ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IV, № 3 РАДИОФИЗИКА 1961

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ, ПРОНИЗЫВАЕМОЙ ПОТОКОМ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ (РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ К НАПРАВЛЕНИЮ МАГНИТНОГО ПОЛЯ)

М. С. Ковнер

На основе метода кинетического уравнения рассматривается устойчивость системы по отношению к низкочастотным волнам. Приведено общее дисперсионное уравнение и найдены критерии нарастания и затухания в предельных случаях, а) когда влияние теплового движения на распространение волн и устойчивость системы несущественно и б) когда тепловая скорость частиц потока велика.

В большинстве работ, посвященных рассмотрению взаимодействия потока заряженных частиц с плазмой, исследуется устойчивость по отношению к высокочастотным возмущениям [1–8], т. е. таким возмущениям, для которых влиянием движения ионов на распространение можно пренебречь. Рассмотрение же устойчивости указанной выше системы по отношению к низкочастотным волнам, частота которых много меньше гирочастоты электронов и сравнима или даже значительно меньше гирочастоты или плазменной частоты ионов, проведено в опубликованных работах недостаточно полно. Так, в статье [9] исследуется квазигидродинамически условие устойчивости магнитогидродинамических волн при продольном распространении. Устойчивость низкочастотных продольных волн рассматривалась в работах [10, 11]. В статье [11], кроме того, было проведено кинетическое рассмотрение взаимодействия потоков заряженных частиц в случае, когда поперечные волны распространяются вдоль магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$.

В настоящей статье проводится кинетическое рассмотрение устойчивости потока заряженных частиц и плазмы по отношению к низкочастотным волнам, распространяющимся в направлении $\boldsymbol{k}$, образующем произвольный угол α с направлением постоянного магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$. Плазма и поток предполагаются неограниченными, квазинейтральными и однократно ионизированными. Поток частиц движется вдоль постоянного внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$.

В разделе 1 приводится общее дисперсионное уравнение, определяющее распространение волн. В разделе 2 исследуется случай, когда влиянием теплового движения на устойчивость системы можно пренебречь. И, наконец, в третьем разделе рассматривается ряд случаев, когда необходим учет теплового движения частиц.

1. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Исходим из системы линеаризованных кинетических уравнений и уравнений электродинамики с самосогласованным полем. Проводя вычисления, аналогичные сделанным в работах [12–14] (см. также [7]), и полагая все физические величины Ф разложенными по плоским волнам:

$\Phi\sim e^{-i(\omega t-kr)}$, находим, пренебрегая соударениями, дисперсионное уравнение в виде:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.1}$$

В уравнении (1.1)

$$\begin{gathered} \varepsilon_{xx} = a_{xx} + \omega^2 - k^2c^2\cos^2\alpha; \qquad \varepsilon_{xy} = a_{xy}; \\ \varepsilon_{xz} = a_{xz} + k^2c^2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \varepsilon_{yx} = a_{yx}; \\ \varepsilon_{yy} = a_{yy} + \omega^2 - k^2c^2; \qquad \varepsilon_{yz} = a_{yz}; \\ \varepsilon_{zx} = a_{zx} + k^2c^2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \varepsilon_{zy} = a_{zy}; \qquad \varepsilon_{zz} = a_{zz} + \omega^2 - k^2c^2\sin^2\alpha, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где

$$a_{jp} = -i4\pi\omega\sum_{\gamma=1}^{4}\int e_\gamma v_{j\gamma} C_{p\gamma}\, d\boldsymbol{v}_\gamma. \tag{1.3}$$

В (1.3)

$$d\boldsymbol{v}_\gamma \equiv v_\rho\, dv_\rho\, dv_z d\varphi;$$

$$C_{xy} = a(\varphi)K_\gamma\left(1-\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_{0\gamma}}{\omega}\right)v_{\gamma\rho}\left\{\frac{\exp(2\pi\varepsilon_\gamma)}{1-\exp(2\pi\varepsilon_\gamma)}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi'}{a(\varphi')}d\varphi' + \int_0^{\varphi}\frac{\cos\varphi'}{a(\varphi')}d\varphi'\right\};$$

$$\begin{gathered} C_{xz} = a(\varphi)K_\gamma\left\{\frac{\exp(2\pi\varepsilon_\gamma)}{1-\exp(2\pi\varepsilon_\gamma)}\int_0^{2\pi}\left(v_{z\gamma}-v_{0\gamma}+\frac{v_{0\gamma}}{\omega}v_{\rho\gamma}k\sin\alpha\cos\varphi'\right)\frac{d\varphi'}{a(\varphi')} + \right. \\ \left. + \int_0^{\varphi}\left(v_{z\gamma}-v_{0\gamma}+\frac{v_{0\gamma}}{\omega}v_{\rho\gamma}k\sin\alpha\cos\varphi'\right)\frac{d\varphi'}{a(\varphi')}\right\}; \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered} K_\gamma = -\frac{e}{\omega_{H\gamma}}\frac{N_\gamma}{T_\gamma}\left(\frac{m_\gamma}{2\pi T_\gamma}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{m_\gamma(\boldsymbol{v}_\gamma-\boldsymbol{v}_{0\gamma})^2}{2T_\gamma}\right\}; \\ a(\varphi) = \exp(\varepsilon_\gamma\varphi + \chi_\gamma\sin\varphi); \\ \varepsilon_\gamma = -\frac{ikv_{z\gamma}-i\omega}{\omega_{H\gamma}}; \\ \chi_\gamma = -\frac{kv_{\rho\gamma}\sin\alpha}{\omega_{H\gamma}}. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Величина $C_{y\gamma}$ получается из выражения для $C_{x\gamma}$ заменой $\cos\varphi$ на $\sin\varphi$. В написанных формулах величины, отмеченные индексами $\gamma=1, 2, 3, 4$, относятся соответственно к ионам основной плазмы, электронам основной плазмы, ионам и электронам потока. Кроме того, введены обозначения $\omega_{H1}=\omega_{H3}\equiv-\Omega_H=-eH_0/Mc$ (где e и M—заряд и масса иона), $\omega_{H2}=\omega_{H4}\equiv\omega_H=eH_0/mc$ (где $-e$ и m — заряд и масса электрона), N_γ, T_γ — концентрация и температура соответствующего сорта частиц, причем температура написана в энергетических единицах, $\boldsymbol{k}$—волновой вектор возмущения, лежащий в плоскости x, z; направление магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$ и средних скоростей потоков частиц $\boldsymbol{v}_{0\gamma}$ принято за ось z. При написании выражений (1.4) предполагалось, что в системах координат, в которых средняя скорость частиц данного сорта равна нулю, функции распределения максвелловские.

Так как мы считаем все физические величины разложенными по плоским волнам, то наличие при действительных значениях волнового вектора $\boldsymbol{k}$ комплексных решений дисперсионного уравнения (1.1) будет свидетельствовать о нарастании или затухании волн: $\exp(-i\omega t) = \exp\{-\operatorname{Re}\omega + \operatorname{Im}\omega\}\, t$; при $\operatorname{Im}\omega > 0$ система будет неустойчива относительно малых возмущений (см., например, [3]).

Дисперсионное уравнение (1.1) имеет весьма общий характер и его исследование очень сложно. Поэтому оказывается необходимым ввести ряд упрощающих предположений. Прежде всего будем считать выполненным условие

$$\frac{v_{T\gamma}^2}{c^2}\frac{\omega^2}{\omega_{H\gamma}^2}n^2\sin^2\alpha = \frac{k^2 v_{T\gamma}^2}{\omega_{H\gamma}^2}\sin^2\alpha \ll 1\,, \tag{1.6}$$

где $v_{T\gamma}^2 = T_\gamma / m_\gamma$, $n = ck/\omega$—показатель преломления среды. Параметр $v_{T_\gamma}^2/c^2$ предполагается весьма малым: так, при $T_2 \ll 10^{10}\,{}^\circ\mathrm{K}$ $v_{T2}^2/c^2 \ll 1$. Неравенство (1.6) выполняется в случае достаточно сильного магнитного поля. Оно, как правило, нарушается лишь для слабо анизотропной плазмы ($\omega_{H\gamma}^2/\omega^2 \ll 1$), когда эффекты, связанные с наличием магнитного поля, проявляются относительно слабо [15]. Переход от полученных ниже формул к изотропному случаю можно провести аналогично тому, как это делалось в [7].

При выполнении условия (1.6) для выражений a_{jp} получаем:

$$a_{xx} = -\frac{1}{2k\cos\alpha}\sum_\gamma \frac{\omega_{0\gamma}^2(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_{0\gamma})}{v_{T\gamma}}\Big\{B(\beta_\gamma^{+1}) + B(\beta_\gamma^{-1}) -$$

$$- \frac{k^2 v_{T\gamma}^2}{\omega_{H\gamma}^2}\sin^2\alpha\left[B(\beta_\gamma^{+1}) + B(\beta_\gamma^{-1}) - B(\beta_\gamma^{+2}) - B(\beta_\gamma^{-2})\right]\Big\};$$

$$a_{xy} = -a_{yx} = -\frac{i}{2k\cos\alpha}\sum_\gamma \frac{\omega_{0\gamma}^2(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_{0\gamma})}{v_{T\gamma}}\Big\{B(\beta_\gamma^{+1}) - B(\beta_\gamma^{-1}) -$$

$$- \frac{k^2 v_{T\gamma}^2}{\omega_{H\gamma}^2}\sin^2\alpha\left[2B(\beta_\gamma^{+1}) - 2B(\beta_\gamma^{-1}) - B(\beta_\gamma^{+2}) + B(\beta_\gamma^{-2})\right]\Big\};$$

$$a_{xz} = a_{zx} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2k\cos\alpha}\sum_\gamma \frac{\omega_{0\gamma}^2}{v_{T\gamma}\,\omega_{H\gamma}}(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_{0\gamma})\left[(\omega + \omega_{H\gamma})B(\beta_\gamma^{+1}) - (\omega - \omega_{H\gamma})B(\beta_\gamma^{-1})\right];$$

$$a_{yy} = -\frac{1}{2k\cos\alpha}\sum_\gamma \frac{\omega_{0\gamma}^2(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_{0\gamma})}{v_{T\gamma}}\Big\{B(\beta_\gamma^{+1}) + B(\beta_\gamma^{-1}) - \tag{1.7}$$

$$- \frac{k^2 v_{T\gamma}^2}{\omega_{H\gamma}^2}\sin^2\alpha\left[3\langle B(\beta_\gamma^{+1}) + B(\beta_\gamma^{-1})\rangle - B(\beta_\gamma^{+2}) - B(\beta_\gamma^{-2}) - 4B(\beta_\gamma^{0})\right]\Big\};$$

$$a_{yz} = -a_{zy} = -\frac{i\operatorname{tg}\alpha}{2k\cos\alpha}\sum_\gamma \frac{\omega_{0\gamma}^2}{v_{T\gamma}\omega_{H\gamma}}(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_{0\gamma})\left[(\omega + \omega_{H\gamma})B(\beta_\gamma^{+1}) + \right.$$

$$\left. + (\omega - \omega_{H\gamma})B(\beta_\gamma^{-1}) - 2\omega B(\beta_\gamma^{0})\right];$$

$$a_{zz} = -\frac{1}{2k^3\cos^3\alpha}\sum_\gamma \frac{\omega_{0\gamma}^2}{v_{T\gamma}^3}\Big\{-2\omega^2\left[kv_{T\gamma}\cos\alpha - (\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_{0\gamma})\,B(\beta_\gamma^0)\right] -$$

$$-\frac{k^2 v_{T\gamma}^2}{\omega_{H\gamma}^2}(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_{0\gamma})\sin^2\alpha\left[2\omega^2 B(\beta_\gamma^0) - (\omega + \omega_{H\gamma})^2 B(\beta_\gamma^{+1}) - (\omega - \omega_{H\gamma})^2 B(\beta_\gamma^{-1})\right]\Big\}.$$

В формулах (1.7) введены обозначения:

$$\omega_{0\gamma}^2 = 4\pi N_\gamma e^2/m_\gamma; \quad m_1 = m_3 = M; \quad m_2 = m_4 = m. \qquad (1.8)$$

Для функции B, используя преобразования Фока [4, 16, 17], имеем:

$$B(\beta_\gamma^p) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\beta_\gamma^p)^2\right\}\int\limits_{i\infty}^{\beta_\gamma^p} e^{x^2/2}\,dx;$$

$$\beta_\gamma^p = -\frac{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_{0\gamma} + p\omega_{H\gamma}}{kv_{T\gamma}\cos\alpha} \qquad (p = 0, \pm 1, \pm 2). \qquad (1.9)$$

В предельных случаях [4]

$$B(\beta) \simeq -i\sqrt{\pi/2}\,e^{-\beta^2/2} + \beta - \frac{\beta^3}{3} + \cdots \qquad (|\beta| \ll 1);$$

$$B(\beta) \simeq -i\sqrt{\pi/2}\,e^{-\beta^2/2} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^3} + \cdots \qquad (|\beta| \gg 1). \qquad (1.10)$$

2. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОЛН ПРИ $|\beta_\gamma| \gg 1$

1. В этом разделе будет рассмотрен случай, когда тепловым движением частиц можно пренебречь. Это означает, что во втором из асимптотических представлений (1.10) мы не учитываем выражение, содержащее экспоненту, и ограничиваемся лишь первым членом разложения. Поскольку в рассматриваемых ниже случаях неустойчивость связана либо с излучением Вавилова—Черенкова, либо с магнитотормозным излучением в области аномального допплер-эффекта (см., например, [18]) и указанные экспоненциальные члены имеют вид:

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_{0\gamma}}{kv_{T\gamma}\cos\alpha}\right)^2\right\}, \qquad \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_{0\gamma} + |\omega_{H\gamma}|}{kv_{T\gamma}\cos\alpha}\right)^2\right\},$$

то пренебрежение первым из написанных выражений допустимо, когда фазовая скорость волны значительно отличается от средних скоростей потоков и „ширина“ функции распределения много меньше фазовой скорости волны:

$$\left|\frac{\omega}{k} - v_{0\gamma}\cos\alpha\right| \gg v_{T\gamma}\cos\alpha.$$

Совершенно аналогично неучет второго члена, очевидно, возможен тогда, когда фазовая скорость волны, смещенная на величину отношения гирочастоты частиц данного сорта $\omega_{H\gamma}$ к волновому вектору $\boldsymbol{k}$, существенно отличается от средних скоростей потоков по сравнению со средними тепловыми скоростями частиц, т. е. когда

$$\left|\frac{\omega}{k}+\frac{|\omega_{H\gamma}|}{k}-v_{0\gamma}\cos\alpha\right|\gg v_{T\gamma}\cos\alpha\,.$$

При этом справедливо гидродинамическое описание.

Используя асимптотические разложения (1.10), получаем из выражений (1.7):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \sum_{\gamma=1}^{4}\frac{\omega_{0\gamma}^2(\omega-kv_{0\gamma})^2}{(\omega-kv_{0\gamma})^2-\omega_{H\gamma}^2}-\omega^2+k^2c^2\cos^2\alpha;\\
\varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_{yx}=-i\sum_{\gamma=1}^{4}\frac{\omega_{0\gamma}^2\,\omega_{H\gamma}(\omega-kv_{0\gamma})}{(\omega-kv_{0\gamma})^2-\omega_{H\gamma}^2};\\
\varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx}=\operatorname{tg}\alpha\sum_{\gamma=1}^{4}\frac{\omega_{0\gamma}^2(\omega-kv_{0\gamma})kv_{0\gamma}}{(\omega-kv_{0\gamma})^2-\omega_{H\gamma}^2}-k^2c^2\sin\alpha\cos\alpha;\\
\varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{xx}+k^2c^2\sin^2\alpha;\\
\varepsilon_{yz} &= -\varepsilon_{zy}=i\operatorname{tg}\alpha\sum_{\gamma=1}^{4}\frac{\omega_{0\gamma}^2\,\omega_{H\gamma}^2\,kv_{0\gamma}}{(\omega-kv_{0\gamma})^2-\omega_{H\gamma}^2};\\
\varepsilon_{zz} &= \sum_{\gamma=1}^{4}\frac{\omega_{0\gamma}^2\omega^2}{(\omega-kv_{0\gamma})^2}-\omega^2+k^2c^2\sin^2\alpha+\sum\frac{\omega_{0\gamma}^2(kv_{0\gamma})^2}{(\omega-kv_{0\gamma})^2-\omega_{H\gamma}^2}\operatorname{tg}^2\alpha.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

Пусть квазинейтральная неподвижная плазма пронизывается квазинейтральным потоком заряженных частиц, т. е. в соотношениях (2.1)

$$\begin{aligned}
N_1 &= N_2\equiv N; & N_3 &= N_4\equiv N_s;\\
v_{01} &= v_{02}\equiv 0; & v_{03} &= v_{04}\equiv v_0.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

Далее считаем выполненным неравенство

$$\omega\ll\Omega_H\,.\tag{2.3}$$

Условие (2.3) означает, что мы решаем задачу в приближении магнитогидродинамических волн. Если кроме неравенства (2.3) потребовать еще выполнения условия

$$|\omega-kv_0|\ll\Omega_H\,,$$

то из уравнения (1.1), с учетом (2.1), (2.3) и соотношений

$$\omega_{02}^2=\omega_{01}^2\frac{M}{m};\qquad \omega_{04}^2=\omega_{03}^2\frac{M}{m};\qquad \omega_H/\Omega_H=\frac{M}{m}\gg 1,\tag{2.4}$$

получаем дисперсионное уравнение в виде:

$$\left[k^2c^2-\frac{\omega_{01}^2\omega^2}{\Omega_H^2}-\frac{\omega_{03}^2(\omega-kv_0)^2}{\Omega_H^2}\right]\left\{\frac{\omega_{01}^2\,\omega^2}{\Omega_H^2}-k^2c^2\cos^2\alpha+\right.$$
$$\left.+\frac{\omega_{04}^2\,\omega^2}{(\omega-kv_0)^2\omega_{02}^2}\left(\frac{\omega_{01}^2\omega^2}{\Omega_H^2}-k^2c^2\cos^2\alpha\right)+\frac{\omega_{03}^2}{\Omega_H^2}\left[(\omega-kv_0)^2+\frac{\omega_{04}^2\omega^2}{\omega_{02}^2}\right]\right\}=0.\tag{2.5}$$

При написании уравнения (2.5) было учтено, что в рассматриваемом случае

$$n^2\gg 1;\qquad \omega_{02}^2=4\pi Ne^2/m\gg\omega^2.\tag{2.6}$$

Таким образом, исходное уравнение распадается на произведение двух сомножителей. Приравнивая первый из них нулю:

$$\frac{\omega_{01}^2\,\omega^2}{\Omega_H^2}+\frac{\omega_{03}^2\,(\omega-\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0)^2}{\Omega_H^2}-k^2c^2=0, \tag{2.7}$$

находим:

$$\frac{\omega}{k}=v_0\frac{\omega_{03}^2}{\omega_{01}^2+\omega_{03}^2}\cos\alpha\pm\sqrt{\frac{(\omega_{01}^2+\omega_{03}^2)c^2\Omega_H^2-\omega_{01}^2\,\omega_{03}^2\,v_0^2\cos^2\alpha}{(\omega_{01}^2+\omega_{03}^2)^2}}. \tag{2.8}$$

Отсюда следует, что неустойчивость возникает при

$$v_0>\frac{H_0}{\sqrt{4\pi MN_{\text{эфф}}}\cos\alpha}, \tag{2.9}$$

где

$$N_{\text{эфф}}=\frac{NN_s}{N+N_s}. \tag{2.10}$$

Результаты (2.8) и (2.9) при $\alpha=0$ совпадают с полученными в работе [9].

Исследование второго сомножителя в формуле (2.5) значительно упрощается при выполнении неравенств:

$$|\omega-\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0|^2N_s\ll\omega^2N,\qquad N_s^2\ll N^2. \tag{2.11}$$

Тогда указанное выражение, в свою очередь, распадается на два сомножителя, приравнивая каждый из которых нулю, получаем:

$$\frac{\omega_{01}^2\,\omega^2}{\Omega_H^2}-k^2c^2\cos^2\alpha=0; \tag{2.12}$$

$$\omega_{02}^2+\frac{\omega_{04}^2\omega^2}{(\omega-\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0)^2}=0. \tag{2.13}$$

Из уравнения (2.12) видно, что в рассматриваемом приближении необыкновенная волна устойчива и для нее имеет место известное соотношение [19]:

$$\frac{\omega}{k}=\frac{H_0}{\sqrt{4\pi NM}\cos\alpha}. \tag{2.14}$$

Отметим также, что и для обыкновенной волны из уравнения (2.8) следует, что она устойчива при малых концентрациях потока, когда $N_s/N\to0$. Действительно, при $N_s\to0$ из (2.7) имеем:

$$\frac{\omega}{k}=\frac{H_0}{\sqrt{4\pi NM}}. \tag{2.15}$$

Исходя из уравнения (2.8), можно оценить нижнюю границу концентрации потока, при которой возникает неустойчивость обыкновенной волны. Для нерелятивистских потоков $c^2/v_0^2\gg1$, откуда на основании (2.8) нижняя граница концентрации потока определяется неравенством:

$$N_s>N\frac{\Omega_H^2}{\Omega_H^2+\omega_{01}^2\cos^2\alpha}. \tag{2.16}$$

Из рассмотрения уравнения (2.13) получаем, что

$$\frac{\omega}{k} = v_0 \frac{N}{N+N_s} \cos\alpha \left\{1 \pm i\sqrt{\frac{N_s}{N}}\right\}. \tag{2.17}$$

Таким образом, при наличии потока частиц наряду с магнитогидродинамическими волнами становится возможным распространение еще одной низкочастотной волны ($\omega \ll \Omega_H$, ω_{02}), причем указанная волна может быть неустойчивой.

2. Исследуем неустойчивость низкочастотных волн в области аномального эффекта Допплера. Будем считать выполненными условия

$$|\mu| \equiv |\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0 + \Omega_H| \ll \omega, \ \Omega_H; \qquad \omega^2 N \gg |\mu|^2 N_s. \tag{2.18}$$

Тогда из уравнения (1.1) с учетом соотношений (2.1) находим дисперсионное уравнение:

$$(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0 + \Omega_H)\left[k^4c^4\cos^2\alpha + k^2c^2\frac{\omega_{01}^2\,\omega^2}{\omega^2-\Omega_H^2}(1+\cos^2\alpha) - \right.$$
$$\left. - \frac{\omega_{01}^4\,\omega^4}{\Omega_H^2\,(\omega^2-\Omega_H^2)}\right] = \omega_{03}^2\Omega_H\left[\frac{\omega_{01}^2\,\omega^2}{\Omega_H(\omega-\Omega_H)} - \frac{k^2c^2(1+\cos^2\alpha)}{2}\right], \tag{2.19}$$

справедливое при условиях

$$\frac{\omega^2}{\omega^2-\Omega_H^2}\,\mathrm{tg}^2\alpha(1+\cos^2\alpha) \ll \frac{M}{m}; \qquad \frac{\omega^2}{\Omega_H^2} \ll \frac{c^2}{v_{\text{мг}}^2}, \tag{2.20}$$

где $v_{\text{мг}}^2 = H_0^2/4\pi NM$.

Первое из неравенств (2.20) справедливо в широком диапазоне частот. Оно нарушается лишь при углах α, очень близких к $\pi/2$, и частотах ω, достаточно близких к гирочастоте ионов Ω_H. Второе из неравенств (2.20) справедливо даже тогда, когда ω значительно превосходит Ω_H, так как обычно $v_{\text{мг}}^2 \ll c^2$ [19].

В нулевом приближении при пренебрежении членом, содержащим ω_{03}^2, получается уравнение для необыкновенной и обыкновенной волн:

$$k^4c^4\cos^2\alpha + k^2c^2\frac{\omega_{01}^2\,\omega^{(0)2}}{\omega^{(0)2}-\Omega_H^2}(1+\cos^2\alpha) - \frac{\omega_{01}^4\,\omega^{(0)4}}{\Omega_H^2(\omega^{(0)2}-\Omega_H^2)} = 0 \tag{2.21}$$

(в уравнении (2.21) индекс$_{(0)}$ указывает порядок приближения). Из (2.21) имеем:

$$(k^2c^2)_{1,2} = -\frac{\omega_{01}^2\,\omega^{(0)2}}{2(\omega^{(0)2}-\Omega_H^2)\cos^2\alpha}\left(1+\cos^2\alpha \mp \sqrt{\sin^4\alpha + 4\frac{\omega^{(0)2}}{\Omega_H^2}\cos^2\alpha}\right), \tag{2.22}$$

откуда следует, в частности, что

$$\begin{aligned} &(k^2c^2)_1 > 0 \qquad \text{при любом } \omega; \\ &(k^2c^2)_2 \begin{cases} > 0 & \text{при} \quad \omega < \Omega_H; \\ < 0 & \text{при} \quad \omega > \Omega_H. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Кроме (2.22) в нулевом приближении возможно решение

$$\omega^{(0)} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0 + \Omega_H = 0. \tag{2.24}$$

Решая уравнение (2.19) в следующем приближении, нетрудно увидеть, что неустойчивость возможна лишь при одновременном выполнении условий (2.21) и (2.24). Обозначая частоту ω в следующем приближении через

$$\omega^{(1)} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0 - \Omega_H + \mu \tag{2.25}$$

и разлагая левую часть уравнения (2.19) в ряд около частоты $\omega^{(0)} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0 - \Omega_H$, получаем:

$$\mu_j^2 = (-1)^j \frac{\omega_{03}^2 \Omega_H}{2\cos\alpha} \cdot \frac{k_j^2 c^2 (1+\cos^2\alpha) + 2\omega_{01}^2 \omega^2/\Omega_H (\omega - \Omega_H)}{[(k^2c^2)_1 - (k^2c^2)_2]\, \partial (k^2c^2)_{j,\ \omega=\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0-\Omega_H} / \partial\omega} \tag{2.26}$$

$$(j = 1,2).$$

Производя подстановку $(k^2c^2)_j$ из (2.22), можно убедиться, что в первом приближении поправка к частоте всегда мнимая:

$$\omega^{(1)} = \omega^{(0)} \pm i\,|\mu|, \tag{2.27}$$

т. е. всегда в области частот, где $(k^2c^2)_j > 0$, возникает неустойчивость. В частности, при $\alpha = 0$

$$\frac{\mu_1}{\Omega_H} = \pm i \sqrt{\frac{N_s}{N} \frac{(\omega + \Omega_H)^2}{2\omega\Omega_H + \omega^2}}; \qquad \mu_2 = 0. \tag{2.28}$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОЛН В СЛУЧАЕ, КОГДА ТЕПЛОВОЕ ДВИЖЕНИЕ В ПОТОКЕ СУЩЕСТВЕННО

1. Учет влияния теплового движения может значительно изменить картину распространения волн и характер устойчивости. Как известно, при рассмотрении неподвижной плазмы в отсутствие потока заряженных частиц становится возможным распространение (кроме обыкновенной и необыкновенной волн) еще одной волны—плазменной [19]. Кроме того, при распространении волн появляется специфическое поглощение Ландау [12], связанное с тем, что фазовая скорость волны „находится" за максимумом функции распределения [3, 20]* и работа, совершаемая волной над заряженными частицами, превосходит энергию, которую более быстрые частицы (электроны, ионы) отдают волне. Учет теплового движения в потоке приводит к размыванию „резонансов", т. е. при достаточно сильном тепловом движении члены в дисперсионном уравнении, содержащие в знаменателе выражения $(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0)$, $(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0 \pm \omega_{H\gamma})$, исчезают. Но поскольку функция распределения имеет два максимума (рассматривается, как отмечалось выше, максвелловское распределение частиц по скоростям в сопровождающих системах отсчета), то при фазовой скорости, меньшей чем скорость v_0, соответствующая максимуму функции распределения потока, последний будет отдавать энергию волне (см., например, [18]). Если эта энергия превосходит энергию, диссипирующую в основной плазме, то амплитуда волны будет нарастать. Роль неподвижной плазмы при этом сводится к тому, что, с одной стороны, она выполняет роль замедляющей системы ($v_ф < c$), а с другой стороны, она поглощает энергию. В случае распространения высокочастотных волн указанный вопрос рассматривался в работах [8, 18].

В настоящем разделе мы исследуем случай, когда влияние теплового движения в потоке существенно, а неподвижную плазму можно считать „холодной". Это предположение выполняется тем точнее, чем ближе расположена фазовая скорость волны к скорости, соответ-

* Для экспоненциальных членов (1.10), содержащих $\omega + p\omega_{H\gamma}$, сказанное выше относится не к фазовой скорости ω/k, а к фазовой скорости, смещенной на величину $\omega_{H\gamma}/k$, где $\omega_{H\gamma}$—гирочастота частиц сорта γ.

ствующей максимуму функции распределения потока, и чем на большие „расстояния“ разнесены максимумы функций распределения потока и основной плазмы*. Рассмотрение влияния теплового движения в основной плазме на низкочастотные волны будет проведено в другой статье.

2. Рассмотрим случай, когда фазовая скорость волны близка к скорости $\boldsymbol{v}_0$ и интенсивность теплового движения в потоке велика:

$$|\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0| \ll kv_{T3},\ kv_{T4}\,, \tag{3.1}$$

и в то же время фазовая скорость много больше средней тепловой скорости ионов и электронов плазмы. При этом величины ε_{xx}, ε_{xy}, ε_{xz} будут также описываться соотношениями (2.1), а в ε_{yy}, ε_{yz}, ε_{zz} все, что относится к основной плазме, останется без изменений. Члены же, относящиеся к потоку, изменятся. Считая выполненными неравенства (2.4), (2.6) и (2.20), имеем для ε_{ik}:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\omega_{01}^2\,\omega^2}{\omega^2 - \Omega_H^2} + k^2c^2\cos^2\alpha; \qquad \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = i\,\frac{\omega_{01}^2\,\omega^3}{\Omega_H\,(\omega^2 - \Omega_H^2)}\,;$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = -k^2c^2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx} + k^2c^2\sin^2\alpha;$$

$$\varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{zy} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0)\,\omega_{03}^2\,\omega\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\Omega_H\,kv_{T3}\cos\alpha}\,; \tag{3.2}$$

$$\varepsilon_{zz} = \omega_{02}^2 - \frac{\omega_{03}^2\omega^2}{(kv_{T3}\cos\alpha)^2}\,\frac{T_3 + T_4}{T_4} + k^2c^2\sin^2\alpha - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega_{03}^2\omega^2\,(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0)}{(kv_{T3}\cos\alpha)^3}\,.$$

Подставляя приведенные значения ε_{ik} в уравнение (1.1) и пренебрегая членами порядка $(kv_{T3}\cos\alpha/\Omega_H)^2$ по сравнению с единицей, получаем дисперсионное уравнение:

$$\left[\omega_{02}^2 - \frac{\omega_{03}^2\,\omega^2}{k^2v_{T3}^2\cos^2\alpha}\left(1 + \frac{T_3}{T_4}\right) - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega_{03}^2\,\omega^2\,(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0)}{(kv_{T3}\cos\alpha)^3}\right]\times$$
$$\times\left[k^4c^4\cos^2\alpha + k^2c^2\,\frac{\omega_{01}^2\,\omega^2}{\omega^2 - \Omega_H^2}\,(1 + \cos^2\alpha) - \frac{\omega_{04}^2\,\omega^4}{\Omega_H^2(\omega^2 - \Omega_H^2)}\right] = 0. \tag{3.3}$$

Таким образом, дисперсионное уравнение распалось на два сомножителя. Рассмотрим первый сомножитель. В нулевом приближении, пренебрегая членом с мнимой единицей по сравнению со вторым слагаемым, получаем:

$$\frac{\omega^{(0)}}{k} = \sqrt{\frac{T_4}{T_3 + T_4}}\,\frac{\omega_{02}}{\omega_{03}}\,v_{T3}\cos\alpha = \sqrt{\frac{M}{m}\,\frac{N}{N_s}\,\frac{T_4}{T_3 + T_4}}\,v_{T3}\cos\alpha\,. \tag{3.4}$$

В следующем приближении добавка к частоте оказывается мнимой:

$$\omega^{(1)} = \omega^{(0)} - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\omega^{(0)}\,\frac{T_4}{T_3 + T_4}\,\frac{\omega^{(0)} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0}{kv_{T3}\cos\alpha}\,. \tag{3.5}$$

Отсюда следует, что при $\omega^{(0)} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0 < 0$ возникает неустойчивость.

Из равенства нулю второго сомножителя в (3.3) следует, что

* См. сноску на стр. 448.

в рассматриваемом приближении необыкновенная и обыкновенная волны устойчивы.

В следующем приближении, сохраняя в (3.2) члены порядка $(kv_{T3}\cos\alpha/\Omega_H)^2$ по сравнению с единицей, находим, что

$$\left|\frac{\Delta\omega_{1,2}}{\omega}\right| = \left|\frac{\omega^{(1)} - \omega^{(0)}}{\omega^{(0)}}\right| \sim \frac{m}{M}\frac{N_s}{N}\frac{\omega^2}{\Omega_H^2}\frac{\omega^{(0)} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0}{kv_{T3}\cos\alpha}\sin^2\alpha \ll 1, \tag{3.6}$$

т. е. добавка к частоте весьма мала.

3. Наконец, рассмотрим случай неустойчивости в области аномального эффекта Допплера, когда необходимо учитывать тепловое движение ионов потока. Пусть выполнено условие

$$|\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0 + \Omega_H| \ll kv_{T3}\cos\alpha; \tag{3.7}$$

влияние теплового движения в основной плазме и теплового движения электронов потока не учитывается. Действительно, из (3.7) и условия, что фазовая скорость волны много больше средней скорости теплового движения частиц, следует:

$$\begin{gathered}|\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_{0\gamma}| \gg kv_{T\gamma}\cos\alpha \qquad (\gamma = 1, 2, 3, 4);\\ |\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0 \pm \omega_H| \gg kv_{T4}\cos\alpha;\\ |\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0 - \Omega_H| \gg kv_{T3}\cos\alpha,\end{gathered} \tag{3.8}$$

так что в выражениях для ε_{ik} (2.1) все величины, относящиеся к неподвижной плазме и электронам потока, остаются без изменений. Величины же, описывающие ионы потока, найдем с помощью асимптотического разложения (1.10):

$$\begin{gathered}\varepsilon_{xx} = \frac{\omega_{01}^2\,\omega^2}{\omega^2 - \Omega_H^2} + k^2c^2\cos^2\alpha + i\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{\omega_{03}^2\,\Omega_H}{kv_{T3}\cos\alpha};\\ \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = i\,\frac{\omega_{01}^2\,\omega^3}{\Omega_H(\omega^2 - \Omega_H^2)} + \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{\omega_{03}^2\,\Omega_H}{kv_{T3}\cos\alpha};\\ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx} + k^2c^2\sin^2\alpha;\\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = -i\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{\omega_{03}^2(\omega + \Omega_H)}{kv_{T3}\cos\alpha}\operatorname{tg}\alpha + k^2c^2\sin\alpha\cos\alpha;\\ \varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{zy} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{\omega_{03}^2(\omega + \Omega_H)}{kv_{T3}\cos\alpha}\operatorname{tg}\alpha;\\ \varepsilon_{zz} = \omega_{02}^2 + k^2c^2\sin^2\alpha.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Подставляя ε_{ik} в уравнение (1.1) и полагая $N_s \ll N$, получаем дисперсионное уравнение:

$$\begin{gathered}k^4c^4\cos^2\alpha + k^2c^2\,\frac{\omega_{01}^2\,\omega^2}{\omega^2 - \Omega_H^2} - \frac{\omega_{01}^4\,\omega^4}{\Omega_H^2(\omega^2 - \Omega_H^2)} +\\ + i\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{\omega_{03}^2\,\Omega_H}{kv_{T3}\cos\alpha}\left\{k^2c^2(1 + \cos^2\alpha) + \frac{2\omega_{01}^2\,\omega^2}{\Omega_H(\omega - \Omega_H)}\right\} = 0.\end{gathered} \tag{3.10}$$

Отсюда, поступая аналогично тому, как это делалось выше, полагая в нулевом приближении

$$[k^2c^2 - (k^2c^2)_1]\,[k^2c^2 - (k^2c^2)_2]\cos^2\alpha = 0 \tag{3.11}$$

(где $(k^2c^2)_j$ — корни уравнения (3.10) в пренебрежении мнимым слагаемым) и считая, что частота, найденная в следующем приближении, удовлетворяет условию

$$\left|\frac{\omega^{(1)}-\omega^{(0)}}{\omega^{(0)}}\right| \ll 1, \tag{3.12}$$

находим добавку к частоте $\omega^{(0)}$ в виде:

$$\Delta\omega_j = \omega^{(1)}-\omega^{(0)} = i\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_{03}^2\Omega_H}{kv_{T3}\cos\alpha}\left[(k^2c^2)_j(1+\cos^2\alpha)+\frac{2\omega_{01}^2\omega^2}{\Omega_H(\omega-\Omega_H)}\right]\times$$
$$\times\left\{[(k^2c^2)_j-(k^2c^2)_i]\frac{\partial}{\partial\omega}(k^2c^2)_j\right\}^{-1}_{\omega=kv_0-\Omega_H} \tag{3.13}$$
$$(i,\ j=1,2;\qquad i\neq j).$$

Отсюда можно получить, что в рассматриваемом приближении $\mathrm{Im}\,\omega>0$ и будет иметь место неустойчивость.

Из (3.13) для $\alpha=0$ получаем:

$$(\Delta\omega/\omega)_2 = 0;$$
$$(\Delta\omega/\omega)_1 = i\sqrt{\pi/2}\quad \omega_{03}^2(\omega+\Omega_H)^2\,\Omega_H^2\,/\,kv_{T3}\,\omega_{02}^2(\omega^2+2\omega\Omega_H)\,\omega.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ЖЭТФ, **21**, 1262 (1951).
2. R. Q. Twiss, Phys. Rev., **84**, 448 (1951).
3. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Астрон. ж., **35**, 6 (1958).
4. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 14 (1959).
5. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 57 (1960).
6. Л. М. Коврижных, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, **38**, 850 (1960).
7. М. С. Ковнер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 631 (1960).
8. М. С. Ковнер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **3**, 749 (1960).
9. В. П. Докучаев, ЖЭТФ, **39**, 413 (1960).
10. Г В. Гордеев, ЖЭТФ, **27**, 19 (1954).
11. М С. Ковнер, ЖЭТФ, **40**, 517 (1961).
12. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, **16**, 571 (1946).
13. А. И. Ахиезер, Л. Э. Паргаманник, Уч. зап. ХГУ, **27**, 75 (1948).
14. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, **24**, 659 (1953).
15. I. Bernstein, Phys. Rev., **109**, 10 (1958).
16. В. А. Фок, Дифракция радиоволн, изд. АН СССР, М., 1946.
17. Г. В. Гордеев, ЖЭТФ, **24**, 445 (1953).
18. В. В. Железняков, Диссертация, Горький, 1959.
19. Я Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, М., 1953.
20. А. А. Андронов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **3**, 645 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 21 октября 1960 г.

ON THE INSTABILITY OF LOW FREQUENCY ELECTROMAGNETIC WAVES IN PLASMA WITH A BEAM OF CHARGED PARTICLES (THE PROPAGATION AT AN ARBITRARY ANGLE TO DIRECTION OF MAGNETIC FIELD)

M. S. Kovner

The stability of a system relative to low frequency waves is examined using the kinetic equation method. The general dispersive equation is given and criteria are found of the increase and attenuation of waves in the following limit cases a) when the influence the stability of the system are negligible of the thermal motion both on waves propagation and by when the thermal velocity of flow particles is high.

Примечание при корректуре. Тензор (2.1) был так же получен в работе К. Н. Степанова и А. Б. Киценко, ЖТФ, **31**, 167 (1961).