\zeta}^2}{2l}\int_0^\infty \frac{1}{x}\frac{dW}{dx}dx\cos(2\Theta)\right]\right\}^{-1}; \tag{6}$$

$$R_г = -1 + 2\left(\xi - \frac{ik\bar{\zeta}^2}{2l}\int_0^\infty \frac{1}{x}\frac{dW}{dx}dx\right)\cos\Theta. \qquad (7)$$

Во втором предельном случае $kl \gg 1$ нужно различать скользящее и нескользящее падение.

При скользящем падении, когда угол падения удовлетворяет неравенству $\pi/2 - \Theta \ll \sqrt{2/kl}$, имеем:

$$R_в = \left\{1 - \frac{1}{\cos\Theta}\left[\xi + \frac{\bar{\zeta}^2\sqrt{kl}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}\,l^2}\int_0^\infty x^{-3/2}\frac{dW}{dx}dx\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{1 + \frac{1}{\cos\Theta}\left[\xi + \frac{\bar{\zeta}^2\sqrt{kl}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}\,l^2}\int_0^\infty x^{-3/2}\frac{dW}{dx}dx\right]\right\}^{-1}; \qquad (8)$$

$$R_г = -1 + 2\left[\xi - \frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}k^2\bar{\zeta}^2}{\sqrt{2\pi kl}}\int_0^\infty x^{-1/2}\frac{dW}{dx}dx\right]\cos\Theta. \qquad (9)$$

Если же $\pi/2 - \Theta \gg \sqrt{2/kl}$, то

$$R_в = 1 - \frac{2(\xi + k^2\bar{\zeta}^2\cos^3\Theta)}{\cos\Theta}; \qquad (10)$$

$$R_г = -1 + 2(\xi + k^2\bar{\zeta}^2\cos\Theta)\cos\Theta. \qquad (11)$$

При выводе формул для различных предельных случаев предполагалось, что коэффициент корреляции W является функцией аргумента $x = \rho/l$, где l—масштаб корреляции для случайных неровностей. Однако, вообще говоря, функции корреляции могут быть многомасштабны. Если, например, l заключено между $l_{мин}$ и $l_{макс}$, где $l_{мин}$—минимальный масштаб корреляций, а $l_{макс}$—максимальный масштаб корреляции для неровностной поверхности, то в этом случае в формулах (6) и (7) под l надо подразумевать $l_{макс}$, а в формулах (8)—(11)—$l_{мин}$.

Здесь были рассмотрены лишь предельные случаи. Как видно из полученных формул, явный вид функции корреляции лишь определяет некоторые коэффициенты. В более общих случаях нужно пользоваться формулами (2), (3), причем результаты могут существенно определяться корреляционными коэффициентами.

Вопросам, затронутым в настоящем разделе, была посвящена работа [2]. В этой работе была приведена формула для коэффициента отражения вертикально поляризованной плоской волны от шероховатой поверхности, эквивалентная формуле (8) настоящей статьи, но не были оговорены пределы ее применимости. Из полученных здесь результатов следует, что формула работы [2] применима лишь при углах падения, близких к $\pi/2$:

$$\pi/2 - \Theta \ll \sqrt{2/kl}.$$

Необходимо отметить следующее обстоятельство. При нескользящем распространении неровности поверхности дают малые поправ-

ки к коэффициентам отражения. Нужно, однако, иметь в виду, что эти поправки того же порядка, что и рассеянное неровностями поле, и, следовательно, должны быть учтены в том же приближении. Кроме того, отличие модуля коэффициентов отражения от единицы за счет неровности поверхности приводит к тому, что значение минимумов интерференционных лепестков отлично от нуля, что также может оказаться весьма существенным.

3. Знание коэффициентов отражения для плоских волн дает возможность путем применения метода неоднородных плоских волн [3] получить отраженное поле для волны произвольной конфигурации. В качестве примера мы рассмотрим распространение электромагнитных волн от вертикального диполя над поверхностью со случайными неровностями.

При решении указанной задачи удобно пользоваться вектором Герца, имеющим всего одну компоненту Π, направленную вдоль оси диполя:

$$\Pi = \Pi_{\text{пад}} + \Pi_{\text{отр}}; \tag{12}$$

$$\Pi_{\text{пад}} = \frac{e^{ikR}}{R}; \quad \Pi_{\text{отр}} = \frac{ik}{2}\int_{\pi/2+i\infty}^{-\pi/2-i\infty} H_0^{(1)}(kr\sin\Theta)\, e^{ik(z+z_0)\cos\Theta} R_{\text{в}}(\Theta)\sin\Theta d\Theta. \tag{13}$$

В формулах (12) и (13) введены следующие обозначения: $\Pi_{\text{пад}}$—компонента вектора Герца, соответствующая падающей волне, R—расстояние от диполя до точки наблюдения, $\Pi_{\text{отр}}$—компонента вектора Герца, соответствующая отраженной волне, r—расстояние от проекции диполя на плоскость $z=0$ до проекции точки наблюдения на эту же плоскость, z_0 и z—высоты диполя и точки наблюдения над плоскостью $z=0$, $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля нулевого порядка первого рода.

Результаты расчетов, проведенных в [3], непосредственно переносятся на рассматриваемый случай.

Если выполнено условие $k(z+z_0) \gg |(\xi_{\text{эфф}} + F(\Theta)|_{\text{мин}}^{-1}$, то

$$\Pi_{\text{отр}} = \frac{e^{ikR_1}}{R_1}\left\{ R_{\text{в}}(\Theta_0) - \frac{i}{2kR_1}\left[R''_{\text{в}}(\Theta_0) + R'_{\text{в}}(\Theta_0)\operatorname{ctg}\Theta_0 \right]\right\}, \tag{14}$$

где R_1—расстояние от точки зеркального отражения диполя до точки наблюдения, Θ_0—угол зеркального отражения, $R_{\text{в}}$ —коэффициент отражения; штрихи означают дифференцирование по углу Θ_0. Из формулы (14) видно, что на случай отражения от неровной поверхности переносятся все результаты, полученные при помощи отражательных формул от ровной однородной неидеально проводящей поверхности.

В случае скользящего распространения необходимо использовать модифицированный метод перевала [3]. Как известно, при этом существенную роль играет полюс, определяемый корнем знаменателя коэффициента отражения.

Как видно из формулы (2), для нахождения полюса подынтегрального выражения в (13) необходимо решить уравнение:

$$\cos\Theta + \xi + \sin\Theta F_{\text{в}}(\Theta) = 0. \tag{15}$$

Ввиду малости ξ и $F_{\text{в}}(\Theta)$ это уравнение можно решать методом последовательных приближений. В первом приближении в члене $\sin\Theta F_{\text{в}}(\Theta)$ можно положить $\Theta = \pi/2$. Отсюда получаем, что полюс находится в точке

$$\cos\Theta = -\eta_{\text{эфф}}, \tag{16}$$

где $\eta_{эфф} = \xi + F_в(\pi/2)$—эффективный импеданс (см. [1]).

От обычного выражения для полюса эта формула отличается лишь тем, что ξ заменяется на $\eta_{эфф}$. Следовательно, для компоненты вектора Герца получатся обычные выражения с функцией ослабления Вейля—Ван-дер-Поля, в которой $\sqrt{\varepsilon'}$ (ε'—комплексная диэлектрическая проницаемость) нужно заменить на $\eta_{эфф}^{-1}$.

К этому выводу автор пришел несколько менее строгим путем в работе [1]. Как уже отмечалось в [1], если обе корреспондирующие точки находятся на поверхности, то получаются известные формулы [4] для функции ослабления при распространении электромагнитных волн над поверхностью со случайными неровностями.

4. Наряду с волнами рассмотренного типа над плоскостью со случайными неровностями могут распространяться поверхностные волны. Хорошо известно, что такого типа волны над земной поверхностью не возбуждаются. Однако поверхностные волны играют большую роль в современной электронике, ибо волны такого типа хорошо взаимодействуют с электронными пучками [5]. При этом в качестве замедляющих структур широко распространены гребенки с периодически расположенными зубцами, расстояние между которыми много меньше длины замедленной волны. В настоящем пункте мы покажем, что роль такой замедляющей структуры может играть поверхность со случайными неровностями, радиус корреляции которых много меньше длины волны.

Естественно, что поверхности рассматриваемого типа могут привести лишь к малым замедлениям, практически не применимым в электронике. Тем не менее, исследование этого вопроса даже в рамках данного приближения представляет известный интерес, так как из него следует, что замедляющие свойства структуры не зависят от ее периодичности.

Пусть плоская волна распространяется в плоскости xz под малым углом к оси x. Тогда можно воспользоваться приближенным граничным условием [1]

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -ik\eta_{эфф} E_z \tag{17}$$

при $z = 0$. Из волнового уравнения следует соотношение

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2. \tag{18}$$

Подставляя в (17) плоскую волну $E_z = E_{0z} e^{i(k_x x + k_z z)}$, получим:

$$k_z = -k\eta_{эфф}. \tag{19}$$

Согласно (18) и (19),

$$k_x = k(1 - \eta_{эфф}^2/2). \tag{20}$$

Записав k_x в виде $k_x = \omega/v$, а k в виде $k = \omega/c$, где ω—частота, v—фазовая скорость распространения вдоль оси x, c—скорость света в вакууме, получим:

$$v = c(1 + \eta_{эфф}^2/2). \tag{21}$$

Исследуем волны, распространяющиеся вдоль идеально проводящей поверхности со случайными неровностями. Используя выражения для $\eta_{эфф}$, полученные в [1], имеем для $kl \ll 1$

$$k_z = -\frac{ik^2\overline{\zeta^2}}{2l}\int_0^\infty \frac{1}{x}\frac{dW}{dx}dx, \quad v = c\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{k\overline{\zeta^2}}{2l}\int_0^\infty \frac{1}{x}\frac{dW}{dx}dx\right)^2\right]; \quad (22)$$

для $kl \gg 1$

$$k_z = -\frac{e^{3i\pi/4}\, k\overline{\zeta^2}\sqrt{kl}}{2\sqrt{2\pi}\, l^2}\int_0^\infty x^{-3/2}\frac{dW}{dx}dx;$$

$$k_x = k\left[1 + \frac{1}{2}i\left(\frac{\overline{\zeta^2}\sqrt{kl}}{2\sqrt{2\pi}\, l^2}\int_0^\infty x^{-3/2}\frac{dW}{dx}dx\right)^2\right]. \quad (23)$$

Из формул (22), (23) следует, что при $kl \ll 1$ над идеально проводящей плоскостью со случайными неровностями распространяется поверхностная волна с фазовой скоростью $v < c$, не затухающая вдоль оси x. При $kl \gg 1$ поверхностная волна затухает как вдоль оси z, так и вдоль x. Фазовая скорость поверхностной волны равна фазовой скорости света в вакууме.

При рассмотрении поверхностных волн надо учитывать, что $dW/dx < 0$ и, следовательно, соответствующие интегралы также отрицательны.

5. Представляет определенный интерес рассмотрение распространения скалярных волн над поверхностью со случайными неровностями. Мы исследуем лишь случай, когда скалярное поле ψ обращается в нуль на неровной поверхности $z = \zeta(x, y)$, т. е. граничное условие имеет вид:

$$\psi[x, y, \zeta(x, y)] = 0. \quad (24)$$

Разлагая это граничное условие в ряд по степеням ζ и производя усреднение и вычитание, получим для среднего поля $\bar{\psi}(x, y, 0)$ и флюктуационного поля $\psi'(x, y, 0)$ следующие соотношения:

$$\bar{\psi} + \overline{\frac{\partial\psi'}{\partial z}\zeta} = 0; \qquad \psi' + \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z}\zeta = 0. \quad (25)$$

Используя формулу Грина, методом, аналогичным рассмотренному в работе [1], находим для $\bar{\psi}$ граничное условие

$$\bar{\psi} = -\frac{\overline{\zeta^2}}{2\pi}\int V''(\rho)\, W(\rho)\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z}dS. \quad (26)$$

Если падающая волна плоская, то для коэффициента отражения R_c имеет место такое выражение:

$$R_c = -1 + 2k\overline{\zeta^2}\left\{k - i\int_0^\infty \frac{e^{ik\rho}}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[W(\rho)\, J_0(k_x\rho)\right]d\rho\right\}. \quad (27)$$

Формулы (26) и (27) получены в предположении однородности и изотропности неровностей поверхности.

В предельных случаях формула (27) запишется так: для $kl \ll 1$

$$R_c = -1 - \frac{2ik\overline{\zeta^2}}{l}\int_0^\infty \frac{1}{x}\frac{dW}{dx}\,dx\cos\Theta; \tag{28}$$

для $kl \gg 1$ и $\pi/2-\Theta \ll \sqrt{2/kl}$

$$R_c = -1 - \frac{4e^{i\frac{\pi}{4}}k^2\overline{\zeta^2}}{\sqrt{2\pi kl}}\int_0^\infty x^{-1/2}\frac{dW}{dx}\,dx\cos\Theta; \tag{29}$$

для $kl \gg 1$ и $\pi/2-\Theta \gg \sqrt{2/kl}$

$$R_c = -1 + 2k^2\overline{\zeta^2}\cos^2\Theta. \tag{30}$$

6. Выше рассматривались лишь однородные и изотропные неровности и флюктуации. Представляет определенный интерес изучение одномерных неровностей, зависящих от одной координаты, например, x. Соответствующие выражения для коэффициентов отражения ввиду их громоздкости здесь не приводятся. Необходимо только отметить, что в предположении однородности закон Снеллиуса выполняется и в этом случае. Коэффициенты отражения тогда зависят не только от угла падения, но и от угла между плоскостью падения и осью x, а для электромагнитного поля—также от углов, которые составляет электрический вектор падающего поля с осями x и z.

Мы исследуем случай скользящего распространения квазиплоской волны, т. е. волны, мало отличающейся от плоской на расстояниях порядка l (см. [1]).

В работе [1] было получено для такой волны следующее граничное условие:

$$E_x = -\eta^{(x)}_{\text{эфф}} H_y, \qquad E_y = \eta^{(y)}_{\text{эфф}} H_x. \tag{31}$$

Там же приведены определения $\eta^{(x)}_{\text{эфф}}$ и $\eta^{(y)}_{\text{эфф}}$. Используя уравнения Максвелла, от граничного условия (31) можно перейти к граничному условию для E_z, имеющему следующую форму:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -ik\left[\eta^{(x)}_{\text{эфф}}\cos^2\varphi + \eta^{(y)}_{\text{эфф}}\sin^2\varphi\right]E_z, \tag{32}$$

где φ—угол между направлением распространения и осью x.

Граничное условие (32) имеет вид граничного условия Леонтовича с эффективным импедансом $\eta_{\text{эфф}} = \eta^{(x)}_{\text{эфф}}\cos^2\varphi + \eta^{(y)}_{\text{эфф}}\sin^2\varphi$. Отсюда следует, что поле точечного источника над статистически шероховатой поверхностью с одномерными неровностями имеет вид сферической волны, умноженной на нормальную функцию ослабления с указанным в формуле (32) эффективным импедансом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 72 (1960).
2. С. Я. Брауде, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 691 (1959).
3. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
4. Е. Л. Фейнберг, Исследования по распространению радиоволн, изд. АН СССР, М., 1948, стр. 97.
5. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов радио, М., 1957.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
29 апреля 1960 г.

RADIO WAVES PROPAGATION OVER A STATISTICALLY ROUGH SURFACE

F. G. Bass

By means of boundary conditions obtained in paper [1], an examination is made of radio wave propagation over a random irregular surface. Reflection coefficients and attenuation function are obtained for the average field propagated over such a surface

---

Примечание при корректуре. Как стало известно автору, некоторые частные случаи формул (6), (7), полученные в приближении метода возмущений, в другой форме содержатся у Райса; там же пересматриваются поверхностные волны над неровной поверхностью (S. O. Rice, Communication Pure and Aplied Mathematics, 4, 351 (1951).