ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IV, № 3 *РАДИОФИЗИКА* *1961*

ФЛЮКТУАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ КОНЦЕНТРАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Ф. Г. Басс

Исследуются флюктуации амплитуды, фазы и углов прихода электромагнитных волн, прошедших через слой магнитоактивной плазмы со случайными изменениями концентрации электронов и магнитного поля.

1. Вопрос о флюктуациях электромагнитного поля в магнитоактивной среде изучался в работах [1,2]. В статье [1] в приближении геометрической оптики исследовались флюктуации фазы и углов прихода электромагнитных волн за счет случайных изменений концентрации электронов и напряженности магнитного поля, причем предполагалось, что магнитное поле флюктуирует только по величине, но не по направлению. Поэтому результаты [1] применимы лишь для относительно малых длин трасс, в так называемой ближней зоне. В работе [2] вычислялись как флюктуации фазы, так и флюктуации амплитуды электромагнитного поля, причем расчет велся при помощи одного из вариантов метода возмущений, вследствие чего результаты [2] применимы как в ближней, так и в дальней зоне. Однако автором [2] не учитывались флюктуации магнитного поля. Кроме того, в [2] предполагалась изотропия рассеяния волн флюктуациями магнитоактивной плазмы, что при произвольной ориентации внешнего магнитного поля и направления распространения не всегда соответствует действительности. Это обстоятельство сказалось на формулах для среднего квадрата амплитуды в ближней зоне.

В связи с изложенным выше представляет интерес обобщение и уточнение работ [1] и [2]. В настоящем сообщении с помощью метода возмущений рассчитываются статистические характеристики электромагнитного поля, прошедшего через слой магнитоактивной плазмы: флюктуации концентрации электронов и внешнего магнитного поля, а также электромагнитного поля, отраженного от этого слоя.

2. Полная система уравнений, описывающая распространение электромагнитных волн в магнитоактивной среде, имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c} eN\boldsymbol{w};\\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{H};\\ -i\omega\boldsymbol{w} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E} + \frac{e}{mc}[\boldsymbol{w}\boldsymbol{H}_0],\end{gathered} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$—переменное электромагнитное поле, c—скорость света в вакууме, e—заряд электрона, N—концентрация электронов в магнитоактивной плазме, $\boldsymbol{H}_0$—внешнее магнитное поле, $\boldsymbol{w}$—скорость электронов. Зависимость всех величин от времени определяется множителем $e^{-i\omega t}$.

Каждую из величин, входящих в систему уравнений (1), можно представить в виде суммы ее среднего значения и флюктуации:

$$E=\overline{E}+\zeta;\ H=\overline{H}+\tau;\ H_0=\overline{H}_0+h;\ N=N+\mu \tag{2}$$

(черта сверху обозначает статистическое усреднение). Для отыскания $\overline{E}$, $\overline{H}$, $\overline{\zeta}$ и $\overline{\tau}$ можно поступить аналогично тому, как это было сделано, например, в работе [3], т. е. получить из системы уравнений (1) уравнения для среднего и флюктуационного полей, а затем их совместно решать. Однако здесь мы применим несколько иную методику нахождения среднего поля, на которой остановимся несколько ниже.

Будем считать флюктуации малыми и воспользуемся, как обычно, методом возмущений. Для флюктуационной части электрического поля из системы (1) получаются следующие уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}-\delta_{ik}\Delta-k^2\varepsilon_{ik}\right)\zeta_k=j_i, \tag{3}$$

где вектор j определяется выражением:

$$j=-\frac{2uv\,(\nu,\nu')\,k^2}{(1-u)^2}\left\{E-iu^{1/2}\,[\nu,\overline{E}]-u\nu\,(\nu,\overline{E})\right\}+$$
$$+\frac{ivk^2}{1-u}\left\{u^{1/2}\,[\nu',\overline{E}]-iu\nu'\,(\overline{E},\nu)-iu\nu\,(\overline{E},\nu')\right\}- \tag{4}$$
$$-\frac{\eta vk^2}{1-u}\left\{\overline{E}-iu^{1/2}\,[\nu,\overline{E}]-u\nu\,(\overline{E},\nu')\right\}.$$

Здесь

$$\nu=\frac{\overline{H}_0}{|\overline{H}_0|};\quad \nu'=\frac{h}{|\overline{H}_0|};\quad \eta=\frac{\mu}{N};\quad v=\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2};\quad u=\left(\frac{eH_0}{mc\omega}\right)^2.$$

Направление распространения невозмущенного электромагнитного поля выберем за ось $0z$, координатную плоскость $0zy$ проведем через $\overline{H}_0$. В этой системе координат тензор гиротропной среды ε_{ik} будет выглядеть так:

$$\varepsilon_{xx}=1-\frac{v}{1-u};\ \varepsilon_{xy}=-\varepsilon_{yx}=-\frac{iu^{1/2}v\cos\alpha}{1-u};\ \varepsilon_{yy}=1-\frac{v\,(1-u\sin^2\alpha)}{1-u};$$
$$\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}=\frac{uv\cos\alpha\sin\alpha}{1-u};\ \varepsilon_{zz}=1-\frac{v\,(1-u\cos^2\alpha)}{1-u}, \tag{5}$$

α—угол между $\overline{H}_0$ и осью $0z$.

Мы будем предполагать средние значения концентрации и магнитного поля не зависящими от координат. Случай, когда имеется зависимость средних значений от одной координаты и распространение среднего поля идет вдоль этой координаты, может быть рассмотрен аналогично.

Ищем решение системы (3) в виде разложения в интеграл Фурье по координатам x, y:

$$\zeta(r)=\int e^{i(\varkappa_x x+\varkappa_y y)}\,\xi(\varkappa,z)\,d\varkappa;\ j(r)=\int e^{i(\varkappa_x x+\varkappa_y y)}\,g(\varkappa,z)\,d\varkappa. \tag{6}$$

Уравнения для $\xi(\varkappa, z)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\xi_x}{dz^2} - i\varkappa_x \frac{d\xi_z}{dz} + (k^2\varepsilon_{xx} - \varkappa_y^2)\,\xi_x + (k^2\varepsilon_{xy} + \varkappa_x\varkappa_y)\,\xi_y + k^2\varepsilon_{xz}\xi_z = -g_x,\\
&\frac{d^2\xi_y}{dz^2} - i\varkappa_y \frac{d\xi_z}{dz} + (k^2\varepsilon_{yx} + \varkappa_x\varkappa_y)\,\xi_x + (k^2\varepsilon_{yy} - \varkappa_x^2)\,\xi_y + k^2\varepsilon_{yz}\xi_z = -g_y;\\
&i\frac{d}{dz}(\varkappa\xi) - k^2\varepsilon_{zx}\xi_x - k^2\varepsilon_{zy}\xi_y - (k^2\varepsilon_{zz} - \varkappa^2)\,\xi_z = -g_z.
\end{aligned} \tag{7}$$

К этим уравнениям должны быть добавлены граничные условия.

Пусть толщина слоя, заполненного флюктуациями, равна L и слой расположен перпендикулярно оси z. Совместим плоскость $0xy$ с нижней границей слоя, а весь слой расположим в полупространстве $z>0$. Тогда граничные условия для уравнения (7) будут таковы: при $z \geqslant L$ должны отсутствовать волны, бегущие в отрицательном направлении, а при $z \leqslant 0$ — в положительном.

Решения, удовлетворяющие этим условиям на плоскости $z=L$, запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
\xi_x(L) &= \frac{i}{2q_{10}(q_{10}^2 - q_{20}^2)} \int_0^L e^{iq_1(L-z)} \left[(a_3 - q_{10}^2) f_1(z) - a_2 f_2(z)\right] dz +\\
&+ \frac{i}{2q_{20}(q_{20}^2 - q_{10}^2)} \int_0^L e^{iq_2(L-z)} \left[(a_3 - q_{20}^2) f_1(z) - a_2 f_2(z)\right] dz;\\
\xi_y(L) &= \frac{i}{2q_{10}(q_{10}^2 - q_{20}^2)} \int_0^L e^{iq_1(L-z)} \left[a_2 f_1(z) + (a_1 - q_{10}^2) f_2(z)\right] dz +\\
&+ \frac{i}{2q_{20}(q_{20}^2 - q_{10}^2)} \int_0^L e^{iq_2(L-z)} \left[a_2 f_1(z) + (a_1 - q_{20}^2) f_2(z)\right] dz;\\
\xi_z(L) &\simeq -\frac{\varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}}\xi_x(L) - \frac{\varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}}\xi_y(L).
\end{aligned} \tag{8}$$

В формулах (8) введены такие обозначения:

$$f_1(z) = -g_x(z) + \frac{\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{zz}} g_z(z); \quad f_2(z) = -g_y(z) + \frac{\varepsilon_{yz}}{\varepsilon_{zz}} g_z(z);$$

$$a_1 = k^2\left(\varepsilon_{xx} + \frac{\varepsilon_{xz}^2}{\varepsilon_{zz}}\right); \quad a_2 = k^2\left(\varepsilon_{xy} - \frac{\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}}{\varepsilon_{zz}}\right);$$

$$a_3 = k^2\left(\varepsilon_{yy} - \frac{\varepsilon_{zy}^2}{\varepsilon_{zz}}\right),$$

$q_i = q_{i0} + \beta_i\varkappa_y + \gamma_{ix}\varkappa_x^2 + \gamma_{iy}\varkappa_y^2$ — корни дисперсионного уравнения, соответствующего однородной системе (7). Индекс i может принимать значение 1, соответствующее обыкновенной волне, и значение 2, соответствующее необыкновенной волне.

Формулы (8) получены в предположении, что $\lambda/2\pi = 1/k \ll l \ll L$, где через l обозначены характерные размеры случайных неоднородностей концентраций и магнитного поля. Неравенство $1/k \ll l$ эквивалентно неравенству $k \gg \varkappa \sim 2\pi/l$. В (8) всюду проведено разложение в ряд по степеням $\varkappa/k$, причем удержаны первые члены разложения, за исключением экспоненты, где нужно удержать три члена, так как второй и третий члены могут играть существенную роль при больших z.

Мы не будем приводить явные выражения для β_l и $\gamma_{lx,y}$ в общем случае из-за их громоздкости.

Формулы для ξ в точке $z=0$ получаются из (8) заменой $L-z$ в показателе экспоненты под интегралами на z.

3. Перейдем к формулировке полученных результатов. Будем исследовать флюктуации фазы, углов прихода, относительные и абсолютные флюктуации электромагнитных полей, прошедших через слой со случайными неоднородностями, а также абсолютные флюктуации электромагнитного поля, отраженного от слоя случайными неоднородностями.

В приближении теории возмущений флюктуации фазы $\delta\varphi$ и относительные флюктуации амплитуды δA определяются такими формулами [3]:

$$\delta\varphi = \mathrm{Im}\,(\zeta/\overline{E}); \quad \delta A = \mathrm{Re}\,(\zeta/\overline{E}). \tag{9}$$

Формулы (9) имеют место для таких компонент вектора электрического поля, средние значения которых не равны нулю. Вопрос о статистических характеристиках фазы и относительного изменения амплитуды для компонент, среднее значение которых равняется нулю, обсуждался в [3,4].

В формулах (9) опущены индексы, указывающие направление компоненты, так как для всех компонент флюктуации фазы и относительные флюктуации амплитуды одинаковы. Корреляционные функции этих величин в точках r_1 и r_2 запишутся так:

$$K(r_1, r_2) = \overline{\delta\varphi(\boldsymbol{r}_1)\,\delta\varphi(\boldsymbol{r}_2)}, \quad P(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \overline{\delta A(\boldsymbol{r}_1)\,\delta A(\boldsymbol{r}_2)}. \tag{10}$$

Флюктуации углов прихода определяются через флюктуации фазы обычным образом [1].

Для дальнейшего необходимо сделать предположения относительно вида среднего поля. Будем рассматривать рассеяние на флюктуациях концентрации и магнитного поля только плоских нормальных волн (обыкновенной и необыкновенной). Соответственно этому положим для каждой компоненты $\overline{E}^{(k)} = |\overline{E}^{(k)}|\, e^{iq_{0k}z}$, причем $|\overline{E}^{(k)}|$, вообще говоря, является медленно меняющейся функцией z вследствие затухания среднего поля из-за перехода энергии среднего поля во флюктуационную. В этом разделе мы будем считать толщину слоя много меньше длины затухания и $|\overline{E}^{(k)}|$ постоянным. Коэффициент затухания будет вычислен в следующем разделе.

Различные компоненты среднего поля связаны между собой обычными соотношениями [5]:

$$\frac{\overline{E}_{y,1,2}}{\overline{E}_{x;1,2}} = p_{1,2} = -\frac{2i\sqrt{u}\,(1-v)\cos\alpha}{u\sin^2\alpha \mp \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u\,(1-v)^2\cos^2\alpha}};$$
$$\overline{E}_z = -\frac{\varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}}\overline{E}_x - \frac{\varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}}\overline{E}_y^{*}. \tag{11}$$

Поскольку формулы для статистических характеристик в общем случае получаются весьма громоздкими, ограничимся лишь частными и предельными случаями.

В случае $\alpha=\pi/2$ для обыкновенной волны ($\overline{E}_x=0,\ \overline{E}_z=0$)

$$\overline{|\zeta_x^2(0)|}=\frac{k^2\overline{E}_y^2 v^2 uL}{2n_2^2(1-u-v)^2}\int\limits_0^\infty \{(1-v)^2 R_{zz}(0,\ 0,\ \rho_z)\cos(q_{20}+q_{10})\rho_z+ \\ +uR_{xx}(0,\ 0,\ \rho_z)\cos(q_{20}+q_{10})\rho_z\}\,d\rho_z. \tag{12}$$

Для того, чтобы получить $\overline{|\zeta_x^2(L)|}$, нужно в подынтегральных выражениях формул (10) $q_{10}+q_{20}$ под знаком косинуса заменить на $q_{10}-q_{20}$:

$$\begin{aligned} \overline{|\zeta_y^2(0)|}&=\frac{k^2v^2|\overline{E_y^2}|L}{2n_1^2}\int\limits_0^\infty F(0,\ 0,\ \rho_z)\cos 2q_{10}\rho_z d\rho_z;\\ \overline{|\zeta_y^2(L)|}&=\frac{k^2v^2|\overline{E_y^2}|L}{2n_1^2}\int\limits_0^\infty F(0,\ 0,\ \rho_z)\,d\rho_z; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\left.\begin{matrix}K(d)\\ P(d)\end{matrix}\right\}=\frac{k^2v^2L}{8n_1^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int Q(\varkappa,\ \rho_z)\times \\ \times\left\{1\pm\frac{\sin\left[2\left(b\varkappa_x^2+b'\varkappa_y^2\right)L\right]}{2\left(b\varkappa_x^2+b'\varkappa_y^2\right)L}\right\}e^{i\varkappa d}\,d\varkappa d\rho_z. \tag{14}$$

Здесь были введены следующие обозначения: $R_{ik}(\rho)=\overline{\nu_i'(r)\ \nu_k'(r')}$ — тензор корреляции между компонентами ν_i' относительных флюктуаций магнитного поля, $\rho=r-r'$, $n_i=q_{0i}/k$ — показатель преломления для обыкновенной и необыкновенной волны при $\alpha=\pi/2$, $n_1^2=1-v$, $n_2^2=1-v(1-v)/(1-u)(1-u-v)$, $F(\rho)=\overline{\eta(r)\ \eta(r')}$—функция корреляции между относительными флюктуациями концентраций, $b=1/2k(1-v)^{1/2}$, $b'=(1-v)^{1/2}/2k$, $Q(\varkappa,\ \rho_z)$—преобразование Фурье от $F(\rho)$ по ρ_x, ρ_y.

Для упрощения формул будем считать, что $R_{ik}=R_{il}\delta_{ik}$ (δ_{ik}—символ Кронекера) и что флюктуации магнитного поля и концентрации не коррелированы. Очевидно, что эти ограничения легко могут быть сняты.

Для нахождения функций корреляции между углами прихода в точках, разнесенных в плоскости xy на вектор d, нужно в подынтегральном выражении в формулах (13) добавить множитель $\varkappa^2/k^2$. Последнее обстоятельство следует непосредственно из определения углов прихода как относительного изменения вектора нормали к фазовому фронту. Чтобы получить средний квадрат той или иной величины, достаточно в корреляционной функции положить $d=0$. Эти замечания носят общий характер; поэтому мы не будем приводить формулы для средних квадратов величин, ограничиваясь только их корреляционными функциями, а также статистическими характеристиками углов прихода.

Для функций корреляций фазы и относительного изменения амплитуды представляет интерес получение формул для ближней и дальней зон.

Ниже всюду приводятся лишь формулы для ближней зоны, ибо в дальней зоне $K=P$ и отличается от выражения для K в ближней зоне только коэффициентом 1/2. Это обстоятельство непосредственно следует из формул типа (14).

Итак, для ближней зоны имеем:

$$K(d) = \frac{k^2 v^2 L}{2n_1^2} \int_0^\infty F(d, \rho_z)\, d\rho_z;$$
$$P(d) = \frac{k^2 v^2 L^3}{6n_1^2} \int_0^\infty \left(b \frac{\partial^2}{\partial \rho_x^2} + b' \frac{\partial^2}{\partial \rho_y^2}\right)^2 F(d, \rho_z)\, d\rho_z. \tag{15}$$

В случае $\alpha = \pi/2$ для необыкновенной волны $\left(\overline{E}_y = 0;\ \overline{E}_z = -\frac{\varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}} \overline{E}_x\right)$

$$|\overline{\zeta_x^2(0)}| = \frac{k^2 v^2 |\overline{E_x^2}| L}{2n_2^2 (1-u-v)^4} \Big\{4u^2 (1-v)^2 \int^\infty R_{yy}(0, 0, \rho_z) \cos 2q_{20}\rho_z d\rho_z +$$
$$+ [uv + (1-v)(1-u-v)]^2 \int_0^\infty F(0, 0, \rho_z) \cos 2q_{20}\rho_z d\rho_z\Big\}; \tag{16}$$

$$|\overline{\zeta_x^2(L)}| = \frac{k^2 v^2 |\overline{E_x^2}| L}{2n_2^2 (1-u-v)^4} \Big\{4u^2 (1-v)^2 \int_0^\infty R_{yy}(0, 0, \rho_z)\, d\rho_z +$$
$$+ [uv + (1-v)(1-u-v)]^2 \int_0^\infty F(0, 0, \rho_z)\, d\rho_z\Big\}; \tag{17}$$

$$|\overline{\zeta_v^2(0)}| = \frac{k^2 u |\overline{E_x^2}| L}{2n_1^2 (1-u-v)^2} \Big\{u \int_0^\infty R_{xx}(0, 0, \rho_z) \cos (q_{10} + q_{20})\, \rho_z d\rho_z +$$
$$+ (1-v) \int_0^\infty R_{zz}(0, 0, \rho_z) \cos (q_{10} + q_{20})\, \rho_z d\rho_z\Big\}. \tag{18}$$

Выражение для $|\overline{\zeta_y^2(L)}|$ получается заменой в формуле (16) $\cos (q_{10} + q_{20})\, \rho_z$ на $\cos (q_{10} - q_{20})\, \rho_z$:

$$\left.\begin{matrix} K(d) \\ P(d) \end{matrix}\right\} = \frac{k^2 v^2 L}{8n_2^2 (1-u-v)^4} \iint_{-\infty}^{\infty} \Big\{4u^2 (1-v)^2 W_{yy}(\varkappa, \rho_z) +$$
$$+ [uv + (1-v)(1-u-v)]^2 Q(\varkappa, \rho_z)\Big\} e^{i\varkappa d} \times$$
$$\times \left[1 \pm \frac{\sin [2(c\varkappa_x^2 + c'\varkappa_y^2) L]}{2(c\varkappa_x^2 + c'\varkappa_y^2) L}\right] d\varkappa d\rho_z; \tag{19}$$

$W_{ik}(\varkappa, \rho_z)$ — преобразование Фурье от $R_{ik}(\rho)$ по ρ_x и ρ_y,

$$c = \frac{1}{2kn_2}; \quad c' = \frac{1-uv-v^2}{2kn_2(1-u-v)}. \tag{20}$$

В ближней зоне

$$K(d) = \frac{k^2 v^2 L}{2n_2^2 (1-u-v)^4} \int\limits_0^\infty \Big\{ 4u^2 (1-v)^2 R_{yy}(d, \rho_z) +$$

$$+ [uv + (1-v)(1-u-v)]^2 F(d, \rho_z) \Big\} d\rho_z; \tag{21}$$

$$P(d) = \frac{k^2 v^2 L}{6n_2^2 (1-u-v)^4} \int\limits_0^\infty \left(c \frac{\partial^2}{\partial \rho_x^2} + c' \frac{\partial^2}{\partial \rho_y^2} \right)^2 \Big\{ 4u^2 (1-v)^2 R_{yy}(d, \rho_z) +$$

$$+ [uv + (1-v)(1-u-v)]^2 F(d, \rho_z) \Big\} d\rho_z.$$

Соответствующие формулы для z-компонент немедленно получаются из формул для ζ_x умножением на $-\varepsilon_{zx}/\varepsilon_{zz}$.

Перейдем к случаю $\alpha = 0$. Для среднего поля здесь для каждого типа волн имеют место два варианта: 1) $\bar{E}_y = i\bar{E}_x$, $\bar{E}_z = 0$; 2) $\bar{E}_x = -i\bar{E}_y$, $\bar{E}_z = 0$ (обыкновенная волна); 1) $\bar{E}_y = -i\bar{E}_x$, $\bar{E}_z = 0$; 2) $\bar{E}_x = i\bar{E}_y$, $\bar{E}_z = 0$ (необыкновенная волна). Для статистических характеристик электромагнитного поля во всех этих случаях получаются одинаковые результаты:

$$\overline{\zeta^2_{x,y}(0)}\,| = \frac{k^2 v^2 |\bar{E}_y^2|}{2n_{1,2}^2 (1 \pm u^{1/2})^2} \left\{ \frac{u}{(1 \pm u^{1/2})^2} \int\limits_0^\infty R_{zz}(0, 0, \rho_z) \cos 2q_{1,2;\,0}\, \rho_z \, d\rho_z + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty F(0, 0, \rho_z) \cos 2q_{1,2,\,0}\, \rho_z\, d\rho_z \right\};$$

$$|\overline{\zeta^2_{x,y}(L)}| = \frac{k^2 v^2 L\, |\bar{E}_y^2|}{2n_{1,2}^2 (1 \pm u^{1/2})^2} \left\{ \frac{u}{(1 \pm u^{1/2})^2} \int\limits_0^\infty R_{zz}(0, 0, \rho_z)\, d\rho_z + \right. \tag{22}$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty F(0, 0, \rho_z)\, d\rho_z \right\};$$

$$\left. \begin{matrix} K(d) \\ P(d) \end{matrix} \right\} = \frac{k^2 v^2 L}{8n_{1,2}^2 (1 \pm u^{1/2})^2} \int\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{u}{(1 \pm u^{1/2})^2} W_{zz}(\varkappa, \rho_z) + Q(\varkappa, \rho_z) \right\} \times$$

$$\times \left[1 \pm \frac{\sin(2\varkappa^2 \psi_{1,2} L)}{2\varkappa^2 \psi_{1,2} L} \right] e^{i\varkappa d}\, d\varkappa\, d\rho_z. \tag{23}$$

В ближней зоне имеем:

$$K(d) = \frac{k^2 v^2 L}{2n_{1,2}^2 (1 \pm u^{1/2})^2} \left\{ \frac{u}{(1 \pm u^{1/2})^2} \int\limits_0^\infty R_{zz}(d, \rho_z)\, d\rho_z + \int\limits_0^\infty F(d, \rho_z)\, d\rho_z \right\};$$

$$P(d) = \frac{k^2 v^2 L^3 \psi_{1,2}^2}{6n_{1,2}^2 (1 \pm u^{1/2})^2} \left\{ \frac{u}{(1 \pm u^{1/2})^2} \int\limits_0^\infty \Delta_\perp^2 R_{zz}(d, \rho_z)\, d\rho_z + \right. \tag{24}$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty \Delta_\perp^2 F(d, \rho_z)\, d\rho_z \right\}.$$

Здесь знак „+" перед $u^{1/2}$ относится к обыкновенной волне, а знак „—" к необыкновенной;

$$\psi_{1,2}=\frac{2(1-u-v)+uv(1\pm u^{1/2})}{4k\,(1-u)\,n_{1,2}};\quad n_{1,2}^2=1-\frac{v}{1\pm u^{1/2}};$$

$$\Delta_\perp=\frac{\partial^2}{\partial\rho_x^2}+\frac{\partial^2}{\partial\rho_y^2}.$$

4. Рассмотрим предельный случай сильных магнитных полей $u\gg 1$. Для этого случая приведем выражения лишь для относительных флюктуаций амплитуды и флюктуаций фазы.

Для обыкновенной волны

$$\left.\begin{matrix}K(d)\\ P(d)\end{matrix}\right\}=\frac{k^2v^2\sin^2\alpha L}{8n_1^2(1-v\cos^2\alpha)^4}\int\int_{-\infty}^{\infty}\{4\cos^2\alpha(1-v)^2[\sin^2\alpha W_{zz}(\varkappa,\rho_z)+$$
$$+\cos^2\alpha W_{yy}(\varkappa,\rho_z)]+\sin^2\alpha Q(\varkappa,\rho_z)\}\left[1\pm\frac{\sin[(g\varkappa_x^2+g'\varkappa_y^2)L]}{L(g\varkappa_x^2+g'\varkappa_y^2)}\right]\times \tag{25}$$
$$\times e^{-i\varkappa_y\beta\rho_z+i\varkappa d}\,d\varkappa d\rho_z,$$

а в ближней зоне

$$K(d)=\frac{k^2v^2\sin^2\alpha L}{4n_1^2(1-v\cos^2\alpha)^4}\int_0^\infty\{4\cos^2\alpha(1-v)^2[\sin^2\alpha R_{zz}(d_x,d_y-\beta\rho_z,\rho_z)+$$
$$+\cos^2\alpha R_{yy}(d_x,d_y-\beta\rho_z,\rho_z)]+\sin^2\alpha F(d_x,d_y-\beta\rho_z,\rho_z)\}\,d\rho_z;$$

$$P(d)=\frac{k^2v^2\sin^2\alpha L^3}{6n_1^2(1-v\cos^2\alpha)^4}\int_0^\infty\left(g\frac{\partial^2}{\partial\rho_x^2}+g'\frac{\partial^2}{\partial\rho_y^2}\right)^2\{4\cos^2\alpha(1-v)^2\times \tag{26}$$
$$\times[\sin^2\alpha R_{zz}(d_x,d_y-\beta\rho_z,\rho_z)+\cos^2\alpha R_{yy}(d_x,d_y-\beta\rho_z,\rho_z)]+$$
$$+\sin^2\alpha F(d_x,d_y-\beta\rho_z,\rho_z)\}\,d\rho_z;$$

$$g=\frac{1}{k(1-v)(1-v\cos^2\alpha)^{1/2}};\quad g'=\frac{1-v(1+\cos^2\alpha)}{k(1-v)^{1/2}(1-v\cos^2\alpha)^{1/2}};$$

$$\beta=\frac{v\sin 2\alpha}{1-v\cos^2\alpha}.$$

Эти результаты верны вне зависимости от поляризации среднего поля. Заметим, что $|\overline{\zeta_{x,y}^2(L)}|=\overline{\delta\varphi^2}\,|\overline{E}_{x,y}|^2$, где $\overline{\delta\varphi^2}$ берется для ближней зоны и, следовательно, может быть получена из первой формулы (25), если в ней положить $d=0$.

Для необыкновенной волны

$$\left.\begin{matrix}K(d)\\ P(d)\end{matrix}\right\}=\frac{k^2v^2L}{8u^2\sin^6\alpha}\int\int_{-\infty}^{\infty}\{4(v\cos^2\alpha\sin^2\alpha+v\cos^2\alpha-1)^2\,W_{yy}(\varkappa,\rho_z)+$$
$$+4v^2\cos^2\alpha\sin^6\alpha\,W_{zz}(\varkappa,\rho_z)+(2v-1)^2\sin^2\alpha\,Q(\varkappa,\rho_z)\}\times \tag{27}$$
$$\times\left[1\pm\frac{\sin(\varkappa^2L/k)}{\varkappa^2L/k}\right]e^{i\varkappa d}\,d\varkappa d\rho_z,$$

а в ближней зоне

$$K(d)=\frac{k^2v^2L}{2u^2\sin^6\alpha}\int\limits_0^\infty\{4\ (v\cos^2\alpha\sin^2\alpha+v\cos^2\alpha-1)^2R_{yy}(d,\ \rho_z)+$$
$$+4v^2\cos^2\alpha\sin^6\alpha R_{zz}(d,\ \rho_z)+(2v-1)^2\sin^2\alpha F(d;\ \rho_z)\}\ d\rho_z\ ; \tag{28}$$

$$P(d)=\frac{v^2L^3}{24u^2\sin^6\alpha}\int\limits_0^\infty\{\Delta_\perp^2\ [4\ (v\cos^2\alpha\sin^2\alpha+v\cos^2\alpha-1)^2R_{yy}(d,\ \rho_z)+$$
$$+4v^2\cos^2\alpha\sin^6\alpha R_{zz}(d,\ \rho_z)+(2v-1)^2\sin^2\alpha F(d,\ \rho_z)]\}\ d\rho_z\ . \tag{29}$$

Естественно, что формулы (27)—(29) применимы при не очень малых α.

5. Коэффициент затухания среднего поля мы получим (в отличие от работы [3]) непосредственно из энергетических соображений. Как известно [6], в отсутствие активных потерь и сторонних токов имеет место следующее равенство:

$$\operatorname{div}\operatorname{Re}[\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H}]=0. \tag{30}$$

Как легко проверить непосредственным дифференцированием, $|\partial E/\partial x|$, $|\partial E/\partial y|\ll|\partial E/\partial z|\sim q|E|$, вследствие чего из уравнений Максвелла $H_x\simeq\simeq-(qc/\omega)E_y$, $H_y\simeq(qc/\omega)...E_x, H_z\simeq 0$. Подставляя выражения для H_x и H_y в (30) и производя статистическое усреднение, получаем:

$$\frac{d}{dz}\left(\overline{|E_x^2|+|E_y^2|}\right)=\frac{d}{dz}\left(|\bar{E}_x|^2+|\bar{E}_y|^2\right)+\frac{d}{dz}\left(\overline{|\zeta_x|^2+|\zeta_y|^2}\right)=0. \tag{31}$$

При выводе (31) была учтена независимость вторых моментов компонент случайных полей от x и y, обусловленная однородностью задачи.

Из формулы (31) непосредственно следует, что

$$|\bar{E}_x|^2+|\bar{E}_y|^2+\overline{|\zeta_x|^2}+\overline{|\zeta_y|^2}=\text{const},$$

причем const в правой части является значение величины $|\bar{E}_x|^2+|\bar{E}_y|^2=I_0$ до вхождения в слой с флюктуациями концентрации и магнитного поля. Выражение (31) имеет смысл закона сохранения энергии.

Введем величину $\bar{I}=|\bar{E}_x|^2+|\bar{E}_y|^2$ и проинтегрируем формулу (31) по объему, заключенному между плоскостями z и $z+L$ (где L много меньше длины затухания), а затем статистически усредним полученное выражение. В результате имеем:

$$\bar{I}(z+L)-\bar{I}(z)=-\left(\overline{|\zeta_x^2(z+L)|+|\zeta_y^2(z+L)|}\right). \tag{32}$$

Поскольку рассматриваются лишь крупномасштабные неоднородности, рассеянием назад можно пренебречь по сравнению с рассеянием вперед. Это обстоятельство было использовано при вычислении (32).

Из формул предыдущего раздела для $\overline{|\zeta_x^2|}$ и $\overline{|\zeta_y^2|}$ и формулы (12) следует, что

$$\overline{|\zeta_x^2(z+L)|+|\zeta_y^2(z+L)|}=\delta IL. \tag{33}$$

Подставляя (33) в (32) и разлагая левую часть в ряд по степеням L, получим:

$$\frac{1}{\dot{I}}\frac{d\dot{I}}{dz} = -\delta; \qquad \dot{I} = \dot{I}_0 e^{-\delta z} . \tag{34}$$

Таким образом, коэффициент пропорциональности δ в формуле (33) имеет смысл обратной длины затухания по интенсивности.

Выражение (33) имеет смысл лишь при $L \ll \delta^{-1}$. Как следует из (31), для произвольной дистанции

$$\overline{|\zeta_x^2| + |\zeta_y^2|} = \dot{I}_0(1-e^{-\delta z}) . \tag{35}$$

Для $\alpha=\pi/2$ коэффициент затухания δ определяется соотношениями

$$\delta_1 = \frac{k^2v^2}{2n_1^2}\int\limits_0^\infty F(0,0,\rho_z)\, d\rho_z ;$$

$$\delta_2 = \frac{k^2v}{2n_2^2(1-u-v)^4}\left\{4u^2(1-v)^2\int\limits_0^\infty R_{yy}(0,0,\rho_z)\, d\rho_z + \right. \tag{36}$$

$$\left. + [uv+(1-v)(1-u-v)]^2\int\limits_0^\infty F(0,0,\rho_z)\, d\rho_z \right\},$$

для $\alpha=0$—соотношением

$$\delta_{1,2} = \frac{k^2v^2}{2n_{1,2}^2(1\pm u^{1/2})^2}\int\limits_0^\infty\left\{\frac{u}{(1\pm u^{1/2})^2} R_{zz}(0,0,\rho_z) + F(0,0,\rho_z)\right\}d\rho_z .$$

Индексы 1,2 относятся, как обычно, к обыкновенной и необыкновенной волне. Из формулы (12) следует, что квадрат модуля любой компоненты среднего поля затухает с дистанцией как $e^{-\delta z}$.

6. Покажем, что если ε_{ik}—медленно меняющаяся функция трех координат x, y, z, средний квадрат флюктуации фазы равен среднему квадрату относительной флюктуации амплитуды и отличается от среднего квадрата фазы в дальней зоне лишь множителем 1/2. Доказательство проводится аналогично тому, как это было сделано в работе [4].

Пусть рассеивается обыкновенная волна $\bar{E}_1=A_1(\boldsymbol{r})\, e^{iS_1(\boldsymbol{r})}$; тогда, как следует из формулы (4), $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}'(\boldsymbol{r})e^{iS_1(\boldsymbol{r})}$, а $\zeta_i(\boldsymbol{r})$ имеет такой вид:

$$\zeta_i(\boldsymbol{r}) = \int\Big\{T_{ik}^{(1)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\, j_k'(\boldsymbol{r}')\, e^{i[S_1(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})+S_1(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}')]} + \tag{37}$$

$$+T_{ik}^{(2)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\, j_k(\boldsymbol{r}')\, e^{i[S_2(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})+S_1(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}')]}\Big\}\, d\boldsymbol{r}',$$

где $T_{ik}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})=T_{ik}^{(1)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\, e^{iS_1(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})} + T_{ik}^{(2)}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\, e^{iS_2(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}$ —тензор Грина системы (3), $\boldsymbol{r}_0$—точка, из которой излучаются электромагнитные волны, $\boldsymbol{r}$—точка, в которой отыскивается поле. Очевидно, что при вычислении интеграла методом перевала, аналогично тому, как это делалось в [4], вторым членом в фигурных скобках можно пренебречь, так как величина $S_1(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}')+S_2(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$, вообще говоря, не имеет экстремума. Пренебрегая вторым членом, мы приходим снова к выражению для поля, фактически совпадающему с формулой (3.1) работы [4]. Для этого выражения доказательство сформулированного выше утверждения уже приведено в [4]. Приведенное доказательство без изменения переносится на рассеяние необыкновенной волны.

В заключение автор выражает благодарность С. И. Ханкиной за помощь при расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1 Ф. Г Басс, С. И. Ханкина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 384 (1960).
2. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, 619 (1960).
3. Э. А. Канер, Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 553 (1959).
4. Ф. Г. Басс, С. И Ханкина, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 216 (1960).
5. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, М., 1953.
6. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Сов. радио, М., 1957.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
21 января 1961 г.

PARAMETERS FLUCTUATIONS OF AN ELECTROMAGNETIC FIELD PROPAGATED THROUGH A MAGNETO-ACTIVE PLASMA WITH RANDOM FLUCTUATIONS OF ELECTRON DENSITY AND MAGNETIC FIELD

F. G. Bass

Fluctuations of an amplitude, phase and angles of arrival are investigated in the case of electromagnetic waves propagated through a layer of magneto-active plasma, containing electron density and magnetic field irregularities.