

СОДЕРЖАНИЕ

Ахманов С. А., Рошаль А. С. Параметрические генераторы субгармоник как элементы сверхбыстро действующих цифровых вычислительных машин (обзор)	203
Бенедиков Е. А., Гетманцев Г. Г. Спорадическое радиоизлучение Солнца на низких частотах	244
Бенедиков Е. А., Эйдман В. Я. О некогерентном радиоизлучении, возникающем при движении заряженных частиц в земном магнитном поле	253
Мухамедалиева А. Ф. и Хохлов Р. В. К вопросу об устойчивости колебаний в молекулярном генераторе	259
Эльстинг О. Г. О чувствительности установки для радиоспектроскопии с применением генератора метровых волн	263
Гудзенко Л. И. Обобщение эргодической теоремы на нестационарные случайные процессы	267
Медведев Г. А. Воздействие импульсных потоков Пальма на радиосхемы с емкостными накопителями. I	275
Зверев В. И. и Орлов Е. Ф. О скорости передачи информации по каналам с многолучевым распространением	282
Островский Л. А. О приближении геометрической оптики для волн в линиях передачи с переменными параметрами	293
Шальнов А. В., Гавrilов Н. М. О влиянии изменения частоты на выходную энергию в линейном электронном усилителе	303
Ахманов С. А., Горшков А. С., Трофименко И. Т. Деление частоты на сверхвысоких частотах с помощью ламп с бегущей волной	309
Ашбель Н. И. и Постников Л. В. К расчету автоколебательных схем на полупроводниковых триодах	319
Алексеев А. С., Дозоров В. А. Автоколебания системы двухпозиционного регулирования температуры с тепловым изодромным устройством	330
Фейгин М. И. К теории нелинейного демпфера с предварительным натягом в упругом соединении	339
Гопп Ю. А. Влияние основных нелинейностей на работу типовой системы непрямого регулирования	354
Котосонов А. С. Логические схемы на тиатронах с холодным катодом	366
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Писарев В. В. К вопросу о границах применимости метода плавных возмущений в задаче о распространении излучения через среду с неоднородностями	376
Басс Ф. Г., Канер Э. А. Флюктуации фазы и амплитуды при сверхдальнем распространении электромагнитных волн над земной поверхностью	377
Неймарк Ю. И. О некоторых общих свойствах функций Ляпунова	379
Письма в редакцию	380

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ СУБГАРМОНИК КАК ЭЛЕМЕНТЫ СВЕРХБЫСТРОДЕЙСТВУЮЩИХ ЦИФРОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

C. A. Ахманов, A. C. Рошаль

Обзор посвящен методам существенного повышения быстродействия электронных цифровых вычислительных машин, связанным с переходом к технике СВЧ, и в особенности методу, основанному на использовании параметрических генераторов субгармоник. Рассмотрены методы представления и обработки информации в системах с несущей и соответствующие логические схемы. Приведены теоретические и экспериментальные данные, характеризующие различные свойства параметрических генераторов субгармоник, существенные с точки зрения применения их в вычислительных машинах.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

I. Параметрические генераторы субгармоник как устройства с несколькими устойчивыми фазами

1. Управляемые реактивные элементы
2. Теория параметрических генераторов, работающих в области основного параметрического резонанса
3. Рабочие характеристики и конструкции параметрических генераторов (экспериментальные данные)

II. Параметрические генераторы в вычислительных машинах

1. Управление движением информации при использовании двухполюсников
2. Логические и арифметические схемы на параметрических генераторах
3. Запоминающие устройства на параметрических генераторах
4. Преобразование амплитудной записи информации в фазовую. Возможности повышения быстродействия схем

Заключение

Приложение

ВВЕДЕНИЕ

Проблема существенного повышения быстродействия цифровых вычислительных машин является одной из актуальнейших в современной вычислительной технике. Каждый успех в этом направлении открывает возможности решения задач все возрастающей сложности, а решение простых задач делает более экономичным. В математике, физике, статистике, экономике, лингвистике и многих других областях имеются важные вопросы, требующие машин с большим быстродействием. Проблема самонастраивающихся машин с поиском решения также требует чрезвычайно больших скоростей, необходимых для того, чтобы перебрать за разумное время огромное количество опытных решений.

Скорость действия современных вычислительных машин ограничивается, в основном, временем срабатывания отдельных элементов, задержкой иискажением сигналов в линиях связи. Требования, которые предъявляются к скоростям срабатывания клапанов и триггеров и линиям связи в сверхбыстродействующих вычислительных машинах, можно оценить на таком примере. Для выполнения 10^8 операций в секунду частота повторения импульсов должна составить несколько сотен мгц , а каждая цифра займет интервал в несколько наносекунд (10^{-9} сек) и менее. Таким образом, времена протекания переходных процессов в триггерах должны быть $\sim 10^{-9}$ сек и менее, а линии связи, обеспечивающие неискаженную передачу импульсов информации, весьма широкополосными, с полосами в сотни и тысячи мгц . При этом размеры отдельных элементов должны быть малы, поскольку в машине приходится иметь дело с большим числом элементов. Чтобы задержка во времени распространения сигнала между двумя логическими схемами была невелика, расстояние между ними также должно быть малым*. Кроме того, вся машина должна быть ограниченной по габаритам, так как для выполнения одной команды требуется обмен информацией между различными частями машины. Так, машина, выполняющая команду за 10 нсек , не может быть более $45 \div 60 \text{ см}$ в диаметре. Ограничение в размерах накладывает также ограничения и на мощность, потребляемую каждым элементом. Например, для машины минимального размера, имеющей 5000 логических элементов и 10000 элементов памяти, требуется ограничить потребляемую каждым элементом мощность до 500 мвт для логического элемента и до 50 мвт для элемента памяти, если использовать обычное принудительное воздушное охлаждение [3]. Весьма желательно снизить эти цифры, чтобы увеличить возможности машины. Удовлетворительными были бы, например, следующие значения: 15000 логических элементов, на каждый из которых приходится $\sim 150 \text{ мвт}$, и 250000 элементов памяти, причем на каждый из них приходится $\sim 2 \text{ мвт}$ потребляемой мощности. Необходимость удовлетворить не только требованиям, предъявляемым к скорости срабатывания и широкополосности, но и требованиям к габаритам и экономичности сужает, разумеется, круг приборов, пригодных для использования в сверхбыстродействующих вычислительных машинах (во всяком случае—универсальных).

Существенное повышение быстродействия электронных вычислительных машин, использующих представление информации с помощью видеоимпульсов и цепи с сосредоточенными постоянными, представляется затруднительным. Это связано как с трудностями создания элементов с большими скоростями переключения (здесь потенциально самыми быстрыми являются транзисторы, однако трудно, по-видимому, ожидать для них времен срабатывания, меньших 1 нсек , вследствие конечного времени дрейфа заряда), так и с трудностями неискаженной передачи таких импульсов по каналам связи (для большого быстродействия требуются тракты и усилители с полосой частот, простирающейся от нуля до частот порядка сотен и тысяч мгц). Насколько можно судить по опубликованным данным, предельные частоты повторения для систем с видеоимпульсами лежат в настоящее время в области 50 мгц (см. [4, 8]).

Сказанное делает весьма целесообразной наряду с работой по улучшению характеристик существующих систем разработку иных

* Зная скорость распространения сигналов по линиям связи, легко оценить конкретные требования к длине тракта связи. Так, например, если принять эту скорость равной скорости света, то расстояние между элементами $\sim 30 \text{ см}$ при частоте повторения 10^9 мгц приведет к уменьшению скорости обработки информации вдвое.

подходов к выбору активных и пассивных элементов, каналов связи, способам представления информации, логической структуре и т. п. Очень интересные и многообещающие возможности открываются здесь, если обратиться к технике сверхвысоких частот. Действительно, длительности протекания переходных процессов τ_n в элементах СВЧ диапазона весьма малы, поскольку $\tau_n \sim 1/\Delta f$, а величина полосы частот Δf в СВЧ диапазоне может составлять несколько тысяч мгц. Очевидно, конечно, что переход к СВЧ диапазону требует изменения способов представления информации. Здесь весьма удобными и эффективными являются способы представления информации в системах с несущей частотой (см. [1-3, 6]).

Информация может быть закодирована с помощью амплитудной, фазовой или частотной модуляции несущей. Цифры (0, 1,...) могут изображаться либо различными амплитудами несущей, либо различными частотами, либо различными фазами несущей, отсчитываемыми от фазы колебаний некоторого опорного генератора. Если в двоичном случае наличию импульса постоянного напряжения придается смысл „1“, а отсутствию импульса—смысл „0“, то аналогично смысл „1“ и „0“ можно приписать наличию или отсутствию радиоимпульса (амплитудная запись). Высокочастотным колебаниям данной фазы также можно придать смысл „1“, если колебаниям этой же частоты и амплитуды, но противоположной фазы приписать смысл „0“ (фазовая запись). Все три способа представления двоичной информации в системе с несущей изображены на рис. 1. Закодированная одним из указанных способов информация может передаваться по обычным СВЧ трактам (волноводам, коаксиальным и полосковым линиям). С помощью хорошо разработанных в технике СВЧ систем частотного, фазового и амплитудного детектирования и преобразования различные виды записи могут быть преобразованы одна в другую, а также в видеоимпульсы. При этом видеоимпульсами наиболее удобно пользоваться во входных и выходных устройствах машины, а модулированной несущей—в логических схемах и запоминающих устройствах.

В соответствии со способом записи информации необходимо располагать СВЧ триггерами, устойчивые состояния которых характеризуются либо различными амплитудами несущей, либо различными частотами, либо различными фазами. Довольно широкие возможности в этом направлении открывают электронные СВЧ генераторы и усилители. Так, например, генератор на лампе с бегущей волной (ЛБВ) с внешней обратной связью при определенной форме частотной характеристики тракта обратной связи может обладать несколькими устойчивыми

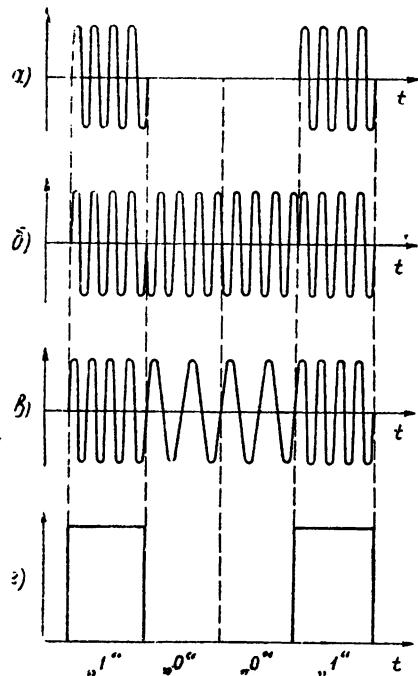


Рис. 1. Способы представления двоичной информации в системах с несущей:
а) амплитудная запись, б) фазовая запись, в) частотная запись; здесь же г) запись видеоимпульсами.

состояниями, характеризуемыми различными частотами генерации [9]. Усилитель на ЛБВ с обратной связью может использоваться для запоминания произвольного двоичного кода и применяться в цифровых вычислительных устройствах [14]. Другие варианты СВЧ триггеров могут быть осуществлены при различных модификациях СВЧ генераторов со многими степенями свободы. В связи со сказанным в последнее время проявляется повышенный интерес к неизученным ранее типам колебаний и режимам работы электронных генераторов СВЧ. В качестве одной из возможностей создания триггера на основе отражательного кластрона можно указать на использование явления резонанса второго рода; в этом случае различные устойчивые состояния характеризуются разными фазами несущей (см. [10, 11]).

Хотя с точки зрения широкополосности и быстроты срабатывания электронные СВЧ приборы могут оказаться подходящими для использования их в качестве элементов вычислительных машин, большим препятствием для широкого внедрения их в вычислительную технику являются, по крайней мере в настоящее время, их габариты, стоимость и потребляемая мощность. Поэтому сейчас, по-видимому, имеет смысл говорить о применении электронных приборов лишь в специализированных сверхбыстро действующих вычислительных устройствах. Существуют, однако, другие возможности создания сверхбыстро действующих машин с СВЧ элементами, позволяющие в значительной мере исключить использование электронных приборов.

Во-первых, амплитудная модуляция СВЧ несущей может быть осуществлена с помощью кристаллических модуляторов (полупроводниковых диодов, управляемых видеоимпульсами). При этом оказывается возможным получение радиоимпульсов со временем нарастания $\lesssim 10^{-9}$ сек (см., например, [12]). Некоторые данные о логических схемах и запоминающих устройствах, использующих указанный метод амплитудной записи, приведены в [12–14].

Другой возможностью, привлекающей сейчас особое внимание, является использование параметрических генераторов субгармоник. Идея использования таких генераторов в вычислительных машинах, как указывается в зарубежной литературе, была высказана фон Нейманом (см. [1, 3, 5]) и Гото [2]. Она заключается в следующем. Известно, что если один из реактивных параметров колебательного контура периодически изменяется с частотой $f_n \approx 2f_0$, где f_0 — резонансная частота контура, то при определенных условиях в контуре возбуждаются колебания частоты $f_n/2$. При заданной фазе изменения параметра фаза параметрически возбужденных колебаний может принимать одно из двух возможных устойчивых значений, отличающихся на π . Таким образом, параметрически возбужденный контур, или, как его называют, параметрический генератор*, является триггером с двумя устойчивыми состояниями. Экспериментальные исследования, проведенные в последние годы, показали, что существуют удобные методы быстрого переключения фазы параметрического генератора (переброса из одного устойчивого состояния в другое). Эффективная модуляция реактивных параметров колебательных контуров может осуществляться в настоящее время, по крайней мере, вплоть до частот ~ 30000 мгц с помощью малогабаритных и надежных нелинейных емкостей (а на частотах, не превышающих ~ 10 мгц, и индуктивностей), потребляющих сравнительно малые мощности ($\sim 5 - 100$ мвт на одну ячейку).

Уже имеется обширная литература, посвященная применению па-

* В зарубежной литературе, особенно японской, часто используется сокращенное название «параметрон».

метрических генераторов в вычислительных машинах. Здесь следует упомянуть серию работ японских исследователей [^{2, 62-84}], приведших к созданию законченных вычислительных машин, в которых используется фазовая запись информации. Хотя эти машины созданы на параметрических генераторах с собственной частотой, не превышающей $3 \div 4 \text{ мгц}$, и, следовательно, не дают особых преимуществ в быстродействии перед существующими машинами других типов, они получили широкое распространение в Японии вследствие устойчивости, надежности и долговечности примененных в них параметрических генераторов. Недавно появились сообщения о разработке рядом американских лабораторий (в особенности лабораториями фирмы RCA) образцов параметрических генераторов с собственной частотой $\sim 2000 \text{ мгц}$, предназначенных для использования в вычислительных машинах. Ряд работ, посвященных исследованию свойств таких генераторов, логическим схемам и специальным малогабаритным конструкциям (выполненным с помощью техники печатных схем), был доложен на конференции по применению СВЧ устройств в вычислительной технике, состоявшейся в США в 1959 г. (см. [⁷]). Представляется, что из возможных путей внедрения СВЧ устройств в вычислительную технику этот путь является сейчас одним из наиболее доступных.

Следует отметить, что в зарубежных работах (особенно американских) теории параметрических генераторов удалено мало внимания. Исследование ряда важных режимов работы параметрических генераторов в вычислительных машинах и, особенно, режимов переключения проведено, в основном, эмпирически. Такой узко практический подход представляется совершенно неоправданным, если учесть, что еще в 30-х годах явление параметрического возбуждения электрических колебательных систем было детально исследовано Мандельштамом, Папалекси [¹⁵] и их учениками, а развитая ими теория может быть с успехом использована при теоретическом изучении ряда специальных вопросов, связанных с применением параметрического генератора в вычислительных машинах.

Настоящий обзор имеет целью систематизировать опубликованные вплоть до марта 1960 г. работы, посвященные использованию СВЧ элементов в вычислительной технике. В соответствии с ранее сказанным основное внимание удалено параметрическим генераторам и логическим схемам, применяемым при фазовой записи информации*. Использование СВЧ элементов и, в частности, параметрических генераторов в вычислительных машинах не является, разумеется, чисто техническим делом. Поэтому здесь возникают и радиофизические задачи, связанные с исследованием новых режимов работы СВЧ элементов и т. п. Представлялось целесообразным осветить и эту сторону проблемы; в обзор включен раздел, посвященный свойствам современных управляемых реактивных элементов, и раздел, посвященный теории параметрических генераторов, базирующийся, в основном, на работах Л. И. Мандельштама и Папалекси**. Сейчас преждевременно, разумеется, делать окончательные выводы о дальних перспективах того или иного способа повышения быстродействия вычислительных машин. Интенсивная работа в этом направлении приводит к появлению новых идей и новых приборов (здесь надо упомянуть, в частности, туннельные диоды, позволяющие осуществить триггеры с большим быстродействием; см. [^{3, 16}]). Применение параметрических генераторов — одно из наиболее

* Краткий обзор нескольких работ, посвященных схемам с амплитудной модуляцией, приведен в Приложении.

** Эта сторона очень слабо отражена в зарубежных работах по параметрическим генераторам.

развитых направлений; приведенные здесь работы дают возможность получить представление о „машинном“ и радиофизическом аспектах чрезвычайно важной проблемы существенного повышения быстродействия цифровых вычислительных машин.

I. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ СУБГАРМОНИК КАК УСТРОЙСТВА С НЕСКОЛЬКИМИ УСТОЙЧИВЫМИ ФАЗАМИ

Модуляция реактивных параметров колебательного контура параметрического генератора, производимая некоторым устройством (так называемым генератором накачки), характеризуется относительной глубиной (или коэффициентом модуляции) $m_k = \frac{z_{k \text{ макс}} - z_{k \text{ мин}}}{z_{k \text{ макс}} + z_{k \text{ мин}}}$, где z_k — модулируемый реактивный параметр контура, формой и частотой f_n . Чаще всего имеют дело с прямоугольной и гармонической модуляцией; в реальных устройствах приходится иметь дело также и с более сложными законами изменения реактивного параметра.

Общее теоретическое рассмотрение задачи о контуре с переменными параметрами, сводящееся к решению уравнения Матье (см. [15, 17, 18]), приводит к выводу о наличии ряда областей неустойчивости вблизи $f_0/f_n = n/2$, где f_0 — резонансная частота контура, $n=1, 2, 3, 4, \dots$, причем частоты параметрически возбужденных колебаний f_r в точности удовлетворяют соотношению $f_r/f_n = n/2$. Условия возбуждения колебаний в той или иной области неустойчивости зависят от соотношения между коэффициентом m_k и нагруженной добротностью колебательного контура Q_n . При $n=1$ это условие имеет вид $m = 2/Q$ для синусоидального изменения параметра и $m = \pi/2Q$ — для прямоугольного.

Возбуждение колебаний в более высоких областях неустойчивости требует больших значений m при заданном Q , а ширина области неустойчивости (допустимая расстройка частот накачки и контура) быстро уменьшается с ростом n как m^n (см. рис. 2) [15]. Поэтому в практи-

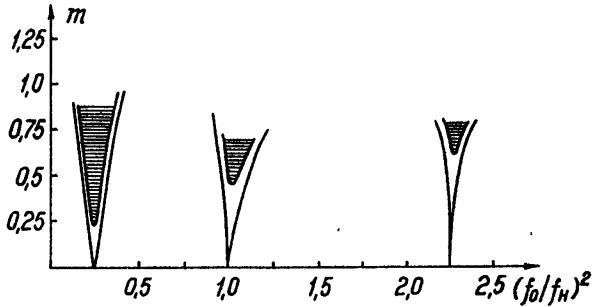


Рис. 2. Области неустойчивости решения уравнения Матье. Заштрихованные области соответствуют контуру с конечным затуханием.

ческих схемах обычно используется возбуждение колебаний в первой области неустойчивости. Этот режим наиболее подробно исследован; в этом режиме работают и параметрические генераторы в вычислительных машинах.

То, что в таком режиме возможны две фазы параметрически возбужденных колебаний (при фиксированной фазе накачки), можно качественно показать на основе элементарных представлений* об усло-

* Более строго этот вопрос рассмотрен в разделе 2.

виях передачи максимальной энергии колебаниям в контуре за счет, например, периодического изменения емкости C (см. рис. 3). Здесь для простоты закон изменения емкости принят прямоугольным; пунктиром изображены параметрически возбужденные колебания напряжения на емкости, возможные в системе при $n = 1$. Уменьшение емкости происходит в моменты, когда разность потенциалов максимальна, и, следовательно, генератор накачки совершает максимальную работу; увеличение — в моменты, когда разность потенциалов равна нулю, и, следовательно, работа равна нулю. Аналогичные рассуждения можно провести для модулируемой индуктивности (здесь следует рассматривать ток через катушку).

Первая часть настоящей статьи посвящена обзору теоретических и экспериментальных данных по параметрическим генераторам. В разделе 1 изложены сведения о современных способах модуляции реактивных параметров колебательных систем; раздел 2 посвящен теории параметрических генераторов, использующих основной параметрический резонанс ($n = 1$); в разделе 3 приводится обзор экспериментальных данных по параметрическим генераторам.

1 Управляемые реактивные элементы

Модуляция реактивных параметров колебательных систем осуществляется с помощью управляемых (напряжением или током) реактивных элементов (емкостей или индуктивностей), подключаемых к схеме. Свойства различных управляемых реактивных элементов удобно характеризовать следующими параметрами:

1) максимальный коэффициент модуляции реактивного параметра $m = (Z_{\max} - Z_{\min})/(Z_{\max} + Z_{\min})$, где Z_{\max} и Z_{\min} — максимальное и минимальное значения реактивного параметра (емкости или индуктивности), которые могут быть получены в данном управляемом реактивном элементе ($m_k \ll m$)*;

2) добротность управляемого реактивного элемента; для управляемой индуктивности $Q_Z = \omega L_0/r$, где r — сопротивление, описывающее собственные потери в управляемой индуктивности, и L_0 — значение индуктивности в отсутствие управляющего тока; для управляемой емкости под добротностью понимают величину $Q_{Cs} = 1/\omega C_0 r$, когда эквивалентное сопротивление потерь r включено последовательно с емкостью, и $Q_{Cp} = \omega C_0 r$, когда сопротивление потерь включено параллельно;

* В управляемых реактивных элементах связь реактивного параметра Z с управляемым током или напряжением часто является нелинейной. Поэтому при гармоническом изменении управляющего напряжения или тока величина Z изменяется по более сложному закону и может быть представлена в виде

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \Psi_n),$$

так что можно дополнительно ввести коэффициенты модуляции для основной частоты m_1 , второй гармоники m_2 и т. д. Величины последних существенно зависят от выбора рабочей точки на нелинейной характеристике Z .

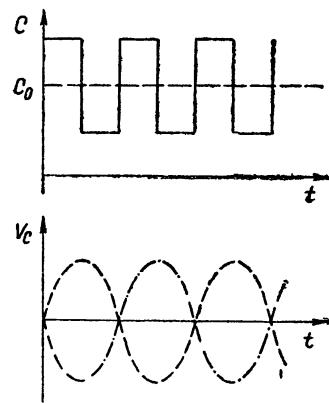


Рис. 3. Графики напряжения V_c параметрически возбужденных колебаний на емкости колебательного контура при прямоугольной модуляции емкости.

3) минимальная мощность накачки $P_{\text{н ми}}^*$, необходимая для реализации максимального коэффициента модуляции;

4) эффективная шумовая температура $T_{\text{эфф}}$ управляемого реактивного элемента;

5) предельная частота $f_{\text{пп}}$ управляемого реактивного элемента, на которой он еще может быть эффективно использован.

Понятие предельной частоты можно ввести следующим образом. Уже указывалось, что для параметрического возбуждения колебательного контура для $n = 1$ при гармоническом изменении параметра необходимо выполнение соотношения $m = 2/Q$. Под предельной частотой можно понимать такую частоту, на которой еще возможно параметрическое возбуждение контура, потери в котором определяются лишь потерями управляемого реактивного элемента. Таким образом,

$$m = 2/Q = 4\pi f_{\text{пп}} C_0 r; \quad f_{\text{пп}} = m/4\pi C_0 r.$$

Последнее соотношение непосредственно дает связь предельной частоты с параметрами управляемой емкости: видно, что для повышения $f_{\text{пп}}$ следует увеличивать m (эта величина определяется физическими свойствами нелинейного конденсатора) и уменьшать так называемую постоянную времени $\tau = C_0 r$. Величины m и r являются, как правило, функциями частоты, причем обычно $dm/df < 0$ и $dr/df > 0$. В случае управляемой индуктивности предельной частотой следует называть такую частоту, на которой добротность катушки

$$Q_L(f) = 2/m.$$

Здесь для большинства реальных случаев также $dQ/df < 0$ и $dm/df < 0$.

Наибольшее внимание с точки зрения применения в параметрических генераторах привлекают в настоящее время следующие способы модуляции реактивных параметров колебательных систем.

1. 1. Модуляция емкости с помощью нелинейных сегнетоэлектрических конденсаторов [19, 20]. Такой способ модуляции емкости известен в радиотехнике сравнительно давно; в его основе лежит зависимость диэлектрической проницаемости сегнетоэлектриков от напряженности электрического поля. Управляемые емкости из сегнетоэлектриков (вариконды) могут обладать довольно высокими предельными частотами; могут быть получены значительные коэффициенты модуляции порядка десятков процентов. Однако в настоящее время целый ряд существенных недостатков варикондов, таких как сравнительно высокие значения диэлектрических потерь, сильная зависимость рабочих характеристик от температуры и нестабильность во времени, затрудняют их практическое использование.

1. 2. Модуляция емкости с помощью нелинейных конденсаторов, использующих зависимость от напряжения емкости запорного слоя $p-n$ -перехода в полупроводнике. Такие конденсаторы, предложенные в 1954 г. Вулом [22–24] и интенсивно разрабатываемые и сейчас (см., например, [25–29]), получили чрезвычайно широкое распространение. Опубликованы данные, характеризующие поведение таких конденсаторов в параметрических генераторах и усилителях в диапазоне от десятков кГц до 10000 мГц (см., например, обзоры [30, 31] и работы по параметрическим генераторам [4, 5]).

Изложение механизма физических процессов в $p-n$ -переходе выходит за рамки настоящего обзора*; мы ограничимся лишь описанием характеристик полупроводникового диода с $p-n$ -переходом.

* Эти сведения приведены, например, в работах Вула [23–24] и Улера [25].

Эквивалентная схема диода приведена на рис. 4. Здесь $C(V) = K(\Phi - V)^{-n}$ — управляемая емкость $p-n$ -перехода, где Φ — контактная разность потенциалов, K — константа, $n = 1/2$ или $1/3$ в зависимости от распределения примесей в переходе. На рис. 5 приведен график зависимости емкости $p-n$ -перехода от напряжения для $n = 1/3$; графики построены для диода, используемого в параметрических устройствах СВЧ диапазона. Справедливость указанной теоретической зависимости была неоднократно подтверждена экспериментально (см. [25, 26]).

Нелинейная проводимость $G(V)$ близка к нулю при $-V_{np} \leq V \leq 0$ и быстро нарастает при изменении V вне указанного интервала (см. рис. 5).

Так называемое сопротивление растекания r_s определяет минимальную величину потерь в диоде. Индуктивность контакта L и емкость патрона диода C — так называемые паразитные параметры диода, которые часто играют существенную роль. Во-первых, из-за наличия индуктивности L сам диод представляет собой колебательный контур, что надо учитывать при создании параметрических усилителей и генераторов, особенно в диапазоне СВЧ. Наличие

паразитной емкости C приводит к уменьшению m , что также особенно существенно в СВЧ диапазоне.

Как показывают теория и эксперимент, эквивалентная схема рис. 4 справедлива для весьма широкого диапазона частот; обычно ею пользуются во всем диапазоне частот, в котором применяются полупроводниковые диоды с $p-n$ -переходом. Величина емкости запорного слоя практически не зависит от частоты; по теоретическим оценкам дисперсия этой емкости должна оказываться лишь на частотах $\sim 10^{12}$ Гц. Следует отметить также весьма слабую зависимость величины емкости $p-n$ -перехода при отрицательном смещении от температуры [25]. Диоды сохраняют свойства управляемых емкостей при температуре жидкого азота и ниже (см. [33, 34]).

Как видно из рис. 4, потери в диоде зависят от знака напряжения на запорном слое. При отрицательном напряжении (отрицательном смещении), не превышающем величину пробойного напряжения V_{np} (см. рис. 5), причиной потерь является сопротивление r_s . Величина r_s почти не зависит от напряжения; в лучших СВЧ диодах

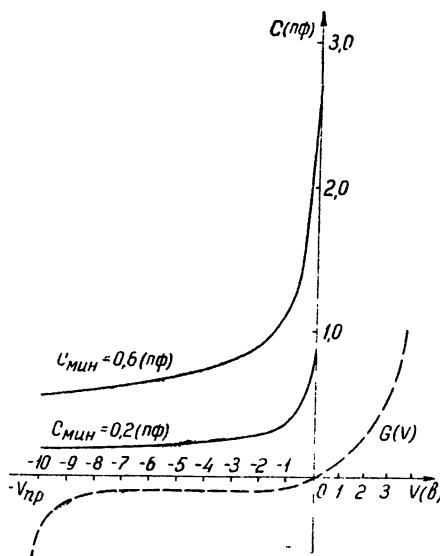


Рис. 5. Типичный график зависимости емкости $p-n$ -перехода от напряжения V на переходе для СВЧ германиевого диффузионного диода. Здесь же приведен качественный вид зависимости параллельной проводимости G от V .

при отрицательном смещении), не превышающем величину пробойного напряжения V_{np} (см. рис. 5), причиной потерь является сопротивление r_s . Величина r_s почти не зависит от напряжения; в лучших СВЧ диодах

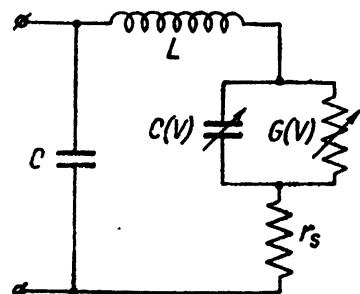


Рис. 4. Эквивалентная схема управляемой емкости на диоде с $p-n$ -переходом.

r_s не превышает 2Ω . Зависимость r_s от частоты исследуется в настоящее время. В работе [32] обнаружено наличие частотной зависимости r_s вида $1/f$ или $1/f^2$ в германиевых диодах с золотым контактом, проявляющейся на частотах ниже 10^3 мгц. Отметим, что в то время как в параметрическом усилителе величина r_s полностью характеризует потери в диоде, в параметрическом генераторе, работающем в режиме развитой генерации, пренебрежение проводимостью $G(V)$ в ряде случаев оказывается невозможным.

Рабочие характеристики диодов, использующих различные полупроводниковые материалы (германий, кремний, арсенид галлия) с различным характером распределения примесей (диффузионные, сплавные), приведены в [25–29, 34, 35].

Типичными значениями основных параметров промышленных диодов с $p-n$ -переходом являются следующие величины. Максимальный коэффициент модуляции реактивного параметра

$$m = \frac{C_{\max} - C_{\min}}{C_{\max} + C_{\min}} \approx 40 \div 50\%$$

при мощностях накачки, не превышающих нескольких десятков $мвт^*$ (при определении m под C_{\max} понимается значение C при $V=0$ и под C_{\min} значение C при $V=-V_{\text{пр}}$; m определяется лишь свойствами диода и не зависит от C_{\min} ; $f_{\text{пр}}$, которую для простоты чаще всего записывают в виде $f_{\text{пр}} = 1/2\pi r_s C_{\min}$, составляет $7 \cdot 10^4 \div 10^5$ мгц). Максимальные значения добротностей диодов в режиме отрицательного смещения можно рассчитать по известной предельной частоте:

$$Q_s \max = 1/\omega C_{\min} r_s = f_{\text{пр}}/f,$$

где f —рабочая частота. Таким образом, на частоте $f = 10^3$ мгц промышленно изготавляемые диоды имеют $Q_s \approx 70 \div 100$. Имеются сообщения о разработке диодов с $f_{\text{пр}} \approx (2 \div 3) \cdot 10^5$ мгц**, а также о возможности получения больших коэффициентов модуляции [28, 29]. Эффективная шумовая температура $T_{\text{эфф}}$ описываемых нелинейных емкостей при $G(V) = 0$ практически равна рабочей температуре диода. В настоящее время диоды с $p-n$ -переходом выпускаются как в корпусах, аналогичных корпусам обычных СВЧ смесителей и детекторов ($C \approx 0,1 \div 0,2$ пФ; $L \approx 2 \div 3 \cdot 10^{-9}$ генри), так и в корпусах, аналогичных корпусам радиочастотных диодов. Для диодов, предназначенных для коротковолновой части сантиметрового диапазона (на волнах ~ 3 см и короче), разрабатываются конструкции с меньшими L и C . Достаточно полные данные о надежности диодов с $p-n$ -переходом пока отсутствуют. Отметим, однако, что их электрическая прочность выше, чем у смесительных и детекторных диодов (разрушение наступает при высокочастотной мощности ~ 1 вт).

1. 3. Модуляция индуктивности путем изменения магнитной проницаемости ферромагнитного сердечника. Этот способ использовался в экспериментальных работах, выполненных в СССР сотрудниками Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси еще в 30-х годах

* Конкретные цифры зависят не только от свойств диода, но и от условий согласования генератора на накачку с диодом.

** Такие диоды, разумеется, могут быть использованы лишь в весьма высокочастотных схемах, так как C_{\min} у этих диодов $\sim 0,1 \div 0,3$ пФ. Понижение рабочей частоты связано обычно с необходимостью использования диодов с пониженными $f_{\text{пр}}$ (большими C_{\min}), поскольку нужно получить достаточный коэффициент модуляции емкости всего контура, слагающейся из емкостей диода и элементов контура.

(см., например, [36, 37]), а в 50-х годах подробно исследовался японскими исследователями [2, 38, 62–71]. Разработанные ими управляемые индуктивности нашли широкое распространение в электронных цифровых машинах на параметрических генераторах, созданных в Японии (см., например, [38]).

Возможны два способа модуляции индуктивности: с помощью модулирующей катушки, непосредственно наводящей в сердечнике продольное магнитное поле (такой способ чаще всего используется в настоящее время), и с помощью модуляции магнитного поля, поперечного по отношению к полю, создаваемому обмоткой индуктивности. При последнем способе модуляции, который был недавно предложен в [39, 40], можно в значительной мере избавиться от наведения в колебательный контур модулирующей ЭДС. Основные характеристики управляемых индуктивностей на ферромагнитных сердечниках определяются в первую очередь видом кривой намагничения сердечника и величиной потерь на гистерезис. Известно значительное число марок ферритов, используемых в управляемых индуктивностях. Величины предельных частот управляемых индуктивностей на ферромагнитных сердечниках определяются в первую очередь потерями на гистерезис, быстро возрастающими с ростом частоты. При этом существенную роль играют не только потери на частоте параметрической генерации, но и потери на частоте изменения параметра, приводящие к сильному нагреванию феррита.

По опубликованным к настоящему времени данным предельные частоты для управляемых индуктивностей на ферромагнитных сердечниках не превышают $3 \div 6 \text{ мГц}$ [2]. Мощности накачки, необходимые для реализации максимального коэффициента модуляции m , лежат в пределах от 5 до 100 мвт ; в рабочем режиме необходимо наложение постоянного поля (смещения).

Опубликованы некоторые конструктивные данные управляемых индуктивностей на ферромагнитных сердечниках. Так, в [38] описаны малогабаритные управляемые индуктивности на ферритовых сердечниках с внешним диаметром 4 мм , внутренним диаметром /2 мм и высотой 1 мм . Важным достоинством этих индуктивностей является их большая надежность и невысокая стоимость.

1. 4. Применение ферритов для модуляции реактивных параметров СВЧ контуров. Заслуживающим внимания методом модуляции реактивных параметров СВЧ контуров является использование для этой цели ферритов с узкой линией поглощения ферромагнитного резонанса. Хотя сущность протекающих здесь процессов* отлична от процессов в нелинейном ферромагнитном сердечнике, эквивалентная схема колебательного контура с ферритом, находящимся под воздействием мощных колебаний накачки, может быть представлена в виде контура с периодически изменяющейся индуктивностью.

Параметрическая генерация в таких системах многократно наблюдалась экспериментально при частотах накачки $\sim (9 \div 10) \cdot 10^3 \text{ мГц}$ (см. [42, 43]). Эти эксперименты еще не вышли из лабораторной стадии; основным недостатком ферритовых устройств остаются пока чрезвычайно большие мощности накачки (единицы и десятки kвт), требующиеся для получения m порядка нескольких процентов. Однако дальнейшая работа по созданию ферритов с узкой линией поглощения и исследование новых методов получения параметрической регенерации с помощью ферритов могут привести к существенному понижению P_n .

* Для ознакомления с предметом могут быть использованы статьи [41, 42, 44] и монография [45].

В недавно появившейся заметке [46] сообщается о получении параметрической регенерации (использовались собственные магнитостатические типы колебания феррита) в ферритовом образце из иттриевого граната при $P_h < 1 \text{ вт}$. Достоинствами феррита являются надежность (в этом смысле он аналогичен ферромагнитному сердечнику) и возможность получения параметрической генерации на весьма высоких частотах.

1. 5. Модуляция реактивных параметров колебательных систем с помощью электронного пучка. На сравнительно низких частотах это — хорошо известный метод реактивной лампы (см., например, [18]). Имеется сообщение [49] о получении параметрической генерации в СВЧ контуре на частоте $\sim 4 \cdot 10^3 \text{ мгц}$ с помощью электронного пучка, промодулированного колебаниями накачки частоты $8 \cdot 10^3 \text{ мгц}$ (электронный пучок пронизывал резонатор параметрического генератора и модулировал реактивную составляющую его полной проводимости). Можно рассчитывать, по-видимому, на получение таким способом $m = 1 \div 10\%$ при $P_h \approx 10 \div 100 \text{ мвт}$ до частот $\sim (3 \div 5) \cdot 10^4 \text{ мгц}$.

Резюмируя изложенное в настоящем разделе, можно сказать следующее. Из всех известных в настоящее время управляемых реактивных элементов наиболее предпочтительными с точки зрения коэффициента модуляции, диапазона рабочих частот и потребляемой мощности являются управляемые емкости на полупроводниковых диодах с $p-n$ -переходом. В вычислительных машинах на параметрических генераторах при частоте несущей ниже $2 \div 4 \text{ мгц}$ могут успешно применяться ферромагнитные сердечники, отличающиеся высокой надежностью и экономичностью. Но в диапазоне СВЧ, где должны проявиться основные преимущества вычислительных машин на параметрических генераторах, единственным практически пригодным управляемым реактивным элементом, по крайней мере, в настоящее время является управляемая емкость полупроводникового диода. Вместе с тем, следует иметь в виду возможности дальнейшего совершенствования управляемых реактивных элементов других типов. Упомянем, в частности, о сообщении [47], в котором описываются управляемые индуктивности на тонких ферромагнитных пленках с предельными частотами порядка десятков мгц , а возможно, и сотен мгц .

2. Теория параметрических генераторов, работающих в области основного параметрического резонанса ($n=1$)

При теоретическом исследовании параметрического генератора с точки зрения использования его в цифровой вычислительной машине наиболее существенны следующие задачи:

1) определение условий самовозбуждения параметрического генератора;

2) исследование процессов установления амплитуды и фазы как в автономном генераторе, так и в параметрическом генераторе, находящемся под внешним воздействием;

3) исследование стационарного режима автономного параметрического генератора (факторов, определяющих стационарную амплитуду, стационарную фазу, ширину и форму области возбуждения);

4) исследование внешнего воздействия на стационарно работающий параметрический генератор.

К настоящему времени наиболее разработанной является теория стационарного режима автономного параметрического генератора. Наиболее полно и строго она изложена в работах Мандельштама и Папалексис [15] и их учеников (см. [36, 50, 51]); ряд ее основных результатов вошел в учебники и монографии [52—54]. Значительно меньше исследованы переходные процессы и особенно мало — неавтономные режимы.

Обратимся прежде всего к теории автономного параметрического генератора. Для того, чтобы в контуре параметрического генератора могли существовать стационарные колебания, необходимо, как известно, наличие нелинейного элемента. В параметрическом генераторе приходится иметь дело с нелинейной емкостью (заряд q на которой нелинейно зависит от напряжения u) и нелинейной индуктивностью (магнитный поток Φ нелинейно зависит от тока $i = \dot{q}$), нелинейным сопротивлением (отсутствует прямая пропорциональность между током и напряжением) и их комбинациями. При этом роль нелинейной емкости и индуктивности, ограничивающих амплитуду колебаний, во многих случаях выполняют сами управляемые реактивные элементы; в качестве нелинейных сопротивлений в параметрическом генераторе могут использоваться электронная лампа (она же может применяться для уменьшения декремента затухания контура параметрического генератора) и нелинейное параллельное сопротивление полупроводникового диода. В [2, 15, 36, 50] рассматривался случай ограничения амплитуды специально вводимой нелинейной индуктивностью в параметрическом генераторе с периодически изменяющейся емкостью и параметрическом генераторе с периодически изменяющейся индуктивностью. Рассматривались различные виды нелинейной характеристики индуктивности (степенной ряд [15, 2], арктангенсоида [50]). В [50] рассмотрен случай периодически изменяющейся и нелинейной индуктивности. Результаты расчета для всех перечисленных случаев оказываются весьма близкими. Аналогичный характер носят процессы в параметрическом генераторе, ограничение амплитуды в котором происходит за счет нелинейной емкости (см., например, [21]).

В связи с вышеизложенным, поясним на примере параметрического генератора с периодически изменяющейся емкостью

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} [1 + m \sin(pt)]$$

и нелинейной индуктивностью с характеристикой*

$$\Phi(\dot{q}) = L_0 \dot{q} - L_3 \dot{q}^3$$

суть процессов в параметрическом генераторе, ограничение амплитуды в котором происходит за счет нелинейной реактивности.

Уравнение колебаний в контуре имеет вид

$$\frac{d\Phi}{dt} + ri + q/C = 0. \quad (2.1)$$

Обозначим

$$q = x; \omega_0^2 = 1/L_0 C_0; \delta = r/\omega_0 L_0;$$

$$\gamma = 3L_3/C_0 L_0^2; \tau = pt/2.$$

Введем также относительную расстройку h соотношением $4\omega_0^2/p^2 = 1 + h$. Тогда, пренебрегая членами вида mh и δh ($mh \ll 1$; $\delta h \ll 1$), приходим к уравнению:

$$\ddot{x} + x = hx - \delta \dot{x} - \gamma x \dot{x}^2 - mx \sin(2\tau). \quad (2.2)$$

Представляя решение в виде $x = A(\tau) \cos[\tau - \vartheta(\tau)]$, где $A(\tau)$ и $\vartheta(\tau)$ — медленно меняющиеся амплитуда и фаза, подставляя его в (2.2) и пользуясь известными приемами составления укороченных уравнений [52–54], получим:

* Возможен также случай $\Phi = L_0 \dot{q} + L_3 \dot{q}^3$.

$$2 \frac{dA}{d\tau} = -\delta A + \frac{m}{2} A \cos(2\vartheta); \quad (2.3)$$

$$2 \frac{d\vartheta}{d\tau} = h - \frac{1}{4} \gamma A^2 - \frac{m}{2} \sin(2\vartheta). \quad (2.4)$$

Аналогично можно записать укороченные уравнения для параметрического генератора с нелинейным сопротивлением. Если этим сопротивлением является электронная лампа с характеристикой $i_a = i_{a0} + +\alpha q - \gamma q^3$, то можно получить (см. [15]):

$$2 \frac{dA}{d\tau} = A \left[-\delta + \frac{m}{2} \cos(2\vartheta) - \frac{\gamma_1}{4} A^2 \right]; \quad (2.5)$$

$$2 \frac{d\vartheta}{d\tau} = h - \frac{m}{2} \sin(2\vartheta). \quad (2.6)$$

Уравнения (2.3)–(2.6) с начальными условиями $t = 0$, $A = A_n$, $\vartheta = \vartheta_n$ позволяют исследовать как стационарный режим ($dA/d\tau = d\vartheta/d\tau = 0$), так и процесс установления колебаний для обоих случаев. Если начальная амплитуда колебаний значительно меньше ее установившегося значения A_y ($A_n \ll A_y$), то для большей части процесса установления нелинейные члены в (2.4), (2.5) не играют роли. Поэтому начальная стадия процесса установления в обоих случаях описывается уравнениями

$$2 \frac{dA}{d\tau} = A \left[-\delta + \frac{m}{2} \cos(2\vartheta) \right]; \quad (2.7)$$

$$2 \frac{d\vartheta}{d\tau} = h - \frac{m}{2} \sin(2\vartheta). \quad (2.8)$$

Как видно из (2.7), (2.8), характер процесса установления колебаний в параметрическом генераторе существенно отличается от процесса установления в автономном ламповом генераторе, поскольку здесь установление амплитуды существенно зависит от характера установления фазы*.

В линейном приближении (2.7), (2.8) можно решать в отдельности. Стационарные фазы, даваемые (2.8), определяются из условия

$$\sin(2\vartheta_0) = 2h/m, \quad (2.9)$$

откуда для ϑ_0 возможны четыре значения. Два из них, соответствующие $\cos(2\vartheta_0) < 0$, дают затухание колебаний; для двух других, сдвинутых на π ($\vartheta_{01} = 2^{-1} \arcsin(2h/m)$ и $\vartheta_{02} = 2^{-1} \arcsin(2h/m) + \pi$), $\cos 2\vartheta > 0$, т. е. возможны нарастающие колебания. При $\vartheta_n = \vartheta_{0i}$ ($i = 1, 2$) фаза устанавливается мгновенно, а амплитуда изменяется во времени по закону

$$A = A_n \exp \left\{ \left[\frac{m}{2} \cos \left(\arcsin \frac{2h}{m} \right) - \delta \right] \frac{\omega_0}{2} t \right\}, \quad (2.10)$$

откуда легко заключить, что параметрическое возбуждение имеет место, если $|h| < \sqrt{m^2/4 - \delta^2}$.

* В этом смысле (2.7), (2.8) близки к уравнениям лампового генератора, захватываемого внешней силой.

Величину

$$\beta = \left[\frac{m}{2} \cos \left(\arcsin \frac{2h}{m} \right) - \delta \right] \frac{\omega_0}{2}$$

можно назвать *линейным инкрементом* параметрического генератора. Максимальное значение $\beta = \beta_0$ соответствует $h=0$ ($\vartheta_{01}=0$, $\vartheta_{02}=\pi$). Величина β_0 фигурирует обычно в зарубежных работах при оценке длительности процесса установления колебаний в параметрическом генераторе.

Однако такое рассмотрение является, по-видимому, излишне упрощенным. В реальных условиях $\vartheta_n \neq \vartheta_0$, и наиболее правильно рассматривать величину ϑ_n как случайную. В автономном параметрическом генераторе, самовозбуждающемся от собственных шумов, функция распределения ϑ_n , очевидно, имеет вид: $W(\vartheta_n) = 1/2\pi$. Если в контур параметрического генератора специально вводится сигнал с нужной фазой (в реальных случаях — от другого параметрического генератора), функция $W(\vartheta_n)$ является сравнительно узкой; дисперсия начальной фазы $D(\vartheta_n)$ определяется флюктуациями фазового набега в тракте, шумами и другими причинами*. Пользуясь известной функцией $W(\vartheta_n)$ и уравнениями (2.7), (2.8), можно рассчитать статистические характеристики амплитуды и фазы для любого момента времени (при $t \rightarrow \infty$, $D(\vartheta) \rightarrow 0$).

Легко понять теперь механизм ограничения амплитуды колебаний в параметрическом генераторе. В случае реактивной нелинейности он связан с внесением при больших амплитудах генерации дополнительной расстройки; величина стационарной фазы ϑ_0 все более отличается от значений 0, π , соответствующих максимальной передаче энергии накачки параметрически возбужденным колебаниям; величина инкремента $\beta = \beta(A) \rightarrow 0$. В случае нелинейного активного сопротивления стационарные значения фазы равны «линейным стационарным фазам», даваемым (2.9): ограничение амплитуды происходит за счет возрастания потерь с ростом амплитуды.

Устойчивые стационарные решения (2.3), (2.4) имеют вид:

$$A^2 = \frac{4}{|\gamma_1|} \left[h + \sqrt{\frac{m^2}{4} - \delta^2} \right]; \sin(2\vartheta_0) = -\sqrt{1 - 4 \frac{\delta^2}{m^2}}.$$

Амплитуда параметрически возбужденных колебаний нарастает с ростом m . График зависимости амплитуды параметрического генератора

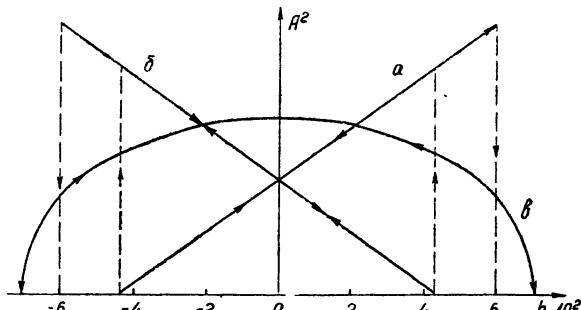


Рис. 6. Кривые параметрического резонанса в контуре с нелинейной индуктивностью (а, б) и в контуре с нелинейным сопротивлением (в).

от расстройки h (кривая параметрического резонанса) приведен на рис. 6 (кривая а для $\gamma < 0$, б — для $\gamma > 0$). Приведенная выше формула

* Флюктуации ϑ_n могут быть связаны также с флюктуациями параметров запускающего параметрического генератора (флюктуациями собственной частоты контура, флюктуациями амплитуды и фазы накачки).

предсказывает безграничный рост A^2 с ростом h ; с другой стороны, состояние равновесия устойчиво для $|h| < h_1 = \sqrt{m^2/4 - \delta^2}$ (см. стр. 216). Эти два обстоятельства приводят к тому, что при $h > h_1$ существует петля затягивания. Количественные вычисления этого участка резонансной кривой в рассматриваемом приближении невозможны: необходим учет высших членов в нелинейной характеристике индуктивности и учет членов более высокого порядка малости по h . На рис. 6 приведена также кривая параметрического резонанса для контура с нелинейным сопротивлением (кривая в).

Поскольку и в нелинейном режиме условия устойчивости накладывают требования на величину синуса двойного угла, то здесь также возможны два значения стационарной фазы ϑ_{01} и ϑ_{02} , сдвинутые на π . В рассматриваемом случае автономного генератора выбор того или иного значения ϑ_{0i} определяется начальными условиями; рассмотрение картины интегральных кривых укороченных уравнений (см., например, [2]) позволяет проследить траектории изображающих точек к двум возможным стационарным состояниям для различных начальных условий. Сказанное иллюстрируется рис. 7, где приведена картина фазовых

траекторий для параметрического генератора с нелинейной индуктивностью; A' и A'' соответствуют возможным стационарным режимам. С точки зрения применения параметрического генератора в цифровых машинах это означает, что одним из возможных способов записи информации (навязывания той или иной фазы параметрическому генератору — переключения) является так

называемый способ за-

пуска параметрического генератора колебаниями с данной фазой*.

Значительный интерес представляет теоретическое исследование процессов в параметрическом генераторе, находящемся под воздействием внешней силы, в частности, с частотой, равной частоте параметрического генератора; как показывает эксперимент [4, 5], при этом также оказывается возможным осуществлять переключение параметрического генератора. Теоретическое исследование этого режима в литературе, насколько нам известно, отсутствует; из работ по неавтономным режимам параметрического генератора следует упомянуть [5], где содержится общая постановка задачи о внешнем воздействии на параметрический генератор. Отметим также, что задача о внешнем воздействии на параметрический генератор представляет интерес и с точки зрения исследования открытого пока вопроса о чувствительности амплитуды

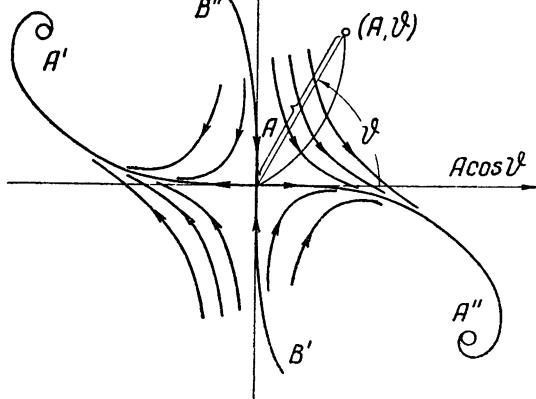


Рис. 7. Фазовые траектории для параметрического генератора с нелинейной индуктивностью.

* Строго говоря, процесс установления колебаний в параметрическом генераторе проходит в присутствии внешней силы (регулярной в генераторе, запускаемой внешним сигналом, и флюктуационной — в автономном); поэтому рассмотрение с учетом лишь начальных условий является, вообще говоря, приближенным.

и фазы параметрического генератора к шумам и флюктуациям параметров.

В заключение этого раздела следует указать, что изложенная теория параметрического генератора, в которой непосредственно фигурируют индуктивности и емкости, периодически зависящие от времени, не всегда полностью описывает процессы в реальных параметрических генераторах. При таком подходе предполагается, что колебания накачки в контуре отсутствуют, и не учитывается возможное обратное влияние параметрического генератора на генератор накачки. В действительности же, как будет видно, в частности, из раздела 3, эти условия не всегда выполняются. Последнее может приводить к ряду эффектов, не объясняемых уравнениями (2.3)–(2.6), и к появлению еще одной нелинейности, ограничивающей стационарную амплитуду параметрического генератора—нелинейности сопротивления нагрузки генератора накачки.

3. Рабочие характеристики и конструкции параметрических генераторов (экспериментальные данные)

Детальные экспериментальные исследования стационарных режимов параметрического генератора впервые были проведены в работах школы Мандельштама и Папалекси (см. [15, 36, 51]). Для параметрических генераторов, специально сконструированных в соответствии с основными допущениями изложенной в разделе 2 теории, было обнаружено хорошее согласие теории и эксперимента. Новые результаты, полученные в последние годы при исследовании параметрических генераторов, связаны, во-первых, с исследованием переходных процессов в автономных и неавтономных параметрических генераторах (режимов переключения) и с исследованием параметрических генераторов на новых управляемых реактивных элементах.

Схемы параметрических генераторов, предназначенных для использования в цифровых вычислительных машинах, приведены на рис. 8

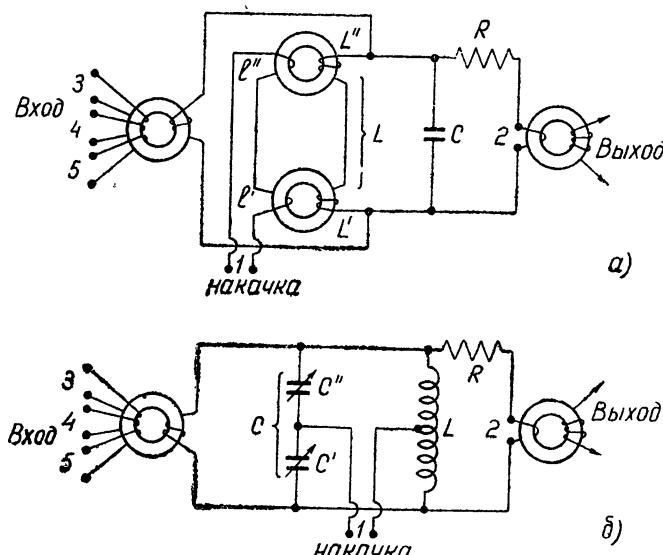


Рис. 8. Схемы низкочастотных параметрических генераторов, используемых в вычислительных машинах:

а) низкочастотный параметрический генератор на ферритовых сердечниках; б) низкочастотный параметрический генератор на полупроводниковых диодах

(а—низкочастотный параметрический генератор на ферритах, б—низкочастотный параметрический генератор на полупроводниковых диодах; в обеих схемах колебания накачки на выходе параметрического генератора компенсируются) и на рис. 9, где дан эскиз малогабаритного параметрического генератора СВЧ на полупроводниковом

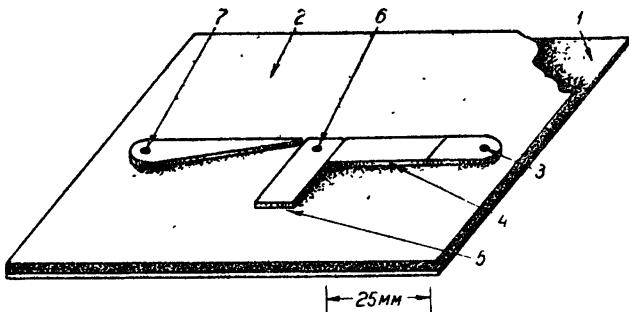


Рис. 9. Эскиз СВЧ параметрического генератора на полупроводниковом диоде:

1 — медная пластина, 2 — диэлектрик, 3 — волновод накачки, 4 — фильтр, 5 — резонатор параметрического генератора, 6 — полупроводниковый диод, 7 — выход параметрического генератора

диоде. В последнем используется полосковый резонатор и полосковые волноводы; колебания накачки и параметрическая генерация разделяются с помощью фильтров.

Результаты экспериментального исследования стационарных

режимов параметрических генераторов на ферритах, проведенные в последние годы (в частности, в Японии [2, 62—74]), оказываются по существу весьма близкими к соответствующим результатам работ [15, 36, 51]. С другой стороны, параметрические генераторы на полупроводниковых диодах обнаруживают ряд свойств, не описываемых теорией, изложенной в разделе 2. На рис. 10 приведена типичная (см. [4, 5]) зависимость мощности колебаний, параметрически возбужденных в контуре с германиевым полупроводниковым диодом, от мощности накачки ($f_n = 4000$ мгц). Видно, что имеется не только порог, но и „потолок“ по мощности накачки; последнее связано с резким увеличением проводимости диода с ростом мощности накачки*. В некоторых случаях вблизи порога наблюдается гистерезис.

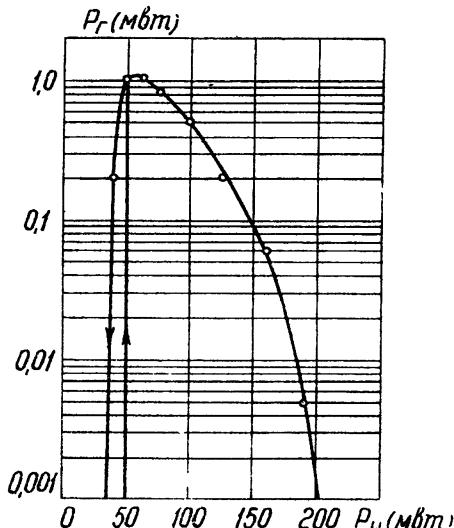


Рис. 10. Экспериментальная зависимость мощности параметрически возбужденных колебаний P_r от мощности накачки P_n для параметрического генератора на германиевом полупроводниковом диоде (частота накачки — 4000 мгц).

* Здесь представляется уместной аналогия с явлением резонанса второго рода в ламповой схеме, где обнаруживается такая же зависимость мощности возбуждаемых колебаний от мощности внешнего воздействия [56]. Вообще теоретическое исследование явлений в контуре с полупроводниковым диодом представляется более правильным проводить, не задаваясь заранее зависимостью $C(t)$, а рассматривая контур с нелинейной емкостью, находящейся под воздействием колебаний накачки.

Экспериментальные данные, характеризующие зависимость мощности параметрически возбужденных колебаний в параметрическом генераторе с полупроводниковым диодом от добротности контура, коэффициента модуляции емкости, кривые параметрического резонанса и т. п. приведены в [5]; отметим, что в [5] в схемах с полупроводниковыми диодами наблюдались также высшие параметрические резонансы (до $n = 4$).

Результаты экспериментального исследования факторов, определяющих относительную стационарную фазу параметрического генератора, а также различных режимов переключения изложены в [2–5, 57]. На рис. 11 приведена блок-схема экспериментальной установки, примененной в [57] для исследования вероятностей возбуждения стацио-

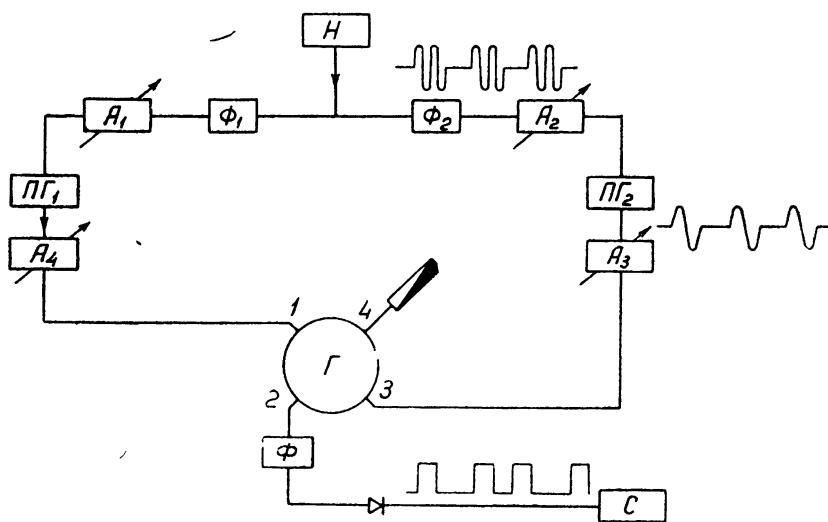


Рис. 11. Экспериментальная установка для измерения вероятности возбуждения стационарных фаз параметрических генераторов:
H—генератор накачки, А—аттенюаторы, Ф—фильтры, ПГ—параметрические генераторы, Г—гибридное кольцо, С—счетчик импульсов.

нарных фаз в параметрическом генераторе. Здесь общий генератор накачки питает два идентичных параметрических генератора; выходы последних подключены к гибридному кольцу. Если фазы колебаний параметрических генераторов совпадают, сигнал в выходном плече кольца отличен от нуля, если фазы противоположны — выходной сигнал отсутствует.

Детальные исследования, проведенные в [57] (производился много-кратный запуск параметрических генераторов), показали, что, как и следовало ожидать из теоретических соображений, в автономном параметрическом генераторе вероятность возбуждения одной из двух возможных фаз с большой степенью точности равна 1/2. В том случае, когда параметрический генератор самовозбуждается в присутствии внешнего сигнала частоты, равной половине частоты накачки, вероятность возбуждения фазы, ближайшей к фазе внешнего сигнала, увеличивается (см. также рис. 7). В [4] указывается, что для СВЧ генератора уже при мощности внешнего сигнала, составляющей $\sim 10^{-6}$ от мощности стационарных параметрических колебаний, возбуждение

В [57] установку, аналогичную изображенной на рис. 11, предложено использовать в качестве генератора случайных чисел.

колебаний с определенным значением фазы является практически достоверным событием.

Практически под длительностью процесса установления колебаний в параметрическом генераторе понимают длительность процесса установления амплитуды*; последняя величина, как уже указывалось, зависит от начальной фазы, амплитуды, коэффициента модуляции параметра и добротности колебательного контура параметрического генератора. Эксперименты, проведенные в [4, 5] с параметрическими генераторами, работавшими на частотах $\sim 4 \div 10 \text{ мгц}$ и 2000 мгц , показали, что длительность процесса установления амплитуды может быть достаточно точно оценена с помощью линейной формулы (2.10). Обнаружено, в частности, что в соответствии с (2.10) скорость нарастания амплитуды колебаний, выраженная в децибелах за период колебаний, не зависит от частоты. (Это обстоятельство широко использовалось для моделирования процессов в СВЧ параметрических генераторах с помощью генераторов на частоты $\sim 4 \div 10 \text{ мгц}$.) В качестве количественной меры скорости установления амплитуды колебаний в параметрических генераторах в ряде работ фигурирует также величина, равная числу периодов колебаний, необходимых для увеличения амплитуды в e раз. В экспериментах с параметрическими генераторами, работающими на частотах $\sim 2000 \text{ мгц}$ и использующими германиевые диоды с точечным контактом [4], скорость нарастания амплитуды составляла $\sim 6 \div 7 \text{ дБ}$ за одну наносекунду на линейном участке процесса установления и $\sim 3 \text{ дБ}$ вблизи установленвшегося режима.

Технические расчеты СВЧ параметрических генераторов, где подробно обсуждается выбор оптимальных параметров, режима полупроводникового диода и т. п., приведены в [58, 59].

Переключение параметрического генератора путем срыва колебаний и последующего возбуждения с заданной фазой, определяемой внешним сигналом, широко используется в вычислительных устройствах с параметрическими генераторами. Срыв и возбуждение параметрических колебаний могут осуществляться как путем модуляции накачки, так и путем модуляции смещения (с заходом в область $V > 0$). Следует иметь в виду, что время затухания колебаний (существенно влияющее на быстродействие параметрических генераторов) в указанных случаях неодинаково; в связи с этим использование контуров с высокой добротностью при первом способе модуляции не всегда целесообразно.

Потери преобразования в параметрическом генераторе (отношение мощности накачки к мощности параметрической генерации на выходе) определяются собственными потерями в контуре и управляемом реактивном элементе и элементами связи. Для низкочастотных параметрических генераторов чаще всего пользуются понятием напряжения, нежели мощности; данные, приведенные в [2, 5, 38], свидетельствуют, что амплитуды параметрически возбужденных колебаний имеют тот же порядок (единицы вольт), что и напряжение накачки. Потери преобразования в параметрических генераторах СВЧ имеют порядок $6 \div 15 \text{ дБ}$ [4, 5, 60, 61].

Некоторые результаты экспериментального исследования неавтономных режимов параметрических генераторов приведены в [35]. Измерения, проведенные с параметрическими генераторами на полупроводниковых диодах в диапазоне $\sim 4 \text{ мгц}$, показали, что переключение

* Строго говоря, длительности процессов установления стационарных амплитуды и фазы параметрического генератора различны; соотношение между ними зависит от вида нелинейности.

параметрических генераторов может быть осуществлено за счет воздействия сильного сигнала, имеющего частоту параметрической генерации на стационарно работающий параметрический генератор (так называемый режим захватывания параметрического генератора). Эксперименты показывают, что если фаза внешнего сигнала совпадает с фазой параметрического генератора, происходит лишь изменение амплитуды последнего; если же фазы противоположны, колебания захватываемого генератора сначала подавляются, а затем снова возникают с фазой, навязываемой внешним сигналом. Время установления режима захватывания обратно пропорционально амплитуде захватывающего сигнала; весьма удобным с точки зрения использования явления захватывания в вычислительных машинах оказывается возможность подобрать такие режимы, при которых времена установления режима захватывания резко (до 5–6 раз) уменьшаются при удвоении мощности захватывающего сигнала*.

В качестве примера можно привести данные работы [5]: в параметрическом генераторе частоты 4,5 мгц на полупроводниковом диоде время установления режима захватывания изменялось от 5 периодов частоты f_g до 25 периодов при изменении амплитуды захватывающего сигнала от 10 до 4,5 в (амплитуда накачки составляла при этом 4,5 в). Аналогичные явления наблюдались и в СВЧ параметрических генераторах. Некоторые другие способы переключения параметрических генераторов приведены в [4,5].

II ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

Гармонический осциллятор, имеющий n устойчивых видов колебаний с частотой f_g и относительной фазой $\Phi_k = 2\pi k/n$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$), может быть использован как триггер с n возможными устойчивыми состояниями, пригодный для осуществления n -значной логики. При этом все фазы могут быть определены лишь по отношению к фазе колебаний некоторого опорного осциллятора той же частоты. Например, параметрический генератор с частотой накачки $f_n = 2f_g$ имеет два устойчивых значения фазы колебаний, сдвинутых на π и различающихся по отношению к фазе колебаний опорного генератора, который питается тем же напряжением накачки. Такой параметрический генератор можно использовать в качестве элемента двоичной логики и успешно применить в логических и арифметических схемах и схемах памяти.

В данном разделе рассматривается применение параметрических генераторов в вычислительных машинах. Сначала излагаются общие вопросы, касающиеся управления перемещением информации при использовании двухполюсников (раздел 1). Затем приводятся основные логические и арифметические схемы, осуществляемые с помощью параметрических генераторов (раздел 2), схемы запоминающих устройств на параметрических генераторах (раздел 3) и некоторые устройства, связанные с вводом и выводом информации (раздел 4). В заключение кратко рассмотрены перспективы повышения быстродействия элементов и схем. При этом основное внимание удалено параметрическим генераторам на диодах, работающим в области СВЧ и способным обеспечить сверхбыстродействие схем и устройств.

* Как показывает эксперимент [5], время установления режима захватывания при фиксированной амплитуде захватывающего сигнала в довольно широких пределах можно изменять, изменения амплитуду накачки.

1. Управление движением информации при использовании двухполюсников

Обычно применяемые в вычислительных устройствах элементы автоматически обеспечивают передачу информации в нужном направлении, т. е. являются четырехполюсниками (электронные лампы, транзисторы и т. п.). Иначе обстоит дело при использовании двухполюсников, одним из примеров которых является параметрический генератор. Вход и выход этих элементов не разделены, и проблема управления движением информации требует здесь особого рассмотрения. Следует отметить, что развязка входа и выхода параметрического генератора с помощью различных приемов улучшает условия его работы, но не обеспечивает сама по себе направленного перемещения информации.

Возможны следующие методы управления движением информации:

- 1) метод синхронизации накачки;
- 2) метод синхронизации накачки с добавлением системы клапанов;
- 3) метод разделения входа и выхода с использованием импульсов сдвига информации.

Первые два метода применимы при использовании линий связи ненаправленного и направленного действий. Рассмотрим сначала метод синхронизации накачки при использовании линий связи ненаправленного действия. На рис. 12а изображены два элемента E_1 и E_2 , соединенные линией связи, позволяющей сигналам распространяться в обе стороны. Если информация передается от элемента E_1 к элементу E_2 , то говорят, что элемент E_1 управляет элементом E_2 ; при этом E_2 не должен управлять элементом E_1 . Задача управления обеспечивается системой амплитудно-модулированных волн накачки. На рис. 12б изображена временная диаграмма синхронизации накачки, благодаря которой E_1 может управлять E_2 , но E_2 не может управлять E_1 . Здесь P_1 и P_2 —амплитудно-модулированные напряжения накачки, сдвинутые по отношению друг к другу на $1/3$ периода модуляции T ; S_1 и S_2 —выходные сигналы E_1 и E_2 соответственно; S'_1 , S'_2 —управляющие сигналы для E_1 и E_2 соответственно; S''_1 —сигнал из E_2 , достигающий E_1 (всюду показаны огибающие); Δt —время распространения сигнала по линии связи от E_1 до E_2 [1]. Если изменить порядок появления P_1 и P_2 , то управление изменится на обратное.

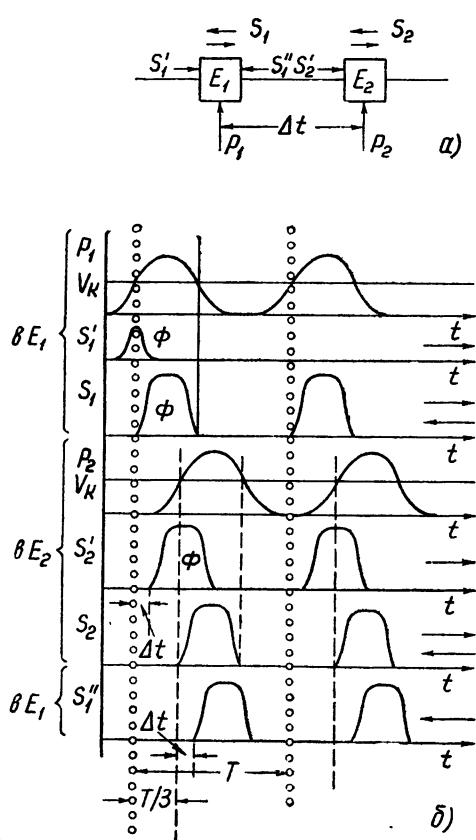


Рис. 12. Управление передачей информации: E_1 , E_2 —элементы, P_1 , P_2 —огибающие амплитудно-модулированной накачки, S_1 , S_2 —входные сигналы, S'_1 , S'_2 —выходные сигналы, S''_1 —обратное влияние элемента E_2 на E_1 .

Как показано на рисунке, к E_1 прикладывается накачка P_1 . Слева поступает информация о фазе S'_1 . Она должна поступить в момент, когда P_1 проходит че-

рез порог начала генерации V_k и возрастает. Элемент E_1 начинает генерировать с относительной фазой Φ , равной фазе S'_1 . Выходное напряжение элемента E_1 $S_1 \gg S'_1$. Оно распространяется в обе стороны и через время Δt достигает элемента E_2 . Однако E_2 начинает генерировать с относительной фазой Φ лишь после того, как P_2 пройдет через порог V_k . Сигнал S_2 распространяется вправо и влево и достигает E_1 через время Δt после начала генерации E_2 . К этому времени с момента начала генерации E_1 пройдет $(T/3 + \Delta t)$, так что P_1 станет равной V_k и будет убывать, E_1 прекращает генерацию. Это обеспечивает запрет на дальнейшее движение сигнала S_2 налево. Чтобы сигнал S'_1 не прошел дальше E_1 налево, между всеми элементами ставятся аттенюаторы. Они подбираются так, чтобы сигнал после прохождения двух аттенюаторов ослаблялся до величины, много меньшей нормального входного сигнала.

Таким образом, в сигнальном канале распространяется синусоидальная волна с амплитудной и фазовой модуляцией. Информация в волне представлена дискретными значениями фазы колебаний. Амплитудная модуляция не имеет значения для выполнения логических функций и служит для управления передачей информации.

Введем теперь трехфазную систему накачки, т. е. три волны модулированного по амплитуде напряжения накачки (рис. 13), сдвинутые

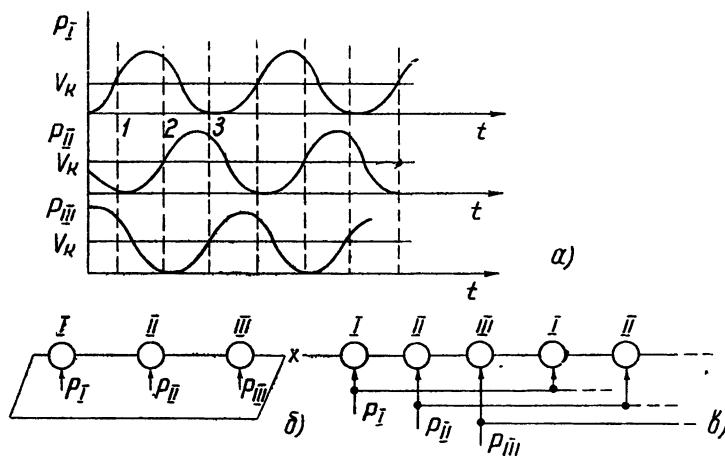


Рис. 13. Трехфазная система накачки и три класса элементов:
 P_I , P_{II} , P_{III} — огибающие накачки, I, II, III — элементы.

по отношению друг к другу на $(1/3) T$. Соответственно будем иметь три класса элементов I, II, III, различающихся по тому, какая из волн накачки питает элемент. Задержку между элементами считаем равной нулю (пренебрежимо малой по сравнению с T). При этом фаза выхода из элемента E_2 определяется фазой сигнала элемента E_1 , имеющейся в момент, когда напряжение питания E_2 проходит через V_k , а E_1 возбужден. Например, в момент 1 P_1 проходит через критический уровень V_k , II выключен, III включен. Следовательно, элемент III управляет элементом I. Аналогично, в момент 2 I управляет II, в момент 3 II управляет III*.

* Чтобы обеспечить правильное управление, возможно введение небольших задержек, дополняющих задержку в канале связи до $1/f_r$. Такая задержка не нарушит синхронизацию накачки, так как $1/f_r \ll T$.

Если ввести между элементами задержку в $(1/3) T$, то произойдет инверсия управления, так как порядок взаимодействия изменится на противоположный (рис. 14). Надпись „ $(1/3) T$ “ над каналом связи означает, что сигнал, распространяющийся по этому каналу, задерживается на $1/3$ периода модуляции накачки. Действительно, когда питание $P_I = V_K$ и нарастает, сигнал из I , приходящий в II , мал и не влияет

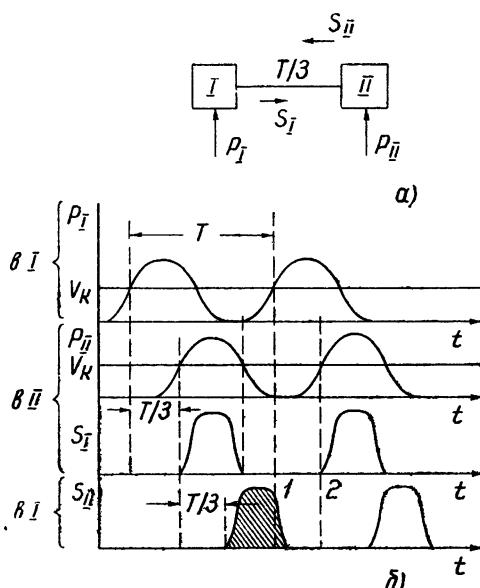


Рис. 14 Инверсия управления передачей информации:

I, II —элементы, P_I, P_{II} —огибающие накачки, S_I, S_{II} —огибающие сигналов параметрических генераторов. В момент 1 элемент II управляет I; в момент 2 элемент I не управляет II.

дую единицу обрабатываемой информации; кроме того, каждый параметрический генератор в цепочке вносит временную задержку в распространение сигнала. Минимальное количество классов—три (при использовании линий связи ненаправленного действия); оно приводит к простейшей схеме управления. Порядок управления не зависит от фазы, наводимой управляющим элементом в управляемом элементе, а количество классов элементов соответственно не зависит от количества возможных фазовых состояний. Таким образом, схема управления передачей информации пригодна для случая n возможных фазовых состояний, т. е. для элементов, осуществляющих n -значную логику. Частным случаем является двоичная логика, когда $n=2$.

Рассмотрим теперь метод синхронизации накачки с добавлением системы клапанов. Проанализируем сначала случай, когда линии связи являются ненаправленными. Если при этом ввести клапаны* в линии связи между элементами, то можно использовать двухфазную накачку ($p=2$). Поочередное открывание клапанов в моменты перекрытия импульсов накачки обеспечивает направленное движение информации (фазы) от одного элемента к другому. В изложенных выше способах каждый параметрический генератор возбуждается один раз в течение такта синхронизации T (так называемая стационарная накачка). При

на фазу генерации II, так что II начинает генерировать с фазой, не зависящей от фазы I, через время $(1/3) T$ после начала генерации I. Сигнал из II возвращается в I через $(2/3) T$ (нижний график) и держится некоторое время, большее $(1/3) T$ (заштрихованная часть). К моменту, когда P_I снова проходит через V_K вверх, он имеет максимальную величину и определяет фазу генерации элемента I. Таким образом, II управляет I, но I не управляет II.

Возможно аналогичное использование p волн амплитудно-модулированной накачки, сдвинутых на $(1/p) T$ друг относительно друга; соответственно должно быть p классов элементов. Чем больше p , тем большее количество параметрических генераторов требуется на каж-

* Клапаны могут быть построены на диодах, ферритах и других нелинейных элементах.

этом каждый параметрический генератор снабжается клапаном накачки, и имеется некоторое устройство управления, открывающее эти клапаны [2]. При открывании клапана параметрический генератор воспринимает фазу входного сигнала и управляет генератором следующей ступени. Возможно использование системы клапанов накачки и в случае стационарной накачки (трехфазной, например), что позволяет синтезировать удобные избирательные схемы. Система выбора каналов с помощью клапанов, в общем, уменьшает временную задержку и число параметрических генераторов за счет более сложной схемы управления.

Линии связи ненаправленного действия имеют значительные недостатки. Пусть, например, параметрический генератор, используемый в качестве усилителя, включается с помощью тройника из таких линий на входе. Входной сигнал (информация о фазе) подается в одно плечо тройника, а выходной сигнал снимается с другого. При этом только половина входного сигнала поступает на параметрический генератор, а вторая половина непосредственно проходит на выход и таким образом теряется. Аналогично, мощность выходного сигнала поровну делится между входным и выходным плечом. Важнейшими недостатками такой схемы включения являются, следовательно, потеря половины входной и выходной мощности и проникновение выходной мощности на вход. Последнее крайне нежелательно в вычислительных устройствах, призванных обеспечить направленное перемещение информации. Кроме того, потеря части выходной мощности уменьшает допустимое количество выходов, а следовательно, и сложность возможных логических схем.

Оба эти недостатка устраняются при использовании линий связи направленного действия, осуществляющих развязку входа и выхода параметрического генератора. Для этого возможно, например, включение в линии связи ферритовых изолаторов, имеющих большое отношение коэффициентов передачи вперед и назад, и т. п.*. В случае трехфазной накачки направленные линии связи повышают помехоустойчивость и логические возможности схем. В случае двухфазной накачки они, кроме того, заменяют клапаны, применяющиеся в ненаправленных линиях связи.

Разделение входа и выхода параметрического генератора удобно использовать для управления перемещением информации с помощью третьего из указанных методов. При этом параметрические генераторы соединяются линиями связи направленного действия, например, линиями, снабженными ферритовыми изолаторами. Накачка может быть непрерывной. Усиление (запоминание) новой информации, поступающей по входу параметрического генератора, достигается кратковременным срывом колебаний параметрического генератора любым из возможных способов. Таким образом, единица информации перемещается на одну ступень, т. е. импульсы срыва колебаний играют роль импульсов сдвига информации.

Развязка входа и выхода может также осуществляться в ячейке (рис. 15а), состоящей из двух параметрических генераторов и гибридного кольца [4]. Входной сигнал поступает в плечо 2 гибридного кольца и поровну делится между параметрическими генераторами, присоединенными к плечам 1 и 3, имеющим разность хода в $1/4$ волны. Вследствие разницы в длине плеч колебания одного из параметрических генераторов будут отставать по фазе на $\pi/2$ (для этого накачки обоих

* Интересной возможностью создания направленных элементов, обладающих усиливанием, является использование параметрических усилителей бегущей волны [3]. Такие усилители могут быть созданы, в частности, на полупроводниковых диодах, питаться той же накачкой, что и параметрические генераторы логических схем.

генераторов должны находиться в противофазе). На входе колебания обоих генераторов окажутся в противофазе и взаимно уничтожатся, а на выходе в фазе и усилият друг друга. Отношение мощности на выходе ячейки $P_{\text{вых}}$ к мощности на входе $P_{\text{вх}}$ существенно зависит

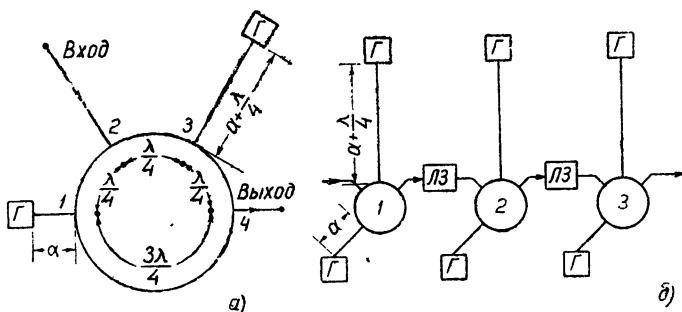


Рис. 15 а) Ячейка с развязкой входа и выхода. б) Сдвигающий регистр из ячеек с развязкой входа и выхода:
Г— параметрические генераторы, ЛЗ—линии задержки на целое чисто длин волн.

от отношения выходных мощностей генераторов; возможно получение $P_{\text{вых}}/P_{\text{вх}} > 20$ [1].

В схемах, собранных из таких ячеек, также можно осуществить направленное перемещение информации и при непрерывной накачке с помощью импульсов сдвига информации, вызывающих кратковременный срыв колебаний генераторов ячейки.

Можно отметить, что все рассмотренные методы управления движением информации не зависят от числа возможных фазовых состояний, используемых элементов и пригодны как для двоичной, так и для многозначной логики.

2. Логические и арифметические схемы на параметрических генераторах

Далее всюду рассматривается двоичный случай. Двоичная единица информации (бит) представляется фазой несущей частоты f_1 , причем фазе 0 приписывается значение „0“, а фазе π —значение „1“. Различие между „0“ и „1“ определяется по отношению к опорным генераторам. Этими источниками постоянной фазы могут служить динамические триггеры, состоящие из трех параметрических генераторов, замкнутых в кольцо и постоянно хранящих „1“ („0“ можно получить с помощью отрицания, как указано далее). Опорные генераторы „1“ и „0“ широко используются в логических схемах.

В логических и арифметических схемах параметрические генераторы обозначаются кружками, каналы связи — линиями (если связь двойной интенсивности, то проводится двойная линия). Входы на параметрические генераторы будут слева, выходы справа. Если используется трехфазная система накачки, то сверху над кружком надписьивается класс элемента: I, II или III. Могут соединяться только элементы различных классов, причем информация будет передаваться в направлении I→II→III→I→... Если помимо входов, показанных на схеме, на параметрический генератор подается „1“ с опорного генератора, то в кружке ставится „+“. Если подается „0“, то в кружке ставится „—“. При подаче двух одинаковых постоянных сигналов в кружке ставятся два соответствующих знака*.

* Эта удобная система обозначений принята в работах японских авторов

Основной логической схемой, осуществляющей с помощью параметрического генератора, является мажоритарная схема (или „схема большинства“, рис. 16а). Схема имеет много входов и один выход; фаза выходного сигнала, определяющая его логическое значение („0“ или „1“), равна фазе сигналов, имеющихся на большинстве входов.

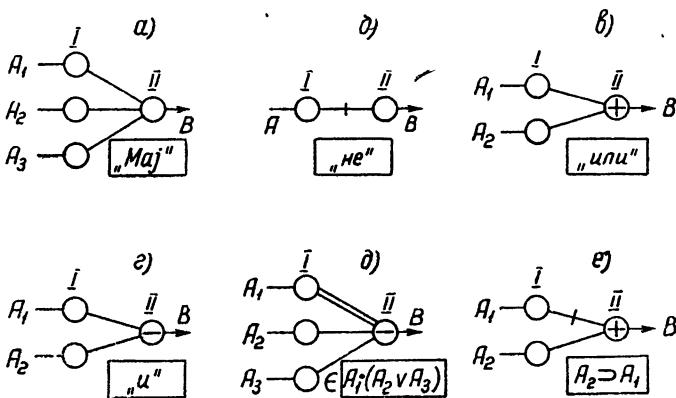


Рис. 16. Логические схемы на параметрических генераторах:
а) мажоритарная схема на три входа, б) схема отрицания; в) схема „или“ на два входа, г) схема „и“ на два входа; д) схема A_1 (A_1VA_2); е) схема импликации.

Чтобы не было неопределенности, должно иметься нечетное количество входов. Работа схемы основана на алгебраическом сложении в общем волноводе $(2n+1)$ синусоидальных сигналов равной амплитуды, получаемых от параметрических генераторов, т. е. сигналов вида $A_i = E \sin(2\pi f_r t + \Phi_i)$ с относительными фазами Φ_i , равными 0 или π^* . Если все три сигнала имеют одинаковую фазу, то при сложении получается утроенный по амплитуде сигнал той же фазы; если только два из сигналов имеют одинаковую фазу, то при сложении получается сигнал той же амплитуды и фазы. Так как информация изображается фазой, то изменения в амплитуде не важны, и выходной сигнал B осуществляет мажоритарную функцию**:

$$B = \text{Maj}(A_1, A_2, A_3).$$

Другой основной логической операцией является отрицание („не“). Отрицание достигается задержкой сигнала на полволны субгармонического колебания (или переменной полярности соответствующей первичной обмотки входного трансформатора для параметрических генераторов на ферритах). На функциональных схемах это отмечается поперечной чертойкой на линии связи. При этом фаза элемента II будет отличаться на π от фазы элемента I, т. е. (см. рис. 16б)

$$B = \bar{A}.$$

Операций мажоритарности и отрицания с добавлением сигналов

При использовании параметрических генераторов на ферритовых сердечниках соответствующая операция сводится к сложению магнитных потоков во входном трансформаторе параметрического генератора, создаваемых несколькими первичными обмотками (рис. 8).

Мажоритарная функция сложно выражается через элементарные функции „и“ или „или“.

$$\text{Maj}(A_1, A_2, A_3) = (A_1 A_2) V (A_2 A_3) V (A_3 A_1).$$

В машинах, основанных на использовании параметрических генераторов, удобнее принять функцию Maj в качестве элементарной.

опорных генераторов достаточно для получения всех остальных логических операций. Так, мажоритарная схема на три входа при подаче на один из входов „1“ с опорного генератора преобразуется в схему „или“ на два входа:

$$B = \text{Maj}(A_1, A_2, 1) \equiv A_1 \vee A_2.$$

Действительно, если хотя бы на одном входе „1“, то в совокупности с „1“ от опорного генератора на двух входах из трех будет „1“, т. е. мажоритарность обеспечивается, и логическое значение B будет „1“ (рис. 16в). При подаче на один из входов той же схемы „0“, т. е. задержанной на полволны „1“, получается схема „и“ на два входа, поскольку

$$B = \text{Maj}(A_1, A_2, 0) \equiv A_1 \cdot A_2.$$

Здесь на выходе будет „1“ только тогда, когда A_1 и A_2 одновременно принимают значение „1“, т. е. схема работает, как схема „и“ (рис. 16г). Мажоритарные схемы на пять входов можно аналогично преобразовать в схемы „или“ и „и“ на три входа согласно тождествам

$$A_1 \vee A_2 \vee A_3 \equiv \text{Maj}(A_1, A_2, A_3, 1, 1);$$

$$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \equiv \text{Maj}(A_1, A_2, A_3, 0, 0).$$

В качестве примеров неэлементарных функций можно привести схему рис. 16д:

$$B = A_1 \cdot (A_2 \vee A_3),$$

функцию импликации „ A_2 имплицирует A_1 “ (рис. 16е):

$$A_2 \supset A_1$$

и схему сложения по модулю 2 на пять входов (рис. 17а):

$$B = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) \pmod{2}.$$

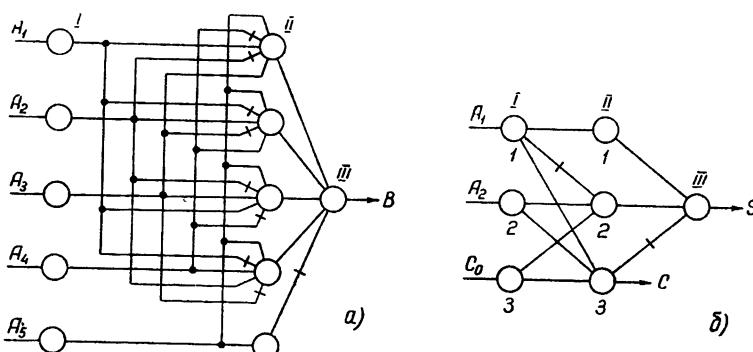


Рис. 17. а) Схема сложения по модулю 2 на пять входов. б) Одноразрядный двоичный сумматор.

В последней схеме „1“ на выходе появляется при наличии „1“ на нечетном количестве входов. Как видно на этих примерах, мажоритарные схемы на 3 и 5 входов являются достаточно эффективным средством синтезирования различных логических схем даже по сравнению с обычными „и“ и „или“. В обычных диодных схемах часто требуется значительно больше элементов для осуществления тех же логических функций.

Большую гибкость схемам придает также возможность получения операции „не“ задержкой сигнала на половину длины волны. Напри-

мер, „или“ преобразуется в „и“ простым сдвигом фазы опорного генератора.

На рис. 17б изображена схема двоичного одноразрядного сумматора. Она представляет собой, по существу, схему сложения по модулю 2 на три входа, но с дополнительным выходом, сделанным с параметрического генератора Π_3 , который осуществляет функцию мажоритарности. Таким образом получаются сумма S и перенос в старший разряд C :

$$S = (A_1 + A_2 + C_0) \pmod{2};$$

$$C = \text{Maj}(A_1, A_2, C_0),$$

где A_1, A_2 —первое и второе слагаемые, C_0 —перенос из младшего разряда [2].

Если вместо второго слагаемого A_2 на вход генератора I_2 подать выход суммы S , то параметрические генераторы I_2, II_2, III_1 составят динамический триггер и получится схема накапливающего сумматора, осуществляющего сложение слагаемого A_1 со своим содержимым и сохраняющего полученную сумму. Вычитание выполняется обычным методом путем прибавления вычитаемого в дополнительном коде; для умножения и деления помимо сумматоров используются сдвигающие регистры и т. п. [38]. Таким образом, разработанная методика выполнения арифметических операций вполне применима и в арифметических устройствах на параметрических генераторах.

3 Запоминающие устройства на параметрических генераторах

Параметрические генераторы пригодны для осуществления триггеров, счетчиков, регистров (в частности, сдвигающих регистров), динамической и матричной систем памяти.

Каждый параметрический генератор, постоянно сохраняющий определенную фазу колебаний, представляет собой триггер. Для трехфазной системы накачки более удобным является динамический триггер, состоящий из трех параметрических генераторов, замкнутых в кольцо. На обоих входах триггера, представленного на рис. 18а, нормально „0“.

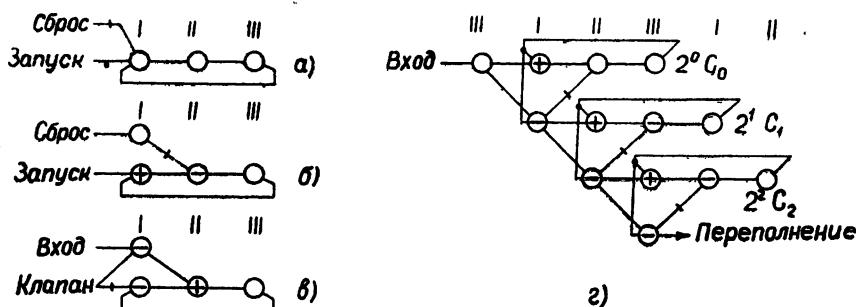


Рис. 18. а), б), в) Три вида динамических триггеров. г) Трехразрядный двоичный счетчик.

Триггер запускается на „1“, если ко входу „запуск“ приложить „1“, и сбрасывается на „0“, если ко входу „сброс“ приложить „1“. Если на обоих входах будет одновременно „1“, то состояние триггера не изменится. Триггер рис. 18б отличается от предыдущего тем, что при одновременном появлении „1“ на обоих входах он сбрасывается на „0“. На рис. 18в изображен триггер с входным клапаном. Если на клапан

подать „0“, который одновременно поступает на два параметрических генератора I ступени, то хранящаяся информация не меняется; если на клапан подать „1“, то сигнал со входа поступает на триггер [2].

На рис. 18г три триггера (таких же, как на рис. 18б) образуют трехразрядный двоичный счетчик. Если на входе счетчика „0“, то его состояние не изменится. При появлении на входе „1“ за каждый такт синхронизации накачки хранящееся в счетчике двоичное число C увеличивается на единицу:

$$C = C_0 + 2C_1 + 4C_2.$$

После поступления восьми сигналов счетчик принимает нулевое состояние и выдает сигнал „переполнение“.

Параметрический генератор очень удобно применять для получения задержки сигнала. Всякая цепочка параметрических генераторов представляет собой естественную линию задержки (рис. 13в). Двоичный сигнал X двигается слева направо, перемещаясь на одну ступень за $1/3$ периода модуляции накачки T . Каждый генератор, таким образом, осуществляет задержку сигнала на $(1/3) T$. Линия может использоваться как сдвигающий регистр. Замкнутую линию задержки можно использовать для динамического запоминания произвольного двоичного кода, причем на каждый двоичный разряд будет приходиться три параметрических генератора. Принципиально осуществима динамическая система памяти на замкнутых линиях задержки.

На рис. 15б представлен сдвигающий регистр, собранный из ячеек с развязкой входа и выхода, соединенных последовательно через линии задержки на целое число волн. Информация может быть записана в регистр параллельным и последовательным способом и перемещается в направлении, указанном стрелками. Для сдвига информации на один разряд достаточно осуществить срыв колебаний во всех параметрических генераторах на некоторый интервал времени, меньший, чем время задержки между ячейками. При возобновлении генерации в каждой ячейке устанавливается та фаза колебаний, которая имела место в соседней слева ячейке, поскольку выходной сигнал предыдущей ячейки еще поступает с линии задержки. Генераторы регистра имеют непрерывную накачку; на каждый разряд приходится два параметрических генератора [1].

К оперативному запоминающему устройству на параметрических генераторах должны быть предъявлены следующие требования:

1) время выборки из памяти должно быть сравнимо с временем срабатывания логических схем;

2) установление желаемой фазы в выбранном генераторе (запись) не должно нарушать фазы колебаний всех других генераторов;

3) при чтении фазы выбранного генератора не должны мешать сигналы с других генераторов.

Возможны две системы оперативных запоминающих устройств матричного типа, удовлетворяющих этим требованиям: система с вспомогательными параметрическими генераторами и система с взаимной компенсацией [3].

В системе с вспомогательными параметрическими генераторами один генератор используется для хранения информации, а другой для выбора элементов памяти и чтения хранящейся в них информации (см. рис. 19, на котором параметрические генераторы с нелинейной емкостью изображены условно; толстые линии—шины накачки; выходной сигнал снимается через аттенюатор $R_{\text{вых}}$ или с помощью выходного трансформатора $T_{\text{вых}}$). Запоминающий параметрический генератор постоянно возбужден и сохраняет информацию. Запись информации про-

изводится в результате захватывания параметрического генератора имеющего место при совпадении двух сигналов частоты f_g и нужной фазы, поступающих по адресным шинам L_{ix} и L_{jy} . Вспомогательный параметрический генератор нормально не возбужден и возбуждается лишь при считывании вследствие совпадения двух сигналов накачки

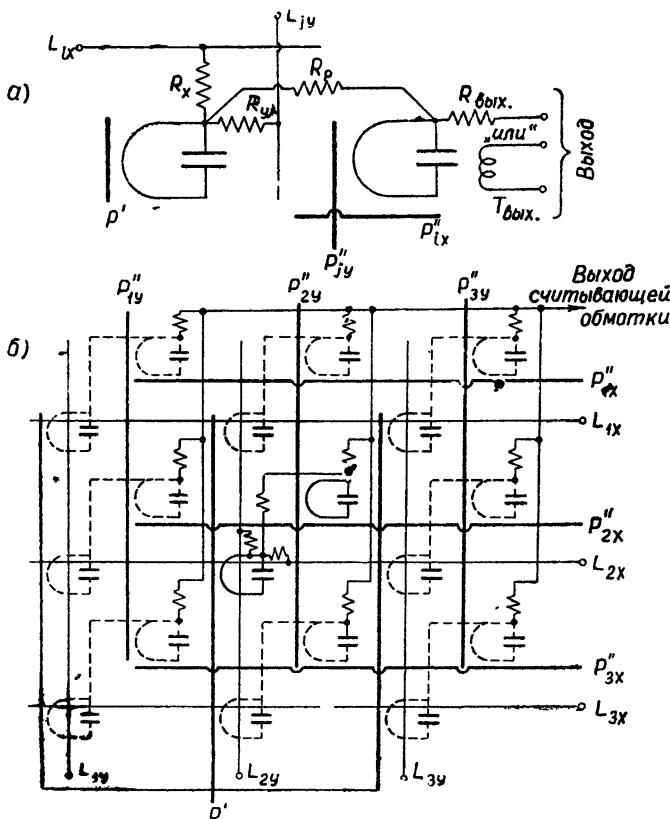


Рис. 19. Матричное запоминающее устройство с вспомогательными параметрическими генераторами.

P''_{ix} и P'_jy половиной амплитуды. Благодаря имеющейся связи выбранный вспомогательный генератор воспринимает фазу колебаний запоминающего генератора. Поскольку генерирует лишь выбранный вспомогательный генератор, то считывание можно осуществить через смесительные сопротивления $R_{вых.}$, соединенные параллельно, или через выходные трансформаторы $T_{вых.}$, соединенные последовательно. В СВЧ устройствах считывание возможно с помощью слабо связанных антенн. К одному усилителю чтения (им может являться параметрический генератор) можно подсоединить столько входов, сколько позволяет отношение сигнал/шум.

В системе с взаимной компенсацией также имеются два параметрических генератора на каждый бит информации (рис. 20). Оба генератора возбуждены (шины накачки P_1 и P_2); однако их сигналы различаются по фазе на π в общей выходной цепи и взаимно компенсируются, так что нормально выходной сигнал отсутствует. Запись производится в параметрический генератор I в результате захватывания параметрического генератора, имеющего место при совпадении сигналов на L'_{ix} и L'_{jy} или L'_{ix} и P_1 . Затем эта информация передается в параметрический генератор II методом запуска генератора колеба-

ниями с данной фазой; для этого можно срывать генерацию параметрического генератора II кратковременным выключением накачки P_2 или смещением диода в область проводимости. В схеме, представленной на рисунке, оба параметрических генератора генерируют с одинаковой фазой, а инверсия фазы получается в выходной цепи, т. е. об-

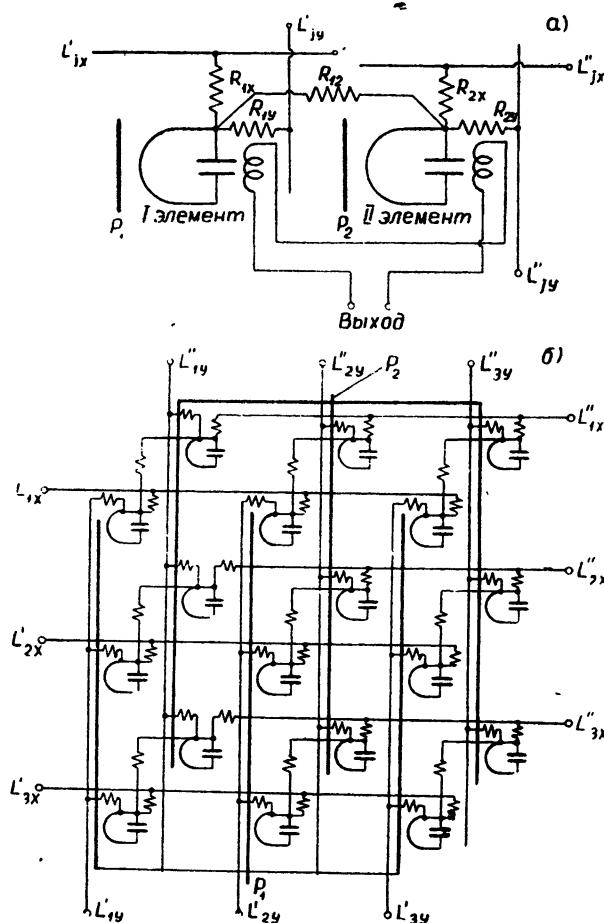


Рис. 20. Матричное запоминающее устройство с взаимной компенсацией.

мотки выходных трансформаторов включены навстречу одна другой. Можно сделать и наоборот, для чего следует предусмотреть устройство, записывающее сигнал в генератор II в противофазе, например, ввести задержку на полволны между генераторами I и II. Чтение осуществляется в результате захватывания параметрического генератора II при совпадении сигналов на L''_{ix} и L'_{jy} или L''_{ix} и P_2 (в данной схеме, когда фазы колебаний генераторов I и II одинаковы, генератору II навязывается фаза „0“). На выходе появляется сигнал удвоенной амплитуды с фазой, означающей „1“, если в элементе памяти была единица. Если же был записан „0“, то на выходе не появляется никакого сигнала, так как состояние параметрического генератора II не изменится и сохранится взаимная компенсация. Так как при чтении произошло разрушение информации в параметрическом генераторе II, следует предусмотреть цепь восстановления (перезаписи). В данной схеме вместо этого используется непосредственная связь между обоими генераторами,

к информации в параметрическом генераторе II восстанавливается иратковременным прерыванием P_2 .

4. Преобразование амплитудной записи информации в фазовую. Возможности повышения быстродействия схем

Входные устройства вычислительной машины преобразуют информацию, получаемую ими с перфокарт, перфоленты, магнитной ленты и т. п., в видеоимпульсы (импульсы постоянного напряжения). Выходные устройства также воспринимают лишь информацию, закодированную видеоимпульсами. Для ввода информации в вычислительную машину, использующую фазовую запись информации, видеоимпульсы, даваемые тем или иным устройством ввода, должны быть преобразованы в фазовую модуляцию несущей; для вывода информации из машины необходимо обратное преобразование. При этом возможно промежуточное преобразование видеоимпульсов в амплитудно-модулированную несущую (амплитудная запись) и фазовой записи в амплитудную для последующего детектирования*.

Преобразование фазовой и амплитудной записей друг в друга на СВЧ можно осуществить с помощью гибридного кольца (рис. 21). Для

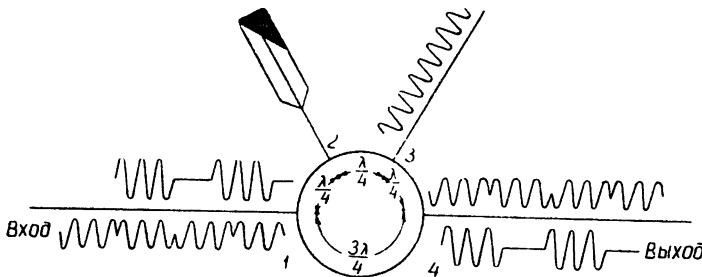


Рис. 21. Преобразователь модуляции из фазовой в амплитудную и обратно.

преобразования амплитудной записи в фазовую радиоимпульсы основной частоты f_r и постоянной фазы подаются на один вход (1), а на другой вход (3) подаются непрерывные колебания той же частоты и фазы, но половинной амплитуды. К выходу (4) сигналы приходят в противофазе благодаря разности хода в полволны; при сложении получается несущая половинной амплитуды, имеющая ту же или противоположную фазу в зависимости от отсутствия или наличия радиоимпульса на входе. Для преобразования фазовой записи в амплитудную информация, предоставленная фазой несущей, подается на один вход (1), а на другой вход (3) по-прежнему подается несущая постоянной фазы. На выходе (4) появляются радиоимпульсы удвоенной амплитуды, имеющие частоту и фазу немодулированной несущей [8].

Обратимся теперь к вопросу о быстродействии рассмотренных схем на параметрических генераторах. Быстродействие вычислительной машины (количество арифметических или логических операций, выполняемых в 1 сек) определяется как скорость переключения используемых элементов, так и функциональными и схемными решениями всей машины в целом и отдельных ее узлов. Очевидно, что машины параллельного действия способны обеспечить большее быстродействие,

* Во входных и выходных устройствах японских вычислительных машин, использующих параметрические генераторы на ферритах (параметроны), осуществлено непосредственное преобразование видеоимпульсов в фазу несущей и обратно (см. [33]).

чем машины последовательного действия, но требуют большего количества оборудования, или что двухфазная накачка с этой же точки зрения предпочтительнее трехфазной, но также требует усложнения схем и т. д. Таким образом, при неизменной скорости переключения применяемых элементов повышение быстродействия вычислительной машины ограничивается соображениями экономичности, надежности, габаритов и т. п., но предельное быстродействие, в конечном счете, не превысит скорости переключения активных и пассивных элементов машины.

Для схем на параметрических генераторах основным фактором, ограничивающим их быстродействие, является время переключения параметрического генератора τ от одной фазы к другой; оно определяет и период модуляции накачки T . Величина τ зависит от способа переключения и режима параметрического генератора. Обычно используемый для оценки скорости переключения безразмерный параметр $S = \tau f_r$ (время переключения в периодах колебаний сигнала), как было показано в разделе I, п. 2, 3, практически не зависит от f_n для обычно используемых способов переключения, а определяется соотношением амплитуд управляющего сигнала и параметрического генератора, потерями и т. п. Таким образом, при прочих равных условиях повышение f_n приводит к увеличению быстродействия вычислительной машины; недавно появились сообщения [62] о создании параметрического генератора на полупроводниковом диоде с $f_n = 3,5 \cdot 10^4$ мгц и потерями преобразования $\sim 10 - 12$ дБ.

Следует иметь в виду, что повышение рабочей частоты связано с решением ряда технических проблем, таких как создание соответствующих достаточно надежных и дешевых элементов трактов и т. п. По наиболее оптимистическим оценкам, лучшие из разработанных в настоящее время параметрических генераторов с $2 \div 10$ входами-выходами в оптимальных режимах переключения требуют для переключения $\sim 5 \div 10$ периодов частоты f_r (см. [3, 5]). В этом случае возможно, очевидно, использование частот повторения лишь в $10 \div 20$ раз меньше f_n (т. е. $\sim 200 \div 400$ мгц при $f_n = 4 \cdot 10^3$ мгц и $\sim 1000 \div 2000$ мгц при $f_n = 2 \cdot 10^4$ мгц). Отметим, однако, что в японских цифровых машинах на параметрических генераторах с нелинейной индуктивностью („параметронах“) отношение частоты повторения к частоте накачки принято $\sim 1/60 \div 1/120$, т. е. с гораздо большим „запасом“, нежели предполагается для сверхбыстродействующих машин. В [2] приведены данные японской вычислительной машины параллельного действия РС-2, выполненной на параметрических генераторах с оперативным запоминающим устройством на ферритовых сердечниках. В этой машине $f_n = 6$ мгц, частота повторения 100 кгц. Машина выполняет сложение за 40 мксек, умножение—за 340 мксек.

С принципиальной точки зрения интересным является вопрос о предельном быстродействии, достижимом в электронных цифровых машинах; как уже указывалось во введении, при достижении высоких частот повторения (~ 2000 мгц и выше) существенную роль здесь может играть конечная скорость распространения электрических сигналов по линиям связи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенный в настоящем обзоре материал свидетельствует о наличии вполне конкретных путей внедрения СВЧ элементов в вычислительную технику с целью существенного повышения быстродействия цифровых машин. Возникающие здесь проблемы можно разбить на три группы.

1) Разработка и исследование СВЧ триггеров—устройств с несколькими устойчивыми состояниями, характеризуемыми либо амплитудой, либо фазой, либо частотой колебаний.

2) Разработка логических схем, пригодных для использования в вычислительных машинах с СВЧ элементами и, в частности, в машинах, использующих для записи информации амплитуду, частоту или фазу несущей.

3) Технические проблемы, связанные с созданием малогабаритных, экономичных и надежных устройств.

Параметрические генераторы не являются, разумеется, единственной возможностью внедрения СВЧ элементов в вычислительную технику. Вместе с тем, на их примере можно составить достаточно ясные представления о путях решения перечисленных выше проблем. Отметим также, что описанные логические схемы, использующие двухполюсники и триггеры с несущей (все это было рассмотрено в основном с точки зрения параметрических генераторов), интересны и с принципиальной точки зрения. Возможно, что дальнейшее исследование рассмотренных в настоящем обзоре вопросов приведет к выводу о целесообразности комбинирования различных элементов в сверхбыстро действующих вычислительных машинах (например, параметрических генераторов и туннельных диодов, параметрических генераторов и кристаллических модуляторов). Можно ожидать, что интенсивная совместная работа радиофизиков и специалистов по вычислительным машинам приведет в ближайшие годы к созданию законченных вычислительных машин с быстродействием, по крайней мере, на два порядка превышающим быстродействие современных машин.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приборы СВЧ в вычислительных устройствах с амплитудной записью информации

В СВЧ системах с амплитудной записью информации возможно использование электронных приборов (ЛБВ, кластронов) и диодных модуляторов СВЧ. Эти приборы, в общем, представляются менее перспективными, чем параметрические генераторы. Некоторые из них не пригодны для универсальных вычислительных машин. Но так как не исключена возможность успешного применения их в специальных вычислительных устройствах, то целесообразно кратко рассмотреть некоторые особенности предложенных в этой области схем.

Лампы с бегущей волной. ЛБВ может использоваться в качестве усилителя в специализированных сверхбыстро действующих цифровых вычислительных машинах. ЛБВ с внешней петлей обратной связи может, в принципе, выполнять функции триггера. Однако триггер на ЛБВ сильно отличается от обычного триггера, состоящего, например, из двух транзисторов. В современных цифровых машинах время между последовательными перебросами триггера много больше, чем задержка, вносимая самим транзистором. Устойчивое состояние достигается быстро, и процесс установления занимает очень небольшую часть такта. По сравнению с транзисторами ЛБВ имеет очень широкую полосу, и отдельные двоичные сигналы могут следовать друг за другом с гораздо большей скоростью. Однако время, требующееся для усиления, при этом не укорачивается соответственно, и задержка усиления может быть в несколько раз больше, чем интервал времени, занимаемый одним битом информации.

Пусть, например, для установления постоянной амплитуды сигнала он должен дважды проциркулировать вдоль ЛБВ и петли обратной связи (точная величина зависит от усиления ЛБВ); если при каждом

обороте вносится задержка в 2 нсек, то время „переброса“ такого триггера на ЛБВ составит 4 нсек. Но эта же ЛБВ пригодна для усиления импульсов, появляющихся с частотой $\sim 10^3$ мгц, т. е. требуется 4 периода для переброса триггера и запоминания информации. Эта задержка усиления сильно снижает эффективность использования ЛБВ в вычислительных устройствах, в несколько раз понижая быстродействие.

В качестве одного из способов преодоления этого недостатка предлагается следующий [14]. Используется ЛБВ с таким усилением, что нормальная амплитуда сигнала в триггере устанавливается за один период циркуляции; соответственно увеличивается и задержка, скажем, до 4 нсек. В триггере будут храниться 4 сигнала, каждый из которых в течение каждого периода циркуляции участвует в одной из четырех независимых операций; прибор можно назвать „4-триггером“. В аналогичных „4-триггерах“ хранятся и команды, такую же структуру имеют и накапливающие сумматоры на ЛБВ и т. д., так что машина в целом представляет собой как бы 4 независимых машины, выполняющих 4 независимых ряда вычислений. С помощью определенных команд возможен и обмен информацией между этими частями машины, что превращает ее в единый комплекс. Логика такой „квадруплексной“ машины достаточно полно разработана (см. [11]), но сейчас трудно что-либо сказать о практической целесообразности такого рода систем.

Помимо вносимой задержки, использованию ЛБВ препятствуют высокая стоимость этих приборов, большие габариты, трудность монтажа и наладки, недолговечность (определяется сроком службы катода), сложность замены прибора, находящегося в вычислительном устройстве, и другие факторы. Поэтому широкого распространения они, по-видимому, не получат.

Диодно-волноводные схемы. Логические (арифметические) схемы можно получить при использовании обычных волноводов и модулирующих и детектирующих диодов. Одной из возможностей является использование в качестве основного логического элемента крестооб-

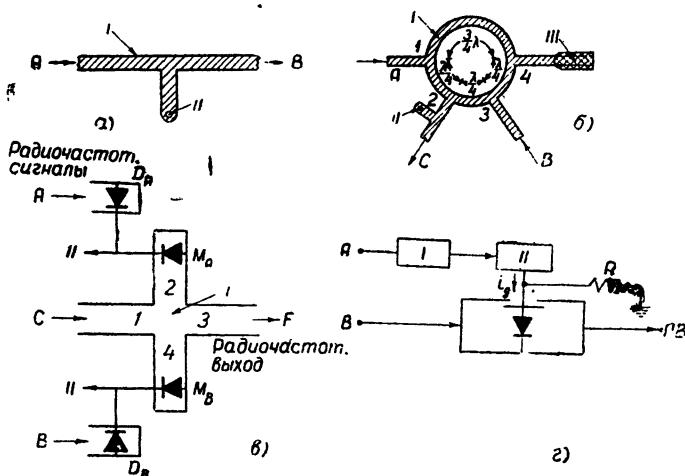


Рис. 22. Приборы СВЧ для устройств с амплитудной записью информации:

- а) экспандер (I—полосковая линия передачи, II—кристаллический диод, A—входной радиосигнал, B—выходной радиосигнал); б) схема „и“ на полосковых линиях (I—гибридное кольцо на полосковых линиях, II—кристаллический диод, III—поглощающая нагрузка, A, B—входы, C—выход); в) модулятор (I—гибридное соединение, II—смещение от источника постоянного тока, A, B, C—радиочастотные сигналы (входы), F—радиочастотный сигнал (выход)); г) схема „н“ с детектирующим диодом (I—усилитель СВЧ, II—детектор).

разного соединения двух волноводов (рис. 22в), так называемого „модулятора“ [13]. Проводимость такого соединения зависит от амплитуд волн, отражаемых в плечах 2 и 4, что, в свою очередь, зависит от проводимости модулирующих диодов M_A и M_B , которая определяется смещением на диодах. Это смещение изменяется благодаря детектированию СВЧ сигналов A и B на детектирующих диодах D_A и D_B .

Если есть сигнал A , то M_A запирается; если A отсутствует, то M_A открыт; соответственно его проводимость резко увеличивается. Аналогичное явление имеет место для M_B .

Возможны модуляторы балансного типа с диодами равной проводимости и небалансного типа с диодами различной проводимости; первые осуществляют функции разделительного „или“, „и“, „не“, вторые—функции „или“, „и“, „не“. Например, в модуляторе балансного типа сигнал C проходит на выход при наличии одного из сигналов A или B , но не двух сразу (см. [13]). Если A всегда присутствует, то модулятор осуществляет функцию разделительного „или“ сигналов B и C : $F = B + C$. Если A всегда отсутствует, то модулятор осуществляет функцию „и“: $F = B \cdot C$. Если A и B всегда присутствуют, то модулятор выполняет функцию „не“: $F = \bar{C}$.

На рис. 22г изображен другой вид диодно-волноводного клапана [12]. Диод вмонтирован поперек волновода в направлении вектора поля E в волноводе; проводимость диода зависит от величины смещения и от уровня СВЧ мощности на нем. Схема, представленная на рисунке, выполняет функцию „и“ входных сигналов: $C = A \cdot B$. Если изменить полярность диода, одновременно подав на него положительное смещение, то схема будет осуществлять функцию $C = \bar{A} \cdot B$.

Оба устройства могут применяться также для восстановления формы сигнала: если форма входного сигнала несколько ухудшилась, то после прохождения через схему он восстанавливается до нормальной амплитуды и длительности. Диодно-волноводные приборы такого типа устойчиво работают при частоте несущей $\sim 10^4$ мгц и частоте повторения импульсов $\sim 10^3$ мгц. Большим недостатком приборов является необходимость значительной мощности сигнала на входе детектирующего диода, превышающей мощность выходного сигнала на 20 дБ и больше. Поэтому при соединении таких приборов требуются промежуточные усилители на ЛБВ (в настоящее время это единственные усилители, имеющие подходящую полосу), что сильно увеличивает их габариты и в несколько раз понижает быстродействие*. При этом усиление ЛБВ, в общем, пропорционально задержке сигнала в ней; для того, чтобы один прибор управлял несколькими следующими, требуются ЛБВ с большим усилием и соответственно с большой задержкой.

Применение таких систем ограничивается высокой стоимостью и другими недостатками ЛБВ. Они могут использоваться в тех случаях, когда в вычислительном устройстве требуется лишь несколько логических или арифметических схем и большое быстродействие, например, в испытательных стендах для проверки других типов быстродействующих схем, в одноканальных линиях связи для увеличения скорости передачи данных, для кодирования сигналов радарных установок (это может делаться либо для опознавания установки, либо для уменьшения мощности, приходящейся в радаре на один импульс) и, наконец, для очень простых вычислений, производимых с большой скоростью (например, сравнение каких-либо кодов и др.).

* Если, например, усилитель на ЛБВ вносит задержку в 10 нсек, то для обеспечения правильной работы частота повторения импульсов не должна быть выше 100 мгц.

Для демонстрации возможностей приборов такого типа был сконструирован умножитель последовательного действия, основанный на использовании модуляторов, которые выполняли умножение двух 8-разрядных чисел за 1,6 мксек (частота повторения импульсов 160 мгц), а также запоминающее устройство циклического типа на линии задержки, использующее диодно-волноводные клапаны (см. [12, 13]).

Схемы на полосковых линиях и диодах. В этом случае в качестве основных используются функции „не“ и „и“, при помощи которых можно получить все остальные логические функции.

Схема „не“ на полосковых линиях возможна без разделения входов и с разделением входов [86]. Более удобна схема с разделением входов, в которой сигнал с одного входа не проходит в другой вход. Схема выполняется на гибридном кольце и в основном совпадает со схемой рис. 21, отличаясь лишь тем, что радиоимпульсы и непрерывные колебания имеют равные амплитуды. На выходе (4) они оказываются в противофазе благодаря разности хода в полволны и взаимно уничтожаются; при отсутствии радиоимпульса несущая поступает на выход.

Для схемы „и“ требуется нелинейный элемент, которым служит диод с нелинейной проводимостью. На диод, вмонтированный в четвертьвольновой отрезок полосковой линии (рис. 22а), подается запирающее смещение. Пока СВЧ сигнал на диоде мал, он заперт, сигнал полностью отражается, и на выходе радиоимпульс отсутствует. При увеличении входного сигнала диод начинает проводить, отражения нет, и на выходе появляется радиоимпульс. Этот прибор, так называемый экспандер, подсоединяется к полосковому гибридному кольцу с двумя входами и поглощающей нагрузкой (рис. 22б). При наличии лишь одного входного импульса половина мощности поглощается в нагрузке, а другая попадает в экспандер; диод не проводит. При двух входных сигналах одинаковой амплитуды и фазы они взаимно уничтожаются в плече 4, и никакой мощности в нагрузке не выделяется. В экспандер сигналы приходят в фазе, так что здесь оказывается в 4 раза большая мощность, чем в случае одного сигнала; диод начинает проводить, и на выходе появляется сигнал.

Чтобы из схемы „и“ получить схему простейшего полусумматора, достаточно удалить поглощающую нагрузку и поместить вместо нее выход суммы S ; прежний выход будет служить выходом переноса C : $S = A + B$; $C = A \cdot B$. Подобный полусумматор имеет тот недостаток, что фаза суммы S зависит от того, какой из двух входных сигналов присутствует; это может затруднить связь сумматора с последующими схемами, где фаза окажется существенной. С помощью некоторых приемов можно осуществить полусумматор, у которого фаза суммы S постоянна (см. [86, 91]).

Схемы такого типа хорошо работали на частоте несущей $\sim 3 \cdot 10^3$ мгц и длительности импульсов ~ 2 нсек (частота повторения ~ 500 мгц). При повышении частоты несущей возможно увеличение частоты повторения импульсов. Недостатком схем является необходимость промежуточных усилителей (ЛБВ или параметрические генераторы).

Подобные схемы имеют большее быстродействие и проще, чем соответствующие схемы на параметрических генераторах. Следовательно, возможно, что в вычислительных машинах будут применяться оба типа схем, чтобы использовать достоинства тех и других.

* Такой полусумматор на полосковых линиях содержит три гибридных кольца и изготавливается на печатной плате размером 25×25 см.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. L. W i g i n g t o n , A new concept in computing, Proc. IRE, **47**, 516 (1959).
2. E. G o t o , The parametron — a digital computing element which utilizes parametric oscillations, Proc. IRE, **47**, 1204 (1959).
3. G. W. L e a s , Microwave solid-state techniques for high speed computers, Unesco Intern. Conf. on Information Processing, Paris, 1959.
4. S. F. S t e r z e r , Microwave parametric subharmonic oscillators for digital computing, Proc. IRE, **47**, 1317 (1959).
5. L. S. O n y u s h k e v u c h , W. F. K o s o p o c k y , A. W. L o , Parametric phase locked oscillator-characteristics and applications to digital systems, IRE Trans. Electron. Comput., **8**, 277 (1959).
6. В. С. Н е и м а н , О сверхвысокочастотной вычислительной прерывной автомагните, Радиотехника, **15**, 7 (1960).
7. R. E. M e a g h e r , History and introduction — microwave techniques for computers, IRE Trans. Electron. Comput., **8**, 263 (1959).
8. R. M. W a l k e r , D. E. R o s e n h e i m , R. A. L e w i s , A. C. A n d e r s o n , An experimental 50 megacycle arithmetic unit, IBM J. Res. Dev., **1**, 257 (1957).
9. W. A. E d s o n , Frequency memory in multi-mode oscillators, Stanford Univ. (USA). Techn. Report, № 16, July 19, 1954.
10. Е. Н. Б а з а р о в , М. Е. Ж а б о т и н с к и й , Деление частоты с помощью отражательного клаистрона, Радиотехника и электроника, **1**, 680 (1956).
11. N. M. K r o l l , I. P a l o c z , Theory of a fast switching electron beam frequency divider, IBM J. Res. and Development, **3**, 345 (1959).
12. W. S a u t e r , P. I. I s a a c s , Microwave logic circuits using diodes, IRE Trans. Electron. Comput., **8**, 302 (1959).
13. W. C. G. O r t e l , Nanosecond logic by amplitude modulation at X-band, IRE Trans. Electron. Comput., **8**, 265 (1959).
14. S. P. F r a n k e l , A logic design for microwave computer, IRE Trans. Electron. Comput., **8**, 271 (1959).
15. Л. И. М а н д е л ъ ш т а м , Н. Д. П а п а л е к с и , О параметрическом возбуждении электрических колебаний, ЖТФ, **3**, 5 (1934); см. также Л. И. М а н д е л ъ ш т а м , полное собр. трудов, **2**, стр. 85, 4, стр. 181, изд. АН СССР, М., 1947.
16. H. S o m m e r s , Tunnel diodes as High Frequency Devices, Proc. IRE, **47**, 1201 (1959).
17. Н. У. М а к - Л а х л а н , Теория и приложения функций Матея, ИЛ, М., 1953.
18. А. А. А н д р о н о в и М. А. Л е о н т о в и ч , О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами, Журн. русск. физ. хим. общ.-ва, **59**, 249 (1927); см. также А. А. А н д р о н о в , собрание трудов, изд. АН СССР, М., 1956, стр. 19—81.
19. Т. Н. В е р б и ц к а я , Вариконды, Госэнергиздат, М., 1958.
20. Т. Н. В е р б и ц к а я , Л. М. А л е к с а n д р о в а , В. П. К у л ь ц е п , А. А. О б у х о в , Сегнетокерамические конденсаторы-вариконды, Радиоэлектронная промышленность, № 10 (1959).
21. А. Е. С а л о м о н о в и ч , О делении частоты в схеме с нелинейным конденсатором, ЖТФ, **22**, 1190 (1952).
22. Б. М. В у л , Полупроводниковые нелинейные конденсаторы, Авт. свид. № 110441 от 29 июня 1954 г.
23. Б. М. В у л , Основы теории и некоторые результаты исследования германневых диодов и триодов, Радиотехника и электроника, **1**, 1040 (1956).
24. Б. М. В у л , О диэлектрических свойствах переходных слоев в полупроводниках, ЖТФ, **25**, 3 (1955).
25. A. U h l i r , The Potential of Semiconductor Diodes in High-frequency Communications, Proc. IRE, **46**, 1099 (1958).
26. L. I. G i a c o l l e t t o and I. O' C o n n e l , A variable capacitance germanium junction diode for VHF, RCA Review, **17**, 68 (1956).
27. С. Н. И в а н о в , Н. Е. С к в о р ц о в а , Ю. Ф. С о к о л о в , Германевые диоды для параметрического усиления, Радиотехника и электроника, **4**, 1538 (1959).
28. K. E. M o r t e n s e n , Alloyed thin base diode capacitors for parametric amplification, J. Appl. Phys., **30**, 1542 (1959).
29. C. C. M e s s e n g e r , A Review of Parametric Diode Research, Semiconductor Products, **1**, 17 (1960).
30. М. Д. К а р а с е в , Некоторые общие свойства нелинейных реактивных элементов, УФН, **69**, 217 (1959).
31. E. D. R e e d , The variable capacitance parametric amplifiers, IRE Trans., EД-6, 216 (1959).
32. S. T. E n g , R. S o l o m o n , Frequency dependence of the equivalent series resistance for a germanium parametric amplifier diode, Proc. IRE, **48**, 358 (1960).
33. R. C. K n e c h t l i , R. D. W e g l e i n , Low noise parametric amplifier, Proc. IRE, **47**, 584 (1959).

34. M. Ueno-hara, W. Sharpless, An extremely low-noise 6 kMc/s parametric amplifier using gallium arsenide point-contact diodes, Proc. IRE, **47**, 2114 (1959).
35. B. C. De Loach, W. M. Sharpless, An X band parametric amplifier, Proc. IRE, **47**, 1664 (1959).
36. М. А. Дивильковский, С. М. Рытов, К вопросу о самовозбуждении и резонансе в системе с периодически изменяющейся самоиндукцией, ЖТФ, **6**, 471 (1936).
37. Э. М. Рубчинский, О поведении колебательного контура с периодически изменяющейся самоиндукцией при воздействии внешней ЭДС, Изв. электропромышленности слабого тока, **7**, 3 (1935).
38. S. Miuroga, K. Takashima, The parametron digital computer Musasino-I, IRE Trans., EC-8, 308 (1959).
39. В. В. Мигулин, А. Н. Вахрамеев, Новый метод гетеропараметрической регенерации электрического колебательного контура, Научн. докл. высш. школы — физ.-мат. науки, **1**, 138 (1958).
40. А. Н. Вахрамеев, Параметрическая регенерация и возбуждение колебаний в электрическом контуре при периодическом намагничивании сердечника индуктивности поперечным полем, Вестник МГУ, сер. матем. и физ., **6**, 120 (1959).
41. H. Suhl, Proposal for a ferromagnetic amplifier in the microwave range, Phys Rev., **106**, 884 (1957).
42. M. Weiss, A solid state microwave amplifier and oscillator using ferrites, Phys. Rev., **107**, 317 (1957).
43. В. П. Тычинский, Ю. Т. Деркач, В. В. Карпецкий, Экспериментальное исследование вырожденного режима ферритового усилителя, Радиотехника и электроника, **5**, 943 (1960).
44. А. Л. Микээлян, Проблема создания ферритовых усилителей на сверхвысоких частотах, Радиотехника и электроника, **3**, 1323 (1958).
45. А. Г. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, М., 1960.
46. R. T. Denton, A ferromagnetic amplifier using longitudinal pumping, Proc. IRE, **48**, 937 (1960).
47. A. A. Read, A. V. Rohr, Magnetic film parametric amplifier, Proc. Nat. Elect. Conf., **15**, 65 (1959).
48. И. С. Гоноровский, Частотная модуляция и ее применения, Гос. изд. по вопросам связи и радио, М., 1948, стр. 65.
49. T. I. Bridges, A parametric electron-beam amplifier, Proc. IRE, **46**, 494 (1958).
50. В. Гуляев, В. Мигулин, Об устойчивости колебательных систем с периодически изменяющимися параметрами, ЖТФ, **4**, 48 (1934).
51. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронов, А. А. Витт, Г. С. Горелик, С. Э. Хайкин, Новые исследования нелинейных колебаний, Собрание трудов, 3, изд. АН СССР, М., 1950, стр. 145.
52. К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы, Гостехиздат, М., 1952, стр. 223.
53. И. М. Капчинский, Методы теории колебаний в радиотехнике, Госэнергокнедат, М., 1954, стр. 308.
54. А. А. Харкевич, Нелинейные и параметрические явления в радиотехнике, Гостехиздат, М., 1956.
55. В. В. Мигулин, О вынужденных колебаниях в параметрически регенерированной системе, Радиотехника и электроника, **5**, 955 (1960).
56. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, О явлениях резонанса *n*-го рода, ЖТФ, **2**, 775 (1932).
57. F. Sterzer, Random number generator using subharmonic oscillators, Rev. Sci Instr., **30**, 241 (1959).
58. J. Hilibrand, W. R. Beam, Semiconductor diodes in parametric subharmonic oscillators, RCA Review, **20**, 229 (1959).
59. J. Hilibrand, C. W. Mueller, C. F. Stocker, R. D. Gold, Semiconductor parametric diodes in microwave computers, IRE Trans Electron. Comput., **8**, 287 (1959).
60. D. Leenov, A. Uhlig, Generation of Harmonics and Subharmonics at Microwave Frequencies with P-N junction diodes, Proc. IRE, **47**, 1724 (1959).
61. A. H. Solomon, F. Sterzer, Parametric subharmonic oscillator pumped at 34 kMc/s Proc. IRE, **48**, 1322 (1960).
62. E. Goto, On the application of parametrically excited non-linear resonators, J. of the Institute Electrical Communications Engineers of Japan, **38**, 770 (1955).
63. H. Takahashi, Parametron, Kagaku, **26**, 113 (1956).
64. K. Fukui, K. Unose, K. Habara, M. Kato, Multi-apertured parametrons, J. of the Institute Electrical Communications Engineers of Japan, **41**, 147 (1958).
65. K. Hanawa, K. Kusunoki, Signal converter by magnetic cores for parametron-device, Electrical Communication Laboratory Reports, Nippon Telegraph and Telephone Public Corporation, **7** (2), 25 (1959).
66. K. Kamata, F. Sasaki, Parametron and punched card recorder for standard meson monitor, J. of the Scientific Research Institute of Japan, **51**, 54 (1957).

67. S. Muroga, Elementary principle of parametron and its application to digital computers, the Research and Engineering Magazine of Datamation, 4, 5, 31 (1958).
68. S. Muroga, K. Takasima, System and logical design of the parametron computer MUSASINO - 1, J. of the Institute Electrical Communications Engineers of Japan, 41, 1132 (1958).
69. J. Nakagome, I. Kamibayashi, I. Wada, Parametron Morse to five-unit converter, J. of the Institute Electrical Communications Engineers of Japan, 40, 974 (1957).
70. K. Nishiguchi, The misoperation of parametron due to the hysteresis of parametron core, J. of the Institute Electrical Communications Engineers of Japan, 42, 151 (1959).
71. S. Oshima, H. Enomoto, S. Watanabe, Analysis of parametrically excited circuits-parametron and magnetic amplifier, J. of the Institute Electrical Communications Engineers of Japan, 41, 971 (1958).
72. S. Oshima, Y. Nakagome, R. Inohama, Signal input and output circuits for parametron using transistors and their applications, J. of the Institute Electrical Communications Engineers of Japan, 41, 856 (1958).
73. Paramistors and computer costs, Electronic Design, 7 (17), 42 (1959).
74. H. Ierada, Parametron, an amplifying logic element, Control Engineering, 6, 110 (1959).
75. K. Zeniti, S. Katsumura, K. Hanawa, N. Ikeno, I. Fukuoka, An experimental crossbar telephone exchange system using parametrons, J. of the Institute Electrical Communications Engineers of Japan, 42, 225 (1959).
76. K. Zeniti, K. Husimi, Y. Hiyama, K. Yamamoto, Parametric excitation using selenium rectifier, J. of the Institute Electrical Communications Engineers of Japan, 41, 786 (1958).
77. K. Zeniti, S. Sekiguti, M. Takasima, Parametric excitation using variable capacitance of ferroelectric materials, J. of the Institute Electrical Communications Engineers of Japan, 41, 289 (1958).
78. K. Zeniti, Parametron, J. of the Institute Electrical Communications Engineers of Japan, 41, 397 (1958).
79. K. Zeniti, K. Nisiguti, Reading of recorded signals with a low frequency parametron, Electrical Communication Laboratory Reports, Nippon Telegraph and Telephone Public Corporation, 7, 48 (1959).
80. K. Zeniti, K. Husimi, K. Yamamoto, K. Kataoka, Parametric excitation using barrier capacitor of semiconductor, J. of the Institute Electrical Communications Engineers of Japan, 40, 162 (1957).
81. S. Oshima, Introduction to parametron, Kenshi Kogyo, 4 (11), 4 (1955).
82. S. Oshima, H. Enomoto, S. Watanabe, Oscillation theory of parametron and method of measuring nonlinear elements, KDD Kenkyo Shiryo, 90, 1955.
83. E. Goto, New parametron circuit element using nonlinear reactance, KDD Kenkyo Shiryo, 52, 1954.
84. H. Takahashi, The parametron, Isugakkai Shi, 39 (6), 56 (1956).
85. O. E. De Lange, Experiments on the regeneration of binary microwave pulses, Bell Sys. Tech. J., 35, 67 (1956).
86. D. J. Blattner, F. Sterzer, Fast microwave logic circuits, IRE Trans. Electron. Comput., 8, 297 (1959).
87. C. C. Cutler, The regenerative pulse generator, Proc. IRE, 43, 140 (1955).
88. P. V. Garver, E. G. Spencer, R. C. LeCraw, High speed microwave switching of semiconductors, J. Appl. Phys., 28, 1335 (1957).
89. C. A. Burrus, Millimicrosecond pulses in the millimeter wave region, Rev. Sci. Instr., 28, 1062 (1957).
90. F. Sterzer, Pulse amplifier with submillimicrosecond rise time, Rev. Sci. Instr., 29, 1133 (1958).
91. F. Leary, Microwave computer circuits, Electronics, 47, 77 (1959).

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
3 ноября 1960 г.

SUBHARMONIC PARAMETRIC GENERATORS AS ELEMENTS OF SUPERHIGH SPEED DIGITAL COMPUTERS

S. A. Akhmanov, A. S. Roshal

The survey is devoted to methods for the substantial increase of the operation speed of electronic digital computers, in connection with the switching over to the microwave technique, and in particular to the method based on the use of subharmonic parametric generators. Methods for the presentation and processing of information in systems with a carrier are examined as well as the corresponding logical circuits. Theoretical and experimental data are given, characterizing various properties of subharmonic parametric generators, significant in their application to computers.

СПОРАДИЧЕСКОЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ СОЛНЦА НА НИЗКИХ ЧАСТОТАХ

Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев

В летние месяцы 1959 и 1960 гг. зарегистрировано значительное количество всплесков солнечного радиоизлучения на частотах 25, 18, 13 и 10,5 мгц. Поток радиоизлучения некоторых всплесков увеличивался вплоть до самой низкой из наблюдаемых частот, достигая значений порядка $10^{-19} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$ и более. Отмечены случаи появления повышенного радиоизлучения Солнца на указанных частотах.

Сporадическое радиоизлучение Солнца наиболее ярко проявляется в области метровых волн. Представляет, однако, большой интерес исследование спорадического радиоизлучения Солнца на возможно более низких частотах. Измерениям солнечного радиоизлучения в коротковолновом диапазоне посвящены работы [1-4]. В настоящей статье приводятся некоторые результаты наблюдений всплесков радиоизлучения Солнца на ряде фиксированных частот в диапазоне 10 ± 25 мгц в летние периоды 1959 и 1960 гг.

Аппаратура и методика наблюдений. Всплески радиоизлучения Солнца регистрировались как побочное явление аппаратурой, предназначеннной для наблюдения галактического радиоизлучения на частотах, меньших 30 мгц. Антенные системы на частотах 25, 18 и 13 мгц представляли собой многодипольные синфазные полотна, подвешенные на высоте $\lambda/4$ над заметаллизированной поверхностью земли. Диаграммы направленности этих антенн были идентичными и имели ширину основного лепестка порядка $30^\circ \times 30^\circ$ по половине мощности. На частоте 10,5 мгц прием проводился в июле 1960 г. на горизонтальную ромбическую antennу с узкой диаграммой направленности в горизонтальной плоскости и на полуволновой диполь в августе 1960 г. Усилителями сигналов служили стандартные приемники с полосой пропускания УПЧ 3 кгц. Постоянная времени выходного устройства, в котором имелся ограничитель кратковременных импульсных помех, составляла несколько десятков секунд при увеличении и порядке $0,5 \pm 1$ сек при уменьшении сигнала. Запись осуществлялась самописцами со скоростью протяжки ленты 120 и 240 $\text{мм} \cdot \text{час}^{-1}$.

Во время наблюдений наибольшие затруднения приносили помехи от радиостанций. В дневные и вечерние часы по этой причине работа велась с непрерывным слуховым контролем *. Обычно при появлении помех можно было найти другой свободный участок в пределах ± 50 кгц от номинальной частоты, но в некоторые периоды отстроиться от радиостанций было невозможно, особенно на наиболее низких частотах. Перерывы в наблюдениях, вызванные разного рода причинами (профилактика и ремонт аппаратуры, отсутствие электроэнергии, сплошные помехи и т. д.), составляли около 1/3 всего времени наблюдений. Наблюдения проводились в августе 1959 г. на частотах 18 и 25 мгц,

* Контроль заключался в прослушивании сигнала через динамики, включенные на выходе приемников. При наличии всплеска радиоизлучения прослушивался «белый шум», а при наличии помех от станций звук, заметно отличавшийся от «белого шума»

во второй половине мая 1960 г. на частотах 18 и 13 мгц, в июне 1960 г. на частотах 25, 18 и 13 мгц и в июле—августе 1960 г. на частотах 25, 13 и 10,5 мгц. Прием радиоизлучения Солнца в силу того, что диаграммы антенн были направлены в зенит, осуществлялся через боковые лепестки, из-за чего существенно уменьшалась интенсивность всплесков Солнца. Значительное количество случаев, когда одновременно с всплесками наблюдались помехи, было поставлено под сомнение, и эти случаи не учитывались при обработке. Наличие большой постоянной времени выходного устройства приводило при записи сигнала к уменьшению интенсивности и увеличению длительности кратковременных (менее минуты) всплесков. Возможно, что многие очень кратковременные выбросы в силу этой причины вообще не были зарегистрированы.

Полученные на разных частотах записи сопоставлялись между собой, а также с публикуемыми в „Солнечных данных“ сведениями по спорадическому радиоизлучению Солнца. Привязка по времени осуществлялась нанесением меток времени на ленте. Точность привязки была не менее полминуты.

Результаты наблюдений. В таблицах 1—4 приведен перечень всплесков и групп всплесков радиоизлучения Солнца, зарегистрированных аппаратурой в указанный период времени. Тип всплеска указан в соответствии с классификацией, принятой в бюллетене „Солнечные данные“. Интенсивность всплесков дана в условных единицах, выражаяющих отношение максимальной амплитуды всплеска к фону галактического радиоизлучения на соответствующих частотах. Для наблюдений на разных частотах с антennами, имеющими одинаковые диаграммы направленности, выражение интенсивности в таких единицах позволяет провести оценку спектра всплесков. В таблицах отмечены также те всплески, которые зарегистрированы на других, более высоких частотах в пределах ± 10 минут (по сведениям, взятым из „Солнечных данных“).

Таблица 1*

Дата (август 1959 г.)	Начало всплеска (час мин)	Продолжи- тельность всплеска (мин)	Интенсивность (в усл ед.)		Тип всплеска	Примечание
			25 мгц	18 мгц		
6	12.38	1	0,5	1	1	на 18 мгц начало в 8.57
	08.50	1	1,5	0,3		
	08.10		0,15	0,3		
	12.06	2	0,15	0,25		
	13.20	1	—	0,8		
	14.04	30	3	3		
	15.05	1	2	1,5		
	18.28	1	2	1,5		
	19.02	1	1,5	1		
	5.52	1	0,5	0,5		
7	11.04	40			78	
	11.45	2	4	2	—	
	14.15	1	1	1	1+	
	08.50	4	1	0,7	2	
	11.40	1,5	3	0,5	1	
8	08.21	1	0,1	0,1	1+	
	12.46	1	1	1	1+	
13	17.57	1,5	0,7	1	1	
	12.12	180	2	—	5	
	15.00	60	0,4	—	7	

* На всех таблицах крестиком отмечены те всплески, которым в пределах ± 10 мин соответствуют всплески на частотах ~ 200 мгц

Дата (август 1959 г.)	Начало всплеска (час мин)	Продолжи- тельность всплеска (мин)	Интенсивность (в усл. ед.)		Тип всплеска	Примечание
			25 мгц	18 мгц		
17	07.49	3	1	1	15	
	08.20	1	0,25	0,3	1	
	10.15	1	0,75	1,4	1+	
	12.57	1	—	0,25	1	
18	07.51	1	0,2	0,3	15	
	08.55	3	1	1	15	
	09.25	3	1,2	1	15	
	11.06	1	0,2	0,2	1	
	12.21	1,5	1	0,7	1+	
	13.28	17	2	4	7+	
	13.57	1,5	2		7	
	14.08	10		2	5	
	15.00	4	0,3	1	5	
20	06.54		1,5	1,5		
	07.07		2,5	1,5		
	09.04	1	2	2	1+	
	14.00		1	1	+	
21	07.52	1,5	0,5	1	1	
	12.15	3	1	0,8	5	
	16.42		0,15	0,15	+	
	17.49	3	0,15	0,6	7+	
22	18.55	2,5	0,15	0,15	7	
	07.21	1	0,15	0,3	1	
	13.48	24	0,3	1	57	
	18.12	5			57	
23	11.30	330			8+	
24	06.45	800			87+	
27	09.00				8+	
	14.54	6	1,5		7	
	15.02	3	1,5		1	
28	13.37	1	0,5	1	1	
29	07.20	1	1,5		1	
	15.00	120			57	
30	07.12	20	0,8	0,7		
	09.12	1	2	2		
	12.27	1	3	3		
	18.05	2	1,5	0,2	1	
31	07.25	2	0,5		5	
	08.00	60		1	8	
	10.55	240	1,2		8+	
	12.35	4	2	1	+	
	14.08	2	2	1,5		

Таблица 2

Дата (июнь 1960 г.)	Начало всплеска (час мин)	Продолжи- тельность всплеска (мин)	Интенсивность (в усл. ед.)			Тип всплеска
			25 мгц	18 мгц	13 мгц	
13	11.41					+
	11.52	1	1,5			
	10.37	4	2	1	1	1+
	19.32		0,7	0,7		
	09.02	2		0,2	1	
	10.33	6	0,7	0,7	0,5	
	14.46	4	0,7	1,2	2	
	17.20	1,5	2	1	1,7	

Дата (июнь 1960 г.)	Начало всплеска (час мин)	Продолжи- тельность всплеска (мин)	Интенсивность (в усл. ед.)			Тип всплеска
			25 мгц	10,5 мгц	13 мгц	
16 21 22 27	16.39	2,5	1	—	1,5	1 1,5 + +
	19.28	1	0,5	—	0,5	
	07.37	1,5	0	1	1	
	10.13	1	0,3	1	0,2	
	10.16	1	0,3	—	0,2	
	14.18	2,5	0,4	—	2	
	14.49	2	0,2	—	0,4	

Таблица 3

Дата (июль 1960 г.)	Начало всплеска (час мин)	Продолжи- тельность всплеска (мин)	Интенсивность (в усл. ед.)			Тип всплеска
			25 мгц	13 мгц	10,5 мгц	
4 7 21 26 29 1	10.45	3		2		+ 1 1 1 1 1
	14.33	3		0,2		
	16.55			2		
	11.30	20		7,5		
	12.15			2		
	12.40			1		
	17.05	5	0,7	2	0	
26	13.41	1	—	0,5	0,3	1 1 1
	14.45	1	0,2	1	1	
	17.32*		2	1	1	
1	13.20	4	0,2	1		

Таблица 4

Дата (август 1960 г.)	Начало всплеска (час мин)	Продолжи- тельность всплеска (мин)	Интенсивность (в усл. ед.)			Тип всплеска
			25 мгц	13 мгц	10,5 мгц	
1 4 11 12 13 15 16 30	18.17	5	—	0,2	0,2	1 1 180+ 1 1 1 1 7+
	12.37	1	1	0,5	1	
	13.17	1	0,5	1,5	2	
	13.34	2	0,8	0,7	0,7	
	10.40	5	3	1,5	1	
	12.13	6(20)	3	2	—	
	13.33	2	0,8	1,5	3	
12 13 15 16 30	15.40	2	0,3	1	0,5	1 1 15 1 7+
	12.25	1	0,2	0,5	0,2	
	12.37	1	0,3	1		
	14.50	1	0,2	1	1	
	14.32	1	0,3	0,2	0	
15 16 30	14.48	1	0,2	0,2		1 1 7+
	15.06	1	0,2	0,3		
	12.22	10	0,2	1	2	
	12.55	3	0,7	0,3	2	
	13.18	5	0,5	0,25	2	

Как видно из таблиц, количество всплесков радиоизлучения Солнца на низких частотах оказалось довольно значительным. В августе 1959 г. отмечено более 60 случаев активности Солнца на частотах 25 и 18 мгц. Летом 1960 г. зарегистрировано около 40 всплесков и групп всплесков на частоте 13 мгц. Кроме этого, в июле—августе 1960 г. отмечен ряд всплесков на частоте 10,5 мгц.

* На разных частотах разное (см. текст статьи).

Интенсивность всплесков часто была очень высокой, однако абсолютную оценку ее величины можно было сделать только на последней частоте. Если считать, что эффективная температура галактического фона на этой частоте составляет несколько сот тысяч градусов, то поток радиоизлучения для многих всплесков достигал величины в $10^{-19} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$, т. е. эффективная температура Солнца, отнесенная к всему видимому диску, во время этих всплесков превышала 10^{11} градусов.

Обращает на себя внимание тот факт, что даже для очень больших по интенсивности всплесков на низких частотах далеко не всегда обнаруживаются соответствующие всплески на более высоких частотах. Так, в августе 1959 г. насчитывается не менее 20 таких достаточно крупных всплесков на частотах 25 и 18 мгц, а в августе 1960 г. из 17 всплесков на 13 мгц только 3 совпадают по времени с всплесками на более высоких частотах. Интересно отметить, что из 14 всплесков, одновременно зарегистрированных на 25 и 13 мгц, в 9 случаях интенсивность на 13 мгц была гораздо большей, чем на 25 мгц, в 4 случаях она была одного порядка величины и лишь в одном случае на 25 мгц была несколько выше. Во всех случаях, когда интенсивность на 13 мгц была выше, чем на 25 мгц, зарегистрированы всплески на 10,5 мгц.

Длительность одиночных всплесков, как правило, невелика (порядка минуты). Иногда наблюдаются серии всплесков, как, например, 30 августа 1959 г. (см. рис. 1). 29 июля 1960 г. был отмечен особый вид всплеска, начавшийся сначала на 10,5 мгц, затем на 13 мгц и в последнюю очередь на 25 мгц (см. рис. 2). Продолжительность этого всплеска на частотах 10,5 и 13,25 мгц составляла 30,11 и 3 минуты соответственно. Максимум всплеска был приблизительно в одно и то же время на всех частотах. Отмечено также несколько случаев, когда наблюдалось запаздывание всплесков на разных частотах. Так, 30 августа 1959 г. сдвиг во времени между сложным всплеском на частотах 25 и 18 мгц составил 10 мин (см. рис. 3). Другой пример запаздывания показан на рис. 5 (см. ниже), где между всплесками на 18 и 13 мгц заметен сдвиг порядка 2 минут.

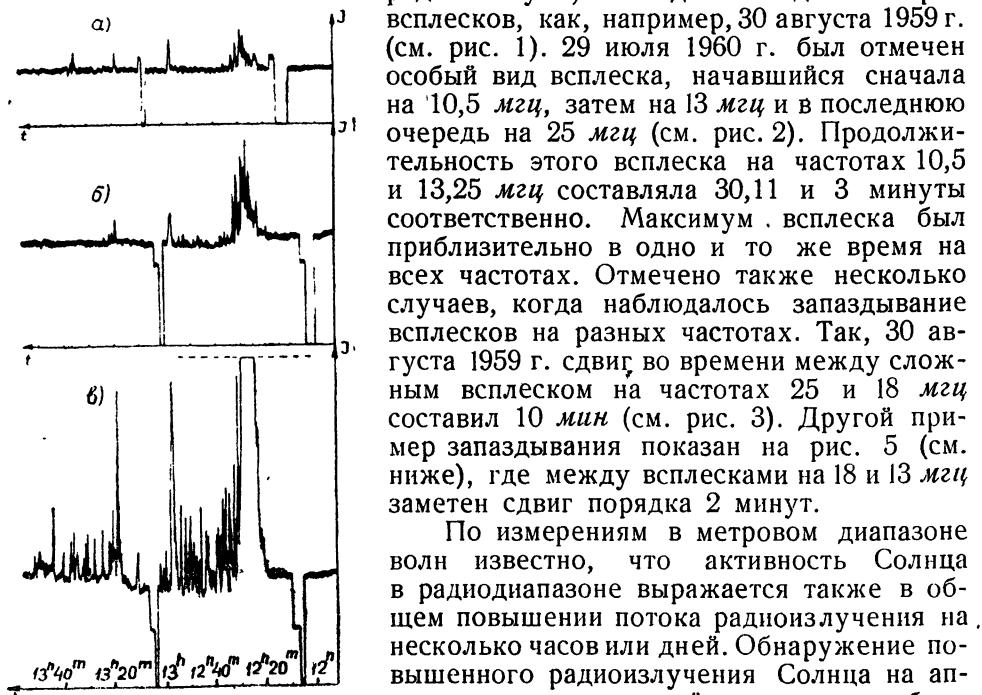


Рис. 1. Группа всплесков радиоизлучения Солнца 30 августа 1960 г.:

а—25 мгц, б—18 мгц, в—10,5 мгц
(время московское).

можно было отнести как за счет повышенного радиоизлучения Солнца, так и за счет уменьшения поглощения. В связи с этим повышенное

По измерениям в метровом диапазоне волн известно, что активность Солнца в радиодиапазоне выражается также в общем повышении потока радиоизлучения на несколько часов или дней. Обнаружение повышенного радиоизлучения Солнца на аппаратуре, применявшейся в данных наблюдениях, было связано с рядом трудностей. Дело в том, что из-за наличия значительного поглощения радиоволн в ионосфере (которое достигает в полдень на частоте 18 мгц величины $0,8-1,5 \text{ дБ}$ [2]) повышение уровня принимаемого радиоизлучения

радиоизлучение Солнца можно было уверенно заметить только тогда, когда его интенсивность была очень высокой (большой 20–30% от уровня галактического фона).

В августе 1959 г. было зарегистрировано несколько дней, когда

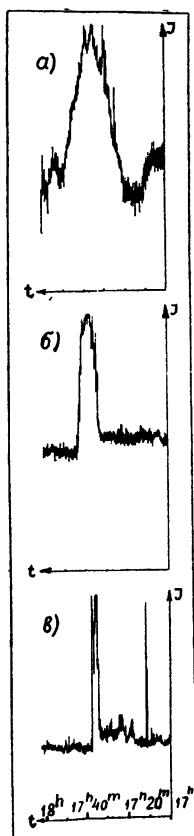


Рис. 2.

Рис. 2. Всплеск радиоизлучения Солнца 29 июля 1960 г.:
а—10,7 мгц, б—13,3 мгц, в—24,1 мгц.

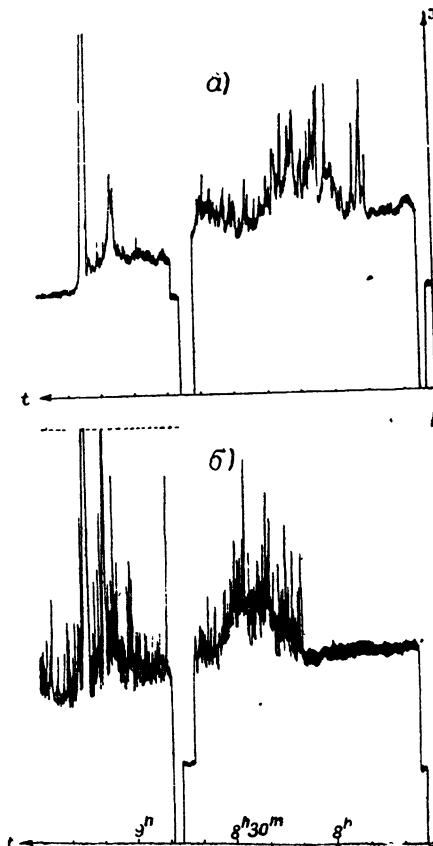


Рис. 3.

Рис. 3. Сложный всплеск с запаздыванием во времени на разных частотах
30 августа 1959 г.:
а—25 мгц, б—18 мгц.

записываемый уровень радиоизлучения в течение нескольких часов значительно превышал нормальную величину. Как правило, это повышение сопровождалось всплесками излучения. Наибольшая интенсивность отмечена 24 августа, когда высокий уровень принимаемого сигнала наблюдался весь день с раннего утра. В активности Солнца на низких частотах в этот день наблюдалось три периода. Первый период начался в 6 час 55 мин (время московское) и продолжался около 3 часов. На фоне очень большого увеличения выходного сигнала, который превысил нормальную величину галактического фона в 3–4 раза на 25 и в ~1,5 раза на 18 мгц, наблюдалось 6 продолжительных (по 5–10 минут каждый) всплесков с амплитудой, на 25 мгц превышающей в несколько раз, а на 18 мгц составляющей такой же порядок величины, что и величина галактического фона.

На рис. 4а, б приведены записи второго и третьего всплесков на

обеих частотах. Пунктирная кривая на рисунках соответствует нормальному уровню галактического радиоизлучения. После шестого всплеска, окончившегося около 9 часов, начался постепенный спад в течение часа до уровня, превышающего нормальный на $\sim 20\%$. В течение получаса (10 час 15 мин \div 10 час 45 мин) наблюдались значительные флюктуации сигнала, составляющие на 18 мгц около 20% и на 25 мгц — около 10% от полной величины сигнала.

В 11 час 20 мин начался второй период высокой активности Солнца, длившийся до 15 час 45 мин. Первые полтора часа на общем

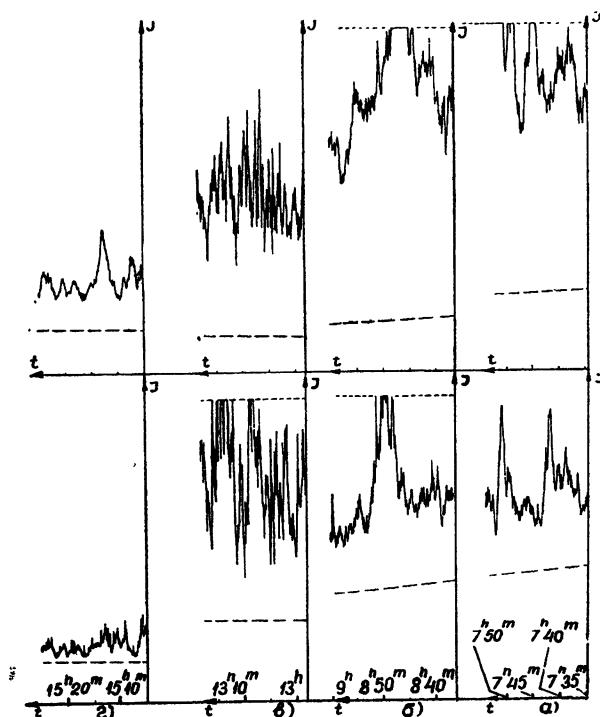


Рис. 4. Различные стадии повышенного радиоизлучения Солнца 24 августа 1959 г.

сильно повышенном и флюктуирующем фоне наблюдались кратковременные ($1 \div 2$ минуты) всплески. В последующий час картина стала более однородной (см. рис. 4в), однако в непрерывно следующих друг за другом выбросах появилась некоторая квазипериодичность порядка 5 минут. В дальнейшем эта квазипериодичность проявлялась более четко, быстрые всплески уменьшались по величине и в конце второго периода осталось только относительно медленное квазипериодическое изменение интенсивности сигнала, внешне очень похожее на флюктуации интенсивности дискретных источников (см. рис. 4г). Третий период (с 16 час 15 мин до конца наблюдений в 19 час) весь состоял из такого рода флюктуаций с максимумом около 18 часов.

Следует отметить, что на 18 мгц интенсивность спорадического радиоизлучения в третий период была относительно невелика, в то время как на 25 мгц она была еще достаточно высокой. Абсолютную оценку потока излучения в описываемых наблюдениях дать очень трудно, но можно, однако, утверждать, что в первом периоде на 25 мгц она достигала в течение 2 часов величины, не меньшей 10^{-19} ватт \cdot м $^{-2}$ \cdot гц $^{-1}$.

Сравнение записей на двух частотах показывает, что в общем изменения интенсивности сигналов на обеих частотах аналогичны. Имеется некоторое запаздывание на 18 мгц по сравнению с 25 мгц в шестом всплеске (см. рис. 4б), а также отличаются некоторые детали временных изменений интенсивности (рис. 4а). Внешний вид и изменения с частотой характера флюктуаций в конце второго и в третьем периоде, как уже отмечалось, очень сходны с флюктуациями дискретных источников. Это обстоятельство приводит к мысли о том, что, по крайней мере, часть наблюдаемых колебаний интенсивности радиоизлучения связана с влиянием земной ионосферы.

Опубликованные данные о радиоизлучении Солнца на других частотах [6] свидетельствуют о наличии повышенного радиоизлучения в этот день на частотах 178–209 мгц с начала наблюдений до конца дня. Максимум интенсивности на частоте 178 мгц был отмечен в 11 часов и соответствовал $8 \cdot 10^{-20}$ ватт·м $^{-2}$ ·гц $^{-1}$; в 12 час 38 мин на частоте 208 мгц величина потока излучения составляла $1,8 \cdot 10^{-20}$ ватт·м $^{-2}$ ·гц $^{-1}$. В 13 час 30 мин и 13 час 58 мин отмечены небольшие всплески продолжительностью в 18 и 11 минут. Таким образом, хотя на частотах порядка 200 мгц активность Солнца и отмечалась в этот день, она не была столь большой, как на низких частотах. На низких частотах повышенное радиоизлучение Солнца существовало и накануне, 23 августа, начиная с 11 час 30 мин. Внешний вид записи и величина интенсивности излучения Солнца 23 августа были аналогичны третьему периоду 24 августа. Возможно, что за столь сильную активность на низких частотах была ответственна группа № 70 солнечных пятен, которая 23–24 августа проходила через центральный меридиан Солнца.

В первой половине летнего периода 1960 г. наблюдения на 13 мгц велись при помощи интерферометра, элементами которого являлись две идентичные антенны описанного выше типа. С помощью такой установки было отмечено несколько случаев характерной интерференционной записи в середине дня (16, 20, 25 и 26 мая, 6, 15 и 21 июня), вызванных, по-видимому, повышенным радиоизлучением Солнца. Наиболее интенсивным излучение было 20 мая. В остальные дни сигнал был сравнительно мал. Пример записи с заметной интерференционной картиной показан на рис. 5, на котором видна также вспышка поглощения радиоволн в ионосфере, сопровождаемая всплеском радиоизлучения.

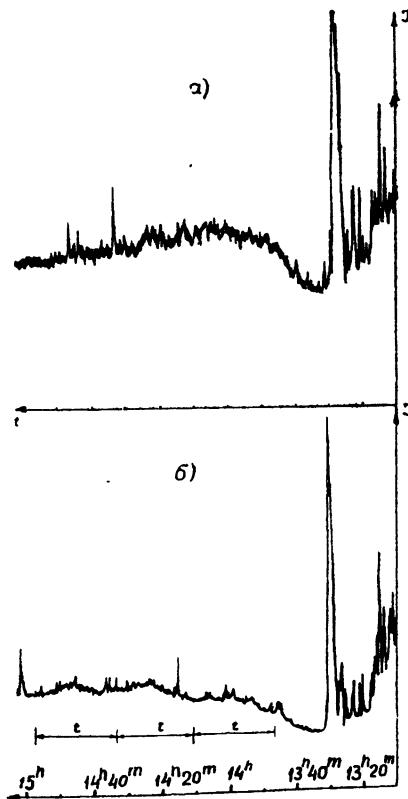


Рис. 5. Вспышка поглощения радиоволн в ионосфере 26 мая 1960 г. с последующей интерференционной картиной на 13 мгц:
а—18 мгц, б—13 мгц.

Наблюдения, проведенные в диапазоне частот 25 ± 10.5 мгц, показывают наличие спорадического повышенного радиоизлучения и значительного количества всплесков Солнца на этих частотах. Часть всплесков существует, по-видимому, только на низких частотах. Большая интенсивность всплесков, увеличивающаяся у многих из них к низким частотам, свидетельствует о существовании всплесков солнечного радиоизлучения на еще более низких частотах. Поскольку регистрация спорадического радиоизлучения Солнца на частотах, меньших 8 ± 10 мгц, практически невозможна из-за экранировки ионосферой, первостепенное значение приобретают наблюдения, которые можно было бы провести с помощью искусственных спутников Земли [7]. Необходимо также проводить специальные исследования солнечного радиоизлучения на возможно более низких частотах на поверхности Земли.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Warwick, J. W. Warwick, Paris Symposium on Radio Astronomy, Stanford Univ. Press, 1959, p. 203.
2. R. Fleischer, Paris Symposium on Radio Astronomy, Stanford Univ. Press, 1959, p. 208.
3. H. Daenke, Mitt. Astrophys. Observ. Potsdam, 301, 1 (1959).
4. A. Boischot, R. H. Lee, J. W. Warwick, Astroph. J., 131, 61 (1960).
5. Е. А. Бенедиктов, Ю. С. Коробков, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, Л. Н. Ходалева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 957 (1960).
6. Солнечные данные, № 8 (1959).
7. Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, В. Л. Гинзбург, Искусственные спутник Земли (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 ноября 1960 г.

SPORADIC SOLAR RADIO EMISSION ON LOW FREQUENCIES

E. A. Benediktor, G. G. Getmantsev

In the summer months of 1959 and 1960 a substantial number of solar flares were registered on frequencies of 25, 18, 13 and 10.5 Mc. The flux of radio emission of certain flares increased up to the lowest frequencies observed reaching a value of the order of $10^{-10} \text{ } \text{wm}^{-2} (\text{c/s})^{-1}$ and more. Cases are recorded of the appearance of enhanced solar radio emission on the said frequencies.

О НЕКОГЕРЕНТНОМ РАДИОИЗЛУЧЕНИИ, ВОЗНИКАЮЩЕМ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЗЕМНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

E. A. Бенедиктов, B. Я. Эйдман

Рассмотрено некогерентное радиоизлучение быстрых заряженных частиц в ионосфере Земли с учетом ее магнитного поля. Приводятся численные оценки интенсивности излучения в области средних волн.

Уже сравнительно давно начал обсуждаться вопрос о радиоизлучении, возникающем в земном магнитном поле при движении в нем быстрых заряженных частиц [1, 2]. Этот вопрос важен с точки зрения интерпретации земных наблюдений длинноволнового космического радиоизлучения [3], исследования радиоизлучения полярных сияний и т. д. В настоящей статье приводится оценка интенсивности излучения быстрых заряженных частиц в земном магнитном поле в области средних и длинных волн.

Излучение электрона, движущегося в магнитоактивной плазме, подробно рассмотрено в [4]. Количественный расчет интенсивности излучения электрона чрезвычайно затруднен даже при наличии однородной плазмы. В земной ионосфере, где с изменением высоты над поверхностью Земли изменяется как магнитное поле, так и электронная концентрация, трудности расчета еще более возрастают. В этих условиях большое значение приобретают оценки интенсивности излучения, полученные при некоторых разумных упрощениях поставленной задачи. Такого рода оценки проведены ниже.

Как известно, излучение электрона, движущегося в магнитоактивной плазме, можно условно разделить на две компоненты: магнитотормозную (синхротронную) и черенковскую, причем первая из них преобладает при $v_{\parallel}/v_{\perp} \ll 1$, $(v_{\perp}/c)n_j(\omega, \Theta) \ll 1$, а вторая при $v_{\parallel}/v_{\perp} \gg 1$ (v_{\parallel} и v_{\perp} — соответственно параллельная и перпендикулярная составляющие скорости частицы по отношению к магнитному полю, $n_j(\omega, \Theta)$ — показатель преломления j -й нормальной волны [4]).

Рассмотрим отдельно указанные компоненты.

Черенковское излучение. Предположим для простоты, что имеется поток заряженных частиц плотностью q , движущихся с одинаковой скоростью v . Реабсорбией излучения частиц будем пренебречь, считая интенсивность полного излучения суммой интенсивностей излучения отдельных частиц (см. ниже). Поперечные размеры потока будем считать достаточно большими для того, чтобы не учитывать краевых эффектов. В этих условиях интенсивность излучения, усредненная по полусфере, определяется выражением

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} q v_{\parallel} w dz, \quad (1)$$

где w —интенсивность излучения заряженной частицы на единице пути, пределы интегрирования по высоте z_1 и z_2 определяются из условия

$$\cos^2 \vartheta \leq 1, \quad (2)$$

причем (см. [5])

$$w = \frac{e^2}{2c^2} \int \left| \frac{(\omega^2 - \omega_H^2)(1 - \beta^2) + \beta^2 \omega_0^2}{\beta^2(\omega_0^2 + \omega_H^2 - \omega^2)} \right| \times \quad (3)$$

$$\times \left\{ 1 \pm \frac{\omega_H [(\omega^2 - \omega_H^2)(1 - \beta^2)^2 + \beta^2(3 - \beta^2)\omega_0^2]}{[(\omega^2 - \omega_H^2)(1 - \beta^2) + \beta^2 \omega_0^2] \sqrt{(1 - \beta^2)^2 \omega_H^2 + 4\beta^2(\omega^2 - \omega_0^2)}} \right\} \omega d\omega;$$

$$\cos^2 \vartheta = \frac{\{2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 \beta^2 - \omega_H^2 [2\beta^2 \omega^2 + (1 - \beta^2)\omega_0^2]\} \omega^2}{2\beta^2 \{(\omega^2 - \omega_0^2)^3 \beta^2 - \omega_H^2 \omega^2 [\omega^2 \beta^2 + (1 - \beta^2)\omega_0^2]\}} \pm \quad (4)$$

$$\pm \frac{\sqrt{4(\omega^2 - \omega_0^2)\beta^2 + (1 - \beta^2)^2 \omega_H^2} \omega^2}{2\beta^2 \{(\omega^2 - \omega_0^2)^3 \beta^2 - \omega_H^2 \omega^2 [\omega^2 \beta^2 + (1 - \beta^2)\omega_0^2]\}},$$

где $\omega_H = eH/mc$ — гирочастота, $\omega_0 = (4\pi e^2 N/m)^{1/2}$ — плазменная частота, $\beta = v/c$, H — напряженность магнитного поля, N — концентрация электронов, e и m — заряд и масса электрона (или других заряженных частиц), ϑ — угол между направлением распространения излученной волны и магнитным полем.

В соответствии с (2), (4) размеры области излучения радиоволн по высоте $\Delta z = z_2 - z_1$ зависят от частоты радиоволн и распределения электронной концентрации. Формулы (3), (4) выведены для однородной среды, но ими можно пользоваться и в случае земной ионосферы, поскольку, как правило, параметры ω_0 и ω_H можно считать медленно меняющимися функциями высоты. Для любой выбранной модели распределения электронной концентрации можно легко определить (при фиксированном угле между направлением распространения радиоволн и магнитным полем) область высот, где выполняется условие

$$n_j^2 > 1, \quad (5)$$

необходимое для возникновения черенковского излучения.

Предположим, что выше максимума слоя F ионосферы до высот порядка (2–3) тыс. км электронная концентрация убывает по закону [6]

$$N = N_0 \exp [-a(z - 300)]$$

(N_0 — концентрация в максимуме слоя F), затем остается постоянной ($N \approx 10^2 \text{ см}^{-3}$) вплоть до высот $L \approx 20000 \text{ км}$ [7]. На рис. 1 показан ход изменения n_j^2 с высотой для частоты $f = 0,5 \text{ мГц}$, критической частоты ионосферы $f_c = 10 \text{ мГц}$, $a = 3,65 \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}$ и угле $\vartheta = 20^\circ$. Магнитное поле рассчитывалось по закону $H = H_0(1 + z/R)^{-3}$, где H_0 — величина магнитного поля вблизи поверхности Земли и R — радиус Земли. Как видно из рис. 1, интервал высот с $n_j^2 > 1$ составляет для обычной компоненты около 1400 км и для необычайной компоненты — около 300 км. С уменьшением частоты f диапазон высот, где $n_j^2 > 1$, увеличивается, достигая десятка и более тысяч километров на звуковых частотах. На частотах $f > f_H$ условие $n_j^2 > 1$ выполняется только для необычайной компоненты в сравнительно небольшой области высот.

Наличие условия (2) налагает дополнительные ограничения на размер излучающей области. В самом деле, из (4) следует, что независимо от величины угла ϑ должно выполняться неравенство

$$\omega_H (1 - \beta^2) \geq 4\beta^2 (\omega^2 - \omega_0^2). \quad (6)$$

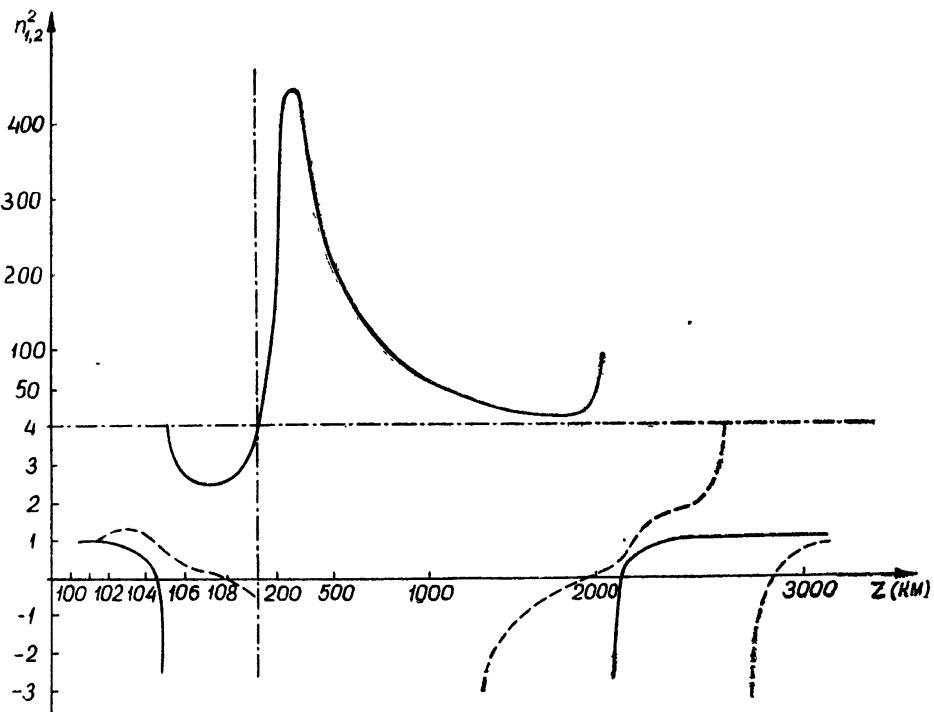


Рис. 1. Зависимость $n_{1,2}^2$ от высоты для вертикального направления распространения волны при $N = \left\{ N_0 \left[1 - \left(\frac{z-300}{200} \right)^2 \right] \right\}$ ($z < 300$ км); $N = N_0 \exp [-a(z-300)]$ ($z > 300$ км); $a = 3,65 \cdot 10^{-3}$ км $^{-1}$; $N_0 = 1,8 \cdot 10^6$ эл \cdot см $^{-3}$; $R = 6400$ км; $H = H_0 R^3 / (R + z)^3$. Угол между вертикалью и направлением магнитного поля равен 20° .

Это неравенство для очень быстрых частиц ($\beta \sim 1$) выполняется совместно с условием $n_j^2 > 1$ (5) только там, где ω близко к ω_0 . При $\beta^2 \sim 0,1$ в приведенном выше случае размеры области, где выполняются условия (5) и (6), составляют около $300 \div 350$ км. Для более низких частот эти размеры значительно увеличиваются.

В рассматриваемом механизме некогерентного излучения (без учета реабсорбции) полная интенсивность прямо пропорциональна концентрации быстрых частиц. Потоки заряженных частиц в ионосфере можно разделить на две категории: стационарные потоки (радиационные пояса Земли) и спорадические потоки, тесно связанные, по-видимому, с солнечной активностью. В радиационных поясах Земли концентрация электронов с энергией $E > 200$ эв (внешний радиационный пояс) не превышает в максимуме 10^{-1} эл \cdot см $^{-3}$ [8, 9]. В ионосфере на высотах в несколько тысяч километров концентрация таких электронов гораздо меньше, а концентрация протонов (внутренний радиационный пояс) составляет всего около 10^{-5} частиц \cdot см $^{-3}$. В спорадических потоках

заряженных частиц концентрация, возможно, бывает гораздо большей, чем в радиационных поясах.

Оценим возможный порядок интенсивности черенковского излучения. Если $|\omega^2 - \omega_H^2| \ll 3\beta^2\omega_0^2$, $\omega_H^2 \gg 4\beta^2\omega_0^2$ и $\beta^2 \ll 1$, то из (3) следует, что

$$w \approx \left| \frac{e^2}{c^2} \frac{\omega^2 - \omega_H^2}{\omega_0^2 + \omega_H^2 - \omega^2} \right| \frac{\omega}{\beta^2}. \quad (7)$$

Подставляя в эту формулу значения ω_H и ω_0 , соответствующие высотам ~ 1500 км, найдем из (1) на частоте $f \sim 0,5$ мгц при $\beta^2 = 0,04$ ($E \sim 4,5 \cdot 10^5$ эв) и $\Delta z = 100$ км $J = 5 \cdot 10^{-20}$ $q \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1} \cdot \text{стераад}^{-1}$ и при $\beta^2 = 0,01$ ($E \sim 10^5$ эв) и $\Delta z = 300$ км $J = 6 \cdot 10^{-19}$ $q \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1} \cdot \text{стераад}^{-1}$. При $q = 0,1$ эффективная температура излучения получается соответственно равной 10^5 К; $1,2 \cdot 10^6$ К. Очевидно также, что радиоизлучение, которое вызывается спорадическими потоками заряженных частиц, будет ограничено, в основном, высокими магнитными широтами. Для звуковых частот ($f \sim 5 \cdot 10^3$) при $\beta^2 \sim 0,01$, $\Delta z = 10^4$ км, $q = 0,1$ эл \cdot см $^{-3}$ и $f_0 \sim 1$ мгц ($N \sim 10^2$ эл \cdot см $^{-3}$) имеем $T_{\text{эфф}} \sim 1,6 \cdot 10^7$ К.

Отметим то хорошо известное обстоятельство, что внешний радиационный пояс достигает ионосферных высот только на определенных магнитных широтах. Следовательно, трудно ожидать наличия черенковского радиоизлучения от радиационного пояса в других местах земного шара. Поскольку, как уже отмечалось, значение $q = 0,1$ является предельной величиной концентрации, в действительности эффективная температура излучения будет гораздо меньше. Однако поскольку спорадическая концентрация излучающих частиц может существенно возрастать (например, в результате вспышек на Солнце), то следует ожидать и соответствующего увеличения интенсивности рассматриваемого излучения.

Синхротронное излучение. Частота синхротронного излучения, вызываемого нерелятивистскими частицами, определяется величиной магнитного поля. Каждой высоте земной атмосферы соответствуют вполне определенные частоты генерации $\omega = s\omega_H$ ($s = 1, 2, 3, \dots$), причем интенсивность гармоник, начиная со второй, уменьшается с ростом s^* . Таким образом, в ионосфере будут в основном генерироваться частоты порядка $1 \div 2$ мгц. Для количественной оценки излучения ограничимся случаем, когда

$$(n_2\beta_\perp)^2 < 1 \quad (\beta_\perp = v_\perp/c). \quad (8)$$

Тогда интенсивность излучения определяется выражением [1]

$$P_{sj} = \frac{c^2\omega^2 n_j |\xi|^2 v_\perp^2}{4\pi c^3} (1 + \alpha_j)^2 \frac{y^{2(s-1)}}{2^{2s} [(s-1)!]} d\Omega, \quad (9)$$

где $y = n_j \beta_\perp \sin \vartheta$, $d\Omega$ — элемент телесного угла, α_j и ξ — параметры, характеризующие поляризацию нормальных волн, распространяющихся в магнитоактивной плазме. Заметим, что интенсивность излучения на основной частоте ($\omega = \omega_H$) при условии (8) много меньше, чем интенсивность второй гармоники ($\omega = 2\omega_H$).

Размер излучающей области по высоте для полосы частот шириной $\Delta\omega$ определяется выражением

$$\Delta z = \frac{R}{3\omega_{H0}} \left(1 - \frac{z}{R}\right)^4 \frac{\Delta\omega}{s}, \quad (10)$$

* Это связано с тем отмеченным в работе [10] обстоятельством, что электрон, движущийся с нерелятивистской скоростью по окружности в магнитоактивной плазме, не излучает в дипольном приближении.

которое легко получить из закона изменения ω_H с высотой. Для высот порядка 1500 км над поверхностью Земли вторая гармоника гиро-частоты равна $\omega = 2\omega_H \sim 10^7$ ($f \sim 1,5$ мгц). При $\omega_0 \approx 10^7$ получаем, используя (9) и (10), что усредненная по полусфере интенсивность синхротронного излучения на указанной частоте для обыкновенной компоненты составляет $J \sim 10^{-20} q$ вт·м⁻²·гц⁻¹·стераад⁻¹, если положить $\beta_{\perp}^2 \sim 0,3$ и $\vartheta \sim 10^\circ$. Для $z = 3000$ км ($\omega = 8 \cdot 10^6$), $\omega_0 = 3 \cdot 10^{11}$, $\beta_{\perp} \sim 0,3$ и $\vartheta \sim 20^\circ$ величина $J \sim 10^{-22} q$ вт·м⁻²·гц⁻¹·стераад⁻¹ или, подставляя, как и в случае черенковского излучения, $q = 0,1$, находим: $T_{\text{эфф}} = L/2k = 2 \cdot 10^4$ К и $2 \cdot 10^3$ °К соответственно.

Полученные значения интенсивности синхротронного излучения могут, конечно, претендовать только на представление о порядке этой величины. Как легко видеть, они меньше интенсивности черенковского излучения. Значительное уменьшение радиоизлучения при переходе от высоты $z = 1500$ км к высоте $z = 3000$ км связано с резким уменьшением фактора $(1 + \vartheta_2)^2$, зависящего от характера поляризации нормальных волн в плазме, при прохождении области ионосферы, где отношение ω_0^2/ω^2 близко к 1 (см. [1], [11]).

В радиационных поясах имеется часть электронов с очень большой энергией. Спектр магнитотормозного излучения таких электронов, разумеется, простирается к гораздо большим частотам, но его интенсивность, вследствие малой концентрации электронов, невысока [12].

Представляет интерес дать оценку величине излучения, достигающего поверхности Земли, поскольку в силу условий распространения радиоволн излучение, возникшее выше максимума F слоя, на частотах $f < f_H$ непосредственно на Землю пройти не может [13]. Как известно, радиоизлучение в этом случае может частично пройти на Землю лишь путем перехода от обыкновенной компоненты к необыкновенной на высоте, где относительная концентрация $\omega_0^2/\omega^2 \sim 1$. При этом направление распространения радиоволн должно быть близко к направлению магнитного поля. Непосредственная оценка по данным наблюдений величины телесного угла, в котором приходят радиоволны на Землю, дает величину порядка 10^{-3} радиан для $f \sim 0,5$ мгц [3]. В силу этого обстоятельства, даже если не учитывать уменьшение плотности потока из-за рефракции, которую довольно трудно рассчитать, на Землю пройдет только очень небольшая часть волн ($< 0,1\%$), излученных в ионосфере в пределах полусфера. Обнаружение и исследование этого излучения остронаправленными антennами, расположеными на Земле, очевидно, в принципе вполне возможно. Измерения излучения, проведенные Ребером [3], дают значительно больший порядок интенсивности (10^{-19} вт·м⁻²·гц⁻¹·стераад⁻¹) по сравнению с приведенными выше оценками*. Возможно, однако, что эта разница получается вследствие неточного знания условий генерации радиоизлучения и его распространения в ионосфере. В связи с этим было бы очень желательно измерить рассматриваемое радиоизлучение непосредственно в ионосфере с помощью искусственных спутников Земли [14, 15]. Такого рода измерения дали бы возможность определить как расположение области генерации, так и интенсивность излучения.

В заключение авторы выражают свою признательность В. Л. Гинзбургу за обсуждение настоящей работы.

* Следует также заметить, что учет реабсорбции, которой пренебрегалось в расчетах, должен еще в некоторой степени уменьшить интенсивность излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. R. Ellis, J. Atm. and Terr. Phys., **10**, 302 (1957).
2. В. Л. Гинзбург, ДАН СССР, **76**, 377 (1951).
3. G. Rebege, J. Geoph. Res., **63**, 109 (1958).
4. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, **34**, 131 (1958), **36**, 1335 (1959); Диссертация, Госуниверситет, Горький, 1960.
5. А. А. Коломенский, ДАН СССР, **106**, 982 (1956).
6. Я. Л. Альперт, Ф. Ф. Добрякова, Э. Ф. Чудесенко, Б. С. Шапиро, УФН, **65**, 161 (1958).
7. К. И. Гриингауз, В. Г. Курт, В. И. Мороз, И. С. Шкловский, ДАН СССР, **132**, 1062 (1960); Астрон. ж., **37**, 716 (1960).
8. С. Н. Вернов и Л. Е. Чудаков, УФН, **70**, 585 (1960).
9. J. A. Van Allen, L. A. Frank, Nature, **183**, 430 (1959).
10. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **1**, 2, 59 (1958).
11. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Растворение радиоволн, ГИТГЛ, М., 1953, стр. 452.
12. R. B. Dyce, J. Geoph. Res., **64**, 1163 (1959).
13. Е. А. Бенедиктов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 33 (1960).
14. Г. Г. Гетманцев, В. Л. Гинзбург, И. С. Шкловский, УФН, **66**, 157 (1958).
15. Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, В. Л. Гинзбург, Искусственные спутники Земли (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 октября 1960 г.

ON THE INCOHERENT RADIO EMISSION OF THE CHARGED PARTICLES MOVING IN THE EARTH'S MAGNETIC FIELD

E. A. Benediktov, V. Ya. Eidman

An examination is made of the incoherent radio emission of fast charged particles in the Earth's ionosphere taking into account its magnetic field. Quantitative estimations are given of the intensity of the radiation in the medium-frequency band.

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ В МОЛЕКУЛЯРНОМ ГЕНЕРАТОРЕ

A. Ф. Мухамедгалиева и Р. В. Хохлов

Статья посвящена теоретическому исследованию стационарных режимов в молекулярных генераторах. Исследование проведено сначала для случая односкоростного молекулярного пучка и затем качественно рассмотрено влияние разброса по скоростям пролетающих молекул.

1. Исследование устойчивости стационарных состояний в молекулярном генераторе посвящено несколько работ [1–3]. Все они выполнены с использованием уравнений для поляризации молекулярного пучка, выведенных в [4,5] и [6]. Достоинством этих уравнений является их простота, лежащая в основе соответствующей теоретической модели молекулярного генератора. Поэтому в рамках такой модели анализ многих эффектов в молекулярном генераторе может быть проведен с помощью сравнительно простых средств.

Вместе с тем, не следует забывать и об ограниченной применимости этой модели. Неточность уравнений, выведенных в [4–6], обусловлена заменой усреднения поляризации по двум независимым параметрам — продольной координате резонатора и по скоростям пролетающих через него молекул — одним усреднением по времени пролета молекул сквозь резонатор. Достоинством такой замены является то, что уравнения для поляризации получаются более простые.

Настоящее сообщение посвящено результатам исследования устойчивости стационарных режимов молекулярного генератора, выполненного с использованием более строгих уравнений для поляризации пучка [7,8]. Исследование проведено с помощью метода упрощения укороченных уравнений, применявшегося уже для этой цели в [2].

В работе [3] выражено сомнение относительно корректности примененного в [2] метода. Поводом к нему послужил вывод автора статьи [3] о возможности неустойчивых режимов в генераторе, что противоречит результатам работы [2]. Такие режимы действительно могли бы быть осуществлены в соответствии с полученными в [3] соотношениями лишь при очень высоких превышениях порога самовозбуждения ($K = 10^3 \div 10^4$). Столь высокие превышения порога самовозбуждения K естественно рассматривать скорее как особые случаи, чем обычные; они не описываются методом, примененным в [2]. Рассматриваемые там значения K имеют нулевой порядок относительно малого параметра $\mu = 10^{-3} \div 10^{-4}$ ($K \sim \mu^0$), в то время как неустойчивые состояния, согласно [3], могут быть осуществлены при значениях K , равных по порядку $1/\mu$. Следует отметить, что столь высокие превышения порога самовозбуждения едва ли могут быть реализованы практически.

Таким образом, если интересоваться превышениями порога самовозбуждения по порядку не выше 10^2 , можно использовать для анализа устойчивости режимов работы молекулярного генератора упрощенный метод исследования, предложенный в [2]. Целесообразность его использования определяется еще и чрезвычайной громоздкостью полного анализа устойчивости в этом случае.

2. Теория работы молекулярного генератора может быть построена на основе использования функции поляризации, определяющей состояние пучка. Функция поляризации P и функция D , характеризующая распределение молекул по состояниям, выражаются через элементы матрицы плотности молекул $C_{ik}(x, t)$ следующим образом:

$$P(x, t) = p (e^{i\omega_0 t} C_{12} + e^{-i\omega_0 t} C_{21});$$

$$D(x, t) = C_{22} - C_{11},$$

где p — дипольный момент молекулы, ω_0 — частота молекулярного перехода.

При действии поля $\epsilon = E(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)]$ приближенные уравнения для P и D имеют вид [8]:

$$\frac{\partial D}{\partial \eta} = \frac{1}{2hv} E(\eta) P_1;$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial \eta} = \varphi'(\eta) P_2 - \frac{p^2}{2hv} E(\eta) D; \quad (1)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial \eta} = \varphi'(\eta) P_1$$

с граничными условиями $D = B(v)$, $P_1 = P_2 = 0$ при $\eta = -\xi$, где $\xi = x - vt$, $\eta = x + vt$, а P_1 и P_2 — активная и реактивная части поляризации.

Кроме системы уравнений (1), нестационарные процессы описываются еще двумя дифференциальными уравнениями для медленно меняющихся амплитуды и фазы поля. Однако ввиду большого различия добротностей резонатора Q и линии $Q_L = \omega_0 \tau$, где τ — усредненное таким же образом, как и в [2], время пролета молекулы через резонатор, укороченные уравнения неравноценны. Устойчивость определяется системой дифференциальных уравнений (1), а дифференциальные уравнения для амплитуды и фазы вырождаются в алгебраические, в которых изменяющиеся амплитуда и фаза поля квазистатически связаны с активной и реактивной частями поляризации:

$$-(\omega_0/2Q) E - 2\pi\omega_0 \bar{P}_1 = 0; \quad \Delta - 2\pi\omega_0 \bar{P}_2/E = 0, \quad (2)$$

где $\Delta = \omega_{\text{рез}} - \omega_0$, а P_1 и P_2 усреднены по x и по v .

Подставляя (2) в (1), получим для описания процессов установления в молекулярном генераторе систему трех интегродифференциальных уравнений.

Проведем исследование устойчивости стационарных режимов на основе этой системы уравнений. Рассмотрим сначала случай односкоростного пучка молекул, а затем установим возможные качественные отличия от этого случая и проведем соответствующие оценки.

Пусть вблизи стационарных режимов амплитуда и поправка к частоте поля имеют вид:

$$E(t) = E_0 + \epsilon e^{\lambda t}; \quad \delta = \varphi(t) = \delta_0 + \vartheta e^{\lambda t},$$

где ϵ и ϑ — величины первого порядка малости по сравнению со стационарными значениями амплитуды E_0 и поправки к частоте δ_0 .

Функции поляризации можно представить в виде:

$$P_1 = P_1^0 + p_1 e^{\lambda t}; \quad P_2 = P_2^0 + p_2 e^{\lambda t},$$

где p_1 и p_2 — малые отклонения от стационарного состояния. Линеаризируя систему уравнений (1), можно найти выражения для p_1 и p_2 , которые не приводятся ввиду их громоздкости.

Усредняя P_1 и P_2 по длине резонатора L , подставляя их в (2) и сокращая на $e^{\lambda t}$, мы получаем систему двух уравнений относительно ε и ϑ :

$$\varepsilon = -4\pi Q \bar{p}; \quad 0 = \frac{\omega_0}{2Q} \frac{1}{\bar{P}_1^0} (\bar{P}_1^0 \bar{p}_2 - \bar{P}_2^0 \bar{p}_1).$$

Система имеет нетривиальное решение, если определитель равен нулю. Приравнивая нулю определитель, составленный из коэффициентов при ε и ϑ , получаем трансцендентное уравнение относительно $\Lambda = \lambda/2v$:

$$Y_5 \Lambda^5 + Y_4 \Lambda^4 + Y_3 \Lambda^3 + Y_2 \Lambda^2 + Y_1 \Lambda + Y_0 + e^{-2\Lambda L} (y_3 \Lambda^3 + y_2 \Lambda^2 + y_1 \Lambda + y_0) + e^{-4\Lambda L} (z_1 \Lambda + z_0) = 0,$$

где Y_n , y_n , z_n — коэффициенты, зависящие от E_0 , δ_0 , ε , ϑ .

Анализ этого уравнения дает возможность записать следующее условие, при котором система имеет положительный корень:

$$[Y_5 \Lambda^5 + Y_4 \Lambda^4 + Y_3 \Lambda^3 + Y_2 \Lambda^2 + Y_1 \Lambda + Y_0 + e^{-4\Lambda L} (z_1 \Lambda + z_0)]'' > [e^{-2\Lambda L} (y_3 \Lambda^3 + y_2 \Lambda^2 + y_1 \Lambda + y_0)]''.$$

Приведенное неравенство позволяет определить границы области неустойчивости. На рис. 1 заштрихованная часть представляет собой область неустойчивости. Из рисунка видно, что при расстройках

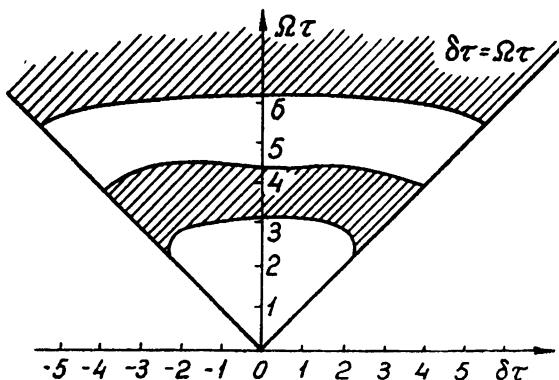


Рис. 1. Области устойчивости и неустойчивости стационарных режимов генератора. Области неустойчивости заштрихованы.

$\delta_0/2v = 0$ система неустойчива в области значений пролетных фаз $2\pi < \Omega\tau < 8,95$ и вообще на всех возрастающих участках кривой функции возбуждения генератора $\Phi(\Omega\tau)$ (см. рис. 2). Функция возбуждения генератора $\Phi(\Omega\tau)$ связана с коэффициентом самовозбуждения $1/QB$ соотношением [7]

$$\frac{1}{QB} = \Phi(\Omega\tau),$$

где

$$\Omega^2 = \gamma^2 E_0^2 + \delta_0^2 \text{ и } \gamma = p/2\hbar v.$$

При других значениях δ_0 границы области неустойчивости изменяются. Если проанализировать (рис. 2) зависимость функции возбуждения генератора от значения пролетной фазы $\Omega\tau$, то можно сделать вывод, что при $\delta_0 \neq 0$ неустойчивой будет и часть убывающей ветви функции Φ , причем имеются такие области значений, при которых хотя и выполнены условия самовозбуждения, но стационарное состояние неустойчиво.

3. До сих пор рассматривался случай односкоростного пучка молекул.

В случае, когда имеется разброс по скоростям Θ около некоторого среднего значения скорости v_0 , вид функции Φ изменится; ее минимальные значения увеличиваются, максимальные уменьшаются и зависимость $\Phi(\Omega\tau)$ "размажется" [7].

Выясним, каков максимальный разброс скоростей Θ , при котором график функции $\Phi(\Omega\tau)$ будет еще

Рис. 2 Зависимость функции возбуждения генератора от пролетной фазы $\Omega\tau$.

иметь максимумы и минимумы. Для этого произведем усреднение этой функции по скоростям и проанализируем вид этой функции при различных Θ . Графический анализ показывает, что максимальное значение Θ , при котором зависимость $\Phi(\Omega\tau)$ имеет еще экстремумы, равно $\Theta/v_0 \approx 0,3$. При $\Theta/v_0 > 0,3$ картина размазывается. Естественно предположить, что при таком разбросе по скоростям молекул области неустойчивости будут поглощены областями устойчивости.

Таким образом, если разброс по скоростям молекулярного пучка невелик, имеются области значений параметров, в которых стационарные режимы колебаний генератора неустойчивы. С увеличением разброса по скоростям эти области уменьшаются и при относительном разбросе по скоростям, равным по порядку величины нескольким десяткам, они совсем исчезают.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 3, 1298 (1958).
- 2 Х. Ю. Халдре, Р. В. Хохлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 5—6, 60 (1958).
- 3 А. С. Гуртовник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 5—6, 83 (1958).
- 4 Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, УФН, 57, 485 (1955).
- 5 В. М. Файн, ЖЭТФ, 33, 10, 945 (1957).
- 6 А. В. Ораевский, Радиотехника и электроника, 3, 1298 (1958).
- 7 Ю. Л. Климонтович, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 33, 6 (1957).
- 8 Г. П. Любимов, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 33, 1395 (1957).

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
29 сентября 1959 г.

ON THE STABILITY OF OSCILLATIONS IN A MOLECULAR GENERATOR

A. F. Mukhametgalieva and R. V. Khokhlov

The paper is devoted to the theoretical investigation of stationary regimes in molecular generators. To begin with, the investigation is conducted in the case of a monovelocity molecular beam and then a qualitative examination is made of the influence of the velocity dispersion.

**О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ УСТАНОВКИ ДЛЯ
РАДИОСПЕКТРОСКОПИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ГЕНЕРАТОРА
МЕТРОВЫХ ВОЛН**

О. Г. Эльстинг

Определяется наибольшая реакция на цепь сетки автогенератора при изменении добротности колебательной системы. Оценивается несколько способами чувствительность измерительного генератора, предназначенного для исследований в области электронного парамагнитного резонанса на частотах 250 ± 300 мгц.

Описание установки. Метод анализа химических соединений при помощи электронного парамагнитного резонанса широко распространен [1]. Возможности такого метода связаны с чувствительностью систем, работающих в различных радиочастотных диапазонах. Настоящая работа посвящена определению чувствительности установки с генератором метрового диапазона, собранной по схеме рис. 1, где генератор 1 частоты f_g при помощи петли связи 2 возбуждает измерительный контур 3. Генератор пилообразного тока 6 создает медленно меняющееся магнитное поле в электромагните 4; звуковой генератор 5 с частотой f_m используется для дополнительной модуляции магнитного поля [1].

Поглощение энергией веществом вызывает изменение добротности измерительного контура 3, что ведет к пропорциональному изменению добротности связанных с ним анодного контура автогенератора. Возникающее в результате изменение режима в сеточной цепи — реакция на цепь сетки — используется для изучения линий поглощения.

Сигнал после узкополосного усилителя 8 поступает на синхронный детектор 9, усиливается усилителем с вибропреобразователем 10 и записывается на самописце 11. Генератор пилообразного тока 6 используется для быстрого изменения магнитного поля (с периодом не больше 10 сек); для медленного прохождения линии поглощения предусмотрен жидкостной реостат 7, управляемый от водопроводной сети и обладающий релаксационными колебаниями с периодом от 10^2 до 10^3 сек.

Градуировка измерительного генератора. Градуировка генератора производится при помощи шунтирования измерительного контура известным сопротивлением, как предлагается в работе [2]. Параллель-

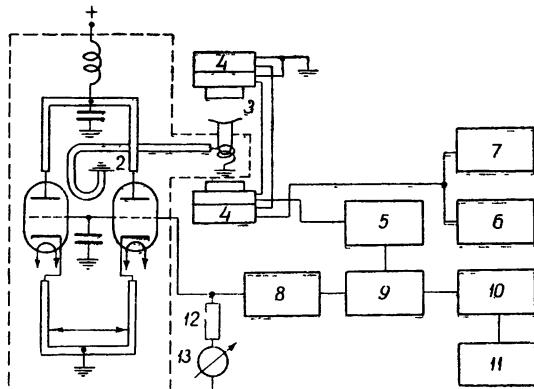


Рис. 1. Измерительная установка.

но измерительному контуру по схеме рис. 2 подключается высокочастотный пробник от вольтметра. Замыкание ключа K ведет к шунтированию контура сопротивлением $0,5 r_d$ и изменению постоянной составляющей сеточного тока на ΔI_{g0} (r_d — сопротивление диода постоянному току).

Градуировка выполнялась для нескольких значений сопротивления автоматического смещения при неизменном r_d , и было обнаружено, что с уменьшением R_g реакция на сеточную цепь увеличивается.

По полученным данным построена градуировочная кривая a на рис. 3.

Прежде чем определить чувствительность генератора, необходимо найти минимальное вносимое сопротивление Δr_{\min} , вызывающее приращение сеточного тока

Рис. 2. Схема соединения шунтирующего диода с измерительным контуром:

L_1 — шунтирующий диод, 3 — измерительный контур, K — выключатель, P — микроамперметр.

ΔI_{g0} , равное току дробового шума $V \bar{I}_N^2$. Зная шумовой ток и реакцию генератора на известное вносимое сопротивление $0,5 r_d$, находим Δr_{\min} для четырех значений R_g . По результатам расчета построена кривая b на рис. 3.

Относительные потери в измерительном контуре, которые еще можно обнаружить по реакции на сеточную цепь, равны

$$\frac{\Delta P_k}{P_k} = \frac{0,5 I^2 \Delta r_{\min}}{0,5 I^2 r_0} = \frac{\Delta r_{\min}}{r_0}, \quad (1)$$

где ΔP_k — потери на сопротивлении Δr_{\min} , P_k — потери на сопротивлении r_0 в ненагруженном контуре, I — высокочастотный ток в контуре.

Сравнивая ΔP_k с потерями в веществе P_b , определим чувствительность генератора.

Чувствительность измерительного генератора. Чувствительность оценивается по минимальному количеству α -дифенил- β -пикрилгидразила (ДФПГ), поглощение в котором дает сигнал с амплитудой, в два раза превышающей уровень дробовых шумов на сетках ламп генератора. Определение чувствительности производилось несколькими способами: а) расчетом поглощения в веществе и вносимого сопротивления с последующим сравнением с измеренным уровнем дробовых шумов; б) при внесении в измерительный контур определенного количества вещества с известной шириной

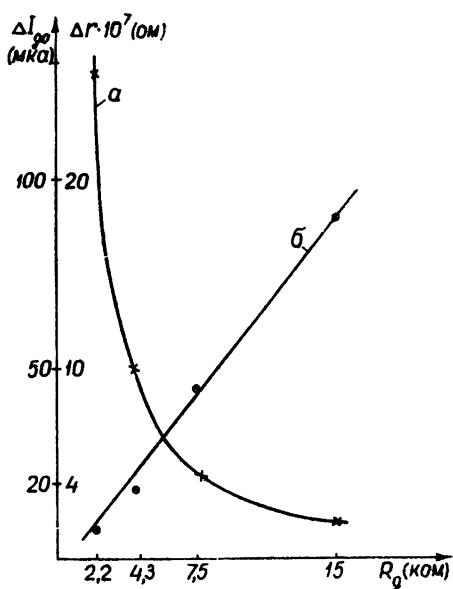


Рис. 3. Градуировочная кривая для двухтактного генератора с общей сеткой ($I_A = 5 \cdot 10^{-6} A$, полоса пропускания усилителя 2500 Гц): кривая a — $\Delta I_{g0} = f(R_g)$, кривая b — $\Delta r = f(R_g)$.

линии поглощения; в) путем наблюдения линии поглощения на экране осциллографа при постоянной времени фильтра синхронного детектора 0,1 сек и сравнения ее амплитуды с уровнем шумов.

Остановимся подробнее на определении чувствительности по первому способу. Поглощение в веществе P_b при резонансе [1]

$$P_b = 0,5 \omega_0 \chi'' H_1^2, \quad (2)$$

где ω_0 — круговая частота измерительного генератора, χ'' — реактивная составляющая магнитной восприимчивости, H_1 — напряженность магнитного поля высокой частоты в измерительном контуре. Напряженность H_1 зависит от тока и размеров измерительного контура следующим образом:

$$H_1 = 0,5 nI (\cos \beta_2 - \cos \beta_1), \quad (3)$$

где n — число витков на единицу длины контура, β_1 и β_2 — углы, определяемые отношением длины контура к диаметру. Приравнивая отношение потерь P_b/P_k к потерям в контуре, получим:

$$\frac{P_b}{P_k} = \frac{\Delta r_{\min}}{r_0}. \quad (4)$$

Подставляя в (4) уравнения (2) и (3), найдем, что

$$\chi'' = \frac{\Delta r_{\min}}{0,25 \omega_0 n^2 (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)^2}.$$

Статическая магнитная восприимчивость χ_0 представлена в [1] как

$$\chi_0 = \chi'' (\Delta H / H_0),$$

где величина $\Delta H / H_0$, равная отношению резонансного значения напряженности поля к ширине линии, выраженной в эрстедах, составляет для соединения типа ДФПГ 0,035. Количество вещества в молях при известном χ_0

$$M = \chi_0 T / 0,38,$$

где T — температура образца.

Полученные тремя способами значения чувствительности сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Способ определения	Расчет для ДФПГ	По известному количеству ДФПГ	Измерение осциллографом
Чувствительность в молях 10^{-8}	5,8	3,2	10

Расчетное значение чувствительности в два раза выше полученной экспериментально. Основная причина расхождения — неточность в градуировке генератора, неизбежная на частотах метрового диапазона. Если увеличить постоянную времени фильтра синхронного детектора до 1 сек, то чувствительность установки возрастает до $0,4 \cdot 10^{-8}$ моля ДФПГ. Работа по дальнейшему увеличению чувствительности продолжается,

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Интрам, Спектроскопия на высоких и сверхвысоких частотах, ИЛ, М., 1959.
2. И. Л. Берштейн, Изв АН СССР, сер. физ., 14, 145 (1950).

Казанский авиационный
институт

Поступила в редакцию
7 июня 1960 г.

ON THE SENSITIVITY OF A RADIOSPECTROSCOPY DEVICE
UTILIZING A METER WAVES GENERATOR

O. G. Elsting

The maximum reaction on the grid circuit of an autogenerator upon a change of the Q-factor of the oscillating system is determined. An estimation is made by several ways of the sensitivity of a measuring generator intended for investigations in the region of an electron paramagnetic resonance on frequencies of 250-300 Mc/s.

ОБОБЩЕНИЕ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ НА НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Л. И. Гудзенко

В эксперименте обычно имеют дело только с одной реализацией случайного процесса, в то время как теоретическое рассмотрение относится к поведению средних статистических характеристик этого процесса. В стационарном случае указанные характеристики определяются по одной реализации с помощью усреднения по времени. В статье указан метод, позволяющий проводить статистическое усреднение нестационарного процесса (в частности, процесса установления) по одной его реализации.

Для стационарного случайного процесса при определенных условиях справедлива эргодическая теорема, которую можно сформулировать так: если $\zeta(t)$ — реализация процесса, $z = \langle \zeta(t) \rangle$ — его среднее статистическое значение, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle |z - \frac{1}{2m} \int_{-m}^m \zeta(t) dt|^2 \right\rangle = 0. \quad (1)$$

Свойство (1) чрезвычайно ценно для сопоставления статистической теории с экспериментом. Его значение очевидно, когда условия опыта неуправляемы, например, при анализе рассеяния радиоволн в солнечной короне. Для непосредственного вычисления средних по ансамблю $\{\zeta(t)\}$ нужно было бы провести большое число измерений $\zeta(t)$ при совпадении всех существенных условий. Но даже в тех опытах, условиями проведения которых можно управлять, определение статистических характеристик с помощью усреднений по ансамблю является сложной задачей, поскольку для этого надо практически осуществить достаточно полное и равномерное распределение реализаций по ансамблю.

Для нестационарного случайного процесса эти трудности еще более возрастают, и поэтому изучение возможности вычисления его характеристик по одной реализации представляет особый интерес. Однако зависимость характеристик нестационарного процесса от времени настолько осложняет эту задачу, что речь идет пока лишь о получении некоторых предварительных результатов. Результаты известных нам работ [1-4] позволяют найти по одной реализации только *средние временные* значения характеристик; этим можно ограничиться, если не интересоваться развитием процесса во времени. Вычисление же *зависимости от времени* характеристик периодически нестационарного процесса по одной его реализации, проведенное в заметке [5], является лишь непосредственным следствием теоремы (1).

Здесь предлагается метод, приводящий к обобщению теоремы (1) на нестационарные случайные процессы более общего типа. При этом, как и в работе [5], предполагаются известными (помимо реализации $\zeta(t)$) некоторые свойства среднего статистического значения $z(t) = \langle \zeta(t) \rangle$, которые могут содержаться, например, в уравнениях Ланжевена для самого процесса или в уравнениях Эйнштейна—Фоккера для вероятностей перехода.

Допустим, что имеющиеся сведения о $z(t)$ позволяют искать эту функцию в виде равномерно сходящегося разложения

$$z(t) = \sum_n z_n a_n(t)$$

по некоторым известным функциям $a_n(t)$; последние будем считать ограниченными на каждом конечном интервале. Обобщение теоремы (1) можно сформулировать тогда следующим образом *.

Если для корреляционной функции

$$b(t, \tau) = \langle \xi(t+\tau) \xi(t)^* \rangle \quad (\xi(t) = \zeta(t) - z(t))$$

случайного процесса $\zeta(t)$ и последовательности базисных функций $\{a_n(t)\}$ выполнены условия:

а) $b(t, \tau)$ ограничена и стремится к нулю с ростом $|\tau|$ равномерно по t ;

б) функции $A_n^{(m)}(t)$, взаимные с $\{a_n(t)\}$ на интервале $-m < t < m$ (см. [6]) и определяемые уравнениями **

$$\frac{1}{2m} \int_{-m}^m a_n(t) A_p^{(m)}(t) dt = \delta_{n,p}, \quad (2)$$

равномерно по m ограничены, т. е. удовлетворяют неравенствам

$$|A_n^{(m)}(t)| \leq A_n \quad (-m < t < m), \quad (3)$$

то среднее статистическое значение $z(t)$ определяется по одной реализации $\zeta(t)$ с помощью соотношений:

$$\zeta_N^{(m)}(t) = \sum_{n=1}^N \zeta_n^{(m)} a_n(t); \quad (4)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle |\zeta_N^{(m)}(t) - z(t)|^2 \rangle = 0,$$

где

$$\zeta_n^{(m)} = \frac{1}{2m} \int_{-m}^m A_n^{(m)}(t) \zeta(t) dt.$$

Для коэффициентов z_n разложения функции $z(t)$ имеем соответственно:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle |\zeta_n^{(m)} - z_n|^2 \rangle = 0. \quad (4a)$$

Рассмотрим несколько примеров.

1) Пусть процесс $\zeta(t)$ подчинен статистическому уравнению

$$d\zeta(t)/dt = k(t) \zeta(t) + f(t),$$

где $k(t)$ и $f(t)$ — соответственно детерминированная и флюктуационная функции,

$$\langle k(t) \zeta(t) \rangle = k(t) \langle \zeta(t) \rangle, \quad \langle f(t) \rangle = 0,$$

* Доказательство теоремы дано в приложении.

** Функции $A_n^{(m)}(t)$ могут быть выбраны в пространстве, натянутом на базис $\{a_n(t)\}$; при этом $A_n^{(m)}(t) = \sum_p A_{np}^{(m)} a_p(t)$.

причем

$$c_1 \leq \operatorname{Re} \left[\int_{t_0}^t k(\alpha) d\alpha \right] \leq c_2 \quad (-\infty < t < \infty).$$

Для среднего статистического $z(t)$

$$dz(t)/dt = k(t) z(t), \quad z(t) = z a(t), \quad a(t) = \exp \left[\int_{t_0}^t k(\alpha) d\alpha \right].$$

В данной задаче нужно вычислить по реализации $\zeta(t)$ только одно число z . Функциями, взаимными с $a(t)$ на интервалах $(-m, m)$, являются

$$A^{(m)}(t) = 2ma(t) \left[\int_{-m}^m a^2(t) dt \right]^{-1}.$$

Будем считать, что свойство $f(t)$ обеспечивает выполнение для корреляционной функции процесса $\{\zeta(t)\}$ условия а). В силу неравенства

$$|A^{(m)}(t)| \leq \exp(c_2 - 2c_1)$$

условие б) также выполнено. Поэтому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle |\zeta^{(m)} - z|^2 \rangle = 0;$$

$$\zeta^{(m)} = \int_{-m}^m \exp \left[\int_{t_0}^t k(\alpha) d\alpha \right] \zeta(t) dt \left\{ \int_{-m}^m \exp \left[2 \int_{t_0}^t k(\alpha) d\alpha \right] dt \right\}^{-1}.$$

Вообще при $z(t) = z a(t)$ можно написать:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle \left| z(t) - \int_{-m}^m a(t) \zeta(t) dt \right|^2 \left[\int_{-m}^m a^2(t) dt \right]^{-1} a(t) \right\rangle = 0.$$

Если $k(t) \equiv 0$, имеем последовательно, $a(t) = 1$, $z(t) = z = \text{const}$ и, наконец (ср. с формулой (1)),

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle \left| z - \frac{1}{2m} \int_{-m}^m \zeta(t) dt \right|^2 \right\rangle = 0.$$

2) Рассмотрим теперь такую задачу, когда информация о функции $z(t)$ позволяет определить только ее асимптотическое поведение. Из определения $\zeta_N^{(m)}(t)$ и $\zeta_n^{(m)}$ следует, что если асимптотическая для $z(t)$ функция $u(t)$ ($\lim_{|t| \rightarrow \infty} |u(t) - z(t)| = 0$) представима в виде разложения

$$u(t) = \sum_n u_n a_n(t),$$

то функция $u(t)$ вычисляется по реализации $\zeta(t)$ указанным выше методом:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle |\zeta_N^{(m)}(t) - u(t)|^2 \rangle = 0.$$

Соответственно для коэффициентов разложения u_n

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle |\zeta_n^{(m)} - u_n|^2 \rangle = 0.$$

Остановимся на простейшем примере. Пусть известно, что $z(t)$ с ростом $|t|$ неограниченно приближается к функции

$$u(t) = \begin{cases} u_1 + u_2 t & (t < 0) \\ u_3 + u_4 t & (t > 0) \end{cases},$$

т. е. статистическое среднее процесса обладает прямолинейными асимптотами. В этом случае по реализации $\zeta(t)$ необходимо определить четыре числа u_1, u_2, u_3, u_4 . Параметры u_n являются коэффициентами разложения

$$u(t) = \sum_{n=1}^4 u_n a_n(t),$$

где

$$a_1(t) = \begin{cases} 1 & (t < 0) \\ 0 & (t > 0) \end{cases}; \quad a_2(t) = t a_1(t); \quad a_3(t) = 1 - a_1(t); \quad a_4(t) = t a_3(t).$$

Взаимные с $\{a_n(t)\}$ на интервале $(-m, m)$ функции равны

$$A_1^{(m)}(t) = 8a_1(t) + \frac{12}{m} a_2 t, \quad A_2^{(m)}(t) = \frac{12}{m} a_1(t) + \frac{24}{m^2} a_2(t),$$

$$A_3^{(m)}(t) = 8a_3(t) - \frac{12}{m} a_4(t), \quad A_4^{(m)}(t) = -\frac{12}{m} a_3(t) + \frac{24}{m^2} a_4(t);$$

условие б) соблюдается для них

$$A_1 = A_3 = 8, \quad A_2 = A_4 = 12.$$

Таким образом, параметры u_n асимптот средней статистической функции $z(t)$ случайного процесса определяются формулами:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle |u_1 - \frac{2}{m} \int_{-m}^0 \left(2 + \frac{3}{m} t \right) \zeta(t) dt|^2 \right\rangle = 0;$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle |u_2 - \frac{6}{m^2} \int_{-m}^0 \left(1 + \frac{2}{m} t \right) \zeta(t) dt|^2 \right\rangle = 0;$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle |u_3 - \frac{2}{m} \int_0^m \left(2 - \frac{3}{m} t \right) \zeta(t) dt|^2 \right\rangle = 0;$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle |u_4 - \frac{6}{m^2} \int_0^m \left(-1 + \frac{2}{m} t \right) \zeta(t) dt|^2 \right\rangle = 0.$$

3) Рассмотрим движение изображающей точки под действием малой флюктуационной силы $f(t)$ в фазовом пространстве автономной колебательной системы [7]. Обозначим через M_1 время корреляции силы $f(t)$ и через M_2 максимальный интервал, на котором можно еще не учитывать уходов фазы автоколебаний. При достаточной малости $f(t)$ $M_2 \gg M_1$. Ограничимся при этом интервалами $(-m, m)$, где $m < M_2/2$, можно считать, что статистическое среднее $z(t)$ векторного случайного процесса $\{\zeta(t)\}$, описывающего движение изображающей точки, является после установления периодической функцией.

В первом приближении относительно $f(t)$ функция $z(t)$ совпадает с функцией $r(t)$, соответствующей движению изображающей точки

динамической системы ($f=0$) по предельному циклу. Обозначим через $\zeta(t)$ и $z(t)$ соответственно реализацию и среднее статистическое значение какой-нибудь составляющей векторного процесса $\{\zeta(t)\}$. Произведя замену $t'=t/T$, приходим к необходимости определить по одной реализации $\zeta(Tt')$ периодически (с единичным периодом) зависящую от t' среднюю статистическую функцию процесса $z(Tt')$. Такую функцию можно записать в виде разложения по базисной тригонометрической последовательности

$$a_n(t') = \exp(i2\pi nt') \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

При этом взаимными функциями на любом интервале $(-m, m)$ являются

$$A_n(t') = \exp(-i2\pi nt') = a_{-n}(t');$$

свойство б) выполняется для них при $A_n=1$.

На основании теоремы Фейера [6] ряд

$$z(t') = \sum_n z_n \exp(in 2\pi t')$$

сходится равномерно *, в силу чего имеем:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle |z(t) - \zeta_{(N)}^{(m)}(t)|^2 \rangle = 0;$$

$$\zeta_{(N)}^{(m)}(t) = \frac{1}{2mT} \sum_{n=-N}^N \int_{-mT}^{mT} \zeta(\eta) \exp\left(i 2\pi n \frac{t-\eta}{T}\right) d\eta.$$

Функции $\zeta_{(N)}^{(m)}(t)$ при больших N можно переписать в виде

$$\zeta_{(N)}^{(m)}(t) = \frac{1}{2mT} \int_{-mT}^{mT} \zeta(\eta) \left[\sum_{n=-N}^N \exp\left(i 2\pi n \frac{t-\eta}{T}\right) \right] d\eta \simeq \frac{1}{2m} \sum_n \zeta(t-nT);$$

индекс n в последней сумме пробегает значения

$$t/T - m < n < t/T + m.$$

Смысл этой формулы нетрудно понять. В силу периодичности случайная последовательность $\{\zeta(t-nT)\}$ имеет при каждом фиксированном t одно и то же (т. е. не зависящее от n) среднее статистическое значение. Рассуждения, подобные приведенным в конце примера 1, приводят поэтому к соотношению

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle |z(t) - \frac{1}{2m} \sum_{n=-m}^m \zeta(t-nT)|^2 \rangle = 0.$$

4) Изложенный здесь метод определения по одной реализации нестационарного процесса его средней статистической функции можно применить и к вычислению по $\zeta(t)$ других статистических характеристик процесса, изменения условия а) и б) в соответствии с вычисляемой характеристикой. Остановимся для иллюстрации на определении по одной реализации $\zeta(t)$ периодически-нестационарного процесса $\{\zeta(t)\}$ его корреляционной функции $b(t, \tau)$. Последнюю будем предполагать непрерывной функцией времени t . При этом вместо реализации $\zeta(t)$ и

* Как $z(t)$, так и $\zeta(t)$ здесь следует считать непрерывными функциями.

средней статистической функции $z(t) = \langle \zeta(t) \rangle$ анализируемого процесса следует рассмотреть свойства реализации

$$s_\tau = \xi(t + \tau) \xi(t)^*, \quad \xi(t) = \zeta(t) - z(t)$$

и средней статистической функции

$$b(t, \tau) = \langle s_\tau(t) \rangle$$

вспомогательного случайного процесса $\{s_\tau(t)\}$.

Флюктуация $\sigma_\tau(t)$ и корреляционная функция $f_\tau(t, 0)$ этого процесса равны соответственно

$$\sigma_\tau(t) = s_\tau(t) - b(t, \tau);$$

$$\beta_\tau(t, 0) = \langle \sigma_\tau(t+0) \sigma_\tau(t)^* \rangle =$$

$$= \langle [\xi(t+\tau)^* \xi(t) - b(t, \tau)^*] [\xi(t+\tau+0) \xi(t+0)^* - b(t+0, \tau)] \rangle.$$

В силу периодической нестационарности процесса $\{\zeta(t)\}$ и непрерывности по t его корреляционной функции $b(t, \tau)$, последняя представима в виде ряда

$$b(t, \tau) = \sum_k \psi_k(\tau) \exp(i2\pi kt/T),$$

равномерно сходящегося по t при каждом τ ($\psi_k(\tau)$ — корреляционные компоненты процесса $\{\zeta(t)\}$, T — период его нестационарности). Базисные функции $\exp(i2\pi kt/T)$, как отмечено в примере 3), удовлетворяют условию б). Для обеспечения применимости указанного метода к вычислению $b(t, \tau)$ необходимо выполнение условия а), которое здесь заключается в равномерности по t стремления к нулю с ростом θ функции $\beta_\tau(t, 0)$. Если это условие выполнено, то корреляционные компоненты $\psi_k(\tau)$ процесса $\{\zeta(t)\}$ определяются по одной реализации $\zeta(t)$ из условия

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2m} \int_{-m}^m \xi(\sigma + \tau) \xi(\sigma)^* \exp \left(-i2\pi k \frac{\sigma}{T} \right) d\sigma - \psi_k(\tau) \right|^2 = 0.$$

Автор благодарен С. М. Рытову и А. М. Ягому за обсуждение работы и ценные замечания, сделанные в процессе ее выполнения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем основную теорему, сформулированную в этой работе. Для этого выпишем прежде всего равенство

$$z_n = \frac{1}{2m} \int_{-m}^m A_n^{(m)}(t) z(t) dt,$$

определенное коэффициенты разложения функции $z(t)$ в базисе $\{a_n(t)\}$. Обозначим через

$$z_{(N)}(t) = \sum_{n=1}^N z_n a_n(t)$$

частные суммы этого разложения. По анализируемому случайному процессу $\{\zeta(t)\}$ и базисным функциям построим аппроксимирующую

$z(t)$ двухиндексную последовательность случайных функций $\{\zeta_{(N)}^{(m)}(t)\}$, полагая

$$\zeta_{(N)}^{(m)}(t) = \sum_{n=1}^N \zeta_n^{(m)} a_n(t), \quad \zeta_n^{(m)} = \frac{1}{2m} \int_{-m}^m A_n^{(m)}(t) \zeta(t) dt.$$

Статистическое усреднение дает:

$$\langle \zeta_n^{(m)} \rangle = z_n, \quad \langle \zeta_{(N)}^{(m)}(t) \rangle = \sum_{n=1}^N z_n a_n(t) = z_{(N)}(t).$$

Проследим поведение дисперсий $D_n^{(m)}$ случайных коэффициентов разложения $\zeta_{(N)}^{(m)}(t)$ при неограниченном возрастании интервала усреднения $(-m, m)$. Величины $D_n^{(m)}$ удобно записать в виде

$$D_n^{(m)} = \langle |\zeta_n^{(m)} - z_n|^2 \rangle = \langle |\xi_n^{(m)}|^2 \rangle,$$

где

$$\xi_n^{(m)} = \frac{1}{2m} \int_{-m}^m A_n^{(m)}(t) \zeta(t) dt, \quad \xi(t) = \zeta(t) - z(t).$$

С помощью неравенств (3) можно сделать оценку этих величин:

$$\langle |\xi_n^{(m)}|^2 \rangle \leq A_n^2 i_m, \quad i_m = \frac{1}{4m^2} \int_{-m}^m dt \int_{-t-m}^{t-m} |b(t, \tau)| d\tau. \quad (\text{A.1})$$

По условию а) корреляционная функция ограничена:

$$B = \sup |b(t, \tau)|. \quad (\text{A.2})$$

Свойство а) корреляционной функции предполагает также, что для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число T_ε , для которого выполнено неравенство

$$|b(t, \tau)| < \varepsilon \quad (|\tau| > T_\varepsilon, -\infty < t < \infty). \quad (\text{A.3})$$

Используя (A.2) и (A.3), получаем для положительных чисел i_m неравенство

$$i_m < \frac{1}{4m^2} \int_{-m}^m \left[\int_{-T_\varepsilon}^T B d\tau + \int_{-t-m}^{t-m} d\tau \right] dt = \frac{BT_\varepsilon}{m} + \varepsilon. \quad (\text{A.4})$$

Из неравенств (A.1) и (A.4) непосредственно следует одно из утверждений теоремы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle |\zeta_n^{(m)} - z_n|^2 \rangle = 0. \quad (\text{A.5})$$

Перейдем к доказательству второго утверждения, для чего проведем оценку среднего статистического значения квадрата модуля отклонения $\Delta_{N, m}(t)$ функции $\zeta_{(N)}^{(m)}(t)$ от статистически аппроксимируемой функции $z(t)$ в момент t .

Предварительно оценим дисперсию $D_{(N)}^{(m)}(t)$ случайного процесса $\{\zeta_{(N)}^{(m)}(t)\}$:

$$D_{(N)}^{(m)}(t) = \langle |\zeta_{(N)}^{(m)}(t) - z_{(N)}(t)|^2 \rangle = \sum_{n=1}^N u_{n,p} a_n(t)^* a_p(t), \quad (\text{A.6})$$

где $u_{n,p} = \langle \xi_n^{(m)*} \xi_p^{(m)} \rangle$. Обозначая

$$A_{(N)} = \max \{A_n, n \ll N\}, \quad a_{(N)}(t) = \max \{|a_n(t)|, n \ll N\},$$

подставляя в формулы (A.6) неравенство

$$|u_{n,p}| \leq A_n A_p i_m < A_n A_p (B T_\varepsilon / m + \varepsilon),$$

вытекающее из условия б) и (A.4), находим:

$$D_{(N)}^{(m)}(t) < N A_{(N)}^2 a_{(N)}^2(t) (B T_\varepsilon / m + \varepsilon). \quad (\text{A.7})$$

Для средне-квадратичного отклонения $\Delta_{N,m}(t)$ функции $\zeta_{(N)}^{(m)}(t)$ от $z(t)$ в точке t имеем:

$$\Delta_{N,m}(t) = \langle |\zeta_{(N)}^{(m)}(t) - z(t)|^2 \rangle = D_{(N)}^{(m)}(t) + |z(t) - z_{(N)}(t)|^2. \quad (\text{A.8})$$

Надо показать, что это отклонение можно сделать сколь угодно малым, если выбрать числа N (а затем и m) достаточно большими. Пусть задано произвольное число $\delta > 0$. В силу равномерной сходимости разложения $z(t) = \sum z_n a_n(t)$ можно указать такое число N_δ , что при $N \geq N_\delta$ выполняется условие

$$|z(t) - z_{(N)}(t)| \leq \sqrt{\delta/2}.$$

Фиксируем какое-нибудь $N \geq N_\delta$. Положив затем

$$M_{N,\delta}(t) = B T_\varepsilon / \varepsilon, \quad \varepsilon = \varepsilon_{N,\delta}(t) = \delta / 4 N A_{(N)}^2 a_{(N)}^2(t)$$

при $m \geq M_{N,\delta}(t)$, с помощью неравенств (A.7), (A.8) находим $D_{(N)}^{(m)}(t) < \delta/2$ и соответственно

$$\Delta_{N,m}(t) < \delta.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Бунимович, Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, изд. Сов. радио, М., 1951.
2. А. Blanc-Lapierre, R. Fortet, Theorie des fonctions aleatoires, Paris, 1953
3. Н. А. Железнов, Труды ЛКВВИА, вып. 191, 15 (1957).
4. С. М. Рытов, Радиотехника и электроника, 4, 1415 (1959).
5. Л. И. Гудзенко, Радиотехника и электроника, 4, 1062 (1959).
6. С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, Физматгиз, М., 1958.
7. Л. И. Гудзенко, ДАН СССР, 125, 62 (1959).

Физический институт
им. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию
8 октября 1960 г.

GENERALIZATION OF THE ERGODICAL THEOREM TO NONSTATIONARY RANDOM PROCESSES

L. I. Gudzenko

When experimenting one usually deals only with one realization of random process, whereas a theoretical examination has to do with the behaviour of mean statistical characteristics of the process. In a stationary case, the said characteristics are determined from one realization with the help of time averaging. In the paper a method is indicated which allows to produce the statistical averaging of a nonstationary process (in particular a setting-up process) only from a single realization.

ВОЗДЕЙСТВИЕ ИМПУЛЬСНЫХ ПОТОКОВ ПАЛЬМА НА РАДИОСХЕМЫ С ЕМКОСТНЫМИ НАКОПИТЕЛЯМИ. I

Г. А. Медведев

Рассмотрен вопрос о нахождении плотности распределения вероятностей величин напряжений на конденсаторах пассивной линейной RC -цепи, когда на нее воздействует последовательность импульсов со случайными независимыми интервалами (импульсный поток Пальма). Полученные результаты применяются для исследования некоторых часто применяемых на практике радиосхем.

1. ИМПУЛЬСНЫЙ ПОТОК ПАЛЬМА

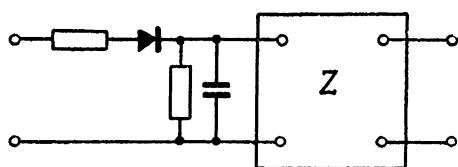
В теории массового обслуживания [1] потоками Пальма называют стационарные ординарные потоки случайных событий с ограниченным последействием, т. е. с таким последействием, когда временные интервалы между двумя последовательными событиями являются взаимно независимыми. Будем называть импульсным потоком Пальма стационарную последовательность одинаковых импульсов со случайными взаимно независимыми интервалами (например, как считается повсюду ниже, прямоугольных импульсов с одинаковыми амплитудами a и длительностями τ_n). Такое название является кратким и указывает на то, что результаты, получаемые в теории массового обслуживания для потоков Пальма, применимы к указанной импульсной последовательности.

Импульсный поток Пальма однозначно определяется плотностью распределения вероятностей величины временного интервала между двумя последовательными импульсами, которую будем обозначать в дальнейшем через $f(t)$. Функцию распределения величины временного интервала будем обозначать через $F(t)$. Под величиной временного интервала здесь и повсюду ниже понимается расстояние (во времени) между передними фронтами двух последовательных импульсов. Будем также предполагать, что величина временного интервала всегда больше длительности импульса потока, т. е. $F(t)=0$ для всех $t < \tau_n$.

2. ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОТОКОВ ПАЛЬМА НА ЛИНЕЙНУЮ ПАССИВНУЮ ЦЕЛЬ

Рассмотрим вначале воздействие потока Пальма на импульсный детектор с фильтром. Типовая схема такого детектора представлена

Рис. 1. Типовая схема импульсного детектора.



на рис. 1. На этом рисунке под четырехполюсником, отмеченным буквой Z , подразумевается фильтр. Фильтр, как правило, представляет собой пассивную линейную цепь, составленную из сопротивлений и

емкостей. Удобно также отнести к фильтру сопротивление и конденсатор, относящиеся к детектору и стоящие перед фильтром.

Будем считать, что пассивная RC -цепь в схеме детектора содержит n конденсаторов. Обозначим напряжения на них через U_i ($i=1, 2, \dots, n$). В схеме могут существовать два режима: режим при „открытом“ (пропускающем ток) диоде и режим при „закрытом“ (не пропускающем тока) диоде. Первый режим будет существовать в интервалы времени, когда на входе действует импульс *; будем называть этот режим зарядным. При отсутствии импульса на входе диод закрыт, и мы будем говорить, что имеет место режим разряда.

Как в том, так и в другом случае состояние схемы описывается системой n линейных дифференциальных уравнений относительно U_i ($i=1, 2, \dots, n$). Системы уравнений для различных режимов отличаются между собой, потому что при заряде к RC -цепи должны быть добавлены сопротивление и источник напряжения (см. рис. 1), в то время как при разряде должна рассматриваться только RC -цепь. Поскольку диод выполняет в рассматриваемой схеме лишь функцию коммутатора, мы припишем ему идеальные характеристики: безынерционность, нулевое прямое сопротивление и бесконечное обратное сопротивление.

Итак, состояние исследуемой схемы, как нетрудно показать, описывается системами уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{i=1}^n \left(a_{ij} \frac{dU_i}{dt} + b_{ij} U_i \right) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

при разряде и

$$\sum_{i=1}^n \left(c_{ij} \frac{dU_i}{dt} + d_{ij} U_i \right) = f_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

при заряде, причем $f_j \neq 0$ хотя бы для одного j . Системы (1) и (2) должны решаться при заданной совокупности начальных условий $U_j(t_0)$ ($j=1, 2, \dots, n$). Величины f_j ($j=1, 2, \dots, n$) являются константами только в том случае, если импульсы входящего потока имеют прямоугольную форму. В том случае, когда импульсы имеют форму, отличную от прямоугольной, f_j должны быть некоторыми функциями времени. С учетом этого изложенное ниже может быть полностью применено для исследования случая импульсов произвольной формы.

Мы будем интересоваться распределением вероятностей величин напряжений на конденсаторах RC -цепи, так как, зная его, можно определить распределение вероятностей напряжения между двумя любыми точками в RC -цепи, выбранными в качестве выходных контактов:

Легко видеть, что системы (1) и (2) представимы в нормальной форме Коши. Поэтому решения систем могут быть найдены в виде:

$$U_j(t) = \sum_{i=1}^n g_{ij} e^{-p_i(t-t_0)} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

при разряде и

$$U_j(t) = h_{0j} + \sum_{i=1}^n h_{ij} e^{-q_i(t-t_0)} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

* В предположении, что действие импульсного потока на RC -цепь уже установлено.

при заряде. Величины p_i и q_i ($i=1, 2, \dots, n$) являются корнями характеристических уравнений систем (1) и (2), записанных в нормальной форме.

Для иллюстрации метода нахождения распределения вероятностей напряжений $U_j(t)$ сделаем предположение относительно корней p_i, q_i , не занимаясь подробным исследованием характеристических уравнений. Будем считать, что для обеих систем уравнений все корни действительны и различны. Коэффициенты g_{ij} и h_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) определяются из начальных условий так, что

$$g_{ij} = g_{ij}[U_1(t_0), U_2(t_0), \dots, U_n(t_0)]; \quad (5)$$

$$h_{ij} = h_{ij}[U_1(t_0), U_2(t_0), \dots, U_n(t_0)]; \quad h_{0j} = h_{0j}(a),$$

где a — амплитуда импульсов на входе схемы.

Итак, в некоторый произвольно выбранный момент времени t состояние схемы определяется набором $U_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, n$), который удовлетворяет соотношению (3), если в момент t имеет место заряд, и соотношению (4), если в момент времени t схема находится в режиме разряда. В том случае, когда на вход схемы поступает импульсный поток Пальма, в произвольно выбранный момент времени t с вероятностью τ_u/T схема будет находиться в режиме заряда и с вероятностью $(1-\tau_u/T)$ — в режиме разряда. Здесь T — средняя величина интервала между двумя последовательными импульсами:

$$T = \int_0^{\infty} tf(t) dt.$$

Будем рассматривать случай, когда действие импульсного потока на RC -цепь уже установилось (т. е. импульсный поток действует на схему, начиная с момента времени $t = -\infty$).

Совокупность величин напряжений $U_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, n$) в некоторый произвольно выбранный момент времени t полностью определяется

1) характером режима, в котором находилась схема в этот момент времени (заряд или разряд имел место в схеме в момент времени t);

2) совокупностью величин напряжений $U_j(t_0)$ ($j=1, 2, \dots, n$) в момент времени t_0 , определяемый следующим образом: если в момент t в схеме имеет место заряд, то t_0 совпадает с передним фронтом импульса, действующего на входе схемы; если же в момент t схема находилась в состоянии разряда, то t_0 совпадает с передним фронтом ближайшего предшествующего импульса;

3) длительностью временного интервала $[t_0, t]$.

Величины $U_j(t)$, $U_j(t_0)$ ($j=1, 2, \dots, n$) и $(t-t_0)$ связываются соотношениями (3), (4) и (5).

Обозначим через $W_0(u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0})$ функцию плотности совместного распределения вероятностей величин напряжений U_j в момент времени t_0 , т. е. в момент появления переднего фронта импульса на входе схемы. Будем в дальнейшем обозначать напряжения в указанный момент времени через U_{j0} в отличие от напряжений $U_j = U_j(t)$ в любой произвольный момент t .

Вероятность того, что в некоторый произвольный момент времени t напряжение U_j заключено в интервалах от u_j до u_j+du_j ($j=1, 2, \dots, n$) при условии, что интервал времени $[t_0, t]$, определенный выше, имеет длительность $t-t_0=s$, равна вероятности того, что в момент времени t_0 (о нем также см. выше) напряжения U_{j0} лежат в интервалах от u_{j0} до $u_{j0}+du_{j0}$ ($j=1, 2, \dots, n$). Иначе говоря,

$$\text{Вер } \{u_j < U_j < u_j + du_j, \quad j=1, 2, \dots, n \mid s\} = \\ = W_0(u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0}) du_{10} du_{20} \dots du_{n0}. \quad (6)$$

Как уже ранее говорилось, u_j , u_{j0} и s связаны соотношениями (3)–(5). Остановимся более подробно на этих соотношениях. Рассмотрим для примера какой-нибудь из режимов, например, режим заряда. В этом случае u_j , u_{j0} и s связаны соотношениями

$$u_j = h_{0j}(a) + \sum_{i=1}^n h_{ij}(u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0}, a) e^{-q_j s} \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

причем (7) может рассматриваться как система линейных уравнений относительно u_{j0} ($j=1, 2, \dots, n$). Разрешая ее, можно получить:

$$u_{j0} = x_j(s, u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Аналогично для режима разряда

$$u_j = \sum_{i=1}^n g_{ij}(u'_{10}, u'_{20}, \dots, u'_{n0}, a) e^{-p_j(s-\tau_i)} \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

где через u'_{j0} здесь обозначено

$$u'_{j0} = h_{0j}(a) + \sum_{i=1}^n h_{ij}(u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0}, a) e^{-q_j \tau_i}.$$

Выражая u_{j0} через u_j и s , получим:

$$u_{j0} = y_j(s, u_1, u_2, \dots, u_n). \quad (9)$$

В правой части (6) сделаем замену переменных:

$$u_{j0} = z_j(s, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (10)$$

где $z_j = x_j(s, u_1, u_2, \dots, u_n)$ при заряде и $z_j = y_j(s, u_1, u_2, \dots, u_n)$ при разряде. Тогда

$$du_{10} du_{20} \dots du_{n0} = D(z) du_1 du_2 \dots du_n,$$

где

$$D(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial u_1} \frac{\partial z_1}{\partial u_2} \dots \frac{\partial z_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial u_1} \frac{\partial z_2}{\partial u_2} \dots \frac{\partial z_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial u_1} \frac{\partial z_n}{\partial u_2} \dots \frac{\partial z_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Величина $s = (t - t_0)$ является случайной величиной. Обозначим через $P(s)$ вероятность того, что момент времени t_0 (который был определен выше) оказался в промежутке времени от $(t-s-ds)$ до $(t-s)$.

Соотношение (6) записано для произвольного момента времени t , следовательно, оно верно и для момента времени, соответствующего окончанию одного из временных интервалов между импульсами входящего потока. Окончание же одного из интервалов соответствует

началу другого (т. е. моменту t_0 по отношению к следующему интервалу). Поэтому в рассматриваемом случае стационарного входящего потока можно с помощью (6) записать уравнение для функции $W_0(u_1, u_2, \dots, u_n)$ в виде:

$$\begin{aligned} W_0(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n = & \int_S \text{Вер} \{u_j < U_j < u_j + \\ & + du_j, j=1, 2, \dots, n | s\} P(s) ds = \int_S \{W_0(z_1, z_2, \dots, z_n) \times \\ & \times D(z) du_1 du_2 \dots du_n\} P(s) ds. \end{aligned}$$

В данном случае $P(s) = f(s)$ (о $f(s)$ см. раздел 1), $z_j = y_j$, и мы получаем:

$$W_0(u_1, u_2, \dots, u_n) = \int_S W_0(y_1, y_2, \dots, y_n) f(s) D(y) ds. \quad (12)$$

Здесь каждое y_j зависит от s и u_j ($j=1, 2, \dots, n$) в соответствии с (9), а $D(y)$ определяется из (11). Область интегрирования S должна включать все возможные значения s , при которых не нарушаются условия физической осуществимости для заданной совокупности u_j ($j=1, 2, \dots, n$); сказанное означает, что $S=S(u_1, u_2, \dots, u_n)$. В нашем случае эти условия физической осуществимости сводятся к тому, что s должно быть таким, чтобы каждое из u_{j0} , определяемых из (9), находилось в физически возможных границах.

Обозначим через $W(u_1, u_2, \dots, u_n)$ функцию плотности распределения вероятностей величин напряжений U_j для любого произвольного t . Используя результаты, изложенные в § 39 работы [1] (в частности, лемму 1, а также рассуждения, подобные рассуждениям, приведенным в лемме 4), можно получить следующее соотношение для нахождения функции $W(u_1, u_2, \dots, u_n)$:

$$\begin{aligned} W(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n = & \int_L dt \int_S ds \times \\ & \times \frac{f(t)}{T} W_0(u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0}) du_{10} du_{20} \dots du_{n0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Область интегрирования L включает в себя все возможные интервалы t . Выше мы предположили, что будем рассматривать только такие импульсные потоки, в которых всегда $t > \tau_{ii}$; поэтому область L можно рассматривать как интервал $[\tau_{ii}, \infty]$. Область интегрирования S может быть разбита на две подобласти S_1 и S_2 ($S=S_1+S_2$). В область S_1 входят все возможные s , удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $0 < s < \tau_{ii}$;
- 2) при заданных u_1, u_2, \dots, u_n каждое из u_{j0} , удовлетворяющих (8), не выходит за пределы физически возможных значений.

Область S_2 включает все s , удовлетворяющие условиям:

- 1) $\tau_{ii} < s < t$;
- 2) при заданных u_1, u_2, \dots, u_n каждое из u_{j0} , удовлетворяющих (9), не выходит за пределы физически возможных значений.

Учитывая вышеизложенное и принимая во внимание (10), (11), получаем функцию $W(u_1, u_2, \dots, u_n)$ в виде:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}(u_1, u_2, \dots, u_n) = & \frac{1}{T} \int_{\tau_n}^{\infty} dt f(t) \left[\int_{S_1} \mathbb{W}_0(x_1, x_2, \dots, x_n) D(x) ds + \right. \\ & \left. + \int_{S_2} \mathbb{W}_0(y_1, y_2, \dots, y_n) D(y) ds \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражение (14) совместно с (8)–(12) позволяет найти искомую функцию плотности распределения вероятностей величин $U_j(t)$ в любой произвольно выбранный момент времени t .

3. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Для иллюстрации рассмотрим несколько конкретных случаев. Предположим, что $n=1$, а схема построена так, как показано на рис. 1 (только указанный там фильтр отсутствует). Тогда вместо (3) и (4) имеем соответственно:

$$u = u'_0 e^{-pt};$$

$$u = u'_0 e^{-qt} + v(1 - e^{-qt}).$$

В рассматриваемом случае $p=1/RC$, $q=1/r_0C$, $v=aR/(r_0+R)$. Вместо (8) и (9) получаем:

$$u_0 = x(s, u) = ue^{qs} - v(e^{qs} - 1);$$

$$u_0 = y(s, u) = ue^{q\tau_n + p(s-\tau_n)} - v(e^{q\tau_n} - 1).$$

И, наконец,

$$D(x) = e^{qs}, \quad D(y) = e^{q\tau_n + p(s-\tau_n)}.$$

Поскольку в установившемся режиме всегда $0 < u < v$, областью интегрирования S в (12) для $0 < u < v(1 - e^{-q\tau_n})$ является интервал

$$\left[\tau_n + \frac{1}{p} \ln \frac{v(1 - e^{-q\tau_n})}{u}, \tau_n + \frac{1}{p} \ln \frac{v}{u} \right],$$

а для $v(1 - e^{-q\tau_n}) < u < v$ – интервал

$$\left[\tau_n, \tau_n + \frac{1}{p} \ln \frac{v}{u} \right].$$

Поэтому функция $\mathbb{W}_0(u)$ должна удовлетворять уравнению

$$\mathbb{W}_0(u) = \int_{\tau_n + \frac{1}{p} \ln \frac{v(1 - e^{-q\tau_n})}{u}}^{\tau_n + \frac{1}{p} \ln \frac{v}{u}} \mathbb{W}_0 [ue^{q\tau_n + p(s-\tau_n)} - v(e^{q\tau_n} - 1)] f(s) e^{q\tau_n + p(s-\tau_n)} ds$$

для $0 < u < v(1 - e^{-q\tau_n})$ и уравнению

$$\mathbb{W}_0(u) = \int_{\tau_n}^{\tau_n + \frac{1}{p} \ln \frac{v}{u}} \mathbb{W}_0 [ue^{q\tau_n + p(s-\tau_n)} - v(e^{q\tau_n} - 1)] f(s) e^{q\tau_n + p(s-\tau_n)} ds$$

для $v(1 - e^{-q\tau_n}) < u < v$.

Совершая некоторые преобразования, связанные с заменой переменной интегрирования, и обозначая $e^{q\tau_u} = r$, получим уравнение в более обозримом виде:

$$W_0(u) = \frac{1}{pu} \int_j^v W_0(x) f \left[\tau_u + \frac{1}{p} \ln \frac{x+v(r-1)}{ru} \right] dx, \quad (15)$$

где

$$j = \begin{cases} 0 & \text{при } u \in \left[0, v \left(1 - \frac{1}{r} \right) \right] \\ ru - (r-1)v & \text{при } u \in \left[v \left(1 - \frac{1}{r} \right), v \right]. \end{cases}$$

Принимая вновь во внимание тот факт, что $0 < u < v$, находим, что для $0 < u < v(1-1/r)$ областью интегрирования S_1 в (14) является интервал $\left[0, \frac{1}{q} \ln \frac{v}{v-u} \right]$, а областью S_2 — интервал $\left[\frac{1}{p} \ln \frac{v(r-1)}{ru} + \tau_u, i \right]$; для $v \left(1 - \frac{1}{r} \right) < u < v$ областью S_1 является интервал $[0, \tau_u]$, а областью S_2 — интервал $[\tau_u, i]$. Здесь $i = \min [t, (1/p) \ln (v/u) + \tau_u]$.

Записывая (14) с учетом этих областей и производя преобразования, связанные с изменением порядка интегрирования и заменой переменных при интегрировании, получим следующее уравнение:

$$W(u) = \frac{1}{qT(v-u)} \int_j^u W_0(x) dx + \\ + \frac{1}{pTu} \int_j^v W_0(x) \Phi \left[\tau_u + \frac{1}{p} \ln \frac{x+v(r-1)}{ru} \right] dx, \quad (16)$$

где

$$j = \begin{cases} 0 & \text{при } u \in [0, v(1-1/r)] \\ ru - (r-1)v & \text{при } u \in [v(1-1/r), v] \end{cases}.$$

а $\Phi(t) = 1 - F(t)$ (о функции $F(t)$ см. раздел 1).

Таким образом, для случая $n=1$ функция $W(u)$ определяется из выражения (16), которое предусматривает предварительное решение интегрального уравнения (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин, Труды математического ин-та им. В. А. Стеклова, 49 (1956).

Сибирский физико-технический
институт

Поступила в редакцию
9 мая 1960 г.

THE INFLUENCE OF PALM'S PULSE SEQUENCE ON RADIO CIRCUITS WITH CAPACITY STORAGE CIRCUITS

The problem is examined of the finding the probability distribution of voltage on the capacitors of a passive linear RC -circuit, under the influence of a sequence of impulses with random independent intervals (Palm's pulse sequence). The results obtained are applied to the investigation of certain radio circuits frequently used in practice.

О СКОРОСТИ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ПО КАНАЛАМ С МНОГОЛУЧЕВЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ

В. А. Зверев и Е. Ф. Орлов

Дана методика расчета и измерения пропускной способности каналов связи, использующих многолучевое распространение. Показано, что основным параметром при определении пропускной способности является соотношение между интервалом корреляции временных изменений коэффициента передачи канала $T_{\text{фл}}$ и частотным интервалом корреляции флюктуаций τ_0 . При $\tau_0 / T_{\text{фл}} < 1$ емкость канала при безграничном увеличении мощности сигнала остается ограниченной. Если $\tau_0 / T_{\text{фл}} \gg 1$, то эффектом флюктуаций параметров канала можно пренебречь. Емкость канала с постоянными параметрами, за исключением вырожденных случаев распределения запаздываний, определяется полной энергией сигнала в точке приема.

Представляет интерес расчет и измерение скорости передачи информации по каналам, использующим многолучевое распространение. Многолучевые каналы связи имеют место при дальнем распространении УКВ, в гидроакустике и т. п. Параметры многолучевых каналов, т. е. число лучей, времена распространения и величины затухания по отдельным лучам, в некоторых случаях относительно стабильны во времени, но зачастую изменения параметров происходят настолько быстро и значительно, что влиянием флюктуаций нельзя пренебречь. Если параметры постоянны или меняются достаточно медленно, то определение емкости многолучевых каналов связи сводится к задаче нахождения пропускной способности фильтра с неравномерной частотной характеристикой, которая решается в общем виде (см., например, [1,2]). Однако представляет интерес исследование конкретного вопроса о зависимости емкости многолучевых каналов связи от максимальной величины относительной задержки лучей, от распределения задержек и амплитуд лучей, а также о границах применимости классической формулы Шеннона к таким каналам со слабым изменением параметров.

Вопрос о пропускной способности многолучевых каналов связи с меняющимися параметрами обсуждался неоднократно. Сифоровым [3] дано условие получения достаточно высокой пропускной способности при достаточно малом уровне аддитивных помех. В [3] предполагалось, что, поскольку в принятом сообщении имеется информация о посланном сигнале и о флюктуациях параметров среды, то для обеспечения достаточно высокой пропускной способности необходимо иметь у источника скорость создания сообщений, превышающую некоторый предел, связанный со скоростью передачи информации об изменениях параметров канала связи. Этот предел определяется суммой полос флюктуаций величин запаздываний и амплитуд сигналов, приходящих по различным лучам. Необходимо, чтобы ширина полосы сигнала была не меньше суммы полос флюктуаций параметров. Из данной работы следует, что при достаточной ширине полосы сигнала скорость передачи информации безгранично возрастает при увеличении мощности. Для рассматриваемого здесь класса каналов это не имеет места, так как при увеличении ширины полосы сигнала возрастает количество

необходимой информации о флюктуациях параметров канала (например, величин запаздываний). Абсолютная величина ширины полосы флюктуаций параметров — не единственный фактор, определяющий емкость канала. Существенное значение имеют также интенсивности флюктуаций.

Добрушиным [4] на основе соотношения для условной информации получено выражение для скорости передачи информации по каналу со случайными параметрами. Искомая емкость выражается через сумму двух членов. Первый член определяется величиной информации о посланном сигнале, которая содержится в принятом сигнале, усредненной по всем возможным значениям параметров канала. Второй член зависит от количества информации об изменениях параметров, содержащейся в принятом сигнале. Если предположить, что при безграничном увеличении числа точек отсчета в сигнале, т. е. при увеличении времени количество информации о параметрах канала остается ограниченным, можно искать емкость путем усреднения по параметрам канала. Следует, однако, заметить, что с увеличением времени количество информации о каких-либо параметрах может оставаться ограниченным в том лишь случае, если эти параметры, начиная с некоторого момента, остаются постоянными.

Цыбаков [5] использовал формулу Добрушина для вычисления пропускной способности многолучевых каналов связи со случайными параметрами. При этом флюктуации в канале задавались через одномерную функцию распределения коэффициента передачи, что возможно при полной корреляции флюктуаций коэффициента передачи в полосе канала. Таким образом, результаты [4] применимы для узкополосных каналов с полосой, меньшей, чем частотный интервал флюктуаций коэффициента передачи. Временные изменения в канале, согласно условиям применимости формулы [4], таковы, что количество информации об изменениях параметров канала остается ограниченным при стремлении длительности сообщения (времени) к бесконечности. Иными словами, начиная с некоторого момента, изменения в канале прекращаются или их не происходит вообще. В работе [5], следовательно, эффект флюктуаций не учитывался. Емкость каналов с постоянными параметрами можно вычислить (не прибегая к формуле Добрушина) непосредственно по формуле Шеннона для каналов с неравномерной частотной характеристикой, что и делается в настоящей работе.

Фейнстейном [6] изучен вопрос о передаче информации по каналам со случайной модуляцией уровня сигнала. Для случая гауссова распределения величин флюктуаций и при условии малости глубины модуляции получено выражение для скорости передачи, совпадающее по форме с формулой Шеннона для линейных фильтров с плоской характеристикой, в котором шум увеличен на фактор, зависящий от глубины шумовой модуляции и от ширины ее спектра. Применяя результаты Фейнстейна при рассмотрении вопроса о передаче информации по многолучевым каналам связи, можно сделать определенные выводы о зависимости емкости от различных параметров канала.

В первой части настоящей статьи дана методика расчета и экспериментального определения емкости многолучевых каналов связи с неизменными во времени параметрами в зависимости от вида распределения величин задержек. Во второй части на основе результатов работы [6] получена зависимость емкости многолучевого канала с меняющимися параметрами от времени реверберации и найдено условие, при выполнении которого эффектом флюктуаций можно пренебречь.

Рассмотрение вопроса проводится с целью обоснования методики измерения пропускной способности многолучевого канала связи с переменными параметрами.

1. КАНАЛ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Объектом исследования является канал связи, модель которого схематично изображена на рис. 1. Сигнал $x(t)$ распространяется через многолучевую среду по различным путям, так что в точке приема сигнал имеет вид:

$$y(t) = \sum_{r=1}^n a_r x(t - \tau_r), \quad (1)$$

где a_r и τ_r — коэффициент затухания и время распространения по r -му лучу. Частотная характеристика многолучевого канала записывается так:

$$k(f) = \sum_{r=1}^n a_r e^{i2\pi f \tau_r}. \quad (2)$$

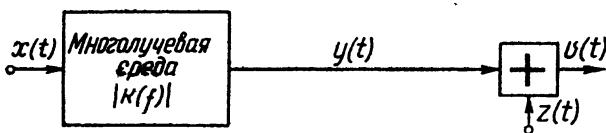


Рис. 1.

В сигнале, прошедшем через канал, возникают корреляционные связи, выражаемые соотношением:

$$B_y(\tau) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n a_r a_s B_r(\tau + \tau_r - \tau_s), \quad (3)$$

где $B_y(\tau)$, $B_r(\tau)$ — автокорреляционные функции сигналов $y(t)$ и $x(t)$. Пришедший в точку приема сигнал $y(t)$ вместе с независящим от него шумом $z(t)$ поступает на выход канала связи; при этом сигнал на выходе имеет вид:

$$v(t) = \sum_{r=1}^n a_r x(t - \tau_r) + z(t). \quad (4)$$

Количество информации $I(x, v)$ о посланном сигнале, имеющем N степеней свободы и представляемом значениями в точках отсчета x_1, \dots, x_N :

$$x(t) = x(x_1, \dots, x_N),$$

в принятом сигнале $v(t) = v(v_1, \dots, v_N)$ выражается известной формулой Шеннона:

$$I(x, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{xv}(x_1, \dots, x_N; v_1, \dots, v_N) \log \frac{P_{xv}(x_1, \dots, x_N; v_1, \dots, v_N)}{P_x(x_1, \dots, x_N) P_v(v_1, \dots, v_N)} \times \quad (5)$$

$$\times dx_1, \dots, dx_N; dv_1, \dots, dv_N,$$

где $P_{xv}(x_1, \dots, x_N; v_1, \dots, v_N)$ — совместное распределение вероятностей значений $x_i v_j$, $P_x(x_1, \dots, x_N)$ и $P_v(v_1, \dots, v_N)$ — распределение вероятностей сигналов на входе и выходе канала связи. В теории информации скорость передачи информации определяется как предел $I(x, v)$ при безграничном увеличении длительности сообщения T :

$$C' = \max_{P_x(x_1, \dots, x_N)} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} I(x, v) \right], \quad (6)$$

где \max означает взятие максимума при вариации по всем возможным значениям $P_x(x_1, \dots, x_N)$.

Нас будет интересовать скорость передачи информации C при использовании на входе канала связи сигнала с нормальным распределением значений. В этом случае (см. [1,7])

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \log |M|^{1/2} \right], \quad (7)$$

где M — корреляционная матрица выходного сигнала:

$$|M| = \begin{vmatrix} \overline{v_1 v_2} & \dots & \overline{v_1 v_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{v_N v_1} & \dots & \overline{v_N v_N} \end{vmatrix}$$

и v_j — значения выходного сигнала в точках отсчета по времени. От формулы (7) возможен переход к выражению емкости канала через спектральные функции сигналов (см. [2,8]):

$$C = \frac{1}{T} \log \prod_j^N \left(1 + \frac{|y(f_j)|^2}{|z(f_j)|^2} \right) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^n \log \left(1 + \frac{|y(f_j)|^2}{|z(f_j)|^2} \right), \quad (8)$$

где $|y(f_j)|^2$ и $|z(f_j)|^2$ — спектральные плотности мощности сигналов $y(t)$ и $z(t)$ в точках отсчета по частоте сигнала $x(t)$.

В дальнейшем будем рассматривать каналы, входной сигнал которых имеет независимую от частоты спектральную плотность мощности σ_x^2 . Мощность аддитивного шума в полосе канала σ_z^2 также предполагается постоянной. Выражения (7) и (8) тогда можно переписать так:

$$C = F \log \left(1 + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_z^2} \right) + \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \log |R|^{1/2} \right]; \quad (7a)$$

$$C = \int_0^F \log \left(1 + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_z^2} \frac{|k(f)|^2}{\frac{1}{F} \int_0^F |k(f)|^2 df} \right) df. \quad (8a)$$

Здесь $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \int_0^F |k(f)|^2 df / F$ — спектральная плотность мощности принятого сигнала, $|R|$ — матрица коэффициентов корреляции сигнала на выходе канала, соответствующая матрице M .

Для малых уровней сигналов формула (8а) существенно упрощается путем разложения подынтегрального выражения в степенной ряд. При этом оказывается, что скорость передачи информации не зависит от тонкой структуры спектра на выходе канала, а определяется его средней мощностью

$$C = F \sigma_y^2 / \sigma_z^2. \quad (9)$$

При больших отношениях сигнал/шум формула (8а) также упрощается:

$$C = F \log \frac{\sigma_y^2}{\sigma_z^2} + \int_0^F \log |k(f)|^2 df - F \log \frac{\int_0^F |k(f)|^2 df}{F}. \quad (10)$$

Из выражений (7а) и (10) видно, что уменьшение емкости за счет неравномерности частотной характеристики может быть оценено по формулам:

$$\Delta C = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \log |R|^{1/2} \right]; \quad (11)$$

$$\Delta C = \int_0^F \log |k(f)|^2 df - F \log \frac{\int_0^F |k(f)|^2 df}{F}, \quad (12)$$

причем равенство (11) справедливо для любого отношения сигнал/шум.

Применим приведенные здесь выражения для расчета емкости двухлучевого канала в случае, когда в точку приема приходят лучи с амплитудами a_1 и a_2 и относительной задержкой во времени τ . Частотная характеристика канала имеет форму

$$|k(f)|^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(2\pi f \tau). \quad (13)$$

Согласно (8а),

$$C = \int_0^F \log [1 + \alpha(a_1^2 + a_2^2) + 2\alpha a_1 a_2 \cos(2\pi f \tau)] df, \quad (14)$$

где введено обозначение

$$\alpha = \sigma_x^2 / \sigma_z^2 = \frac{\sigma_y^2 F}{\sigma_z^2 \int_0^F |k(f)|^2 df}.$$

Вид зависимости C от τ при фиксированном отношении сигнал/шум и неизменном распределении энергии по лучам приведен на рис. 2. В области малых задержек функция $C(\tau)$ существенно зависит от τ . Для определенного α осцилляции максимальны, если $a_1 = a_2$. При больших τ емкость можно представить в следующем виде:

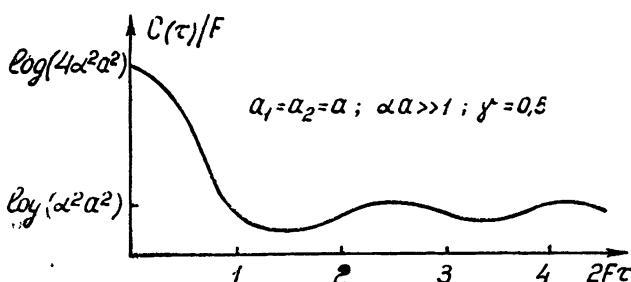


Рис. 2.

$$C_{\gamma \rightarrow \infty} = F \log \gamma [1 + \alpha^2 (a_1^2 + a_2^2)]. \quad (15)$$

Здесь γ — коэффициент уменьшения эффективной мощности сигнала за счет интерференции лучей:

$$\gamma = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2\alpha^2 a_1 a_2}{1 + \alpha^2 (a_1^2 + a_2^2)}} \right].$$

Заметим, что максимальное уменьшение емкости происходит при $a_1 = a_2$ и большом отношении сигнал/шум, когда $\gamma = 0,5$. В этом случае наличие второго луча не увеличивает емкости канала.

Рассмотрим теперь емкость многолучевого канала в полосе F с n -лучами одинаковой по порядку величины интенсивности и с максимальным временем запаздывания лучей, равным T_p . Аналитическое задание на интервале $0—F$ нормированной спектральной амплитуды принятого сигнала

$$K(f) = \left[\frac{|k(f)|^2 F}{\int_0^F |k(f)|^2 df} \right]^{1/2}$$

для многолучевого канала и, тем более, вычисление по нему интеграла (8а) затруднено. Очевидно (см. (8)), что величина емкости зависит не от конкретного вида функции $|k(f)|^2$, а от распределения спектральных амплитуд сигнала на интервале $0—F$, так как перестановка членов суммы (8) величины емкости не меняет.

Введем в рассмотрение функцию распределения нормированных спектральных амплитуд $W_F(K)$, которая образуется из $K(f)$ следующим образом. Ординаты кривой $K(f_j)$ в точках отсчета по частоте сигнала $x(t)$ сгруппируем так, чтобы получилась в результате перестановок („выстраивания по росту“) однозначная функция $K'(f)$. Очевидно, что $K'(f)$ можно подставить вместо $K(f)$ в выражение (8а), не изменив величины C . Однако функция $K'(f)$, которая на интервале $0—F$ плавно меняется от $K'(f)_{\max}$ до $K'(f)_{\min}$, имеет существенно меньше степеней свободы, нежели первоначальная функция $K(f)$. Поэтому $K'(f)$ может быть задана для широкого класса функций $K(f)$. Для построения $K'(f)$ существенно только, сколько точек отсчета функции $K(f)$ лежит в интервале от K до $K + dK$. Обозначив это число через $W_F(K)$, для величины C имеем:

$$C = F \int_0^F W_F(K) \log \left[1 + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_z^2} K^2(f) \right] dK. \quad (16)$$

Функцию $W_F(K)$ назовем распределением спектральных амплитуд. Она также имеет малое число степеней свободы и может быть измерена на практике и использована для определения пропускной способности многолучевых каналов связи.

Относительно вида $W_F(K)$ для реальных многолучевых каналов можно сделать следующее предположение. Так как $K(f)$ есть амплитуда вектора, являющегося суммой большого числа векторов с одинаковыми по порядку величины амплитудами и с фазами, равномерно распределенными в интервале $(0, 2\pi)$, то распределение нормированной амплитуды принятого сигнала с удовлетворительной точностью можно считать релеевским, т. е.

$$W_F(K) = Ke^{-K^2/2}. \quad (17)$$

Согласно (16), получим:

$$C = F \int_0^{\infty} K e^{-K^2/2} \log \left(1 + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_z^2} K^2 \right) dK. \quad (18)$$

Вычислив интеграл (18), найдем, что

$$C = - \frac{F e^{\sigma_z^2 / \sigma_y^2}}{\ln 2} Ei \left(- \frac{\sigma_z^2}{\sigma_y^2} \right), \quad (19)$$

где $Ei(x)$ — интегральная показательная функция, которая может быть представлена в виде ряда

$$Ei(x) = c + \ln(-x) + \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \dots + \frac{x^n}{n \cdot n!} + \dots \quad (20)$$

$(x < 0)$

($c = 0,57$ — постоянная Эйлера). Подстановкой выражения (20) в (19) получим:

$$C = F e^{\sigma_z^2 / \sigma_y^2} \log \frac{\sigma_y^2}{\sigma_z^2} - F e^{\sigma_z^2 / \sigma_y^2} c - \frac{F e^{\sigma_z^2 / \sigma_y^2}}{\ln 2} \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_z^2} - \frac{\sigma_y^4}{\sigma_z^4 \cdot 2 \cdot 2!} + \dots \right). \quad (21)$$

Для $\sigma_y^2 / \sigma_z^2 \gg 1$ выражение (21) примет вид:

$$C = F \log (\gamma \sigma_y^2 / \sigma_z^2), \quad (22)$$

где коэффициент уменьшения средней мощности, связанный с многолучевым распространением,

$$\gamma = e^{-c} = 0,56.$$

Таким образом, многолучевое распространение при условии постоянства его параметров создает канал с емкостью, определяемой полосой и средней мощностью сигнала в точке приема. Вычисление емкости может быть произведено по формуле Шеннона для канала с плоской частотной характеристикой введением коэффициента уменьшения мощности сигнала за счет интерференционной помехи γ , который может меняться в зависимости от вида $W_F(K)$. Для наиболее вероятного вида распределения (релеевского) $\gamma = 0,56$. Однако в случае других распределений будет иной результат. Представляет интерес определить, какое распределение наиболее сильно уменьшает пропускную способность и какова вероятность его реализации в канале.

Для канала с n -лучами скорость передачи информации будет минимальна, если энергии, пришедшие в точку приема по различным лучам a_i^2 , равны и задержки сигналов по этим лучам эквидистантны. Частотная характеристика такого канала, имеющего в заданных условиях максимально возможную изрезанность, выражается формулой:

$$|k(f)|^2 = |\sin(\pi n f \tau) / \sin(\pi f \tau)|^2, \quad (23)$$

где τ — запаздывание одного луча по отношению к предыдущему. Положим, что аддитивные шумы в канале малы по сравнению с сигналом, пришедшим по одному лучу; тогда можно записать, что

$$C = F \log (a^2 / \sigma_z^2) + \int_{-\infty}^{\infty} \log |\sin(\pi n f \tau) / \sin(\pi f \tau)| df. \quad (24)$$

Если полоса канала достаточно велика: $F \gg 1/\tau$ или $F = l/\tau$, где l —целое число, то интеграл в правой части выражения (24) обращается в нуль. Пропускная способность канала с эквидистантным распределением запаздываний равна скорости передачи информации по одному лучу: $\gamma = 1/n$. Если же $F \leq 1/\tau$, т. е. если величина относительного запаздывания двух „соседних“ лучей меньше интервала автокорреляции передаваемого сигнала, то коэффициент передачи канала отличен от нуля в полосе $0 \div 1/T_p$, так как отклик системы на единичный импульс затягивается на время T_p . Скорость передачи информации становится равной емкости канала с полосой $1/T_p$.

Вероятность реализации эквидистантного распределения запаздывания зависит от числа лучей, полосы частот, занимаемой сигналом, и от максимального времени запаздывания T_p . Если предположить, что случайные величины запаздываний τ , независимы и в интервале $0 \div T_p$ могут с равной вероятностью принимать любые значения, то вероятность эквидистантного распределения задержек или какого-либо другого вырожденного вида распределения будет равна

$$P = (1/FT_p)^n. \quad (25)$$

Для канала с большим числом лучей при $FT_p \gg 1$ вероятность получить равномерное распределение ничтожно мала.

2. КАНАЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим канал с многолучевым распространением, сигнал на выходе которого определяется по формуле (4), где под a , и τ , будем понимать независимые случайные функции времени. Флюктуации величин запаздываний и амплитуд лучей вызывают изменения коэффициента передачи канала, которые при достаточно широкой полосе частот канала связи нельзя характеризовать одним параметром. Благодаря наличию большого числа интерферирующих лучей временные изменения коэффициента передачи на различных частотах становятся независимыми. Частотный интервал корреляции этих изменений ν_0 связан с временем реверберации T_p , т. е. с максимальным временем запаздывания лучей соотношением:

$$\nu_0 = 1/T_p. \quad (26)$$

Эта связь основывается на эргодическом свойстве флюктуаций спектральных амплитуд принятого сигнала, которое может иметь место в реальных каналах с большим числом лучей, если флюктуации параметров канала достаточно интенсивны. Предполагается, что частотный интервал корреляции временных изменений величины $K(f,t)$ равен интервалу автокорреляции $K(f,t)$ как функции частоты при фиксированном времени.

Для качественной оценки емкости многолучевого канала связи можно воспользоваться результатами работы Фейнштейна [7]. Им получено выражение пропускной способности для канала, сигнал на выходе которого равен

$$v(t) = K(t) y(t) + z(t), \quad (27)$$

где $K(t)$ — случайная модулирующая функция, распределенная по нормальному закону. Выражение для скорости передачи информации имеет вид:

$$C = \Delta f \log \left\{ 1 + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_z^2 + \bar{K}^2 \sigma_y^2 / [1 + \bar{K}^2 (q - 1) \sigma_y^2 / \sigma_z^2]} \right\}. \quad (28)$$

Здесь Δf — ширина полосы частот сигнала, \bar{K}^2 — средний квадрат флюктуаций величины $K(t)$ (который при выводе формулы (28) предполагался малым: $\bar{K}^2 \ll 1$), q — число точек отсчета сигнала, в которых значения $K(t)$ коррелируют. Легко видеть, что

$$q = \Delta f T_{\text{фл}}, \quad (29)$$

где $T_{\text{фл}}$ — интервал автокорреляции модулирующей функции $K(t)$.

Многолучевой канал с переменными параметрами можно разбить на ряд подканалов с шириной полосы, не более чем частотный интервал корреляции временных изменений коэффициента передачи канала ν_0 . Для отдельного подканала справедлива формула (29). Емкость канала с полосой F при $T_{\text{фл}} > T_p$, т. е. в случае, когда взаимным влиянием подканалов можно пренебречь, выразится как сумма емкостей подканалов:

$$C = \int_0^F \log \left\{ 1 + \frac{\sigma_v^2 K_f^2}{\sigma_z^2 + \bar{K}^2 \sigma_v^2 K_f^2 / [1 + \bar{K}^2(q-1) \sigma_y^2 K_f^2 / \sigma_z^2]} \right\} df. \quad (30)$$

В случае, если условие $T_{\text{фл}} > T_p$ не выполняется, то равенство (30) дает завышенное значение емкости канала, которое не учитывает появление взаимосвязи в соседних подканалах. Из анализа подынтегрального выражения (30) видно, что в присутствии достаточно быстрых временных изменений параметров канала при безграничном повышении мощности сигнала емкость канала не растет безгранично, как это имело место для каналов, неизменных во времени. Существенно и то, что многолучевой характер, мало сказывающийся на пропускной способности при постоянстве параметров канала, значительно влияет на скорость передачи в присутствии флюктуаций. Ограниченный интервал корреляции флюктуаций спектральных амплитуд по частоте, вызванный многолучевым характером распространения, ведет к статистической независимости временных изменений сигнала при „разносе“ по частоте более, чем на величину ν_0 . Это обстоятельство уменьшает пропускную способность канала.

Перепишем (30) в виде:

$$C = \int_0^F \log \left\{ 1 + \alpha_1^2 K_f^2 \left[1 - \frac{\bar{K}^2 \sigma_1 K^2(f)}{1 + q \bar{K}^2 \alpha_1^2 K^2(f)} \right] \right\} df, \quad (31)$$

где $\alpha_1^2 = \sigma_y^2 / \sigma_z^2$. Величина, стоящая в квадратных скобках под знаком интеграла, определяет уменьшение пропускной способности, вызванное флюктуациями параметров в многолучевом канале:

$$\beta = 1 - \frac{\bar{K}^2 \alpha_1^2 K^2(f)}{1 + q \bar{K}^2 \alpha_1^2 K^2_f}. \quad (32)$$

На рис. 3 приведен график зависимости β от q для различных величин относительной глубины шумовой модуляции сигнала $\bar{K}^2 \alpha_1^2 K_f^2$. Видно, что для $q > 10$ шумы флюктуационной модуляции уменьшают α_1^2 не более, чем на десять процентов. Если $q > 10$, т. е. если интервал корреляции флюктуаций по частоте на порядок больше ширины полосы временных изменений интенсивности сигнала или, иными словами, эффективное время реверберации на порядок меньше временного интервала корреляции флюктуаций интенсивности сигнала на выходе канала, то при оценке емкости многолучевого канала связи эффектом

флюктуаций можно пренебречь и пользоваться при расчете формулами типа (7а) и (8а).

Если не выполняется условие $q \geq 1$, т. е. $\nu_0 < 1/T_{\Phi\lambda}$, то временные изменения коэффициента передачи канала уширяют спектр передаваемого сигнала настолько, что взаимным влиянием рассматриваемых подканалов пренебречь нельзя. Это влияние приближенно можно

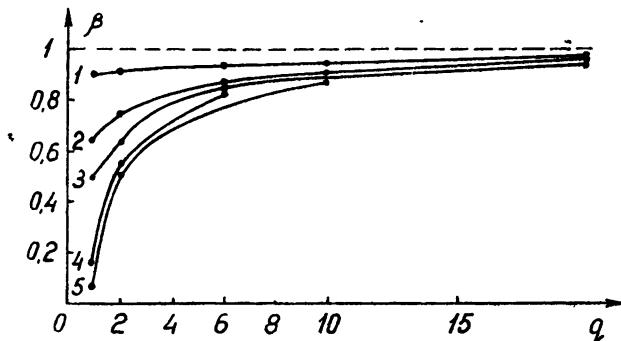


Рис. 3. Зависимость $\beta(q) = 1 - \frac{\bar{K}^2 \alpha_1^2}{1 + \bar{K}^2 \alpha_1^2 q}$ при следующих значениях параметра $\bar{K}^2 \alpha_1^2$:
1 — $\bar{K}^2 \alpha_1^2 = 0,1$, 2 — $\bar{K}^2 \alpha_1^2 = 0,5$, 3 — $\bar{K}^2 \alpha_1^2 = 1$; 4 —
— $\bar{K}^2 \alpha_1^2 = 5$, 5 — $\bar{K}^2 \alpha_1^2 = 10$.

учесть введением в рассматриваемый подканал с полосой Δf „шума взаимных связей“ σ_k^2 , обусловленного сигналом в соседних подканалах. Для определения величины σ_k^2 нужно знать „размытие“ спектральной линии, происходящее из-за фазовой и амплитудной модуляции сигнала, прошедшего через канал связи с меняющимися параметрами.

1. Канал с постоянными параметрами.

а) Наличие многих путей распространения не уменьшает емкости канала. В худшем случае при эквидистантном распределении запаздываний лучей с равной энергией емкость многолучевого канала связи равна скорости передачи по одному лучу многолучевого канала.

б) В подавляющем большинстве случаев емкость канала связи равна емкости однолучевого канала с энергией, равной сумме энергий лучей, приходящих в точку приема, с некоторым коэффициентом $\sim 1 \div 0,5$, зависящим от вида распределения запаздываний.

в) Вероятность реализации эквидистантного распределения запаздываний в реальных условиях (гидроакустический канал, дальнее распределение УКВ) мала.

Таким образом, емкость многолучевого канала связи с постоянными параметрами определяется энергией сигнала в точке приема и мало зависит от числа интерферирующих лучей.

2. Канал с меняющимися параметрами.

а) Флюктуации параметров существенно влияют на емкость канала связи. Из результатов работы Фейнштейна [6] следует, что, наряду с величиной мощности сигнала и шума в точке приема, параметрами, определяющими емкость канала при наличии флюктуаций, являются: ширина спектра и величина временных изменений коэффициента пе-

передачи канала, частотный интервал корреляции флюктуаций коэффициента передачи.

б) Если соотношение между временными $T_{\text{фл}}$ и частотным ν_0 интервалами корреляции флюктуаций коэффициента передачи таково, что $q = T_{\text{фл}} \nu_0 > 10$, то эффектом флюктуаций можно пренебречь. Если $1 < q < 10$, то флюктуации существенно уменьшают емкость канала. Однако при увеличении мощности сигнала можно получить сколь угодно высокую скорость передачи информации. Если $q \leq 1$ (быстрые флюктуации), то даже при бесконечно малом уровне, аддитивных помех получить бесконечно большую емкость нельзя. При увеличении мощности сигнала емкость стремится к некоторому пределу, зависящему от глубины модуляции коэффициента передачи, канала и от величины q .

в) Можно предположить, что флюктуации в канале с большим числом лучей имеют эргодический характер и частотный интервал корреляции временных флюктуаций коэффициента передачи совпадает с интервалом автокорреляции коэффициента передачи как функции частоты, т. е. $\nu_0 = 1/T_p$. Максимальная величина запаздывания лучей (время реверберации), не влияющая на емкость канала с постоянными параметрами, имеет существенное значение при наличии флюктуаций.

3. Для вычисления емкости многолучевого канала связи кроме измерения ширины полосы канала и средних интенсивностей сигнала и аддитивного шума необходимо следующее: а) определить корреляционные связи в сигнале, возникающие вследствие многолучевого распространения, т. е. определить неравномерность частотной характеристики канала $W_F(K)$ (см. (16)); б) измерить временную и частотную корреляции флюктуаций спектральных амплитуд принятого сигнала с целью определения величин \bar{K}^2 и q ; в) если величина q — порядка единицы, то необходимо поставить измерения по определению ширины спектра на выходе канала при подаче на его вход синусоидального сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Шеннон, Сб. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, ИЛ, М., 1953.
2. Н. Винер, Кибернетика, изд. Сов. радио, М., 1958.
3. В. И. Сифоров, Электросвязь, 1, 3 (1958).
4. Р. Л. Добрушин, Теория вероятностей и ее применение, 3, 395 (1958).
5. Б. С. Цыбаков, Радиотехника и электроника, 4, 1427 (1958).
6. J. Feinstein, J. Appl. Phys., 26, 219 (1955).
7. R. Elias, Proc. IRE, 39, 839 (1951).
8. М. С. Пинскер, ДАН СССР, 99, 213 (1954).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 сентября 1960 г.

ON THE SPEED OF TRANSMISSION OF INFORMATION ON CHANNELS WITH MULTIPATH PROPAGATION

V. A. Zverev and E. F. Orlov

Methods are given for the calculation and measurement of the carrying capacity of communication channels utilizing multipath propagation. It is shown that the main parameter in determining the carrying capacity is the relationship between the interval of the correlation of time changes of the channel transmission coefficient T_{fl} and the frequency interval of the correlation of the fluctuations ν_0 . When $\nu_0 T_{\text{fl}} \ll 1$, the capacitance of the channel, by infinite increase of the power of the signal, remains limited. If $\nu_0 T_{\text{fl}} \gg 1$, then the effect of the fluctuation of the channel parameters can be neglected. The capacitance of a channel with constant parameters, with the exception of degenerated cases of delays distribution is determined by the full energy of the signal at the point of reception.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ ДЛЯ ВОЛН В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Л. А. Островский

Рассматривается распространение электромагнитных волн в диспергирующих системах с переменными параметрами, в волноводе, заполненном средой, проницаемости которой ϵ и μ зависят от времени и продольной координаты, и в нейтральной плазме с переменной концентрацией электронов. Показано, что поля в обоих случаях могут быть описаны уравнением в частных производных с переменными коэффициентами второго порядка, которое исследовано методом последовательных приближений. Рассмотрено изменение амплитуды и частоты волны в приближении геометрической оптики. Полученные результаты проиллюстрированы на двух частных примерах.

Распространение волн в линиях передачи, содержащих среду с переменными во времени и пространстве параметрами, сравнительно подробно изучено только для случаев выполнения определенных резонансных условий (см., например, [1]). Учитывая, что существенное изменение энергии и частоты волн в таких линиях может происходить и нерезонансным образом, при сравнительно медленном изменении параметров среды во времени [2,3], представляется интересным обобщить приближение геометрической оптики применительно к исследованию параметрических явлений. Трудности указанного обобщения связаны, в частности, с тем, что уравнения полей в среде с зависящими от времени параметрами не имеют в общем случае решений в виде гармонических функций времени. Легко видеть, что последнее обстоятельство особенно существенно для исследования диспергирующих систем.

В литературе по данному вопросу имеется всего несколько работ. Впервые, насколько нам известно, распространение волн в среде с медленно меняющимися во времени и пространстве параметрами рассматривалось в работах [4,5]. В частности, в [5] были получены соотношения, связывающие скорость и энергию волны в неограниченной среде при условии, что всеми производными параметров можно пренебречь.

В работе [6] методом последовательных приближений исследован случай TEM -волны в линии без дисперсии с медленно меняющимися погонными параметрами и малыми потерями.

В настоящей работе рассматривается распространение волн в диспергирующих системах: цилиндрическом волноводе с произвольной формой поперечного сечения, заполненном неоднородной средой с переменными проницаемостями, и в нейтральной плазме с переменной концентрацией частиц. В первом случае дисперсия обусловлена влиянием границы, во втором — внутренними свойствами среды. Как показано ниже, решение обеих задач можно свести к интегрированию уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами (12), которое и исследовано затем в общем виде *.

* Заметим, что в отдельных случаях можно аналогичным образом исследовать исходную систему уравнений, не приводя её к виду (12) (ср. [4,5]).

1. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

а) Волновод, заполненный средой без дисперсии. Допустим, что среда, заполняющая волновод, однородна в поперечном сечении (в плоскости xy), так что проницаемости ϵ и μ зависят только от времени t и координаты z , отсчитываемой вдоль оси волновода. Вначале будем также пренебречь как потерями в стенах волновода, так и проводимостью среды.

Выразим электрическое и магнитное поля E и H через векторный потенциал A^e :

$$\mu H = \operatorname{rot} A^e, \quad E = -\frac{1}{c_1} \frac{\partial A^e}{\partial t} \quad (1)$$

(c_1 — скорость света) и будем искать A^e в виде:

$$A^e = \varphi(z, t) A_0^e(x, y), \quad (2)$$

где $\varphi(z, t)$ — скалярная функция. Подставляя (1) и (2) в уравнения Максвелла, после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} \varphi \operatorname{rot} \operatorname{rot} A_0^e - A_{0\perp}^e \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\mu}{c_1^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right] = \\ = z_0 A_{0z}^e \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \ln \left(\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{\mu}{c_1^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right] + \\ + [z_0 \operatorname{rot} A_0^e] \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь z_0 — единичный вектор z -направления, A_{0z}^e и $A_{0\perp}^e$ — проекции вектора A^e соответственно на ось z и на плоскость xy .

Из (3) следует, что переменные разделяются только при условии:

$$A_{0z}^e = 0, \quad (4)$$

т. е. для TE -волн. При этом (3) эквивалентно следующим двум уравнениям *:

$$\Delta_2 A_0^e + z^2 A_0^e = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\mu}{c_1^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + z^2 \varphi, \quad (6)$$

где $\Delta_2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$, а z — поперечное волновое число, определяемое из условий на стенах волновода. Уравнение (5) имеет тот же вид, что и для незаполненного волновода. Если, в частности, (5) имеет отличное от нуля решение с $z = 0$, совместное с граничными условиями, то из (5) и (6) получаем уравнения TEM -волн, рассмотренных в [6].

Совершенно аналогично, вводя магнитный векторный потенциал A^m :

$$\epsilon E = -\operatorname{rot} A^m, \quad H = -\frac{1}{c_1} \frac{\partial A^m}{\partial t}, \quad A^m = \varphi^m(z, t) A_0^m(x, y), \quad (7)$$

* В (5) учтено, что из уравнения $\operatorname{div} \epsilon E = 0$ и условия (4) следует (при $\partial \varphi / \partial t \neq 0$), что $\operatorname{div} A^e = \operatorname{div} A_0^e = 0$.

найдем, что переменные разделяются только при $A_{0z}^m = 0$, т. е. для TM -волн. Соответствующие уравнения получаются из (5) и (6) заменой $\mu \leftrightarrow \epsilon$.

Заметим, что уравнения (5) и (6) (так же как и соответствующие уравнения для TM -волн) справедливы при любых скоростях изменения ϵ и μ .

Учет конечной проводимости заполняющей волновод среды для TE -волн не представляет трудностей и сводится к прибавлению в правой части (6) члена $\frac{4\pi}{c_1^2} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, где $\sigma = \sigma(z, t)$ — проводимость.

Что касается TM -волны, то с помощью обычной подстановки

$$\epsilon E = -\operatorname{rot} A^m, \quad H = -\frac{1}{c_1} \frac{\partial A^m}{\partial t} - \frac{4\pi}{c_1} \frac{\sigma}{\epsilon} A^m \quad (7a)$$

можно удовлетворить уравнениям Максвелла только при $\partial(\sigma/\epsilon)/\partial z = 0$. Однако в условиях геометрической оптики (при медленных изменениях ϵ и σ по сравнению с изменением полей волны и малых σ) член с $\partial(\sigma/\epsilon)/\partial t$ имеет второй порядок малости по сравнению с членами, содержащими $\partial \varphi / \partial z$ или σ , и в первом приближении можно пользоваться заменой (7а). При этом для φ^m получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi^m}{\partial z^2} = \frac{\epsilon}{c_1^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \varphi^m}{\partial t} \right) + \frac{4\pi}{c_1^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \frac{\sigma}{\epsilon} \varphi^m \right) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \frac{\partial \varphi^m}{\partial z} + \chi^2 \varphi^m. \quad (8)$$

Необходимо иметь в виду, что при $\partial(\sigma/\epsilon)/\partial z \neq 0$ уравнение (8) не является точным и, следовательно, не позволяет определить поправки высших порядков к приближению геометрической оптики для TM -волн.

б) *Плазма с переменной концентрацией.* Рассмотрим распространение плоской линейно поляризованной электромагнитной волны в нейтральной плазме с концентрацией электронов N , зависящей от переменных z и t (электрическое и магнитное поля E и H и волновой вектор k направлены соответственно по осям x , y , z).

Изменение N может в принципе осуществляться различными способами. Пусть, например, неоднородная плазма движется произвольным образом в среде с постоянной диэлектрической проницаемостью ϵ_0 ($\mu_0 = 1$), оставаясь всюду нейтральной*. Вводя потенциал $A = (A_x, 0, 0)$ так, что

$$E_x = -\frac{1}{c_1} \frac{\partial A_x}{\partial t}, \quad H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}, \quad (9)$$

получим из уравнений Максвелла (в односкоростном приближении):

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = \frac{\epsilon_0}{c_1^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} + \frac{4\pi e}{c_1^2} N v_x,$$

а из уравнения движения электрона::

$$\frac{d(mv_x)}{dt} = e \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + V_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = e \frac{dA_x}{dt},$$

откуда для переменных составляющих следует: $v_x = (e/m) A_x$. Здесь e — заряд, $m = m_0 (1 - V_z^2/c_1^2)^{-1/2}$ — релятивистская масса электрона;

* Аналогичные вопросы для нерелятивистской плазмы ($V_z \ll c_1$), движущейся с постоянной скоростью, а также для случая волны ионизации в плазме (см. ниже) обсуждаются в [7].

$V(z, t) = [0, 0, V_z(z, t)]$ — скорость движения плазмы в отсутствие поля, v_x — переменная поперечная компонента скорости электрона. Величинами порядка v_x/c_1 и выше пренебрегаем.

Таким образом, окончательно имеем *:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = \frac{\epsilon_0}{c_1^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} + \frac{1}{c_1^2} \omega_p^2(z, t) A_x; \quad \omega_p^2(z, t) = \frac{4\pi e^2}{m} N(z, t). \quad (10)$$

В неподвижной плазме N может меняться, в частности, вследствие ионизации нейтральных молекул некоторым источником энергии, не влияющим непосредственно на поле. Положим, что в момент вылета электроны имеют нулевые начальные скорости и что для неионизированного газа $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$. Учитывая, что постоянная составляющая скорости электрона зависит от фазы поля в момент вылета и при усреднении по многим электронам дает вклад в переменный ток, нетрудно получить для поля $E = (E_x, 0, 0)$ уравнение (ср. [7]):

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \frac{1}{c_1^2} \omega_p^2(z, t) E_x; \quad \omega_p^2(z, t) = \frac{4\pi e^2 N(z, t)}{m_0}. \quad (11)$$

Из физических соображений очевидно, что в (11) величина ω_p является неубывающей функцией времени в любой точке плазмы, причем и в этом случае, ввиду зависимости ω_p от t , уравнения (10) и (11) не эквивалентны.

2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ

Полученные выше уравнения (6), (7), (10) и (11) являются частными случаями гиперболического уравнения второго порядка

$$u_{zz} = a(z, t) u_{tt} + b(z, t) u_t + c(z, t) u_z + d(z, t) u. \quad (12)$$

Здесь $u = u(z, t)$ — искомая функция (индексы внизу обозначают дифференцирование по соответствующим переменным), a, b, c, d — заданные функции переменных z и t . В условиях геометрической оптики эти функции меняются медленно по сравнению с u и, кроме того, b и c — величины того же порядка малости, что и первые производные от a или d .

Для отыскания приближенного решения (12) положим [4], что коэффициенты a, b, c, d зависят от z и t только через переменные $\xi = pz$, $\tau = pt$, где p — малый постоянный параметр. Учитывая, что b и c — величины порядка p , перепишем (12) в переменных ξ и τ (заменив при этом $b(z, t) \rightarrow pb(\xi, \tau)$; $c(z, t) \rightarrow pc(\xi, \tau)$):

$$u_{\xi\xi} = a(\xi, \tau) u_{\tau\tau} + b(\xi, \tau) u_\tau + c(\xi, \tau) u_\xi + \frac{1}{p^2} d(\xi, \tau) u. \quad (12a)$$

Будем искать решение (12a) в виде ряда:

$$u = [u^{(0)}(\xi, \tau) + pu^{(1)}(\xi, \tau) + \dots] \exp \left[i \frac{\psi(\xi, \tau)}{p} \right]. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12a), получим уравнения последовательных приближений по степеням p . В каждом из этих уравнений можно перейти снова к переменным z и t , заменяя

* Отметим, что A_x и ω_p — величины релятивистски инвариантные.

$$\frac{\psi(\xi, \tau)}{p} \rightarrow \psi(z, t); \quad u^{(0)}(\xi, \tau) \rightarrow u^{(0)}(z, t); \quad p u^{(1)}(\xi, \tau) \rightarrow u^{(1)}(z, t)$$

и т. д., после чего получим окончательно:

$$\psi_z^2 - a \psi_t^2 + d = 0; \quad (14)$$

$$\psi_z u_z^{(0)} - a \psi_t u_t^{(0)} - (1/2) u^{(0)} (a \psi_{tt} - \psi_{zz} + b \psi_i + c \psi_z) = 0; \quad (15)$$

$$\psi_z u_z^{(1)} - a \psi_t u_t^{(1)} - (1/2) u^{(1)} (a \psi_{tt} - \psi_{zz} + b \psi_i + c \psi_z) = i (u_{zz}^{(0)} - a u_{tt}^{(0)}) \quad (16)$$

.

3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Как видно из (14) — (16), разложение (13) сводит (12) к последовательности уравнений в частных производных первого порядка, причем все уравнения, кроме (14), линейны. Уравнение эйконала (14) в общем случае эквивалентно двум уравнениям типа Гамильтона — Якоби:

$$\omega + Q(k, z, t) = 0 \quad (17)$$

(где $\omega = \psi_t$, $k = -\psi_z$, $Q = \pm \sqrt{(k^2 + d)/a}$) или соответствующей канонической системе:

$$\frac{dz}{dt} = - \left(\frac{\partial Q}{\partial k} \right)_{z,t}; \quad \frac{dk}{dt} = \left(\frac{\partial Q}{\partial z} \right)_{k,t}. \quad (17a)$$

(Выбор знака функции Гамильтона Q соответствует выбору направления распространения волны.)

Система (17a), очевидно, описывает движение группового фронта волны. Вычисляя из (17) фазовую и групповую скорости $v_{\text{фаз}} = -Q/k$, $v_{\text{гр}} = -(\partial Q / \partial k)_{z,t}$, найдем:

$$v_{\text{фаз}} v_{\text{гр}} = a^{-2}(z, t). \quad (18)$$

Таким образом, соотношение (18) выполняется для всего класса систем, описываемых уравнением (12).

Из (17) ясно, что частотам $\omega < \omega_{\text{кр}}(z, t) = \sqrt{d/a}$ соответствуют затухающие волны с $k^2 < 0$. Вблизи точек $z = z_{\text{кр}}(t)$, в которых величина $\omega - \omega_{\text{кр}}$ меняет знак, приближение геометрической оптики, очевидно, неприменимо. Возникает отраженная волна *, частота которой связана с частотой падающей обычной формулой эффекта Допплера.

Рассмотрим уравнение первого приближения (15). Оно эквивалентно следующей характеристической системе:

$$\frac{dz}{k} = \frac{dt}{a\omega} = - \frac{du^{(0)}}{u^{(0)}} \frac{2}{a\omega_t + k_z + b\psi - ck}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что решение (15) имеет вид:

$$u = f(z, t) \Phi[\delta(z, t)], \quad (20)$$

где Φ — произвольная функция **, $\delta(z, t)$ — интеграл первого из уравнений (19). Из сравнения (17a) и (19) легко видеть, что точки $\delta = \text{const}$

* Заметим, что отражение может происходить и в точках, где $\omega \neq \sqrt{d/a}$, как это имеет место в рассмотренном ниже примере с плазмой, где ω и k одновременно становятся комплексными.

** Для монохроматических волн в системах с постоянными во времени параметрами всегда можно положить $\Phi = \text{const}$.

лежат на групповых фронтах и, следовательно, $f(z, t)$ определяет изменение $u^{(0)}$ для фиксированного группового фронта.

Найдя ψ и $u^{(0)}$, получим исковую функцию в приближении геометрической оптики:

$$u = u^{(0)}(z, t) \exp[i\psi(z, t)]. \quad (21)$$

Например, для TE -волн в волноводе $u = \varphi$, и из (1) и (2) имеем в том же приближении:

$$\mathbf{E} = -i \frac{\omega}{c_1} u \mathbf{A}_0; \quad \mathbf{H}_\perp = -\frac{i}{\mu} k u [\mathbf{z}_0 \mathbf{A}_0]; \quad \mathbf{H}_z = \frac{1}{\mu} u \operatorname{rot} \mathbf{A}_0. \quad (22)$$

Соответствующие формулы без труда получаются и для остальных случаев.

Пользуясь (17а) и (19), можно показать, что при $\sigma = 0$ значения амплитуд полей (22) на фиксированном групповом фронте $\delta = \delta_0$ связаны со значениями ω и k на том же фронте соотношением:

$$\left(\frac{d}{dt} \ln \frac{k}{\mu \omega} u^{(0)^2} \right)_{\delta=\delta_0} = \frac{k_t}{k} \frac{c_1^2 z^2}{\varepsilon \mu \omega^2}. \quad (23)$$

С помощью (23) можно по найденным из (14) ω и k определить амплитуду волны $u^{(0)}$, не интегрируя непосредственно уравнения (15). Величина $(k/\mu\omega) u^{(0)^2}$ пропорциональна \bar{S}_z/ω^2 , где $\bar{S}_z = (c_1/8\pi) \iint_{\Delta} [\mathbf{E} \mathbf{H}^*] dx dy$ — средний поток энергии вдоль оси волновода (Δ — площадь поперечного сечения волновода, знак * обозначает комплексно-сопряженную величину). Поэтому для TEM -волны ($z=0$) отношение $I = (\bar{S}_z/\omega^2)_{\delta=\delta_0}$ является инвариантом приближения геометрической оптики, что согласуется с [6]. Для других типов волн I постоянно только в случаях, когда длина волны не меняется со временем.

Поля (22) удовлетворяют также некоторым соотношениям, которые отличаются от аналогичных соотношений для квазимонохроматической волны в безграничном пространстве только интегральной формой записи. В частности, вместо равенства $\varepsilon \mathbf{E} \mathbf{E}^* - \mu \mathbf{H} \mathbf{H}^* = 0$ [5] имеем:

$$\iint_{\Delta} (\varepsilon \mathbf{E} \mathbf{E}^* - \mu \mathbf{H} \mathbf{H}^*) dx dy = 0. \quad (24)$$

В справедливости (24) можно убедиться непосредственно из (22), учитывая вытекающее из (5) соотношение $\iint_{\Delta} |\operatorname{rot} \mathbf{A}_0|^2 dx dy = \kappa^2 \iint_{\Delta} |\mathbf{A}_0|^2 dx dy$.

Для рассматриваемого случая (24) означает равенство погонных плотностей электрической и магнитной энергии. Отметим также, что уравнение Пойнтинга

$$\frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} = -\frac{1}{8\pi} \iint_{\Delta} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}^*}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mu \mathbf{H}^*}{\partial t} + 4\pi \sigma \mathbf{E} \mathbf{E}^* \right) dx dy \quad (25)$$

с помощью (22) нетрудно свести к виду (15). Таким образом, поля (22) удовлетворяют требованиям закона сохранения энергии.

Аналогичные соотношения имеют место для волн в плазме (уравнения (10) и (11)). В частности, вместо (23) получим:

$$\left[\frac{d}{dt} \ln (\omega k u^{(0)^2}) \right]_{\delta=\delta_0} = \frac{k_t \omega_p^2}{k \varepsilon \omega^2}. \quad (23a)$$

Стоящая в левой части (23а) величина $\omega k u^{(0)^2}$ не равна, однако,

отношению \bar{S}_z/ω^2 . Из сказанного следует также, что в приближении геометрической оптики можно ввести диэлектрическую проницаемость плазмы $\epsilon(z, t) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$. В общем же случае (в отличие от однородной движущейся плазмы) свойства плазмы нельзя охарактеризовать одной величиной $\epsilon(z, t)$.

4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Рассмотрим несколько случаев, когда уравнения (14) и (15) удается проинтегрировать.

а) *TE-волны в волноводе, заполненном средой с параметрами, зависящими только от времени.* При $\epsilon = \epsilon(t)$, $\mu = \mu(t)$, $\sigma = \sigma(t)$ коэффициенты уравнения (12) равны

$$a = \frac{\epsilon \mu}{c_1^2}; \quad b = \frac{\mu}{c_1^2} (\epsilon_t + 4\pi\sigma); \quad c = 0; \quad d = \kappa^2. \quad (26)$$

Уравнение эйконала (17) имеет в этом случае полный интеграл вида (см., например, [9])

$$\psi = -qz + \int_0^t c_1 \sqrt{\frac{k^2 + z^2}{\epsilon \mu}} dt + \psi_0, \quad (27)$$

где q и ψ_0 — произвольные постоянные.

Рассмотрим сначала бесконечный волновод. Будем искать бегущую в z -направлении волну, задавая начальное условие в виде *

$$u(z, 0) = u_0 \exp(-ik_0 z) \quad (28)$$

(u_0, k_0 — постоянные). Из (27) и (28) сразу получаем $q = k_0$, $\psi_0 = 0$. Уравнение для амплитуды (16) также без труда интегрируется с помощью системы (19). В результате получим в приближении геометрической оптики:

$$\begin{aligned} u = & u_0 \left[\frac{\epsilon(0) \mu(0)}{\mu(0) \epsilon(t)} \right]^{1/4} \exp \left(-2\pi \int_0^t \sigma/\epsilon dt \right) \times \\ & \times \exp \left[-ik_0 \left(z - c_1 \sqrt{1 + \frac{z^2}{k^2}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{\epsilon \mu}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, при уменьшении ϵ и μ со временем частота волны растет.

Пользуясь (29), по формулам (22) найдем поля E и H , а также средний поток мощности вдоль оси волновода \bar{S}_z :

$$\bar{S}_z = \bar{S}_z(0) \frac{\epsilon(0) \mu(0)}{\epsilon(t) \mu(t)} \exp \left(-4\pi \int_0^t \sigma/\epsilon dt \right). \quad (30)$$

Из (30) следует условие возрастания \bar{S}_z :

$$\ln \left[\frac{\epsilon(0) \mu(0)}{\epsilon(t) \mu(t)} \right] > 4\pi \int_0^t \sigma/\epsilon dt. \quad (31)$$

Отметим, что при $\sigma = 0$ $\bar{S}_z/\omega^2 = \text{const}$, что согласуется с (23).

* Волны в бесконечном волноводе, заполненном средой с $\sigma=0$, $\epsilon=\text{const}$, $\mu=\mu(t)$ при начальном условии (28) рассматривались в работе [8].

Перейдем к случаю полубесконечного волновода ($z \geq 0$) и найдем поле волны, распространяющейся в $+z$ -направлении, при граничном условии:

$$u(0, t) = u_0 \exp(i\omega_0 t) \quad (32)$$

(u_0, ω_0 — постоянные) и нулевых начальных условиях:

$$u(z, 0) = u_t(z, 0) = 0. \quad (32a)$$

Легко видеть, что условию (32) нельзя удовлетворить выбором в (29) постоянных q и ψ_0 . В этом случае, как известно из теории уравнений с частными производными [9], необходимо искать огибающую двухпараметрического семейства полных интегралов (29), содержащую кривые $\psi(0, t) = \omega_0 t$ и $\psi_t(0, t) = \omega_0$. В частности, если в некотором интервале времени можно принять $\sqrt{a} = \sqrt{\varepsilon\mu} / c_1 = \alpha t + \beta$ (α и β — постоянные, $\beta > 0$), то указанным способом можно показать, что волновое число $k(z, t)$ и частота $\omega(z, t)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\omega_0(\alpha t + \beta)}{\sqrt{k^2 + z^2}} = \exp(\alpha z \sqrt{1 + z^2/k^2}); \quad (33)$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \exp\left[\frac{-\alpha z}{\sqrt{1 - z^2/(\alpha t + \beta)^2 \omega_0^{-2}}}\right]. \quad (34)$$

На рис. 1 приведены построенные по (34) графики изменения ω вдоль оси волновода при $t = \text{const}$ (рис. 1а). а также изменения ω со временем в фиксированном сечении $z = \text{const}$ (рис. 1б). В соответствии с нулевыми начальными условиями, на рис. 1 показаны лишь те участки кривых, которые соответствуют групповым фронтам, вышедшим из точки $z = 0$ в моменты времени $t \geq 0$. Как ясно из (17а), в данном случае для фиксированного группового фронта k постоянно. Учитывая это, нетрудно показать, что значения ω на этих участках удовлетворяют неравенствам:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_{z=0} \geq \frac{1}{1 + \alpha t/\beta} \quad (35)$$

для рис. 1а или

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_{z>0} > \exp\left[\frac{-\alpha z}{\sqrt{1 - z^2/\omega_0^2 \beta^2}}\right] \quad (36)$$

для рис. 1б.

Из рис. 1 видно, что при $\alpha > 0$ зависимость ω от t и z для достаточно больших z становится неоднозначной уже в пределах условий (35), (36). Это обстоятельство является следствием нелинейности уравнения (14) и формально означает, что некоторые из вышедших позже групповых фронтов обгоняют передний. Нужно, однако, иметь в виду, что при $\omega_t \rightarrow \infty$ приближение геометрической оптики становится неприменимым (см. (44)).

Как следует из (34), при $z < 0$ величина ω возрастает тем сильнее, чем больше z^2 для данного типа волны. Интересно отметить, что в случае TEM -волны ($z = 0$) имеем $\omega/\omega_0 = \exp(-\alpha z)$, т. е. для выбранного линейного закона изменения $\sqrt{a}(t)$ колебание в каждой фиксированной точке имеет постоянную частоту и модулировано только по амплитуде.

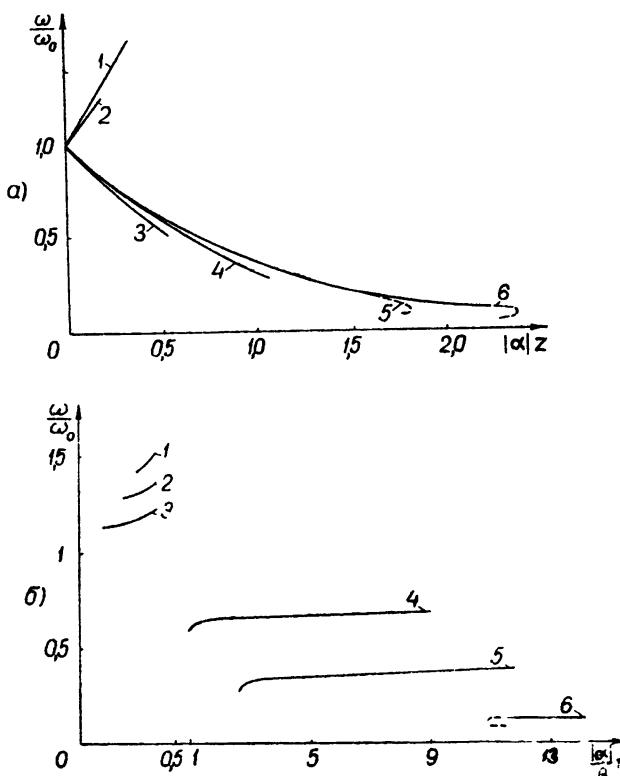


Рис. 1. а) Изменение частоты волны ω вдоль оси волновода в фиксированные моменты времени ($\sqrt{\epsilon\mu/c_1} = \alpha t + \beta$; $\alpha^2 \omega_0^{2\beta^2} = 0,4$). Кривые 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответствуют значениям $(\alpha\beta)t = -0,35; -0,2; 1; 3; 9; 19$. Пунктиром обозначены области неприменимости приближения геометрической оптики.

б) Зависимость ω от времени для фиксированных сечений волновода. Кривые 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответствуют значениям $\alpha z = -0,3; -0,2; -0,1; 0,4; 1; 2$. В интервале $0 < |\alpha| \beta^{-1} t < 0,5$ масштаб увеличен.

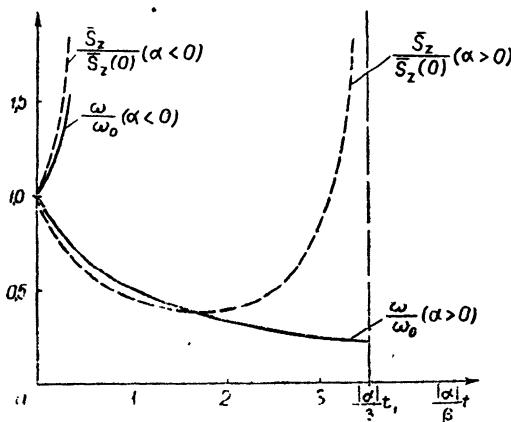


Рис. 2. Зависимость ω и \bar{S}_z от времени для фиксированного группового фронта $\delta(z, t) = \delta(0, 0)$ ($\sqrt{\epsilon\mu/c_1} = \alpha t + \beta$; $\alpha^2 \omega_0^{2\beta^2} = 0,4$; $k^2 = 1,5\alpha^2$).

Для определения амплитуды волны $u^{(0)}$ воспользуемся (при $\sigma = 0$) соотношением (23). Находя из (34) значение производной k_t как функции k и t , подставляя его в (23) и интегрируя при постоянном k , получим (рис. 2):

$$\left[\frac{\bar{S}_z(t)}{\bar{S}_z(t_0)} \right]_{t=t_0} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \frac{1}{1 + \kappa^2 k^{-2} \ln(\omega/\omega_0)}, \quad (37)$$

где $\bar{S}_z(t_0)$ — значение потока энергии в момент $t = t_0$ выхода данного фронта из точки $z = 0$. Из рис. 2 видно, что даже при $\alpha > 0$ (при возрастании ε_p) возможен рост величины \bar{S}_z за счет упомянутой „группировки“ фронтов. Точка $t = t_1$, в которой $\bar{S}_z \rightarrow \infty$, соответствует указанной выше особенности $\omega_t \rightarrow \infty$, т. е. неприменимости приближения геометрической оптики.

Вычисляя по (40) значение \bar{S}_z для различных групповых фронтов, можно построить зависимость \bar{S}_z (а также амплитуд полей $E^{(0)}$ и $H^{(0)}$) от времени в фиксированной точке.

б) Волна в неоднородной плазме, движущейся с постоянной скоростью $V = (0, 0, V_z)$. В данном случае, согласно (10),

$$a = \varepsilon/c_1^2, \quad b = c = 0, \quad d = \frac{1}{c_1^2} \omega_p^2 (z - V_z t). \quad (38)$$

Делая замену $z' = z$, $\gamma_t = z - V_z t$, получим полный интеграл (14) в виде:

$$\psi = -qz + \frac{q}{1 - \varepsilon_0 \beta^2} \int_0^{z - V_z t} \left[1 \pm \sqrt{\varepsilon_0 \beta^2 - \frac{\omega_p^2(\gamma_t)}{c_1^2 q^2} (1 - \varepsilon_0 \beta^2)} \right] d\gamma_t + \psi_0, \quad (39)$$

где $\beta = |V_z|/c_1$, q и ψ_0 — постоянные.

Считая плазму при $\gamma_t \ll 0$ однородной, положим, что поле при $\gamma_t \ll 0$ имеет вид плоской монохроматической волны:

$$u(\gamma_t \ll 0) = u_0 \exp[i \omega_0 (t - z/v_{\phi 0})]. \quad (40)$$

Здесь u_0 , ω_0 , $v_{\phi 0}$ — постоянные. С помощью (40) и (39) для частоты и волнового числа получаем выражения:

$$\omega = \omega_0 \frac{1 - V_z/v_{\phi 0}}{1 - \varepsilon_0 \beta^2} \left[1 \pm \beta \sqrt{\varepsilon_0 - \frac{\omega_p^2(\gamma_t)}{\omega_0^2} \frac{1 - \beta^2 \varepsilon_0}{(1 - V_z/v_{\phi 0})^2}} \right]; \quad (41)$$

$$k = \frac{1}{V_z} [\omega - \omega_0 (1 - V_z/v_{\phi 0})], \quad (41a)$$

причем для $V_z/v_{\phi 0} < 0$ перед корнем в (41) следует брать знак “—”, а для $V_z/v_{\phi 0} > 0$ — знак “+”. В точке $\gamma_t = \gamma_{kp}$ (рис. 3), в которой

$$\frac{\omega_p^2(\gamma_{kp})}{\omega_0^2} \frac{1 - \beta^2 \varepsilon_0}{(1 - V_z/v_{\phi 0})^2} = \varepsilon_0,$$

величины ω и k становятся комплексными, и при $\omega_p > \omega_p(\gamma_{kp})$ волна затухает в пространстве и во времени. Вблизи γ_{kp} приближение геометрической оптики становится неприменимым. Что касается точки

$\eta = \eta_1$, в которой $k = 0$, $v_{rp} = 0$ (рис. 3б), то для $\eta > \eta_1$ направление распространения волны меняется на обратное. Тем не менее, можно показать [7], что в этой точке справедливость рассматриваемого приближения не нарушается *.

Амплитудный множитель $u^{(0)}$ легко найти из (15), пользуясь тем обстоятельством, что ω и k зависят только от $\eta = z - V_z t$, так что $u^{(0)}$ можно искать в виде функции η . В результате, пользуясь (40) и (41), получим:

$$\frac{u^{(0)}}{u_0} = \left[\frac{\varepsilon_0 - \omega_p^2(0) \omega_0^{-2} (1 - \varepsilon_0 \beta^2) (1 - V_z/v_{\phi 0})^{-2}}{\varepsilon_0 - \omega_p^2(\eta_1) \omega_0^{-2} (1 - \varepsilon_0 \beta^2) (1 - V_z/v_{\phi 0})^{-2}} \right]^{1/4}. \quad (42)$$

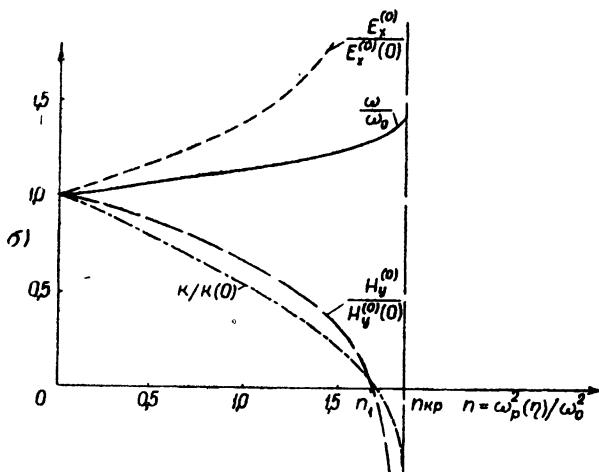
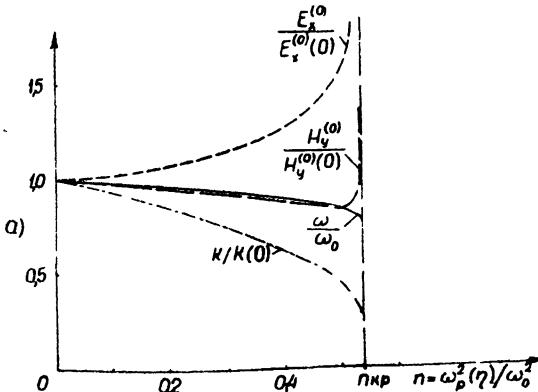


Рис. 3. а) Зависимость частоты волны ω , волнового числа k и амплитуд полей $E_x^{(0)}$ и $H_y^{(0)}$ в движущейся плазме от концентрации электронов при $V_z/v_{\phi 0} > 0$

$$\left(n = \frac{4\pi e^2}{m_0 \omega_0^2} \sqrt{1 - \beta^2} N(\eta); \beta = 0,3; \varepsilon_0 = 1 \right).$$

б) То же при $V_z/v_{\phi 0} < 0$ (встречное движение волны и плазмы).

* Отметим, что в сопровождающей системе координат (при $\varepsilon_0 = 1$) точка $\eta = \eta_{kp}$ является обычной точкой отражения, тогда как в точке $\eta = \eta_1$ поле не имеет особенностей.

С помощью (42) и (9) находим искомые поля E_x и H_y (рис. 3). Особенность $u^{(0)} \rightarrow \infty$ в точке $\eta = \eta_{kp}$ является следствием нарушения применимости приближения вблизи η_{kp} .

Аналогично можно проинтегрировать уравнение следующего приближения (10). Положив в нем $u^{(1)} = u^{(1)}(\eta)$, найдем:

$$p \simeq \frac{u^{(1)}}{u^{(0)}} = i \frac{1 - \epsilon_0 \beta^2}{V(\omega_0/V_z)(V_z/v_{\phi 0} - \epsilon_0 \beta^2)} \int_0^\eta \frac{u_{\eta \eta}^{(0)} d\eta}{\sqrt{k - \epsilon_0 V_z c_1^{-2} \omega}}. \quad (43)$$

Таким образом, при равенстве абсолютных величин скорости распространения волн в среде и скорости плазмы ($\epsilon_0 \beta^2 = 1$) поправка порядка p к первому приближению исчезает.

Формулы (41) — (43) в равной степени верны для случая волны ионизации в плазме (уравнение (11)). В этом случае вместо (9) имеем $u = E_r = -(\omega/c_1 k) H_y$.

Заметим в заключение, что в работе [7] рассмотрено изменение частоты и амплитуды волны при отражении от точки $\eta = \eta_{kp}$ для случая $V_z/v_{\phi 0} < 0$.

5. О ПРЕДЕЛАХ ПРИМЕНИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Для определения точности приближения геометрической оптики, т. е. для оценки параметра p нужно сравнить величины $u^{(0)}$ и $u^{(1)}$, полученные из (15) и (16). Однако, поскольку найти решение этих уравнений в явном виде удается лишь в немногих случаях, мы ограничимся сравнением членов в уравнениях последовательных приближений. Для уравнений (14) и (15) такое сравнение дает условия вида

$$\omega_t \sim p \omega^2; \quad k_z \sim pk^2; \quad u_t^{(0)} \sim p \omega u^{(0)}, \quad (44)$$

а для (15) и (16)

$$u^{(1)} \sim pu^{(0)} \quad (44a)$$

и т. д.

По аналогии с обычной геометрической оптикой можно ожидать, что, за исключением особых случаев, условия (44) и (44a) окажутся достаточными. В частности, (44) указывает на нарушение применимости приближения геометрической оптики в ранее встречавшихся случаях, именно, когда $\omega_t \rightarrow \infty$ (рис. 1), $u_t^{(0)} \rightarrow \infty$ (рис. 3), $k = 0$ и т. д. С другой стороны, пример с движущейся плазмой (в точке $\eta = \eta_1$, где $k = 0$, приближение остается справедливым) подтверждает, что условия (44) не всегда являются необходимыми.

Отметим еще, что в приближении геометрической оптики волна рассматривалась как последовательность групповых фронтов. Такой подход, очевидно, справедлив при условии, что искажение огибающей волны из-за дисперсии невелико по сравнению с модуляцией волны, обусловленной изменением параметров.

Автор весьма признателен А. В. Гапонову за советы и обсуждение рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Tien, H. Suhl, Proc. IRE, **46**, 700 (1958).
- 2 С. И. Аверков, Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **1**, 4, 46 (1958).
3. F. R. Morgenstern, IRE Trans., MTT-6, 167 (1958).
- 4 С. М. Рытов, Труды физического института АН СССР, **2**, 1, 40 (1940).

5. С. М. Рытов, ЖЭТФ, 17, 930 (1947).
6. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 672 (1960).
7. Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ (готится к печати).
8. С. И. Аверков, Ю. Г. Хронопуло, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 818 (1960).
9. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 4, ГИТТЛ, М., 1957.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 октября 1960 г.

ON THE GEOMETRICAL OPTICS APPROXIMATION FOR WAVES IN TRANSMISSION LINES WITH VARIABLE PARAMETERS

L. A. Ostrovski

An examination is made of the propagation of electromagnetic waves in dispersive systems with variable parameters: in a waveguide filled with a medium dielectric (ϵ) and magnetic (μ) permeabilities of which depend on time and longitudinal coordinate, and in a neutral plasma with a variable electron concentration. It is shown that the fields in both cases can be described by a second order, partial differential equation with variable coefficients. The investigation is made by the successive approximations. The amplitude and frequency change of the wave in geometrical optics approximation are examined. The results obtained are illustrated by two particular examples.

О ВЛИЯНИИ ИЗМЕНЕНИЯ ЧАСТОТЫ НА ВЫХОДНУЮ ЭНЕРГИЮ В ЛИНЕЙНОМ ЭЛЕКТРОННОМ УСКОРИТЕЛЕ

A. B. Шальнов, Н. М. Гаврилов

Выведена формула, позволяющая оценить влияние изменения частоты питания на выходную энергию в секции линейного электронного ускорителя с фазовой скоростью волны, равной скорости света, с учетом нагрузки током ускоренных частиц.

Уравнения движения электронов в линейном ускорителе имеют вид [1]:

$$\frac{dW}{dz} = eE(z) \cos \varphi(z), \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{\beta_v} - \frac{1}{\beta_e} \right), \quad (1)$$

где $\beta_e = \sqrt{1 - (W_0/W)^2}$, W_0 — энергия покоя электрона, W — полная энергия электрона, $E(z)$ — амплитуда напряженности электрического поля, $\varphi(z)$ — фаза электрона относительно волны, e — заряд электрона, λ — длина волны в свободном пространстве, β_v , β_e — фазовая скорость волны и скорость электрона в единицах скорости света c .

При ускорении релятивистских электронов можно считать, что увеличение энергии не приводит к существенному изменению скорости, т. е. электрон движется с постоянной скоростью $\beta_e \approx 1$. Если фазовая скорость волны равна скорости света ($\beta_v = 1$), то из второго уравнения системы (1) следует, что фаза электрона относительно волны не зависит от z . При изменении частоты питания из-за нестабильности источника высокочастотной мощности изменяется фазовая скорость ускоряющей электромагнитной волны ($\beta_v \neq 1$). В этом случае правая часть второго уравнения системы (1) представляет из себя постоянную величину. Проинтегрировав это уравнение, получим: $\varphi = \varphi_0 + kz$, где φ_0 — фаза при $z = 0$.

Относительное изменение энергии при отклонении частоты от номинального значения определяется следующим образом:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{W - W_1}{W}, \quad (2)$$

где W — энергия, полученная при номинальной частоте, W_1 — энергия при частоте, отличной от номинальной. Чтобы найти W_1 , необходимо определить зависимость изменения амплитуды поля от координаты z из уравнения баланса мощности:

$$-\frac{dP}{dz} = 2\alpha P + IE(z) \cos (\varphi_0 + kz). \quad (3)$$

Здесь α — коэффициент затухания в диафрагмированном волноводе, I — ток ускоренных частиц, P — высокочастотная мощность, $k = \Delta\varphi/z$ — коэффициент, характеризующий скорость скольжения волны относительно электрона.

Выражение (3) легко преобразуется в уравнение для изменения амплитуды поля:

$$-\frac{dE}{dz} = I\alpha\eta \cos(kz) + \sigma E. \quad (4)$$

При этом преобразовании используется понятие шунтового импеданса диафрагмированного волновода $\eta = E^2/2\alpha P$ и полагается $\varphi_0 = 0$. Интегрируя уравнение (4) с учетом начальных условий $E(z) = E_0$ при $z=0$, имеем:

$$E(z) = \left(E_0 + \frac{I\alpha^2\eta}{\sigma^2 + k^2} \right) e^{-\alpha z} - \frac{I\alpha\eta}{\alpha^2 + k^2} [z \cos(kz) + k \sin(kz)]. \quad (5)$$

Для определения величины W_1 можно воспользоваться первым уравнением движения (1):

$$W_1 = e \int_0^z E(z) \cos(kz) dz. \quad (6)$$

Подставляя в (6) выражение для амплитуды поля (5) и интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} W_1 = ez & \left\{ \left(E_0 + \frac{I\eta x^2}{x^2 + y^2} \right) \left[\frac{e^{-\alpha z}}{x^2 + y^2} (y \sin y - x \cos y) + \frac{x}{x^2 + y^2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{I\eta x^2}{2(x^2 + y^2)} \left[1 + \frac{1}{2y} \sin(2y) \right] - \frac{1}{2} \frac{I\eta x^2}{x^2 + y^2} \sin^2 y \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения: $x = \alpha z$, $y = kz = \Delta\varphi$.

При $y = 0$ получим ранее известное выражение для величины выходной энергии в ускорителе с учетом нагрузки током и уменьшения высокочастотной мощности из-за затухания при ускорении электрона на вершине волны [1]:

$$W = \frac{ez}{x} [E_0(1 - e^{-\alpha}) - I\eta(x - 1 + e^{-\alpha})]. \quad (8)$$

При $k = 0$ формула (5) принимает более простой вид:

$$E(z) = (E_0 + I\eta)e^{-\alpha z} - I\eta. \quad (9)$$

Анализируя уравнение (9), легко определить допустимые пределы изменения входящих в него величин, следующие из очевидного требования $E(z) > 0$:

$$E_0/I\eta > e^\alpha - 1. \quad (10)$$

Введем обозначение $A = 2P_0/E_0 I z$; тогда $E_0/I\eta = Ax$ и неравенство (10) примет вид:

$$A > (e^\alpha - 1)/x. \quad (11)$$

Подставляя в (2) выражения (7) и (8), легко определить относительное отклонение выходной энергии при изменении частоты для любых значений величин x и y , учитывая ограничение, накладываемое соотношением (11).

Разлагая в ряды косинусы и синусы и пренебрегая членами более высокого порядка, чем y^2 , а также полагая $y < x$, получим:

$$\Delta W/W = By^2/6, \quad (12)$$

где

$$B = \frac{2x(3A - x^2) + 3[(x-1)^2 - e^{-r} [Ax[(x+1)^2 + 1] + (x+1)^2 + 3]]}{x^2[(Ax+1)(1-e^{-r}) - x]} \leq 1. \quad (13)$$

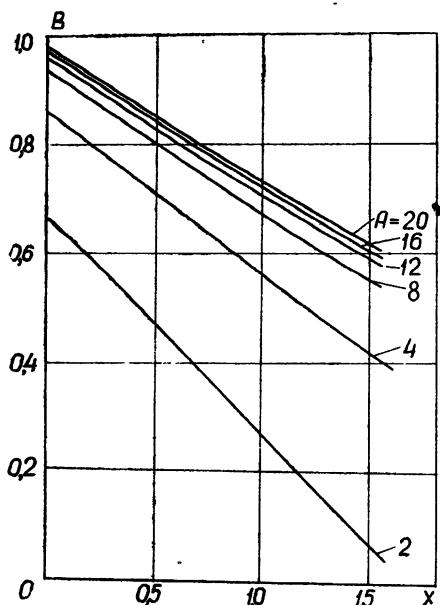


Рис. 1.

Выражение (13) может быть представлено в виде кривых (рис. 1), пригодных для быстрого определения B . Расхождение в величинах $\Delta W/W$, определенных при непосредственном использовании формул (2), (7) и (8) и при применении выражения (12), невелико (например, для $y = 0,6x$ расхождение не превышает 0,1%).

Из формулы (12) при $I = 0$ после преобразований получим формулу

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{y^2}{6} \left[\frac{6}{x^2} - \frac{3 + 6/x}{e^r - 1} \right],$$

приведенную ранее в литературе [2]. Рассматривая сильноточный ускоритель и полагая полное затухание в стенах волновода малым ($x \rightarrow 0$), найдем:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{y^2}{6} \left[1 - \frac{1}{2A - 1} \right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. R. B. Neal, J. Appl. Phys., **29**, 1019 (1958).
2. M. Chodorov, E. Ginzton, W. Hausen, R. Keal, R. Neal, W. Panofsky, Rev. Sci. Instr., **26**, 131 (1955).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
9 июля 1960 г.

ON THE INFLUENCE OF A FREQUENCY CHANGE ON THE OUTPUT ENERGY IN A LINEAR ELECTRON ACCELERATOR

A. V. Shalnov, N. M. Gavrilov

An equation is obtained which allows to evaluate the influence of a change of input frequency on the output energy in the section of a linear electron accelerator when a phase wave velocity equals to that of light. The current load of the accelerated particles is taken into account.

ДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ НА СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ С ПОМОЩЬЮ ЛАМП С БЕГУЩЕЙ ВОЛНОЙ

С. А. Ахманов, А. С. Горшков, И. Т. Трофименко

Описаны делители частоты сантиметрового и дециметрового диапазонов, в которых применены ЛБВ с разделенными спиральными. Регенеративный делитель, использующий широкополосный смеситель на ЛБВ, позволял осуществлять устойчивое деление частоты сигнала дециметрового диапазона с минимальной мощностью $\sim 50 \text{ мквт}$ в 3 и 4 раза. Описан также делитель частоты, использующий явления резонанса второго рода и захватывания на гармониках ЛБВ генератора с внешней обратной связью. Обсуждаются возможности улучшения рабочих характеристик делителей частоты. Ограждена целесообразность использования волноводных параметрических смесителей и умножителей частоты в широкополосных регенеративных делителях.

Проблема создания эффективных и надежных делителей частоты в диапазоне СВЧ до настоящего времени еще не может считаться решенной. Вместе с тем, в ряде приложений ощущается необходимость в таких делителях.

При разработке делителей частоты СВЧ диапазона целесообразно использовать принципы деления частоты, исследованные в длинноволновой радиотехнике. При этом представляется желательным иметь широкополосные СВЧ устройства, позволяющие усиливать, умножать и смешивать сигналы различных частот, в какой-то мере аналогичные в смысле универсальности обычной электронной лампе. Одним из вариантов такого устройства в диапазоне СВЧ является, по нашему мнению, лампа бегущей волны (ЛБВ) с разделенными спиральами (см. рис. 1). В ней общий электронный поток пронизывает ряд спиралей, предназначенных для широкополосного усиления различных частот; потенциал каждой спирали подобран в соответствии с требованием оптимального взаимодействия пучка и спирали. К соответствующим входам различным спиралей могут быть подведены сигналы,

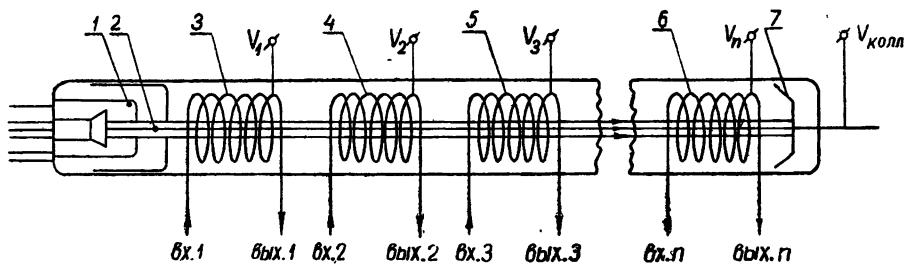


Рис. 1. Принципиальная схема ЛБВ с разделенными спиральными:

1 — электронная пушка, 2 — электронный пучок, 3, 4, 5, 6 — замедляющие спирали, 7 — коллектор.

подлежащие усилению, смешению или умножению в лампе. Отдельные части лампы (отдельные замедляющие системы) могут быть замкнуты цепями внешней обратной связи. Предыдущие "каскады" могут ис-

пользоваться для ввода сигналов, действующих на получившиеся автоколебательные или потенциально-автоколебательные системы. При этом почти полностью исключается обратное влияние на генератор сигнала. Важно подчеркнуть, что в данном случае резонансные системы непосредственно не пронизываются электронным пучком, что дает целый ряд важных преимуществ перед клистронными системами.

Таким образом, ЛБВ с разделенными спиралями оказывается весьма гибким прибором, позволяющим эффективно (с малыми потерями) вводить в общий электронный поток сигналы различных частот и заставить их взаимодействовать (если режим электронного пучка нелинейный) и обладающим определенными преимуществами перед клистронами, использовавшимися в большинстве описанных ранее СВЧ делителей частоты [1,2]. Так, в частности, значительные трудности, возникающие при попытках создания эффективных клистронных смесителей, являлись до последнего времени одним из существеннейших препятствий при разработке регенеративных делителей частоты в СВЧ диапазоне. Создание же широкополосных ЛБВ смесителей, обладающих усилением при преобразовании [3], значительно упрощает задачу разработки регенеративных делителей.

В настоящей статье приведены результаты работы по исследованию регенеративного делителя частоты и делителя частоты, использующего явление резонанса второго рода и захватывания на гармониках на ЛБВ с разделенными спиралями. При разработке основного узла регенеративного делителя — широкополосного смесителя на ЛБВ с разделенными спиралями—значительное внимание было уделено параметрическим эффектам в такой системе. Кратко обсуждаются возможности использования параметрических явлений в волноводных системах в делителях частоты.

1. РЕГЕНЕРАТИВНЫЙ ДЕЛИТЕЛЬ ЧАСТОТЫ НА ЛБВ С РАЗДЕЛЕННЫМИ СПИРАЛЯМИ

1. Экспериментальная установка и экспериментальные результаты. Основными элементами регенеративного делителя частоты являются смеситель и умножитель, между которыми вводятся фильтры и усилители (последние необходимы, если коэффициенты передачи смесителя и умножителя невелики). Для возникновения колебаний поделенной частоты ω

$$s_1 = V \sin(\omega t + \varphi)$$

при подаче на вход делителя сигнала частоты $n\omega$

$$s_0 = V_0 \sin(n\omega t + \Psi)$$

необходимо; чтобы произведение коэффициентов передачи * смесителя K_c , умножителя K_y и тракта K_{tp} для соответствующих частот было больше единицы. В стационарном режиме

$$K_c K_y K_{tp} = 1, \quad (1)$$

а соотношение между фазами сигнала на входе делителя Ψ , на выходе φ и фазовым набегом в цепи обратной связи делителя Φ в стационарном режиме имеет вид:

$$\varphi = (\Psi - \Phi)/n. \quad (2)$$

* Далее всюду подразумеваются коэффициенты передачи по мощности

Частотные характеристики делителя в значительной мере определяются частотными характеристиками смесителя и умножителя.

Основное внимание при создании регенеративного делителя частоты на ЛБВ было уделено разработке смесителя, представляющего собой ЛБВ с разделенными спиральюми. На возможность получения в таких делителях коэффициента передачи, существенно превышающего единицу (усиление при преобразовании), уже указывалось в литературе [3]. В зависимости от соотношения смешиваемых частот f_1 и f_r смесители могут быть выполнены в виде ЛБВ с тремя или двумя спиральюми. Если частоты f_1 и f_r далеки, то первая и вторая спираль (считая от электронной пушки) предназначены для модуляции электронного пучка частотами f_1 и f_r , а третья спираль служит для выделения нужной комбинационной частоты (в наших экспериментах — разностной); при этом третья спираль может быть использована и для одновременного усиления комбинационной частоты. Если же f_1 и f_r близки, вполне удовлетворительными оказываются двухспиральные лампы; последнее особенно относится к смесителям на ЛБВ, предназначенным для работы в регенеративных делителях с большой кратностью деления.

Разработанный нами смеситель, предназначенный для работы в регенеративном делителе частоты в $3 \frac{1}{2} - 4$ раза (при частоте входного сигнала ~ 4200 мгц), представлял собой двухспиральную ЛБВ. Первая спираль лампы предназначена для широкополосного усиления (в полосе 600 мгц) сигналов в диапазоне частот ~ 4000 мгц (сигнала гетеродина) и вторая — для широкополосного усиления сигналов в диапазоне $1500 \div 1000$ мгц. Колебания сигнала и гетеродина подаются в общий волновод, согласованный с первой спиралью; на конце первой спирали размещена согласованная нагрузка, предотвращающая самовозбуждение. Сигнал разностной частоты снимается с помощью коаксиального кабеля, согласованного с выходом второй спирали.

При разработке смесителя основное внимание было уделено исследованию факторов, влияющих на его коэффициент передачи и широкополосность. Эксперименты показали, что возможно осуществление режимов, в которых имеет место значительное усиление при преобразовании; K_c составлял $15 \div 20$ дБ (а иногда до 30 дБ) в весьма широкой полосе частот (до 400 мгц). Графики частотных характеристик смесителя представлены на рис. 2; здесь же приведены значения параметров смесителя (режим гетеродина, токи на электроды ЛБВ), соответствующие каждой кривой. Величина коэффициента передачи смесителя возрастила с ростом тока коллектора; при достаточно больших токах, однако, начинали играть роль регенеративные эффекты. Зависимость величины K_c от мощности гетеродина не является монотонной: при мощности гетеродина $0,2 \div 1$ мвт * отчетливо наблюдается максимум K_c ; дальнейший рост мощности гетеродина сопровождается уменьшением коэффициента передачи. В некоторых случаях наблюдалось несколько максимумов K_c в зависимости от мощности гетеродина.

Интересным оказалось то обстоятельство, что в оптимальных с точки зрения эффективности смешения режимах рабочее напряжение первой спирали было существенно сдвинуто относительно напряжения, соответствующего максимуму ЛБВ-усиления (обычно на $30 \div 40$ в ниже), а общее усиление при преобразовании не менее чем на 5 дБ превышало суммарное ЛБВ-усиление в первой и второй

* Конкретное значение определяется величиной тока пучка; в наших экспериментах ток изменялся от 0,5 до 2,5 ма.

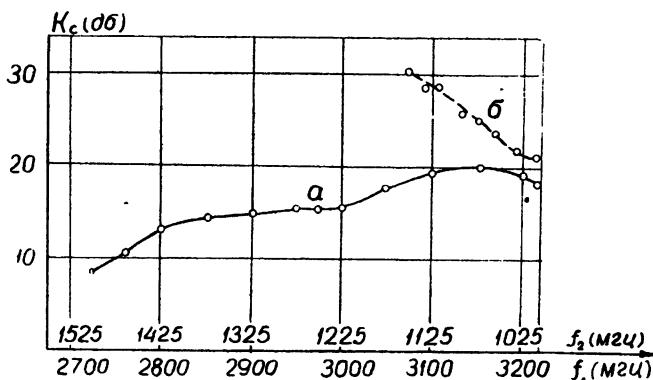


Рис. 2. Частотная характеристика экспериментального смесителя на ЛБВ с разделенными спиральами. По оси ординат — коэффициент передачи K_p смесителя, по оси абсцисс — частота входного сигнала f_1 и разностная частота f_2 . Частота гетеродина $f_r = 4225$ мгц. Для кривой a ток коллектора $I_k = 1,1$ ма, для кривой b $I_k = 1,8$ ма.

спиралях. Проведенные исследования [7] показали, что существенную роль в работе смесителя на ЛБВ могут играть параметрические эффекты.

Полная блок-схема регенеративного делителя частоты приведена на рис. 3. Тракт обратной связи делителя ($abcd$) состоит из фазовращателя *, умножителя частоты на полупроводниковом диоде с нелинейным сопротивлением, резонансного фильтра, перестраиваемого в диапазоне от 2500 до 3500 мгц, и ЛБВ-усилителя. Источником колебаний делимой частоты служил отражательный кристаллон. Особое внимание было уделено индикации деления частоты. Для этой цели было избрано фазовое детектирование: сравнивались фазы колебаний делимой частоты и соответствующей гармоники поделенной частоты.

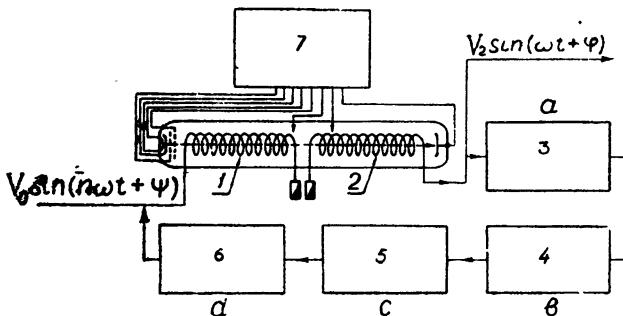


Рис. 3. Блок-схема регенеративного делителя частоты, использующего смеситель на ЛБВ с разделенными спиральами:

1, 2 — спирали смесителя, 3 — фазовращатель, 4 — умножитель, 5 — фильтр, 6 — ЛБВ-усилитель, 7 — блок питания смесителя

* В ряде случаев необходимость в специальном фазовращателе отпадает; подбор фазы может быть осуществлен регулировкой напряжения луча ЛБВ-смесителя.

Работа схемы исследовалась в режиме деления частоты в 3 и 4 раза; при этом резонатор кристаллического умножителя настраивался соответственно на вторую или третью гармонику поделенного сигнала. При проведении измерений мощность сигнала на входе делителя изменялась в пределах $10 \text{ мквт} \pm 10 \text{ мвт}$; частота входного сигнала была $\sim 4200 \text{ мгц}$. Устойчивость работы делителя в значительной мере определялась „запасом усиления“ в системе — превышением усиления смесителя и ЛБВ-усилителя над потерями в кристаллическом умножителе ($\sim 15 \text{ дБ}$ при умножении вдвое), тракте обратной связи и нагрузке. Проведенные эксперименты показали, что при токе на коллектор смесителя $\sim 1,2 \pm 1,5 \text{ ма}$ и усилении ЛБВ-усилителя, $\sim 10 \text{ дБ}$ устойчивая работа делителя в режиме трехкратного деления частоты наблюдается при мощностях входного сигнала $P_{\text{вх}}$, превышающих 50 мквт . Полоса частот входного сигнала Δf , в которой устойчиво работал делитель (без каких-либо перестроек в схеме), нарастала с ростом $P_{\text{вх}}$ при малых $P_{\text{вх}}$ и достигала величины $\sim 25 \pm 30 \text{ мгц}$ при $P_{\text{вх}}$, превышающей $200 \pm 300 \text{ мквт}$: величина полосы, по-видимому, определялась в первую очередь резонансной кривой колебательного контура умножителя. Величина коэффициента передачи смесителя, как правило, определялась входным сигналом; мощность сигнала, поступавшего по тракту обратной связи, не превышала обычно нескольких мквт . Стационарная амплитуда колебаний в делителе определялась нелинейностью смесителя (в частности, его второго каскада). При значительном увеличении усиления ЛБВ-усилителя или смесителя наблюдалось самовозбуждение делителя в отсутствие внешнего сигнала. Интересно, что в ряде случаев собственные колебания делителя подавлялись в присутствии внешнего сигнала. Отметим, что трехкратное деление частоты могло быть получено и в отсутствие ЛБВ-усилителя. В последнем случае, однако, требовалась весьма тщательная настройка тракта обратной связи.

2. Обсуждение. В настоящее время представляется весьма затруднительным дать полную теорию регенеративного делителя на ЛБВ, что связано в первую очередь с несовершенством нелинейной теории ЛБВ, особенно в области, касающейся взаимодействия сигналов в длинном электронном потоке. Вместе с тем, представляют интерес оценка факторов, определяющих такие характеристики делителя, как кратность деления n , минимальное значение мощности входного сигнала $P_{\text{вх}}$, необходимое для устойчивой работы делителя, полоса частот входного сигнала Δf , в которой устойчиво работает делитель, уровень искажений (хаотической, амплитудной и фазовой модуляций), вносимых делителем. Простые оценки могут быть проведены с помощью соотношений (1), (2), справедливых для стационарного режима делителя.

Уже указывалось (см. также [?]), что существенную роль в работе ЛБВ-смесителя могут играть параметрические эффекты. При этом разностная частота смесителя соответствует разностной частоте параметрического усилителя с бегущей волной. Режим параметрического усиления представляется оптимальным для ЛБВ-смесителя (если роль высших комбинационных частот мала). Поэтому для оценок величины K_c можно воспользоваться формулами теории параметрического усиления в волноводных системах [5,6,8]. В реальном ЛБВ-смесителе полный коэффициент передачи определяется как механизмом процесса преобразования частоты (который описывается „истинным“ коэффициентом передачи L_c), так и усилением ЛБВ в первой и второй спиралях G .

Соотношение между L_c и G зависит от режима смесителя, соотношения между частотами входного сигнала f_1 , гетеродина (накачки)

$f_{\text{в}}$, разностной частотой $f_2 = f_{\text{в}} - f_1$ и т. п. Конкретизируя общие выражения для случая длинного электронного пучка*, имеем:

$$L_c = \frac{f_2}{f_1} \exp \left[\varphi(P_{\text{вх}}) \beta_{p_1} \frac{\sqrt{f_1 f_2}}{f_1} l \right], \quad (3)$$

где $\beta_{p_1} = \omega_{p_1} / u$, ω_{p_1} — плазменная частота (для частоты f_1), u — скорость электронного пучка, l — длина системы, где происходит параметрическое усиление, $\varphi(P_{\text{вх}})$ — нелинейная функция** $P_{\text{вх}}$, определяющая эффективность модуляции распределенных реактивных параметров электронного пучка (см. выше экспериментальные данные).

Если распределенный параметрический смеситель используется в регенеративном делителе частоты, $f_{\text{вх}} = nf$, $f_1 = (n-1)f$, $f_2 = f$ и (3) переходит в

$$L_c = \frac{1}{n-1} \exp \left[\varphi(P_{\text{вх}}) \beta_{p_1} \frac{1}{\sqrt{n-1}} l \right].$$

Следует помнить при этом, что для узкого пучка (использовавшегося в проведенных экспериментах) $\beta_{p_1} \sim f_1$.

Коэффициент передачи умножителя зависит от вида умножителя. Для умножителя на нелинейном сопротивлении коэффициент передачи для m -ой гармоники, как известно [9], не превышает $K_y = 1/m^2$, и, следовательно, для делителя, использующего параметрический волноводный смеситель и умножитель на нелинейном сопротивлении,

$$K_c K_y K_{\text{тр}} \leq \frac{1}{(n-1)^3} G \exp \left[\varphi(P_{\text{вх}}) \beta_{p_1} \frac{1}{\sqrt{n-1}} l \right].$$

Пользуясь приведенными выше соотношениями, можно приблизенно оценить требования, предъявляемые к различным элементам схемы делителя для заданной кратности деления. Быстрое уменьшение произведения $K_c K_y K_{\text{тр}}$ с ростом n может быть скомпенсировано за счет увеличения G , l , β_{p_1} и использования подходящего вида умножителя***. При достаточно больших n (малых f) создание фильтра-усилителя в ЛБВ-смесителе на частоту f оказывается затруднительным (для $f < 100 \text{ мГц}$). В этом случае целесообразно использовать дрейф электронного пучка при низком потенциале, что позволяет существенно увеличить плазменную постоянную распространения β_{p_1} .

Результаты проведенной работы и оценки с помощью (1) — (7) показывают, что возможно создание регенеративных делителей описанного типа, по крайней мере, для $n \sim 10 \div 20$ при $f_{\text{вх}} = nf = 3000 \text{ мГц}$. Минимальная мощность входного сигнала, при которой устойчиво работает делитель, зависит от параметров смесителя и вида функции $\varphi(P_{\text{вх}})$. (Соответствующие экспериментальные оценки приведены выше.) Максимальная полоса делителя определяется частотной характеристической фильтра, следующего за умножителем и отсекающего все гармоники, кроме $(n-1)f$ (или $(n+1)f$). Полоса фильтра с резонансной

* Строго говоря, формулы для параметрического усиления в свободном электронном пучке и электронном пучке, связанном со спиральной линией, различаются, мы ограничимся здесь для краткости лишь рассмотрением усиления в свободном электронном пучке.

** Предполагаем, в соответствии с экспериментом, что нелинейность задается входным сигналом.

*** Вместо умножителя на нелинейном сопротивлении могут быть использованы либо умножитель на членной емкости [10], либо умножитель на ЛБВ с разделенными спиральями [11], обладающие значительно большими коэффициентами передачи.

частотой вблизи $(n - 1)f$ должна быть для этого меньше f ; относительная полоса частот, в которой (без перестроек в схеме делителя) можно перестраивать частоту входного сигнала

$$\frac{\Delta f}{f_{\text{вх}}} = \frac{\Delta f}{nf} = \frac{1}{k(n-1)}. \quad (4)$$

Здесь n — кратность деления, k — некоторый коэффициент, больший единицы. Выбор k определяется требованиями к фильтрации мешающих гармоник на выходе умножителя.

Из (4) видно, что с ростом n полоса Δf уменьшается; в то же время из (4) можно заключить, что при $n = 3$ и $n = 4$ представляется возможным получение полосы $\sim 10 \div 15\%$. В этом смысле резонансный фильтр на выходе разработанного нами умножителя не был оптимальным ($Q \approx 100$ и $\Delta f/f = 1\%$). В тех случаях, когда необходимо иметь более широкие полосы, следует использовать либо широкополосные кристаллические умножители, либо умножитель на ЛБВ. В последнем случае фильтрация может осуществляться также за счет дисперсионных характеристик замедляющих систем.

В заключение этого раздела следует сказать несколько слов о факторах, определяющих уровень хаотической амплитудной и фазовой модуляции, вносимой делителем. С практической точки зрения наиболее существенны низкочастотные флюктуации амплитуды и фазы. В регенеративном делителе на ЛБВ они связаны в первую очередь с соответствующими флюктуациями амплитудной и фазовой характеристики ЛБВ-усилителей. Экспериментальные оценки медленных флюктуаций фазового набега (в полосе $0 \div 3$ гц) в ЛБВ, использовавшихся в смесителе [4], показали, что при хорошем токопрохождении ($\sim 98\%$) и полном аккумуляторном питании ЛБВ флюктуации фазы носят характер беспорядочных блужданий вокруг нуля; дисперсия флюктуаций фазы не превышает $\sim 2 \div 4^\circ$. Соответствующие оценки фазовой стабильности делителя можно сделать, используя приведенные данные и формулу (2). Исследование быстрых флюктуаций амплитуды и фазы представляет отдельную задачу.

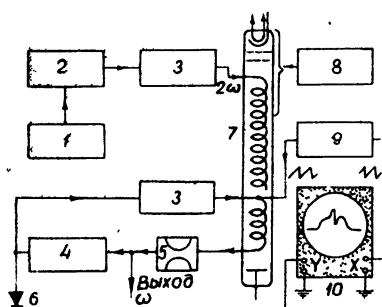
2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭФФЕКТА ЗАХВАТЫВАНИЯ НА ГАРМОНИКАХ И РЕЗОНАНСА 2-ГО РОДА В ЛБВ-ГЕНЕРАТОРЕ ДЛЯ ДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ

Системы, использующие ЛБВ с разделенными спиральями, представляются весьма удобными и для создания СВЧ делителей частоты, использующих явление резонанса n -го рода и захватывания на гармониках. Ниже кратко описываются эксперименты, проведенные в этом направлении.

Блок-схема делителя показана на рис. 4. Здесь первая спираль служит для введения в электронный луч сигнала делимой частоты

Рис. 4 Блок-схема делителя частоты на ЛБВ с разделенными спиральями, в котором используется явление резонанса второго рода и захватывания на гармониках:

1 — блок питания кластрона, 2 — кластрон, 3 — аттенюатор, 4 — фазовращатель, 5 — контур на 10 си., 6 — детектор, 7 — ЛБВ, 8 — блок питания ЛБВ, 9 — генератор, развертки, 10 — осциллограф.



$2f \simeq 6000$ мгц, а вторая спираль является замедляющей системой ЛБВ-генератора с внешней обратной связью, настроенного на частоту $f \simeq 3000$ мгц. Частота генератора определяется в основном резонансной частотой колебательного контура в цепи обратной связи, подавляющего нежелательные типы колебаний. В зависимости от затухания аттенюатора, расположенного в цепи обратной связи, режим ЛБВ-генератора может быть либо автоколебательным (и тогда деление частоты происходит в режиме захватывания на втором обертоне), либо потенциально автоколебательным (в этом случае можно осуществить резонанс второго рода).

Можно указать два преимущества такого делителя перед соответствующим клистронным делителем [1]: 1) введение делимого сигнала в электронный поток с помощью отдельной спиральной линии позволяет добиться большой эффективности воздействия делимого сигнала на ЛБВ-генератор и осуществить практически полную развязку (40–50 дБ) между ЛБВ-генератором и источником делимого сигнала; 2) относительная нестабильность частоты ЛБВ-генератора с внешней обратной связью, равная

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q_n} \sum \frac{\partial\Phi}{\partial P_i} \Delta P_i,$$

где Q_n — погруженная добротность резонатора в цепи обратной связи и P_i — параметры (токи, напряжения, температура и т. п.), от которых зависит величина фазового набега Φ в ЛБВ и тракте обратной связи, может быть сделана существенно меньшей, нежели в клистроне. При $Q_n \simeq 3 \cdot 10^2$ и аккумуляторном питании ЛБВ возможно получение $\Delta\omega/\omega \simeq 3 \cdot 10^{-6}$.

Осциллограммы рис. 5 иллюстрируют наблюдавшиеся явления захватывания на второй гармонике и резонанса второго рода. При токе коллектора 700–800 мка, $Q_n \approx 500 \pm 700$ в ЛБВ-генераторе, отдававшем в автономном режиме в нагрузку мощность

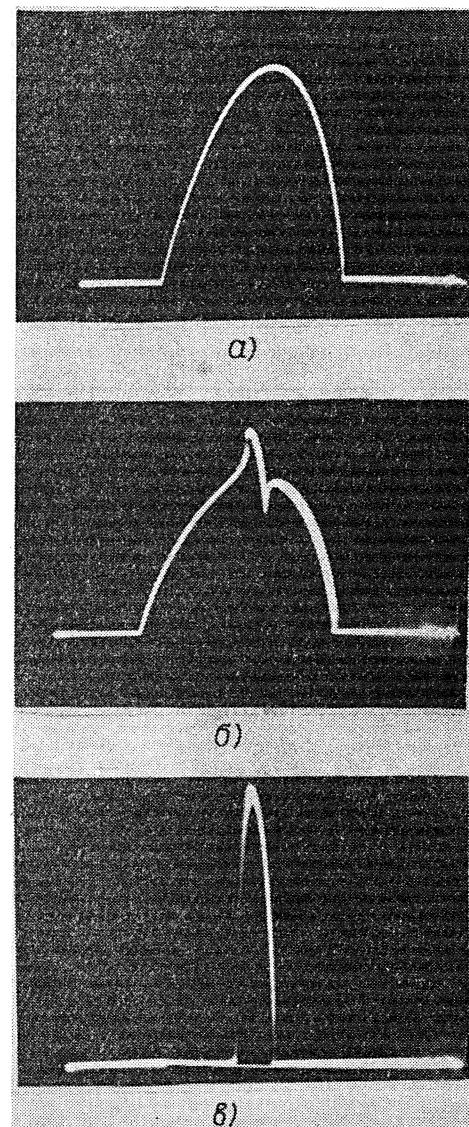


Рис. 5. Осциллограммы мощности на выходе генератора на ЛБВ с разделенными спиральами; меняется напряжение на второй спирали:

а — область генерации автономного ЛБВ-генератора, б — захватывание на втором обертоне, в — резонанс второго рода.

1,5 мвт, ширина области электронной настройки составляла $\sim 8 \div 10$ мгц. При мощности входного сигнала 100 мквт полоса резонанса второго рода и захватывания на втором обертоне достигала $\sim 1,2 \div 1,5$ мгц. При достаточно высоком уровне входной мощности сигнала частоты 2f наблюдалось подавление генерации вне области захватывания.

Приведенные в настоящей статье результаты свидетельствуют о целесообразности использования ЛБВ с разделенными спиралями при создании СВЧ делителей частоты. Особо должна быть отмечена возможность создания широкополосного регенеративного делителя частоты, в котором используются волноводные смеситель и умножитель. Значительный интерес представляет использование явления параметрического усиления в указанных устройствах. К достоинствам параметрического волноводного смесителя относятся устойчивость, широкополосность и значительное усиление при преобразовании.

Результаты экспериментального наблюдения резонанса второго рода и захватывания на второй гармонике представлены здесь в качестве иллюстрации определенных преимуществ, предоставляемых ЛБВ с разделенными спиралями в делителях такого типа. Вместе с тем, следует отметить, что последние успехи, достигнутые в области разработки полупроводниковых диодов с нелинейной емкостью (см., например, [10]), в ряде случаев делают практически нецелесообразным (особенно при малых кратностях деления) использование явлений захватывания на обертонах и резонанса n -го рода в электронных генераторах для деления частоты. Возможно также создание волноводных смесителей и умножителей частоты на полупроводниковых диодах с нелинейной емкостью.

Авторы приносят искреннюю признательность Д. К. Акулиной за большую помощь в проведении работы и полезное обсуждение результатов. Авторы благодарны С. Д. Гвоздоверу за неизменный интерес и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Е Н Базаров, М Е Жаботинский, Радиотехника и электроника, 1 680, (1956).
- 2 H. Lyons, J. Appl. Phys., 21, 59 (1950).
- 3 R. de Grasse, G. Wade, Proc. IRE, 45, 1013 (1957).
- 4 С. А Ахманов, А. С Горшков, И. Т. Трофименко, А. К. Романюк, Деление частоты в ЛБВ с разделенными спиралями, Отчет физического ф-та МГУ, 1959.
- 5 P. K. Tien, J. Appl. Phys., 29, 1347 (1958).
- 6 W. LoiselI, G. Quate, Proc. IRE, 46, 707 (1958).
- 7 Д. К Акулина, С А Ахманов, С. Д. Гвоздовер, А. С. Горшков, И. Т. Трофименко, Радиотехника и электронника, 5, 1736 (1960).
- 8 W. LoiselI, J. Electron. and Control, 6, 1 (1959).
- 9 C. Page, Proc. IRE, 46, 1738 (1958).
- 10 D. Leepov, A. Uhlig, Proc. IRE, 47, 1724 (1959).
- 11 D. Bates, E. Ginztom, Proc. IRE, 45, 938 (1957).

FREQUENCY DIVISION ON SUPER-HIGH FREQUENCIES WITH THE
HELP OF TRAVELING WAVE TUBES*S. A. Akhmanov, A. S. Gorshkov, I. T. Trofimenko*

A description is given of frequency dividers in the centimeter and decimeter bands. In apparatus the travelling wave tubes with separated spirals are used. A regenerative divider utilizing a broadband mixer on TWT permitted the realization of a stable division by 3 and 4 of the frequency of a signal in the centimeter band with a minimum power of 50 μw . A description is also given of a frequency divider utilizing the effects of the second order resonance and the locking on the harmonics of the TWT generator with an external feedback. The possibilities are discussed of improving the operational characteristics of frequency dividers. The expediency is noted of the utilization of waveguide parametric mixers and frequency multipliers in wide-band regenerative dividers.

К РАСЧЕТУ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СХЕМ НА ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ТРИОДАХ

Н. И. Ашбель и Л. В. Постников

Рассмотрена произвольная полупроводниковая автоколебательная система с одной степенью свободы. На основе кусочно-линейной идеализации получены общие соотношения, характеризующие разбиение фазовой плоскости на области линейности, распределение в них состояний равновесия и их устойчивость. Для случая однолистной фазовой плоскости написано точечное преобразование граничных прямых друг в друга.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследованию автоколебательных схем на транзисторах посвящен ряд работ *. Многообразие используемых в них методов расчета обусловлено особенностями конкретных схем, а также спецификой физических свойств полупроводников.

В ряде случаев целесообразно аппроксимировать статические характеристики транзисторов кусочно-линейными функциями. При этом, как показало сопоставление результатов работ [2-4], возможна постановка задачи в общем виде. В настоящей работе такая задача поставлена применительно к автономной системе с одной степенью свободы и с одним полупроводниковым триодом. Исходя из упомянутой идеализации, динамику такой системы можно описать дифференциальными уравнениями второго порядка, линейными в каждой из четырех областей, на которые разбивается фазовая плоскость системы. Проведенное исследование дало возможность получить некоторые общие соотношения, характеризующие поведение системы, а для случая однолистной фазовой плоскости написать точечные преобразования границ областей линейности друг в друга.

Предположим, что в автономной системе второго порядка вся нелинейность сосредоточена в полупроводниковом триоде. Следуя [2], записываем уравнения статических характеристик последнего в виде:

$$\begin{aligned} J_k &= g_m v_k - \alpha g_n v_s; \\ J_s &= g_n v_s - \beta g_m v_k, \end{aligned} \quad (1)$$

где J_k , J_s и v_k , v_s — соответственно токи и напряжения коллектора и эмиттера. Уравнения (1) линейны в каждой из четырех областей G_{mn} , определяемых неравенствами

$$\begin{aligned} (-1)^m v_k &\leq 0; \quad (-1)^n v_s \leq 0 \\ (m, n = 0 \text{ или } 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что $g_m \neq g_n$ при $m=n$ и, кроме того,

$$0 < g_0^m < g_1^m, \quad 0 < g_0^n < g_1^n.$$

Параметры α и β для плоскостных триодов меньше единицы; для то-

* См., например, монографию [1] и приведенный в ней перечень литературы.

чечных триодов $\alpha > 1$, $\beta < 1$, $\alpha\beta < 1$. Уравнения (1) переходят в уравнения двух диодов при $\alpha = \beta = 0$.

Обозначим через x и y те переменные, которые не могут изменяться скачком (например, напряжение на емкости или ток через индуктивность).

Для линейной части схемы получается следующая система уравнений:

$$a_{i1}\dot{x} + a_{i2}\dot{y} + a_{i3}v_k + a_{i4}v_s + a_{i5}J_k + a_{i6}J_s = b_{i1}x + b_{i2}y + b_{i3} \quad (3)$$

$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

где a и b — постоянные коэффициенты, не зависящие от параметров полупроводников.

Система (3) после подстановки J_k и J_s из уравнений (1) записывается так:

$$a_{i1}\dot{x} + a_{i2}\dot{y} + a_{im}v_k + a_{in}v_s = b_{i1}x + b_{i2}y + b_{i3};$$

$$G_{mn} : (-1)^m v_k \leq 0; \quad (-1)^n v_s \leq 0. \quad (4)$$

Здесь

$$a_{im} = a_{i3} + g_m a_{i5} - \beta g_m a_{i6};$$

$$a_{in} = a_{i4} + g_n a_{i6} - \sigma g_n a_{i5}.$$

Допустим, что детерминант A , составленный из коэффициентов левой части системы уравнений (4), отличен от нуля в каждой области G_{mn} . Тогда, разрешая эти уравнения относительно переменных x , y , v_k и v_s , получим:

$$\begin{aligned} A\dot{x} &= x \sum b_{i1} A_1^i + y \sum b_{i2} A_1^i + \sum b_{i3} A_1^i; \\ A\dot{y} &= x \sum b_{i1} A_2^i + y \sum b_{i2} A_2^i + \sum b_{i3} A_2^i; \\ A v_k &= x \sum b_{i1} A_m^i + y \sum b_{i2} A_m^i + \sum b_{i3} A_m^i; \\ A v_s &= x \sum b_{i1} A_n^i + y \sum b_{i2} A_n^i + \sum b_{i3} A_n^i. \end{aligned} \quad (5)$$

(Пояснения смысла снабженных индексами величин A , встречающихся в этих и последующих уравнениях, а также некоторые соотношения из теории матриц [5], использованные при расчетах, вынесены в приложение.)

Первая пара уравнений системы (5) является дифференциальными уравнениями движения; вторая пара при подстановке значений v_k и v_s в неравенства (2) определяет расположение областей G_{mn} на плоскости xy .

2. РАЗБИЕНИЕ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ НА ОБЛАСТИ ЛИНЕЙНОСТИ

Области линейности G_{mn} на фазовой плоскости xy определяются неравенствами

$$\Gamma_m = \frac{(-1)^m}{A} \left(x \sum b_{i1} A_m^i + y \sum b_{i2} A_m^i + \sum b_{i3} A_m^i \right) \leq 0; \quad (6)$$

$$\Gamma_n = \frac{(-1)^n}{A} \left(x \sum b_{i1} A_n^i + y \sum b_{i2} A_n^i + \sum b_{i3} A_n^i \right) \leq 0,$$

из которых следует, что плоскость xy в общем случае разбивается на четыре области линейности полупряммы, выходящими из одной точки.

Действительно, координаты точки пересечения границ $\Gamma_m = 0$ и $\Gamma_n = 0$

$$\bar{x} = \frac{\sum b_{i2} b_{j3} A_{mn}^{ij}}{\sum b_{ii} b_{j2} A_{mn}^{ij}}; \quad \bar{y} = -\frac{\sum b_{ii} b_{j3} A_{mn}^{ij}}{\sum b_{ii} b_{j2} A_{mn}^{ij}} \quad (7)$$

$$(i, j=1, 2, 3, 4)$$

не зависят от индексов m и n^* и, следовательно, будут одинаковыми для всех областей G_{mn} . Если $\sum b_{ii} b_{j2} A_{mn}^{ij} = 0$, то границы параллельны друг другу.

Покажем, что области G_{mn} и $G_{m\bar{n}}$ ($\bar{m} = 1-m$) имеют общую границу, т. е. примыкают друг к другу. Для этого достаточно убедиться в том, что точки, бесконечно близкие к границе $\Gamma_m = 0$, как в области G_{mn} , так и в области $G_{m\bar{n}}$ удовлетворяют неравенству $\Gamma_n < 0$.

В самом деле, бесконечно близкие к этой границе точки даются уравнением

$$x \sum b_{ii} A'_m + y \sum b_{i2} A_m^i + \sum b_{i1} A_m^i = A v_k, \quad (8)$$

при этом величина $|v_k|$ достаточно мала. Если $\sum b_{ii} A_m^i \neq 0$, то, находясь из уравнения (8) x и подставляя его значение в нижнюю строчку неравенства (6), получим:

$$\frac{(-1)^n}{\sum b_{ii} A_m^i} \left(y \sum b_{ii} b_{j2} A_{mn}^{ij} + \sum b_{ii} b_{j3} A_{mn}^{ij} + v_k \sum b_{ii} A_n^i \right) \leq 0. \quad (9)$$

Отсюда видно, что если мы не находимся в точке пересечения границ (т. е. $y \neq \bar{y}$), то при $v_k \rightarrow 0$ неравенство (9) сохранит в области $G_{m\bar{n}}$ тот же смысл, какой оно имело в области G_{mn} .

В случае $\sum b_{ii} A_m^i = 0$ разрешаем уравнение (8) относительно y и приходим к неравенству, аналогичному (9):

$$\frac{(-1)^n}{\sum b_{i2} A_m^i} \left(x \sum b_{ii} b_{j2} A_{nm}^{ij} + \sum b_{i3} b_{j2} A_{nm}^{ij} + v_k \sum b_{ii} A_n^i \right) \leq 0. \quad (9a)$$

Точно так же можно показать, что области G_{mn} и $G_{\bar{m}n}$ имеют общую границу.

Граница $\Gamma_m = 0$ существует, если при $\sum b_{ii} A'_m \neq 0$ выполняется неравенство

$$\frac{(-1)^n}{\sum b_{ii} A_m^i} \left(y \sum b_{ii} b_{j2} A_{mn}^{ij} + \sum b_{ii} b_{j3} A_{mn}^{ij} \right) \leq 0$$

или при $\sum b_{ii} A_m^i = 0$, но $\sum b_{i2} A_m^i \neq 0$, справедливо неравенство

* A_{mn}^{ij} не зависит от индексов m, n (см. приложение).

$$\frac{(-1)^n}{\sum b_{i2} A_m^i} \left(x \sum b_{i1} b_{j2} A_{mn}^{ij} + \sum b_{i3} b_{j2} A_{mn}^{ij} \right) \leq 0.$$

Как явствует из этих неравенств, при $\sum b_{i1} b_{j2} A_{mn}^{ij} \neq 0$ граница $\Gamma_m = 0$ существует для любого n .

Аналогично показывается существование границы $\Gamma_n = 0$ для любого m .

Следовательно, при $\sum b_{i1} b_{j2} A_{mn}^{ij} \neq 0$ существуют все четыре области G_{mn} .

В случае $\sum b_{i1} b_{j2} A_{mn}^{ij} = 0$ граница $\Gamma_m = 0$ существует при выполнении условий

$$\frac{(-1)^n}{\sum b_{i1} A_m^i} \sum b_{i1} b_{j3} A_{mn}^{ij} < 0 \quad \text{и} \quad \sum b_{i1} A_m^i \neq 0 \quad (10)$$

или

$$\frac{(-1)^n}{\sum b_{i2} A_m^i} \sum b_{i2} b_{j3} A_{mn}^{ij} < 0 \quad \text{и} \quad \sum b_{i2} A_m^i \neq 0.$$

Нетрудно показать тождественность неравенств (10), если выполняется соотношение

$$\sum b_{i1} b_{j2} A_{mn}^{ij} = \sum b_{i1} b_{j2} (A_m^i A_n^j - A_m^j A_n^i) A = 0.$$

Переставляя местами индексы m и n , получим условия существования границы $\Gamma_n = 0$.

Из неравенств (6) следует, что если при переходе из одной области G_{mn} в другую знак величины A сохраняется, то эти области, не налагаясь, заполняют всю фазовую плоскость (однолистная фазовая плоскость). Если же в трех областях $G_{mn} A > 0$, а в четвертой $A < 0$, то фазовая плоскость в этой области — трехлистная. В этом случае система уравнений (5) противоречива и ее необходимо дополнять либо гипотезой скачка, либо учетом существенных малых параметров. Возникающие при этом автоколебания будут разрывными [6].

3. СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ, ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СИСТЕМЫ

Положив в первых двух уравнениях системы (5) $x = y = 0$ и разрешив их относительно x и y , получим выражения для координат состояний равновесия:

$$x_0 = \frac{\sum b_{i2} b_{j3} A_{12}^{ij}}{\sum b_{i1} b_{j2} A_{12}^{ij}} ; \quad y_0 = - \frac{\sum b_{i1} b_{j3} A_{12}^{ij}}{\sum b_{i1} b_{j2} A_{12}^{ij}}.$$

Эта точка будет находиться в области G_{mn} , если ее координаты удовлетворяют неравенствам (6), т. е.

$$(-1)^m \frac{\sum b_{i1} b_{j2} b_{l3} A_{12m}^{ijl}}{\sum b_{i1} b_{j2} A_{12}^{ij}} = (-1)^m \gamma_m \leq 0; \quad (11)$$

$$(-1)^n \frac{\sum b_{i1} b_{j2} b_{l3} A_{12n}^{ijl}}{\sum b_{i1} b_{j2} A_{12}^{ij}} = (-1)^n \gamma_n \leq 0$$

$$(i, j, l = 1, 2, 3, 4).$$

Если γ_m и γ_n имеют во всех областях один и тот же знак, то состояние равновесия единственно.

Характеристическое уравнение системы (5) имеет вид:

$$Ap^2 - \left(\sum b_{i1} A_1^i + \sum b_{i2} A_2^i \right) p + \sum b_{i1} b_{j2} A_{12}^{ij} = 0. \quad (12)$$

4. ФУНКЦИИ СООТВЕТСТВИЯ

Рассмотрим случай однолистной фазовой плоскости. Чтобы найти точечные преобразования границ друг в друга и самих в себя, запишем уравнения границ $\Gamma_m=0$ и $\Gamma_n=0$ в параметрическом виде, обозначив соответственно через s_m и s_n параметры границ:

$$\begin{aligned} \Gamma_m = 0: \quad x_m &= \tilde{x}_m + \xi_m s_m \sum b_{i2} A_m^i; \\ y_m &= \tilde{y}_m - \xi_m s_m \sum b_{i1} A_m^i; \\ \Gamma_n = 0: \quad x_n &= \tilde{x}_n + \xi_n s_n \sum b_{i2} A_n^i; \\ y_n &= \tilde{y}_n - \xi_n s_n \sum b_{i1} A_n^i, \end{aligned} \quad (13)$$

где \tilde{x}_m и \tilde{y}_m , \tilde{x}_n и \tilde{y}_n — координаты точек контакта на соответствующих границах, а ξ_m и ξ_n — масштабные множители, не зависящие от приписанных им индексов. Выражения для перечисленных величин будут приведены ниже.

Как видно из уравнений (13), параметр s_m не зависит от m , т. е. будет одним и тем же для обеих областей, примыкающих к границе $\Gamma_m=0$. То же относится к параметру s_n , который не зависит от индекса n .

Преобразуем верхнюю пару уравнений системы (5) к виду:

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1; \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2.$$

Для этого заменой переменных $x=x_0+X$, $y=y_0+Y$ перенесем начало координат в состояние равновесия и с помощью преобразования $z_1 = \varepsilon_1 X + \mu_1 Y$; $z_2 = \varepsilon_2 X + \mu_2 Y$ повернем оси координат.

Как известно, ε и μ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\sum b_{i1} A_1^i - A \lambda_1 \right) + \mu \sum b_{i2} A_2^i &= 0; \\ \varepsilon \sum b_{i2} A_1^i + \mu \left(\sum b_{i2} A_2^i - A \lambda_2 \right) &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

нетривиальные решения которых получаются при обращении в нуль ее детерминанта:

$$A \lambda^2 - \left(\sum b_{i1} A_1^i + \sum b_{i2} A_2^i \right) \lambda + \sum b_{i1} b_{j2} A_{12}^{ij} = 0. \quad (15)$$

(Уравнение (15) тождественно с характеристическим уравнением (12).)

Система (14) позволяет определить лишь отношения $\mu_1/\varepsilon_1 = k_1$,

$\mu_2/\varepsilon_2 = k_2$. Поэтому можно наложить на ε и μ два дополнительных условия:

$$\varepsilon_1 \mu_2 - \varepsilon_2 \mu_1 = 1; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon.$$

Тогда

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{k_2 - k_1}}; \quad \mu_1 = \frac{k_1}{\sqrt{k_2 - k_1}}; \quad \mu_2 = \frac{k_2}{\sqrt{k_2 - k_1}}.$$

Кроме того, нетрудно показать, что

$$k_2 - k_1 = A \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\sum b_{11} A_2^i}; \quad \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} = A \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\sum b_{11} A_1^i}.$$

На основе полученных зависимостей можно, переходя к координатам z_1 и z_2 , получить дифференциальные уравнения

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1; \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2. \quad (16)$$

Формулы (6), определяющие расположение областей G_{mn} на фазовой плоскости, преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_m &= \frac{(-1)^m}{A} \left(z_1 \sum c_{i2} A_m^i - z_2 \sum c_{11} A_m^i + A \gamma_m \right) \leq 0; \\ \Gamma_n &= \frac{(-1)^n}{A} \left(z_1 \sum c_{i2} A_n^i - z_2 \sum c_{11} A_n^i + A \gamma_n \right) \leq 0, \end{aligned} \quad (17)$$

а уравнения границ в параметрической форме записутся в виде:

$$\Gamma_m = 0: \quad z_{1m} = \tilde{z}_{1m} - \xi_m s_m \sum c_{11} A_m^i; \quad z_{2m} = \tilde{z}_{2m} - \xi_m s_m \sum c_{i2} A_m^i; \quad (18)$$

$$\Gamma_n = 0: \quad z_{1n} = \tilde{z}_{1n} - \xi_n s_n \sum c_{i1} A_n^i; \quad z_{2n} = \tilde{z}_{2n} - \xi_n s_n \sum c_{i2} A_n^i,$$

где

$$c_{11} = \mu_1 b_{11} - \varepsilon b_{i2}, \quad c_{i2} = \mu_2 b_{11} - \varepsilon b_{i2}.$$

Описанное преобразование координат не является линейным на всей плоскости xy . Однако это не имеет значения, поскольку s_m по-прежнему не зависит от m , а s_n — от n .

Координаты точек контакта на границе $\Gamma_m = 0$ удовлетворяют уравнениям:

$$\tilde{z}_{1m} \sum c_{i2} A_m^i - \tilde{z}_{2m} \sum c_{11} A_m^i = -A \gamma_m;$$

$$\tilde{z}_{1m} \lambda_1 \sum c_{i2} A_m^i - \tilde{z}_{2m} \lambda_2 \sum c_{11} A_m^i = 0.$$

Решая эту систему и вводя обозначение $\omega = (\lambda_2 - \lambda_1)/2$, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{1m} &= -\frac{A \lambda_2 \gamma_m}{2\omega \sum c_{i2} A_m^i}; \quad \tilde{z}_{2m} = -\frac{A \lambda_1 \gamma_m}{2\omega \sum c_{11} A_m^i}; \\ \tilde{z}_{1n} &= -\frac{A \lambda_2 \gamma_n}{2\omega \sum c_{i2} A_n^i}; \quad \tilde{z}_{2n} = -\frac{A \lambda_1 \gamma_n}{2\omega \sum c_{11} A_n^i}. \end{aligned} \quad (19)$$

Интегрируя уравнения (16) с начальной точкой на границе $\Gamma_m=0$ и конечной на границе $\Gamma_n=0$, найдем:

$$z_{1n} = z_{1m} e^{\lambda_1 \tau}; \quad z_{2n} = z_{2m} e^{\lambda_2 \tau}$$

(τ — время пробега изображающей точки по траектории, соединяющей границы). Подставляя z_{1m} , z_{2m} , z_{1n} и z_{2n} из выражений (18) и используя формулы (19), после ряда упрощений получим уравнения функций соответствия в параметрической форме:

$$\begin{aligned} \xi_m s_m &= \frac{A\omega}{\sqrt{\eta_m}} \frac{-d_n e^{-\sigma\tau} + d_m \left[\operatorname{ch} \omega(\tau + \tau_{mn}) - \frac{\sigma}{\omega} \operatorname{sh} \omega(\tau + \tau_{mn}) \right]}{\operatorname{sh} \omega(\tau + \tau_{mn})}; \\ \xi_n s_n &= \frac{A\omega}{\sqrt{\eta_n}} \frac{d_m e^{\sigma\tau} - d_n \left[\operatorname{ch} \omega(\tau + \tau_{mn}) + \frac{\sigma}{\omega} \operatorname{sh} \omega(\tau + \tau_{mn}) \right]}{\operatorname{sh} \omega(\tau + \tau_{mn})}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь

$$d_m = \frac{\gamma_m}{\sqrt{\eta_m}}; \quad d_n = \frac{\gamma_n}{\sqrt{\eta_n}}; \quad \sigma = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2};$$

$$\gamma_m = \sum A_m^i b_{j2} b_{l1} (b_{l2} A_{m2}^{ji} + b_{l1} A_{m1}^{jl});$$

$$\gamma_n = \sum A_n^i b_{j2} b_{l1} (b_{l2} A_{n2}^{jl} + b_{l1} A_{n1}^{jl});$$

$$\tau_{mn} = \frac{1}{2\omega} \ln \frac{1+w}{1-w};$$

$$w = \frac{2A \sum b_{l2} b_{j1} A_{mn}^{ij} \omega}{\sum [b_{j2} b_{l1} A_m^i (b_{l1} A_{n1}^{jl} + b_{l2} A_{n2}^{jl}) + b_{j2} b_{l1} A_n^i (b_{l1} A_{m1}^{jl} + b_{l2} A_{m2}^{jl})]}.$$

Преобразование, определяемое уравнениями (20), существует при выполнении двух условий:

1) на границах $\Gamma_m=0$ и $\Gamma_n=0$ должны существовать соответственно точки s_m и s_n ;

2) фазовая траектория должна входить в область G_{mn} через границу $\Gamma_m=0$ и выходить из нее через границу $\Gamma_n=0$.

Первое условие найдем, подставляя в неравенства (17) координаты границ из уравнений (18). В результате несложных преобразований его можно привести к виду:

$$\begin{aligned} (-1)^m \sqrt{\eta_m} \left[d_m - d_n \left(\operatorname{ch} \omega \tau_{mn} + \frac{\sigma}{\omega} \operatorname{sh} \omega \tau_{mn} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{s_m \xi_n}{A\omega} \sqrt{\eta_n} \operatorname{sh} \omega \tau_{mn} \right) \right] \leq 0; \\ (-1)^n \sqrt{\eta_n} \left[d_n - d_m \left(\operatorname{ch} \omega \tau_{mn} - \frac{\sigma}{\omega} \operatorname{sh} \omega \tau_{mn} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{s_m \xi_m}{A\omega} \sqrt{\eta_m} \operatorname{sh} \omega \tau_{mn} \right) \right] \leq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Второе условие получим, воспользовавшись тем, что скалярное произведение вектора фазовой скорости на внешнюю нормаль к границе $\Gamma_m=0$ должно быть меньше нуля. Аналогичное произведение на границе $\Gamma_n=0$ должно быть больше нуля. Таким образом, это условие сводится к неравенствам

$$\frac{(-1)^m}{A} \left(z_{1m} \lambda_1 \sum c_{i2} A_m^i - z_{2m} \lambda_2 \sum c_{i1} A_m^i \right) < 0;$$

$$\frac{(-1)^n}{A} \left(z_{1n} \lambda_1 \sum c_{i2} A_n^i - z_{2n} \lambda_2 \sum c_{i1} A_n^i \right) < 0;$$

или, выражая координаты границ через s_m и s_n с помощью уравнений (18) и используя формулы (19), к неравенствам

$$\begin{aligned} (-1)^m \frac{\eta_m \xi_m}{A} s_m &> 0. \\ (-1)^n \frac{\eta_n \xi_n}{A} s_n &> 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Для того, чтобы s_m и s_n были положительными для любого преобразования, положим

$$\xi_m = -\frac{(-1)^m}{\tau_{lm}} \operatorname{sgn} A, \quad \xi_n = \frac{(-1)^n}{\tau_{ln}} \operatorname{sgn} A.$$

Подставляя эти значения в уравнения (20) и неравенства (21), получим:

$$s_m = \frac{\omega |A| \sqrt{\tau_{lm}} (-1)^m \left\{ d_n e^{-\tau} - d_m \left[\operatorname{ch} \omega (\tau + \tau_{mn}) - \frac{\sigma}{\omega} \operatorname{sh} \omega (\tau + \tau_{mn}) \right] \right\}}{\operatorname{sh} \omega (\tau + \tau_{mn})};$$

$$s_n = \frac{\omega |A| \sqrt{\tau_{ln}} (-1)^n \left\{ d_m e^{\tau} - d_n \left[\operatorname{ch} \omega (\tau + \tau_{mn}) + \frac{\sigma}{\omega} \operatorname{sh} \omega (\tau + \tau_{mn}) \right] \right\}}{\operatorname{sh} \omega (\tau + \tau_{mn})}; \quad (23)$$

$$(-1)^m \sqrt{\tau_{lm}} \left[d_m - d_n \left(\operatorname{ch} \omega \tau_{mn} + \frac{\sigma}{\omega} \operatorname{sh} \omega \tau_{mn} \right) - \frac{s_n (-1)^n}{\omega |A| \sqrt{\tau_{ln}}} \operatorname{sh} \omega \tau_{mn} \right] \leq 0;$$

$$(-1)^n \sqrt{\tau_{ln}} \left[d_n - d_m \left(\operatorname{ch} \omega \tau_{mn} - \frac{\sigma}{\omega} \operatorname{sh} \omega \tau_{mn} \right) - \frac{s_m (-1)^m}{\omega |A| \sqrt{\tau_{lm}}} \operatorname{sh} \omega \tau_{mn} \right] \leq 0. \quad (24)$$

Выражения (23) справедливы и для преобразования границы $\Gamma_m=0$ (или $\Gamma_n=0$) в себя. Для этого индекс n надо заменить индексом m (в случае преобразования границы $\Gamma_n=0$ в себя индекс m заменить индексом n). Нетрудно усмотреть, что при этом $\tau_{mn}=0$ ^{*}.

Выпишем еще выражения для производных от функций соответствия по τ :

$$\frac{ds_m}{d\tau} = \frac{\omega \sqrt{\tau_{lm}} e^{-\tau}}{\sqrt{\tau_{ln}} \operatorname{sh} \omega (\tau + \tau_{mn})} (-1)^{m+n} s_n; \quad (25)$$

* Величина $\tau_{mn}=0$ также в случае преобразования параллельных границ друг в друга.

$$\frac{ds_n}{d\tau} = \frac{\omega \sqrt{\eta_n} e^{\sigma \tau}}{\sqrt{\eta_m} \operatorname{sh} \omega (\tau + \tau_{mn})} (-1)^{m+n} s_m.$$

Отсюда

$$\frac{ds_n}{ds_m} = \frac{\gamma_n}{\gamma_m} e^{2\sigma \tau} \frac{s_m}{s_n}. \quad (26)$$

Из уравнений (23), (25) и (26) следует, что функции соответствия являются непрерывными, монотонно нарастающими (если η_m и η_n имеют одинаковые знаки) или монотонно убывающими (если знаки η_m и η_n разные) функциями с непрерывными производными.

Цельнейшее исследование функций соответствия в общем виде, нахождение периодических режимов и выяснение их устойчивости представляет собой сложную задачу и в данной работе не проводится, хотя использование работы по общим вопросам точечных преобразований [7], как нам кажется, позволило бы это сделать.

Исследование преобразований (23) применительно к конкретной схеме изложено в работе [2].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обозначения детерминантов и некоторые формулы теории матриц

Как указывалось выше, через A обозначен детерминант

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1m} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2m} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{3m} & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{4m} & a_{4n} \end{vmatrix}.$$

Произведем замену элемента a_{ij} ($i=1, 2, 3, 4$; $j=1, 2, m, n$), стоящего на пересечении i -ой строки и j -го столбца, единицей, а остальные элементы этой строки и этого столбца — нулями. Тогда получим детерминант, обозначенный через A_j^i . Например,

$$A_m^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{4n} \end{vmatrix}.$$

Отсюда, в частности, видно, что A_m^2 не зависит от индекса m области G_{mn} .

Аналогично через A_{jl}^{ik} ($i, k=1, 2, 3, 4$; $j, l=1, 2, m, n$) обозначен детерминант, образованный из A_j^i заменой элемента, стоящего на пересечении k -ой строки и l -го столбца, единицей, а остальных элементов этой строки и этого столбца — нулями. Например,

$$A_{mn}^{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

причем этот детерминант не зависит от индексов m и n области G_{mn} . Точно так же образуются детерминанты с большим числом индексов.

При вычислениях были использованы следующие тождества, справедливые для детерминантов с любым числом индексов:

$$A_{jl}^{ii} = A_{jj}^{ik} = 0; \quad A_{jj}^{ii} = A_j^i; \quad A_{jl}^{ik} = -A_{jl}^{ki};$$

$$A = \sum_i a_{ij} A_i^j = \sum_l a_{lj} A_l^i = \sum_{l, k} a_{lj} a_{kl} A_{jl}^{ik} = \sum_{j, l} a_{ij} a_{kl} A_{jl}^{ik} = \dots$$

Нетрудно показать, что заменой в детерминанте A столбца j столбцом с элементами b_i получим $\sum_i b_i A_j^i$; если же в детерминанте A столбец j и столбец l заменены соответственно столбцами с элементами b_{k1} и b_{k2} , то получим $\sum_{i, k} b_{i1} b_{k2} A_{jl}^{ik}$. Например,

$$\sum_{i, k} b_{i1} b_{k2} A_{2n}^{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & a_{1m} & b_{12} \\ a_{21} & b_{21} & a_{2m} & b_{22} \\ a_{31} & b_{31} & a_{3m} & b_{32} \\ a_{41} & b_{41} & a_{4m} & b_{42} \end{vmatrix}.$$

В статье (например, при выводе уравнений (7), (9) и др.) были применены так называемые формулы обращения:

$$\begin{vmatrix} A_k^i & A_l^i \\ A_k^j & A_l^j \end{vmatrix} = A A_{kl}^{ij};$$

$$\begin{vmatrix} A_k^i & A_l^i & A_s^i \\ A_k^j & A_l^j & A_s^j \\ A_k^r & A_l^r & A_s^r \end{vmatrix} = (A)^2 A_{kls}^{ijs}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Азьян, Г. Н. Берестовский, Л. Н. Капцов, К. С. Ржевкин и К. Я. Сенаторов, Полупроводниковые триоды в регенеративных схемах, Госэнергониздат, М., 1959.
2. Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 767 (1959).
3. Н. И. Ашбель, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 866 (1960).
4. В. Г. Аранович и Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
5. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, ГИТТЛ, М., 1953
6. А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
7. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 41 (1958); 1, 2, 95 (1958); 1, 5—6, 146 (1958)

TO THE CALCULATION OF AUTOOSCILLATING CIRCUITS WITH SEMICONDUCTOR TRIODES

N. I. Ashbel and L. V. Postnikov

A semiconductor autooscillating system with one degree of freedom is considered. By means of piecilinear idealization, general relationships are obtained, characterizing the division of phase plane in regions of linearity, the distribution of equilibrium states and their stability. For the case of a single-sheet phase plane the pointwise transformation of boundary straight lines one into the other is written.

АВТОКОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХПОЗИЦИОННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ С ТЕПЛОВЫМ ИЗОДРОМНЫМ УСТРОЙСТВОМ

A. С. Алексеев, В. А. Дозоров

Релейный регулятор температуры с тепловым изодромным устройством рассматривается как нелинейная динамическая система второго порядка с двумя постоянными запаздываниями по времени. Методом точечных преобразований доказано существование в системе единственного простого устойчивого автоколебательного режима и даны выражения для периода и амплитуды автоколебаний.

1. В настоящее время нашли широкое применение двухпозиционные регуляторы температуры с тепловыми изодромными устройствами [1,2], которые, как показала практика, улучшают качество регулирования. В тепловом изодромном устройстве, как и в самом объекте регулирования, имеется запаздывание, которое необходимо учитывать при исследовании динамики таких систем.

Представляя объект и изодромное устройство в виде одноемкостных звеньев с запаздыванием, получим для рассматриваемой системы регулирования, структурная схема которой изображена на рис. 1, следующие уравнения:

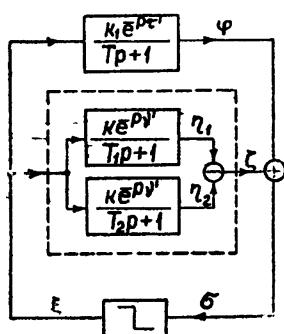


Рис. 1.

$$\begin{aligned}
 T \dot{\varphi} + \varphi &= k_1 \xi (t' - \tau'); \\
 T_1 \dot{\eta}_1 + \eta_1 &= k \xi (t' - \nu'); \\
 T_2 \dot{\eta}_2 + \eta_2 &= k \xi (t' - \nu'); \\
 \zeta &= \eta_2 - \eta_1; \quad \sigma = \varphi + \zeta; \\
 \xi &= \begin{cases} b & (\sigma > c') \\ 0 & (\sigma < c') \end{cases} \\
 &\text{при } \sigma = c' \text{ сохраняется то значение } \xi, \text{ которое было до этого}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Изодромное устройство всегда конструируется так, чтобы постоянная времени T_2 была возможно меньше. Поэтому обычно в системе $T_2 \ll T, T_1$, что позволяет в дальнейшем считать $T_2 = 0$. Тогда, введя безразмерные переменные

$$t = t'/T, \quad x = \varphi/bk_1, \quad y = \zeta/bk_1, \quad z = \xi/b \tag{1.2}$$

и параметры

$$\tau = \tau'/T, \quad \nu = \nu'/T, \quad \alpha = T/T_1, \quad a = k/k_1, \quad c = c'/bk_1, \tag{1.3}$$

из (1.1) получим:

$$\begin{aligned} \dot{x} + x &= z(t - \tau); \\ \dot{y} + \alpha y &= az(t - \nu); \\ z &= \begin{cases} 1 & (x + y < c) \\ 0 & (x + y > c) \end{cases}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Особый интерес представляет рассмотрение системы (1.4) при $\tau > \nu \geq 0$, $\alpha > 1$ и $\alpha = 1$.

2. В случае $\alpha > 1$ рассмотрим, аналогично [3], наиболее интересные для практики движения системы, определяющиеся к произвольному моменту времени t_0 такими начальными состояниями $x(t)$ и $y(t)$ ($t_0 - \tau \leq t \leq t_0$) (класс K_0), у которых на этом интервале $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ не было переключений. Переключения реле в рассматриваемой системе происходят при таких значениях ее координат x и y , которые лежат на прямой $x + y = c$. Рассматривая каждое состояние системы в момент переключения как новое начальное состояние, выделим класс K^0 движений системы (1.4), у которых как начальное состояние, так и все состояния при переключениях принадлежат классу K_0 начальных состояний. Нетрудно выделить область в пространстве параметров системы, для которой все движения системы (1.4), начинающиеся из начальных состояний класса K_0 , будут принадлежать K^0 .

Фазовое пространство системы (рис. 2) в этом случае состоит из двух полуплоскостей $G_0 (x + y > c)$ и $G_1 (x + y < c)$, на которые накладывается дополнительная к G_0 область g_0 и дополнительная к G_1

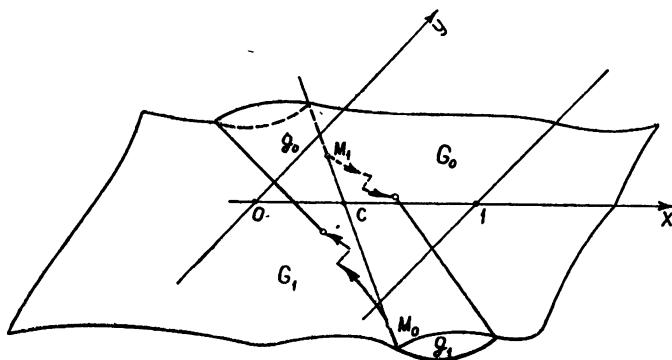


Рис. 2.

область g_1 . Область g_0 ограничена прямой $x + y = c$, фазовой траекторией уравнений (1.4), выходящей из точки контакта

$$x = \frac{\alpha c}{\alpha - 1}, \quad y = -\frac{c}{\alpha - 1} \quad (2.1)$$

и продолжающейся τ единиц времени, и прямой

$$y = -e^{-(\alpha-1)\tau} x + e^{-\alpha\tau} (c + \alpha e^{\alpha\tau}), \quad (2.2)$$

лежащей в области G_1 . Область g_1 ограничена прямой $x + y = c$, фазовой траекторией уравнений (1.4), выходящей из точки контакта

$$x = \frac{\alpha c - 1}{\alpha - 1}, \quad y = \frac{1 - c}{\alpha - 1} \quad (2.3)$$

и продолжающейся τ единиц времени, и прямой

$$y = -e^{-(\alpha-1)\tau} x + e^{-\alpha\tau} (e^\tau + c - 1 - ae^{\alpha\tau}). \quad (2.4)$$

Состояния равновесия системы для движений в области $G_0 + g_0$ ($x = y = 0$) и области $G_1 + g_1$ ($x = 1, y = 0$) при конечных τ и y не принадлежат рассматриваемому фазовому пространству.

Такая конфигурация фазового пространства системы (1.4) существует при условии

$$a \leq \min(a_1, a_2), \quad a_1 = c(1 - e^{-\alpha\tau}) - x(e^{-\tau} - e^{-\alpha\tau}) \quad (2.5)$$

при $c \leq 1/2$ и $x \leq \alpha c / (\alpha - 1)$ и

$$a_2 = (1 - c)(1 - e^{-\alpha\tau}) - (1 - x)(e^{-\tau} - e^{-\alpha\tau}) \quad (2.5a)$$

при $c \geq 1/2$ и $x \geq (\alpha c - 1) / (\alpha - 1)$. При выполнении неравенств (2.5), (2.5a) изображающая точка во время скачка на $\pm a$ по оси y , происходящего через τ единиц времени после переключения, не пересекает прямой $x + y = c$, т. е. скачок не вызывает дополнительного переключения реле, и движения системы принадлежат классу K^0 .

Исследуем динамику системы при выполнении условия (2.5), $\tau > \tau \geq 0$ и $\alpha > 1$, методом точечных преобразований [4], для чего введем на прямой $x + y = c$ (см. рис. 2) полупрямые без контакта $u \geq 0$ и $v \geq 0$:

$$u = x - \frac{\alpha c - 1}{\alpha - 1}, \quad (2.6)$$

где $x \geq (\alpha c - 1) / (\alpha - 1)$, и

$$v = \frac{\alpha c}{\alpha - 1} - x, \quad (2.6a)$$

где $x \leq \alpha c / (\alpha - 1)$.

Нетрудно получить точечные преобразования этих полупрямых друг в друга в виде двух функций соответствия T_1 и T_2 :

$$v_1 \equiv v(\theta_1) = \frac{\alpha c}{\alpha - 1} - \frac{(c - 1)e^{(\alpha-1)\theta_1} - ce^{\theta_1} + e^{-\alpha\theta_1} - ae^{\alpha\theta_1}}{e^{\alpha\theta_1} - e^{\theta_1}} \geq 0; \\ (T_1) \quad u_1 \equiv u(\theta_1) = \frac{ce^{\alpha\theta_1} - c - e^{\theta_1} + e^\tau - ae^{\alpha\tau}}{e^{\alpha\theta_1} - e^{\theta_1}} - \frac{\alpha c - 1}{\alpha - 1} \geq 0; \quad (2.7)$$

$$u_2 \equiv u(\theta_2) = \frac{ce^{(\alpha+1)\theta_2} + e^{\alpha\theta_2} - ce^{\theta_2} - e^{-\alpha\theta_2} + ae^{\alpha\theta_2}}{e^{\alpha\theta_2} - e^{\theta_2}} - \frac{\alpha c - 1}{\alpha - 1} \geq 0; \\ (T_2) \quad v_2 \equiv v(\theta_2) = \frac{\alpha c}{\alpha - 1} - \frac{ce^{\alpha\theta_2} + 1 - c - e^\tau + ae^{\alpha\tau}}{e^{\alpha\theta_2} - e^{\theta_2}} \geq 0, \quad (2.8)$$

где $\theta_1 = \tau + t_1$, $\theta_2 = \tau + t_2$, а t_1 и t_2 соответственно времена движения изображающей точки от прямой (2.2) и прямой (2.4) до прямой $x + y = c$. В выражениях (2.7) и (2.8) параметры θ_1 и θ_2 изменяются в пределах

$$\tau \leq \theta_1^0 \leq \theta_1 < \infty, \quad \tau \leq \theta_2^0 \leq \theta_2 < \infty,$$

где θ_1^0 и θ_2^0 определяются из условий $v(\theta_1^0) = 0$, $u(\theta_2^0) = 0$, т. е.

$$\frac{c}{\alpha - 1} (\alpha e^{\alpha \theta_1^0} - e^{\theta_1^0}) + (1 - c) e^{(\alpha+1)\theta_1^0} - e^{-\alpha \theta_1^0} + \alpha e^{\alpha \theta_1^0} = 0; \quad (2.9)$$

$$\frac{1 - c}{\alpha - 1} (\alpha e^{\alpha \theta_2^0} - e^{\theta_2^0}) + c e^{(\alpha+1)\theta_2^0} - e^{-\alpha \theta_2^0} + \alpha e^{\alpha \theta_2^0} = 0. \quad (2.10)$$

Заметим, что преобразование T_2 (2.8) может быть получено из преобразования T_1 (2.7) заменой

$$\begin{aligned} v_1 &\rightarrow u_2, & c &\rightarrow 1 - c, \\ u_1 &\rightarrow v_2, & \theta_1 &\rightarrow \theta_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Нетрудно видеть также, что для преобразований T_1 и T_2 справедливы следующие равенства:

$$u_1 = \frac{\alpha(1 - c)}{\alpha - 1} + e^{-\theta_1} \left[\frac{\alpha c}{\alpha - 1} - v_1 - e^\tau \right] \geq 0; \quad (2.12)$$

$$v_2 = \frac{\alpha c}{\alpha - 1} + e^{-\theta_2} \left[\frac{\alpha(1 - c)}{\alpha - 1} - u_2 - e^\tau \right] \geq 0. \quad (2.13)$$

Произвольные функции соответствия T_1 и T_2 имеют вид:

$$\frac{dv_1}{d\theta_1} = \frac{(\alpha - 1) e^{(\alpha+1)\theta_1}}{e^{\alpha\theta_1} - e^{\theta_1}} u_1; \quad \frac{du_1}{d\theta_1} = \frac{(\alpha - 1)(v_1 - \beta)}{e^{\alpha\theta_1} - e^{\theta_1}}; \quad (2.14)$$

$$\frac{du_2}{d\theta_2} = \frac{-(\alpha - 1) e^{(\alpha+1)\theta_2}}{e^{\alpha\theta_2} - e^{\theta_2}} v_2; \quad \frac{dv_2}{d\theta_2} = \frac{(\alpha - 1)(u_2 - \beta)}{e^{\alpha\theta_2} - e^{\theta_2}}; \quad (2.15)$$

$$\frac{du_1}{dv_1} = e^{-(\alpha+1)\theta_1} \frac{v_1 - \beta}{u_1}; \quad (2.16)$$

$$\frac{dv_2}{du_2} = e^{-(\alpha+1)\theta_2} \frac{u_2 - \beta}{v_2}, \quad (2.17)$$

где

$$\beta = \frac{e^\tau - \alpha a e^{\alpha\tau}}{\alpha - 1}. \quad (2.18)$$

Графики функций соответствия T_1 и T_2 на плоскости переменных u и v начинаются соответственно в точках $(0, u_1^0)$ и $(v_2^0, 0)$, где

$$u_1^0 \equiv u(\theta_1^0) = \frac{\alpha(1 - c)}{\alpha - 1} - \left[e^\tau - \frac{\alpha c}{\alpha - 1} \right] e^{-\theta_1^0} \geq 0; \quad (2.19)$$

$$v_2^0 \equiv v(\theta_2^0) = \frac{\alpha c}{\alpha - 1} - \left[e^\tau - \frac{\alpha(1 - c)}{\alpha - 1} \right] e^{-\theta_2^0} \geq 0. \quad (2.20)$$

В случае $\beta > 0$ функции соответствия имеют, согласно (2.16) и (2.17),

по одной точке минимума (в точках $u_2 = \beta$ и $v_2 = \beta$) и при θ_1 и θ_2 , стремящихся к бесконечности, имеют асимптоты.

$$u_1 = \frac{1-c}{\alpha-1}, \quad v_2 = \frac{c}{\alpha-1}. \quad (2.21)$$

Для доказательства единственности и устойчивости инвариантной точки преобразований T_1 и T_2 рассмотрим поведение функции последования

$$v_2 = T_2 T_1 (v_1) \quad (2.22)$$

на плоскости v_1 , v_2 . На основании (2.16) и (2.17) для ее производной имеем:

$$\frac{dv_2}{dv_1} = e^{-(\alpha+1)(\theta_1 - \theta_2)} \frac{(v_1 - \beta)(u_2 - \beta)}{v_2 u_1}. \quad (2.23)$$

Точки пересечения функции (2.22) с биссектрисой координатного угла будут соответствовать простым инвариантным точкам преобразования $T_2 T_1$. Отметим прежде всего, что функция последования (2.22) непрерывна, выходит (см. (2.19) и (2.13)) из точки

$$v_1 = 0, \quad v_2^0 = T_2 T_1 (v_1 = 0) > 0 \quad (2.24)$$

и при v_1 , стремящемся к бесконечности, имеет асимптоту

$$v_2 = T_2 \left(u_2 = \frac{1-c}{\alpha-1} \right) = \text{const} < \frac{c}{\alpha-1}. \quad (2.25)$$

Доказательство единственности и устойчивости инвариантной точки рассматриваемых преобразований проведем отдельно для значений $\beta \leq 0$ и $\beta > 0$.

В случае $\beta \leq 0$, предполагая более чем одну простую инвариантную точку преобразования $T_2 T_1$, для его производной в ближайшей к началу координат инвариантной точке с учетом (2.24) имеем:

$$\left(\frac{dv_2}{dv_1} \right)_{v_1=v_2=v^*, u_1=u_2=u^*} = e^{-(\alpha+1)(\theta_1 - \theta_2)} \left(1 + \frac{\bar{\beta}}{u^*} + \frac{\bar{\beta}}{v^*} + \frac{\bar{\beta}^2}{v^* u^*} \right) < 1, \quad (2.26)$$

где $\bar{\beta} = -\beta \geq 0$. В силу (2.14) и (2.15) величины u , v , θ_1 и θ_2 являются монотонно возрастающими функциями v_1 . Поэтому предположение о существовании других инвариантных точек противоречит неравенству (2.26), так как производная dv_2/dv_1 с ростом $v_1 > v^*$ лишь убывает, оставаясь положительной.

В случае $\beta > 0$ составим разность

$$v_2 - v_1 = (1 - e^{-(\theta_1 + \theta_2)}) \left(\frac{\alpha c}{\alpha-1} - v_1 - e^{\bar{\beta}} \right) + e^{\bar{\beta}} (1 - e^{-\bar{\beta}}) \quad (2.27)$$

и рассмотрим положительную при $v_1 = 0$ (см. (2.24)) функцию

$$\psi = \frac{v_2 - v_1}{1 - e^{-(\theta_1 + \theta_2)}} = \frac{\alpha c}{\alpha-1} - v_1 + e^{\bar{\beta}} \frac{1 - e^{-\bar{\beta}}}{1 - e^{-(\theta_1 + \theta_2)}} - e^{\bar{\beta}}, \quad (2.28)$$

нули которой, в силу положительности выражения $1 - e^{-(\theta_1 + \theta_2)}$, дают простые инвариантные точки преобразования $T_2 T_1$. Ее производная равна

$$\frac{d\psi}{dv_1} = -e^{\tau-\theta_2} \frac{(1-e^{-\theta_2})e^{-\theta_1} - (1-e^{-\theta_1})d\theta_2/d\theta_1}{[1-e^{-(\theta_1+\theta_2)}]^2} \frac{d\theta_1}{dv_1} - 1. \quad (2.29)$$

Дифференцируя условие $u_1(\theta_1) = u_2(\theta_2)$ по θ_1 , согласно (2.14), (2.15), найдем:

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{du_1}{d\theta_1} \frac{d\theta_2}{du_2} = e^{-(\alpha+1)\theta_2} \frac{e^{2\theta_2} - e^{\theta_2}}{e^{2\theta_1} - e^{\theta_1}} \frac{v_1 - \beta}{v_2}. \quad (2.30)$$

При $v_1 < \beta$ выражение (2.30) меньше нуля, поэтому производная (2.29) отрицательна. Следовательно, функция $\psi(v_1)$ на интервале $0 \leq v_1 \leq \beta$ может либо один раз обратиться в нуль и стать затем отрицательной, либо не обращаться в нуль и оставаться положительной. Это соответствует двум видам расположения кривой T_2T_1 , качественно изображенным на рис. 3.

В первом случае (рис. 3а) при $v_1 = \beta$ $v_2 < v_1$ и легко показать, что большие простых инвариантных точек не существует. Действительно, тогда в предполагаемых инвариантных точках при $v_1 > \beta$ производная

$$\left(\frac{dv_2}{dv_1} \right)_{v_2 = v_1 > \beta} = e^{-(\alpha+1)(\theta_1 + \theta_2)} \frac{(v - \beta)(u - \beta)}{vu} < 1 \quad (2.31)$$

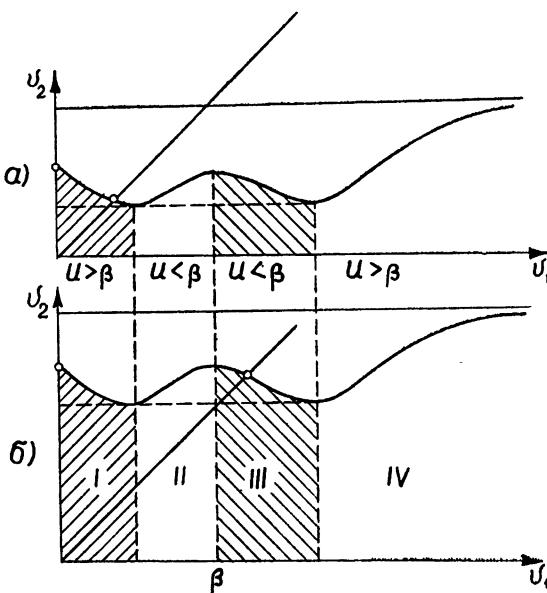


Рис. 3.

либо отрицательна при $u < \beta$, либо положительна, но меньше единицы при $u > \beta$. Во втором случае разность $v_2 - v_1$ при $v_1 = \beta$ положительна (рис. 3б), неравенство (2.31) также справедливо и свидетельствует о существовании единственной простой инвариантной точки при $v_1 > \beta$.

Из сказанного выше следует, что простая инвариантная точка преобразования T_2T_1 устойчива, если она находится на участках, где производная (2.23) положительна. Остается доказать ее устойчивость на падающих участках кривой (2.22), т. е. в областях, где $v > \beta$; $u < \beta$ и $v < \beta$, $u > \beta$ (см. соответственно область III на рис. 3б и область I

на рис. 3а). Но в области III при $u < \beta < v$ для производной функции последования (2.25) имеем:

$$-\frac{dv_2}{dv_1} = e^{-(\alpha+1)\theta_2} \frac{\beta - u}{v} \frac{du_1}{dv_1} < \frac{du_1}{dv_1} \quad (2.32)$$

и достаточно показать, что в этой области производная (2.16) преобразования T_1 меньше единицы. Однако из выражения

$$\frac{d^2u_1}{dv_1^2} = \frac{e^{-(\alpha+1)\theta_1}}{u} \left\{ 1 - \left[\frac{v - \beta}{u} + \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} (e^{\alpha\theta_1} - e^{\theta_1}) \right] \frac{du_1}{dv_1} \right\} \quad (2.33)$$

следует, что для максимального значения этой производной при $v > \beta$ справедливо неравенство

$$\frac{du_1}{dv_1} = \frac{1}{(v - \beta)u^{-1} + (\alpha + 1)(\alpha - 1)^{-1}(e^{\alpha\theta_1} - e^{\theta_1})} < 1, \quad (2.34)$$

так как в противном случае величина $(v - \beta)u^{-1}$ была бы меньше единицы, откуда на основании (2.16) снова следовало бы неравенство (2.34).

Доказательство устойчивости единственной простой инвариантной точки при $v < \beta < u$ (область I на рис. 3а) проводится аналогично путем рассмотрения функции последования $u_1 = T_1 T_2(u_2)$ и может быть получено с помощью замены (2.11).

В силу доказанного, а также при учете того, что минимальные значения кривой $v_2 = T_2 T_1(v_1)$ совпадают и равны $v_{2\min} = T_2(u = \beta)$, у рассматриваемых преобразований не может быть сложных инвариантных точек.

Таким образом, при $\alpha > 1$, $\tau > \nu > 0$ и параметре a , удовлетворяющем условию (2.5), рассматриваемая система имеет единственный устойчивый предельный цикл, для которого θ_1^* и θ_2^* определяются из условия

$$u_1(\theta_1) = u_2(\theta_2^*), \quad v_1(\theta_1^*) = v_2(\theta_2^*), \quad (2.35)$$

а v^* и u^* — соотношениями

$$v^* = \frac{\tau c}{\alpha - 1} - e^{\tau - \theta_2^*} \frac{1 - e^{-\theta_1^*}}{1 - e^{-\theta_1^* - \theta_2^*}} ; \quad (2.36)$$

$$u^* = \frac{\alpha(1 - c)}{\tau - 1} - e^{\tau - \theta_1^*} \frac{1 - e^{-\theta_2^*}}{1 - e^{-\theta_1^* - \theta_2^*}} .$$

3. В случае $\alpha = 1$, $\tau > \nu > 0$ фазовые траектории системы (1.4) являются полупрямыми и не контактируют с прямой $x + y = c$, а области g_0 и g_1 фазового пространства системы ограничены прямой $x + y = c$ и параллельными ей прямыми (2.1) и (2.2), где $\alpha = 1$. При выполнении условий (2.5), которые при $\alpha = 1$ записутся в виде

$$a \leq \min(a_1, a_2), \quad a_1 = c(1 - e^{-\nu}), \quad a_2 = (1 - c)(1 - e^{-\nu}), \quad (3.1)$$

движения системы будут принадлежать классу K^0 , если их начальные состояния принадлежат классу K_0 и рассмотрение может быть проведено аналогично предыдущему.

Точечные преобразования T_1 и T_2 , полученные в явном виде:

$$(T_1) \quad x_2 = x_1 \frac{1 - c}{e^{\tau} - ae^{\nu} - c} + \frac{c(e^{\tau} - 1) - ae^{\nu}}{e^{\tau} - ae^{\nu} - c}; \quad (3.2)$$

$$(T_2) \quad x_3 = x_2 \frac{c}{e^{\tau} - ae^{\nu} - 1 + c} + \frac{(e^{\tau} - 1)c}{e^{\tau} - ae^{\nu} - 1 + c}, \quad (3.3)$$

имеют при выполнении условий (3.1) единственную устойчивую инвариантную точку

$$x_3 = x_1 = \frac{c}{1 - ae^{-\tau+\nu}}, \quad x_2 = \frac{c - ae^{-\tau+\nu}}{1 - ae^{-\tau+\nu}}, \quad (3.4)$$

так как $x_2(0) > 0$, $x_3(0) > 0$ и производная dx_3/dx_1 положительна и меньше единицы. Действительно, она даже при максимальном значении параметра a (см. (3.1)) равна единице, когда $\nu = \tau = 0$, и убывает с ростом ν и $\tau \geq \nu$, оставаясь положительной.

Единственный устойчивый автоколебательный режим системы в рассматриваемом случае имеет период

$$T = \ln \frac{dx_1}{dx_3} = \ln \frac{(e^{\tau} - c - ae^{\nu}) [e^{\tau} - (1 - c) - ae^{\nu}]}{c(1 - c)} \quad (3.5)$$

и размах автоколебаний

$$2A = 1 - \frac{1}{e^{\tau} - ae^{\nu}}. \quad (3.6)$$

Среднее арифметическое значение поддерживаемого системой в автоколебательном режиме уровня

$$x_{cp} = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} = c + \delta, \quad (3.7)$$

где

$$\delta = \frac{1 - 2c}{2} \left[1 - \frac{1}{e^{\tau} - ae^{\nu}} \right]. \quad (3.8)$$

Выражения (3.7) и (3.8) показывают, что рассматриваемая система в автоколебательном режиме обладает своеобразным „положительным статизмом“ δ по отношению к уровню регулирования $c = 1/2$.

В заключение отметим, что в рассматриваемой системе, наряду с найденным автоколебательным движением класса K^0 , существуют автоколебательные движения, которые возникают в тех случаях, когда во время скачков по оси u на величину a фазовая траектория пересекает прямую $x + u = c$.

В качестве примера рассмотрим движение системы (1.4) при $\alpha = 1$ и $2n\nu \leq \tau \leq (2n+1)\nu$, порождающееся начальным состоянием, в котором на интервале $-2n\nu \leq t \leq 0$ было $2n$ переключений реле (т. е. $2n$ переходов изображающей точки через прямую $x + u = c$) через каждые ν единиц времени. Пусть для определенности после скачка при $t = 0$ было движение по x к состоянию равновесия $x = 0$, а изображающая точка в фазовом пространстве лежала ниже прямой $x + u = c$, и пусть величина скачка такова, что только в моменты времени $\nu, 2\nu, \dots, 2n\nu$ происходят переходы изображающей точки через прямую $x + u = c$. При этом в системе можно предполагать существование сложных

пределных циклов, соответствующих инвариантным точкам линейного распадающегося точечного преобразования плоскости в себя:

$$\begin{aligned} x_m &= x_0 e^{-2m\gamma} + e^{-\gamma} (1 - e^{-\gamma}) \sum_0^{m-1} e^{-2k\gamma}; \\ y_m &= y_0 e^{-2m\gamma} - a (1 - e^{-\gamma}) e^{-\gamma+2n\gamma} \sum_0^{m-1} e^{-2k\gamma}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Однако, как нетрудно видеть, у этих преобразований при любых n и m существует единственная устойчивая инвариантная точка с координатами

$$x^* = \frac{1}{e^\gamma + 1}, \quad y^* = -\frac{ae^{2n\gamma-\gamma}}{e^{-\gamma} + 1}. \quad (3.10)$$

Следует специально отметить, что в этом случае координаты инвариантной точки (3.10) (т. е. регулируемая в системе температура) не зависят от уровня задания c .

Единственный устойчивый предельный цикл в этом случае имеет период $T = 2\gamma$ и размах колебаний по x

$$2A = \frac{e^\gamma - 1}{e^\gamma + 1}. \quad (3.11)$$

От величины уровня задания зависит лишь область существования этого предельного цикла в пространстве параметров системы, которая определяется соотношением

$$a > \max \{r_1, -r_1 e^\gamma, r_2, -r_2 e^\gamma\}, \quad (3.12)$$

где

$$r_1 = e^{-\gamma+2n\gamma} - (1 - c)(1 + e^{-\gamma});$$

$$r_2 = (e^{-\gamma+2n\gamma} - c)(1 - e^{-\gamma}) - e^{-(2n+1)\gamma+\gamma}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Кампенемм, Автоматика и телемеханика, 17, 8 (1956).
2. А. А. Кампенемм, Автоматика и телемеханика, 19, 5 (1958).
3. А. С. Алексеев, Труды ГИФТИ и радиофиз. фак-та ГГУ (уч. зап.), вып. 35, 105 (1956).
4. А. А. Андронов, Л. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
1 ноября 1960 г.

AUTOOSCILLATIONS OF A TWO-POSITION TEMPERATURE CONTROL SYSTEM WITH A THERMAL PROPORTIONAL-PLUS-FLOATING DEVICE

A. S. Alekseyev, V. A. Dozorov

A relay temperature regulator with a thermal proportional-plus-floating device is considered as a second order nonlinear dynamic system with two constants of time delays. Using the method of pointwise transformation the existence is proved of a single simple stable autooscillating regime and expressions are given for the period and amplitude of the autooscillations.

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕМПФЕРА С ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМ НАТЯГОМ В УПРУГОМ СОЕДИНЕНИИ

М. И. Фейгин

Методом точечных преобразований с привлечением теории бифуркаций исследуется динамика нелинейного динамического демпфера с предварительным натягом в упругом соединении как некоторой релейной системы.

Среди широко применяемых нелинейных демпферов, разнообразных по своей конструкции и назначению [1-3], можно выделить три типа существенной нелинейности: сухое трение, удары об ограничители и предварительный натяг в упругом соединении. Теория демпфера сухого трения и простого ударного демпфера рассматривалась в работах [4,5]. В настоящей статье методом точечных отображений [6-9] с привлечением теории бифуркаций [10] исследуется динамика нелинейного динамического демпфера с предварительным натягом в упругом соединении.

Рассматриваемая консервативная модель состоит из упруго закрепленной (с коэффициентом упругости k_1) массы M , на которую действует внешняя синусоидальная сила $F \sin(\Omega t)$ (рис. 1). Масса m соединена с основной массой M посредством пружины с коэффициентом упругости k_2 , имеющей предварительное сжатие H .

В настоящей работе исследованы простейшие периодические режимы системы и выделены в пространстве параметров области их существования и устойчивости. При этом изучаемая модель рассматривается как некоторая релейная система, что позволило применить разработанные в [11,12] методы исследования периодических режимов релейных систем. Показано, что в системе с предварительным натягом пружины возможны два устойчивых периодических режима вблизи резонансных частот. В одном из режимов амплитуда колебаний неограниченно растет, а в другом остается конечной. Именно этим рассматриваемый нелинейный демпфер существенно отличается от линейного динамического демпфера ($H=0$). Имеющиеся обычно в реальном демпфере с предварительным натягом пружины ограничители колебаний массы m способствуют переходу системы из „опасного“ режима в „неопасный“. В предположении, что такой переход имеет место, в разделе 3 вычислены оптимальные параметры демпфера в рамках рассмотренных режимов, а также амплитуды основной и кратных гармоник в оптимальном режиме.

В разделе 4 изучены простейшие периодические режимы для частного случая рассмотренной в первых двух разделах модели при $k_1 = 0$ и $m = \infty$. Такое изучение проводилось ранее в работе [13], однако без исследования устойчивости. Сравнение полученных в на-

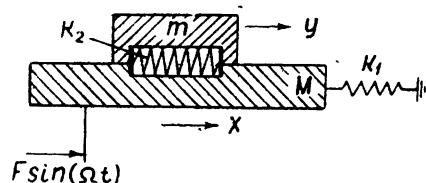


Рис. 1.

стоящей статье результатов с результатами работы [18] показывает, что часть выделенных ранее областей пространства параметров, соответствующих простейшему режиму, отпадает из-за потери устойчивости.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

1. Уравнения движения. Пренебрегая вязким и сухим трением, имеем следующие уравнения движения модели, приведенной на рис. 1:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + k_1x + k_2(x - y) &= F \sin(\Omega t) + F_1(y - x); \\ m\ddot{y} + k_2(y - x) &= -F_1(y - x). \end{aligned} \quad (1.1)$$

За начало отсчета взято положение массы M , когда пружина k_1 находится в недеформированном состоянии, а масса m — в состоянии равновесия относительно M (при отсутствии внешней силы). Нелинейная функция $F_1(y - x)$, возникающая вследствие предварительного натяга H , определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1(y - x) &= k_2H \operatorname{sgn}(y - x) \quad (\text{при } y - x \neq 0); \\ -k_2H < F_1(y - x) < +k_2H & \quad (\text{при } y - x = 0). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Переходя в (1.1) к безразмерным переменным $\xi = F^{-1}M\Omega^2x$, $\eta = F^{-1}M\Omega^2y$, $\tau = \Omega t$, получим:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \omega^2\xi + \nu^2(\xi - \eta) &= \sin\tau + h\nu^2f_1(\eta - \xi); \\ \ddot{\mu}\eta + \nu^2(\eta - \xi) &= -h\nu^2f_1(\eta - \xi), \end{aligned} \quad (1.3)$$

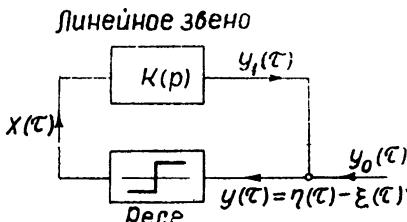
где $f_1(\eta - \xi) = F_1(y - x)/k_2H$, а параметры μ , ω , ν и h определяются соотношениями

$$\mu = m/M; \quad \omega^2 = k_1/M\Omega^2; \quad \nu^2 = k_2/M\Omega^2; \quad h = F^{-1}M\Omega^2H. \quad (1.4)$$

2. Сведение к релейной системе. Фазовое пространство. Для изучения динамики нелинейного демпфера с предварительным натягом пружины сведем задачу к исследованию некоторой релейной системы. Это позволит применить разработанные в [11, 12] методы исследования периодических режимов и устойчивости релейных систем.

Будем для простоты полагать, что демпфер настроен на резонансную частоту основной колеблющейся системы, т. е. $k_1/M = k_2/m$ или в безразмерных параметрах

$$\nu^2 = \mu\omega^2. \quad (1.5)$$



Обозначим через $x(\tau) = h \operatorname{sgn}(\eta - \xi)$ выход реле и вход линейного звена, а через $y(\tau) = \eta(\tau) - \xi(\tau)$ вход реле (рис. 2). Решение $y(\tau)$ системы уравнений (1.3) в каждой из областей линейности $x(\tau)$ можно представить

как сумму двух решений: а) решения $y_0(\tau)$ неоднородной системы, когда в правой части первого уравнения присутствует лишь $\sin\tau$, и б) решения $y_1(\tau)$ линейной системы (назовем его выходом линейного звена), когда в правых частях присутствует лишь выход реле $x(\tau)$.

Из (1.3) находим

$$y_0(\tau) = \frac{\sin\tau}{\omega^4 - \omega^2(2 + \mu) + 1} = \alpha \sin\tau, \quad (1.6)$$

Коэффициент передачи линейного звена, определяемый из (1.3), равен

$$K(p) = -\frac{\omega^2[p^2(1+\mu) + \omega^2]}{p^4 + p^2\omega^2(2+\mu) + \omega^4} = \sum_{i=1}^4 \frac{c_i}{p - \omega\lambda_i}, \quad (1.7)$$

где λ_i — корни уравнения $p^4 + p^2(2+\mu) + 1 = 0$, которые можно записать в виде:

$$\lambda_{1,2} = \pm j\varepsilon_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm j\varepsilon_2, \quad (1.8)$$

а c_i — коэффициенты, равные

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\omega(1-\varepsilon_1^2)\varepsilon_1}{2j(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)} = \frac{\delta_1}{2j}; & c_2 &= -c_1; \\ c_3 &= \frac{-\omega(1-\varepsilon_2^2)\varepsilon_2}{2j(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)} = \frac{\delta_2}{2j}; & c_4 &= -c_3. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В соответствии с (1.2) и (1.4) принимается следующая характеристика реле

$$\begin{aligned} x(\tau) &= h \operatorname{sgn}[y(\tau)] && (\text{при } y(\tau) \neq 0); \\ -h &\leq x(\tau) \leq +h && (\text{при } y(\tau) = 0). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Введем новые переменные y_i :

$$y_i = \frac{c_i}{p - \omega\lambda_i} x \quad (1.11)$$

или

$$\dot{y}_i - \omega\lambda_i y_i = c_i x. \quad (1.11a)$$

Тогда выход линейного звена представится в виде суммы новых переменных

$$y_1(\tau) = \sum_{i=1}^4 \frac{c_i}{p - \omega\lambda_i} x(\tau) = K(p) x(\tau). \quad (1.12)$$

Поскольку на вход реле кроме $y_1(\tau)$ подается еще внешняя сила $y_0(\tau)$, фазовое пространство системы (1.11) будет пятимерным в координатах y_i и τ , где τ — фаза. Из вида характеристики реле (1.10) следует, что в фазовом пространстве имеются две области движений.

1) Область G_{+h} , где вход реле $\sum y_i + \alpha \sin \tau > 0$. Здесь выход реле $x(\tau) = +h$ и уравнения движения

$$\dot{y}_i - \omega\lambda_i y_i = -c_i h. \quad (1.13)$$

2) Область G_{-h} , где вход реле $\sum y_i + \alpha \sin \tau < 0$. Здесь выход реле $x(\tau) = -h$ и уравнения движения

$$\dot{y}_i - \omega\lambda_i y_i = -c_i h. \quad (1.14)$$

Границей указанных областей является поверхность переключений реле, определяемая из условия равенства нулю входа реле

$$y(\tau) = \sum y_i(\tau) + \alpha \sin \tau = 0. \quad (1.15)$$

Структура фазового пространства вблизи этой поверхности определяется знаком $\dot{y}(\tau)$. Если $\dot{y} < 0$, то фазовые траектории направлены к поверхности (1.15) в G_{+h} и от нее в G_{-h} . Если $\dot{y} > 0$, то фазовые траектории направлены к поверхности (1.15) в G_{-h} и от нее в G_{+h} . Следовательно, пересечение поверхности $\dot{y} = \sum \dot{y}_i + \alpha \cos \tau = 0$ с (1.15) делит последнюю на области с различной структурой траекторий вблизи нее. Согласно (1.9), (1.13) и (1.14), уравнение $\dot{y} = 0$ можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^4 \omega_{i,i} y_i + \alpha \cos \tau = 0 \quad (1.16)$$

как для области G_{+h} , так и для области G_{-h} . Это совпадение обязано выполнению условия $\sum c_i = 0$ в рассматриваемой задаче. Таким образом, пересечение (1.16) и (1.15) не выделяет, в отличие от случая релейной системы с сухим трением [4], так называемую пластинку скользящих движений.

Обозначим часть поверхности (1.15), которая соответствует переходу изображающей точки из G_{-h} в G_{+h} , через A_+ (рис. 3), а часть

этой поверхности, соответствующую переходу изображающей точки из G_{+h} в G_{-h} , через A_- . Пусть в начальный момент времени изображающая точка $M^0(y_i^0, \tau^0)$ находится на поверхности (1.15). Если она принадлежит A_+ , то дальнейшее движение происходит в G_{+h} , пока точка не придет на A_- в точку $M'(y_i', \tau')$. Точечное преобразование, соответствующее этому переходу и определяемое (1.13), будем называть T_+ -преобразованием. Аналогично

точечное преобразование, соответствующее переходу изображающей точки с A_- на A_+ в области G_{-h} и определяемое (1.14), будем называть T_- -преобразованием. Тогда любому периодическому движению соответствует неподвижная точка преобразования $(T_+ T_-)^k$, и задача исследования периодических режимов сводится к отысканию таких неподвижных точек и доказательству их существования и устойчивости.

Заметим, что нами не выделяется случай попадания изображающей точки в процессе ее движения в фазовом пространстве на границу A_+ и A_- . Что же касается практически важного случая совместного движения масс M и m при $y = 0$, то он будет рассмотрен ниже.

2. ПРОСТЕЙШИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИЙ РЕЖИМ

1. *Отыскание неподвижной точки преобразования.* Будем исследовать симметричный режим с периодом внешней силы 2π . Поэтому вместо отыскания неподвижной точки преобразования $T_+ T_-$ достаточно рассмотреть преобразование T_+ и положить

$$y'_i = -y_i^0, \quad \tau' = \tau^0 + \pi. \quad (2.1)$$

Пусть начальная точка M^0 находится на A_+ . Тогда уравнения T_+ -преобразования получим, интегрируя (1.13):

$$y'_i = -\frac{hc_i}{\omega_{i,i}} + \left(y_i^0 + \frac{hc_i}{\omega_{i,i}} \right) e^{\omega_{i,i}(\tau' - \tau^0)}. \quad (2.2)$$

При этом момент времени τ' является наименьшим корнем $\tau' > \tau^0$ уравнения

$$\sum y'_i(\tau') + \alpha \sin \tau' = 0. \quad (2.3)$$

Подставив (2.1) в (2.2), получаем значение координат y_i^0 неподвижной точки преобразования

$$y_i^0 = -\frac{hc_i}{\omega \lambda_i} \operatorname{th} \frac{\omega \lambda_i \pi}{2}. \quad (2.4)$$

Подстановка c_i и λ_i из (1.8) и (1.9) в (2.4) позволяет легко убедиться, что $\sum y_i^0 = 0$. Поэтому уравнение (2.3) относительно координаты τ^0 неподвижной точки преобразования принимает простой вид: $\sin \tau^0 = 0$, откуда

$$\tau^0 = 0, \pi. \quad (2.5)$$

2. Проверка условий переключений реле сводится к проверке того факта, что неподвижная точка преобразования действительно принадлежит части A_+ поверхности переключений (1.15), т. е. $\dot{y}^0 > 0$. В соответствии с (1.16) и (2.4) условие $\dot{y}^0 > 0$ перепишется в виде

$$-h \sum_{i=1}^4 c_i \operatorname{th}(\omega \lambda_i \pi / 2) + \alpha \cos \tau^0 > 0. \quad (2.6)$$

Подставляя в (2.6) значения c_i и λ_i из (1.8) и (1.9), получим окончательное выражение для условия переключения

$$h \left\{ -\frac{\omega(1-\varepsilon_1^2)}{\varepsilon_2(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)} \operatorname{tg} \frac{\omega \varepsilon_1 \pi}{2} + \frac{\omega(1-\varepsilon_2^2)}{\varepsilon_1(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)} \operatorname{tg} \frac{\omega \varepsilon_2 \pi}{2} \right\} + \frac{\cos \tau^0}{(\omega^2-\varepsilon_1^2)(\omega^2-\varepsilon_2^2)} > 0. \quad (2.7)$$

Так как ε_1 и ε_2 , согласно (1.8), однозначно определяются значением μ , то граница, где нарушаются условия переключения, представляет зависимость вида $h = h(\omega, \mu)$. Будем обозначать эту границу C_h . Из (2.7) можно выяснить особенности в поведении C_h . Так, при $\omega \rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$h \rightarrow \frac{\pi \cos \tau^0}{4(\varepsilon_1^2 - 1)}, \quad \frac{\pi \cos \tau^0}{4(\varepsilon_2^2 - 1)},$$

т. е. остается конечной. Величина $h \rightarrow \infty$, когда обращается в нуль фигурная скобка выражения (2.7):

$$-\varepsilon_1^2(1-\varepsilon_1^2) \operatorname{tg} \frac{\omega \varepsilon_1 \pi}{2} + (1-\varepsilon_2^2) \operatorname{tg} \frac{\omega \varepsilon_2 \pi}{2} = 0. \quad (2.8)$$

Так как правая часть выражения (2.8) непрерывна в интервале $\varepsilon_2 < \omega < \varepsilon_1$ и при $\omega \rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2$ стремится соответственно к $+\infty$ или $-\infty$, то граница C_h уходит в бесконечность внутри этого интервала.

На рис. 4а изображены границы C_h для случая $\mu = 0,1$. Горизонтальной штриховкой выделены области, в которых выполняется условие переключения для $\tau^0 = 0$, вертикальной — для $\tau^0 = \pi$.

3. Устойчивость неподвижной точки преобразования. Для исследования устойчивости варьируем уравнения (2.2) и (2.3) по пере-

менным y_i^0 , y'_i , τ^0 , τ' в окрестности неподвижной точки преобразования (2.4), (2.5) и полагаем $\delta y'_i = -z \delta y_i^0$, $\delta \tau' = z \delta \tau^0$. Из уравнений в вариациях обычным образом получаем характеристическое уравнение

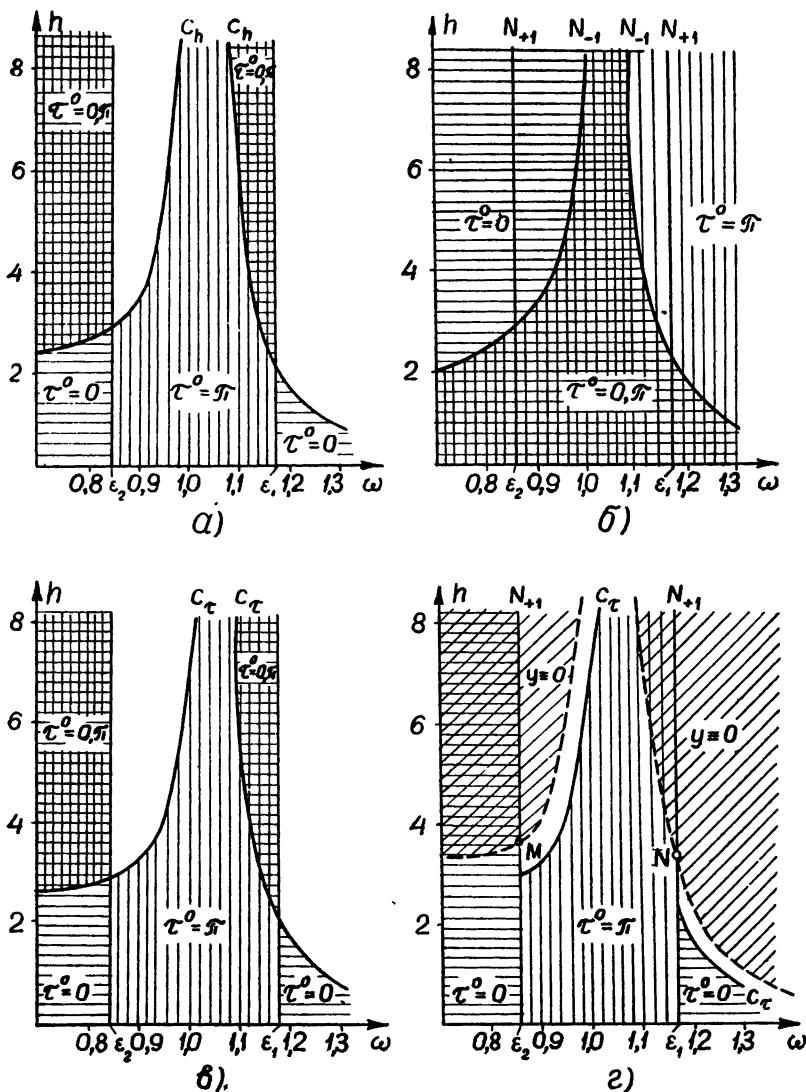


Рис. 4.

$$\gamma(z) = -\frac{\alpha}{2} \cos \tau^0 + h(z-1) \sum_{i=1}^4 \frac{c_i e^{\omega \lambda_i \pi}}{(1 + e^{\omega \lambda_i \pi})(z + e^{\omega \lambda_i \pi})} = 0, \quad (2.9)$$

которое после ряда преобразований и подстановки c_i из (1.9) сводится к уравнению:

$$\alpha \cos \tau^0 \{ (z^4 + 1) + 2(z^3 + z) [\cos(\omega \varepsilon_1 \pi) + \cos(\omega \varepsilon_2 \pi)] + \quad (2.10)$$

$$+ 2z^2 [1 + 2 \cos(\omega \varepsilon_1 \pi) \cos(\omega \varepsilon_2 \pi)] \} - h \left\{ (z^4 + 1) \left(\delta_1 \operatorname{tg} \frac{\omega \varepsilon_1 \pi}{2} + \delta_2 \operatorname{tg} \frac{\omega \varepsilon_2 \pi}{2} \right) + \right.$$

$$+ 2z^2 \left[\delta_1 \operatorname{tg} \frac{\omega \varepsilon_1 \pi}{2} [1 - 2 \cos(\omega \varepsilon_1 \pi)] + \delta_2 \operatorname{tg} \frac{\omega \varepsilon_2 \pi}{2} [1 - 2 \cos(\omega \varepsilon_2 \pi)] \right] - \\ - 2(z^3 + z) \left[\delta_1 \operatorname{tg} \frac{\omega \varepsilon_1 \pi}{2} [1 - \cos(\omega \varepsilon_1 \pi)] + \delta_2 \operatorname{tg} \frac{\omega \varepsilon_2 \pi}{2} [1 - \cos(\omega \varepsilon_2 \pi)] \right] = 0.$$

Режим будет устойчивым, если все корни $\chi(z) = 0$ лежат внутри единичного круга. Уравнение (2.10) имеет ту особенность, что коэффициенты при z^4 и z^0 равны между собой (так же, как и коэффициенты при z^3 и z). Поэтому можно записать: $\chi(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1 = 0$. Но последнее выражение представляет произведение двух многочленов второго порядка

$$\chi(z) = (z^2 + uz + 1)(z^2 + vz + 1) = 0, \quad (2.11)$$

где $u + v = a$, $uv = b - 2$. Поэтому возможны следующие случаи:
а) среди корней $\chi(z) = 0$ есть простые действительные корни; б) все корни комплексные и модули их равны единице. Первый случай соответствует неустойчивому режиму, а второй является сомнительным. Последнее вполне естественно, так как рассматривается модель без диссипации энергии. В рамках принятой модели мы можем выделить лишь „подозрительную“ на устойчивость область пространства параметров D , соответствующую наличию четырех корней $\chi(z) = 0$ с модулем, равным единице.

Предположим наличие такой области D . Границы ее соответствуют переходу одной пары комплексно-сопряженных корней с единичной окружности на действительную ось в точках $+1$ или -1 . Обозначим эти границы N_{+1} и N_{-1} . Уравнение N_{+1} получим из (2.10) подстановкой $z = +1$. После ряда преобразований оно приводится к виду

$$\omega = \varepsilon_1, 3\varepsilon_1, 5\varepsilon_1, \dots \quad (2.12)$$

или

$$\omega = \varepsilon_2, 3\varepsilon_2, 5\varepsilon_2, \dots \quad (2.12a)$$

Уравнение N_{-1} получим из (2.10) подстановкой $z = -1$:

$$a \cos \tau^0 - 2h \left[\frac{\delta_1}{\sin(\omega \varepsilon_1 \pi)} + \frac{\delta_2}{\sin(\omega \varepsilon_2 \pi)} \right] = 0, \quad (2.13)$$

откуда с учетом (1.9) и (1.6) получим:

$$h = \frac{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \cos \tau^0}{2\omega(\omega^2 - \varepsilon_1^2)(\omega^2 - \varepsilon_2^2) [\varepsilon_1(1 - \varepsilon_1^2) \sin^{-1}(\omega \varepsilon_1 \pi) - \varepsilon_2(1 - \varepsilon_2^2) \sin^{-1}(\omega \varepsilon_2 \pi)]}.$$

При $\omega \rightarrow \varepsilon_1$

$$h \rightarrow \pi \cos \tau^0 / 4(\varepsilon_1^2 - 1), \quad (2.14)$$

а при $\omega \rightarrow \varepsilon_2$

$$h \rightarrow \pi \cos \tau^0 / 4(\varepsilon_2^2 - 1).$$

Кроме того, $h \rightarrow \infty$, когда обращается в нуль квадратная скобка знаменателя (2.14). Так как заключенная в ней функция непрерывна в интервале $\varepsilon_2 < \omega < \varepsilon_1$ и при $\omega \rightarrow \varepsilon_1$, ε_2 стремится соответственно к $-\infty$ или $+\infty$, то $h \rightarrow \infty$ внутри этого интервала.

На рис. 4б изображены границы N_{+1} и N_{-1} . Штриховкой (горизонтальной для $\tau^0 = 0$ и вертикальной для $\tau^0 = \pi$) выделены области D ,

„подозрительные“ на устойчивость. В последнем нетрудно убедиться, взяв принадлежащий D случай $h = 0$. Тогда непосредственно из (2.9) получаем значения четырех корней характеристического уравнения $z_i = -e^{\omega \lambda_i \tau}$, модуль которых равен 1.

Покажем, что при отказе от консервативной модели и введении вязкого трения выделенная нами область D соответствует устойчивому режиму. Вид характеристического уравнения простейшего периодического движения для случая с вязким трением получается совершенно аналогичный с (2.9). Однако теперь $\lambda_i = -\gamma_i + j\varepsilon_i$, где γ_i — положительная величина, характеризующая затухание. Взяв случай $h = 0$, получаем значения четырех корней характеристического уравнения $z_i = -e^{-\gamma_i \tau} e^{j\varepsilon_i \tau}$, модуль которых меньше единицы.

4. Проверка условия отсутствия лишних переключений. Все полученные выше результаты справедливы лишь при условии, что $\tau' = \tau^0 + \pi$ является наименьшим корнем уравнения (2.3) $y(\tau') = 0$. Предположим, что в некоторой части пространства параметров это условие выполняется. Тогда с изменением параметров момент появления лишних корней τ^* в интервале $\tau^0 \leq \tau^* < \tau^0 + \pi$ соответствует выполнению двух условий: $y(\tau^*) = 0$ и $\dot{y}(\tau^*) = 0$ или

$$\sum_{i=1}^4 y_i(\tau^*) + \alpha \sin \tau^* = 0, \quad \sum_{i=1}^4 \dot{y}_i(\tau^*) + \alpha \cos \tau^* = 0. \quad (2.15)$$

Подставляя значения $y_i(\tau)$ и $\dot{y}_i(\tau)$, из уравнения (2.2) получаем:

$$\begin{aligned} y(\tau^*) &= h \sum_{i=1}^4 \frac{c_i}{\omega \lambda_i} \left(1 - \operatorname{th} \frac{\omega \lambda_i \pi}{2} \right) e^{\omega \lambda_i (\tau^* - \tau^0)} - h \sum_{i=1}^4 \frac{c_i}{\omega \lambda_i} + \alpha \sin \tau^* = 0; \\ \dot{y}(\tau^*) &= h \sum_{i=1}^4 c_i \left(1 - \operatorname{th} \frac{\omega \lambda_i \pi}{2} \right) e^{\omega \lambda_i (\tau^* - \tau^0)} + \alpha \cos \tau^* = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Второе из уравнений (2.16) всегда выполняется при $\tau^* = \tau^0 + \pi/2$. Следовательно, для отсутствия лишних переключений при движении изображающей точки в G_{+h} необходимо, чтобы $y(\tau^0 + \pi/2) > 0$. Последнее неравенство, согласно (2.16), запишется после ряда преобразований в виде:

$$-h \left\{ \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 + \frac{1 - \varepsilon_1^2}{\cos(\omega \varepsilon_1 \pi/2)} - \frac{1 - \varepsilon_2^2}{\cos(\omega \varepsilon_2 \pi/2)} \right\} + \frac{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \cos \tau^0}{(\omega^2 - \varepsilon_1^2)(\omega^2 - \varepsilon_2^2)} > 0. \quad (2.17)$$

Неравенство (2.17) нарушается на некоторой границе C_τ . Отметим особенности в поведении C_τ , вытекающие из (2.17).

При $\omega \rightarrow \varepsilon_1$

$$h \rightarrow \pi \cos \tau^0 / 4(\varepsilon_1^2 - 1);$$

при $\omega \rightarrow \varepsilon_2$

$$h \rightarrow \pi \cos \tau^0 / 4(\varepsilon_2^2 - 1).$$

Величина $h \rightarrow \infty$, когда обращается в нуль фигурная скобка в (2.17). Функция, заключенная в ней, непрерывна в интервале $\varepsilon_2 < \omega < \varepsilon_1$, а на концах интервала стремится к $+\infty$ и $-\infty$. Следовательно, граница C_τ уходит в бесконечность внутри интервала $\varepsilon_2 < \omega < \varepsilon_1$.

На рис. 4в изображены границы C_τ . Горизонтальной штриховкой выделены области, в которых выполняется необходимое условие

отсутствия лишних переключений для $\tau^0 = 0$, вертикальной — для $\tau^0 = \pi$. Что касается достаточности условия $y(\tau^0 + \pi/2) > 0$, то в общем виде оно не доказывалось. Однако для конкретных значений параметров проверялось, что условие $y(\tau) > 0$ выполняется во всем интервале $\tau^0 < \tau < \tau^0 + \pi$.

5. Выделение в пространстве параметров области существования и устойчивости простейшего режима сводится к выделению области, удовлетворяющей требованиям, рассмотренным в гл. 2—4 настоящего раздела. На рис. 4г в качестве примера приведены области существования и устойчивости для случая $\mu = 0,1$, построенные согласно рис. 4 а, б, в. Заметим, что при $h = 0$ имеет место устойчивый периодический режим с колебаниями в фазе с вынуждающей силой при $\omega < \varepsilon_2$ и $\omega > \varepsilon_1$ и в противофазе с внешней силой при $\varepsilon_2 < \omega < \varepsilon_1$. Это согласуется с результатами теории линейного динамического демпфера [14].

Следует отметить, что благодаря предварительному сжатию пружины в рассматриваемой системе возможен периодический режим, когда массы M и m двигаются без взаимного проскальзывания, т. е. при $y \equiv 0$. Дифференциальное уравнение такого движения в безразмерных переменных имеет вид

$$(1 + \mu) \ddot{\xi} + \omega^2 \xi = \sin \tau \quad (2.18)$$

и справедливо при $m\ddot{x}_{\max} < k_2 H$ или (в безразмерных параметрах) при $\dot{\xi}_{\max} < h\omega^2$. Последнее неравенство после решения (2.18) дает границу существования указанного режима, которую обозначим через C_h^* :

$$h\omega^2 |\omega^2 - (1 + \mu)| \geq 1. \quad (2.19)$$

На рис. 4г граница (2.19) изображена пунктиром, а области, в которых возможен периодический режим с $y \equiv 0$, выделены наклонной штриховкой. Как видно из рисунка, в пространстве параметров имеются области, в которых наряду с движением масс без проскальзывания может иметь место и простейший режим, несмотря на значительную величину h .

3. К ВЫБОРУ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЕМПФЕРА

1. Амплитуда колебаний демпфируемой системы. Зависимость $\xi(\tau)$ и $\gamma_i(\tau)$ находим, решая исходную систему уравнений (1.3) для случая предварительной настройки $\nu^2 = \mu\omega^2$:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(\tau) &= A \sin \tau + a_1 \sin (\omega \varepsilon_1 \tau) + b_1 \cos (\omega \varepsilon_1 \tau) + a_2 \sin (\omega \varepsilon_2 \tau) + b_2 \cos (\omega \varepsilon_2 \tau); \\ \gamma_i(\tau) &= -h + B \sin \tau + g_1 [a_1 \sin (\omega \varepsilon_1 \tau) + b_1 \cos (\omega \varepsilon_1 \tau)] + \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\cdot + g_2 [a_2 \sin (\omega \varepsilon_2 \tau) + b_2 \cos (\omega \varepsilon_2 \tau)],$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega^2 - 1}{(\omega^2 - \varepsilon_1^2)(\omega^2 - \varepsilon_2^2)}, \quad B = \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \varepsilon_1^2)(\omega^2 - \varepsilon_2^2)}, \\ g_1 &= 1/(1 - \varepsilon_1^2), \quad g_2 = 1/(1 - \varepsilon_2^2), \end{aligned} \quad (3.2)$$

а a_1, b_1, a_2, b_2 находятся из условий

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(\tau^0 + \pi) &= -\dot{\xi}(\tau^0); \quad \dot{\xi}(\tau^0 + \pi) = -\dot{\xi}(\tau^0); \quad \gamma_i(\tau^0 + \pi) = -\gamma_i(\tau^0); \\ \dot{\gamma}_i(\tau^0 + \pi) &= -\dot{\gamma}_i(\tau^0) \end{aligned}$$

и равны

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-h}{g_2 - g_1} \left[\operatorname{tg} \frac{\omega \varepsilon_1 \pi}{2} \cos(\omega \varepsilon_1 \tau^0) + \sin(\omega \varepsilon_1 \tau^0) \right]; \\ b_1 &= \frac{-h}{g_2 - g_1} \left[-\operatorname{tg} \frac{\omega \varepsilon_1 \pi}{2} \sin(\omega \varepsilon_2 \tau^0) + \cos(\omega \varepsilon_1 \tau^0) \right]; \\ a_2 &= \frac{h}{g_2 - g_1} \left[\operatorname{tg} \frac{\omega \varepsilon_2 \pi}{2} \cos(\omega \varepsilon_2 \tau^0) + \sin(\omega \varepsilon_2 \tau^0) \right]; \\ b_2 &= \frac{h}{g_2 - g_1} \left[-\operatorname{tg} \frac{\omega \varepsilon_2 \pi}{2} \sin(\omega \varepsilon_1 \tau^0) + \cos(\omega \varepsilon_2 \tau^0) \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

После разложения $\xi(\tau)$ в ряд Фурье с учетом (3.2) и (3.3) получаем следующие значения амплитуд основной и кратных гармоник:

$$\Psi_1 = \frac{(\omega^2 - 1) - 4h\pi^{-1}\mu\omega^2 \cos \tau^0}{(\omega^2 - \varepsilon_1^2)(\omega^2 - \varepsilon_2^2)}; \quad \Psi_n = -\frac{4\mu h \omega^2 n \cos \tau^0}{\pi(n^2 - \omega^2 \varepsilon_1^2)(n^2 - \omega^2 \varepsilon_2^2)} \quad (n = 3, 5, 7, \dots). \quad (3.4)$$

На рис. 5а в качестве примера приведены значения амплитуд $\Psi_1(\omega)$ для $\mu = 0,1$ в интервалах $\omega < \varepsilon_2$ и $\varepsilon_2 < \omega < \varepsilon_1$, где имеет место простейший периодический режим. Каждая кривая соответствует опреде-

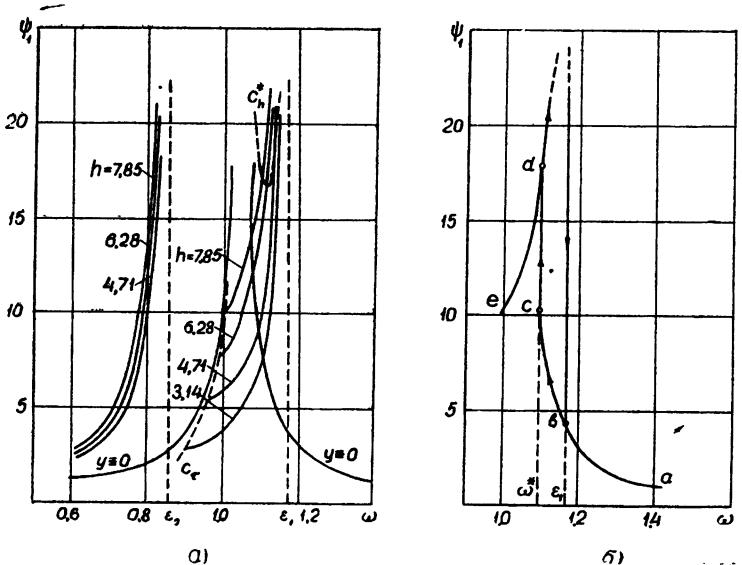


Рис. 5.

ленному значению h . Пунктирными линиями проведена граница C_r , за которой простейший режим не имеет места, и граница C_h , за которой наряду с режимом $y \equiv 0$ может также существовать и простейший режим. Возможность существования одного из двух периодических движений имеет место и при $\omega < \varepsilon_2$. Как видно из рис. 5а (или непосредственно из (3.4)), амплитуда колебаний 'неограниченно' растет, если $\omega \rightarrow \varepsilon_1$, ε_2 при условии существования простейшего режима. Однако в этих 'опасных' зонах существует еще одно устойчивое периодическое движение масс при $y \equiv 0$, имеющее сравнительно небольшую амплитуду колебаний (кривая $y \equiv 0$ на рис. 5а).

Пусть при фиксированном значении h изменяется ω . В этом случае зависимость $\Psi_1(\omega)$ носит гистерезисный характер (рис. 5б). Если $\omega \rightarrow \varepsilon_1 + 0$, имеет место периодическое движение с $y \equiv 0$; система с конечной амплитудой проходит резонансную частоту $\omega = \varepsilon_1$ и при некотором значении ω^* наступает простейший периодический режим (ветвь *abcde*). Если же изменять ω в обратную сторону, то простейший периодический режим будет существовать вплоть до $\omega = \varepsilon_1$ и срывается при бесконечной амплитуде колебаний (ветвь *ed* ∞ *ba*).

Интересно отметить, что на практике динамический демпфер с предварительно сжатой пружиной в чистом виде не применяется. Обычно ставят ограничители, жестко связанные с массой M [3]. При достаточно большой амплитуде колебаний массы m относительно массы M , т. е. при достаточно больших значениях y начинаются взаимные удары масс. Полученные нами результаты позволяют понять назначение ограничителей: без них принципиально не будет гашения колебаний, ибо ограничители способствуют выходу системы из „затянувшегося“ опасного режима.

2. К выбору оптимальных параметров демпфера. Дальнейшее рассмотрение проведем в предположении, что на границе C_h простейший режим обязательно переходит в движение масс с $y \equiv 0$ благодаря постановке ограничителей. Следует подчеркнуть, что изучение динамического демпфера с ограничителями представляет самостоятельный интерес и выходит за рамки настоящей работы. Поэтому постановка ограничителей в нашем случае служит лишь некоторым оправданием предположения, что в области пространства параметров, где возможны два устойчивых периодических режима, будет реализоваться режим с меньшей амплитудой колебаний.

Оптимальное значение предварительного сжатия пружины $h_{\text{опт}}$ будем искать из условия минимальности амплитуды колебаний на границе перехода двух периодических режимов C_h или C_τ . Наличие такого экстремального значения амплитуды ясно из следующих соображений. Если h меньше некоторого $h_{\text{мин}}$, соответствующего пересечению границы C_h с N_{+1} (точки M и N на рис. 4г), то амплитуда колебаний при $\omega \rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2$ неограниченно возрастает, ибо имеет место простейший режим. Если $h \rightarrow \infty$, то получается система с одной степенью свободы и с бесконечной амплитудой колебаний на резонансной частоте $\omega = \sqrt{1 + \mu}$. В промежутке $h_{\text{мин}} < h < \infty$ можно ожидать наименьшей амплитуды.

Подставив граничное значение h из (2.19) в выражение амплитуды основной гармоники (3.4) для случая $\tau^0 = \pi$, получим значение Ψ_1 на границе C_h :

$$\Psi_1 = \left| \frac{(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 1 - \mu) + 4\mu/\pi}{(\omega^2 - \varepsilon_1^2)(\omega^2 - \varepsilon_2^2)(\omega^2 - 1 - \mu)} \right|. \quad (3.5)$$

Для различных значений μ функция $\Psi_1(\omega)$ имеет минимальное значение при определенном ω , а значит, при определенном h . На рис. 6 приведены результаты соответствующих вычислений в виде кривых зависимости $\Psi_{1\text{опт}}$ и $h_{\text{опт}}$ от μ . При этом во всех случаях проверялось, что на границе C_h амплитуда колебаний больше, чем на границе C_τ , т. е. что именно она определяет выбор $h_{\text{опт}}$.

Однако для практического использования результатов, приведенных на рис. 6, необходимо еще указать, как располагать ограничители для получения оптимального случая в рамках рассмотренного режима. Положение ограничителей определяется наибольшим относительным

смещением масс — $y(\tau)_{\max}$ в оптимальном режиме колебаний. Согласно (2.16), имеем:

$$y(\tau) = -h + \frac{\sin \tau}{(\omega^2 - \varepsilon_1^2)(\omega^2 - \varepsilon_2^2)} + \frac{h}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2} \left\{ (\varepsilon_1^2 - 1) \left[\cos [\omega \varepsilon_1(\tau - \tau^0)] + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{tg} \frac{\omega \varepsilon_1 \pi}{2} \sin [\omega \varepsilon_1(\tau - \tau^0)] \right] + (1 - \varepsilon_2^2) \left[\cos [\omega \varepsilon_2(\tau - \tau^0)] + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{tg} \frac{\omega \varepsilon_2 \pi}{2} \sin [\omega \varepsilon_2(\tau - \tau^0)] \right] \right\}. \quad (3.6)$$

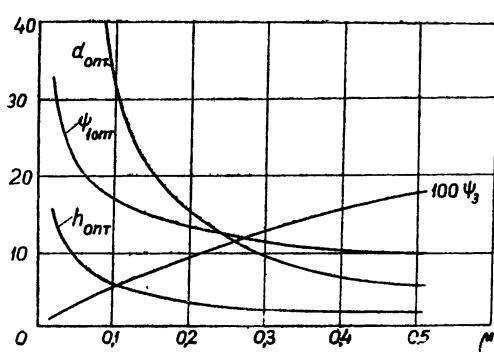


Рис. 6.

Напомним, что $y(\tau)$ имеет экстремальное значение при $\tau = \tau^0 + \pi/2$, так как, согласно (2.16), $y(\tau^0 + \pi/2) = 0$. Непосредственное исследование (3.6) показывает, что при интересующих нас значениях μ , $h_{\text{опт}}$ и ω , соответствующих границе C_h , $y(\tau^0 + \pi/2)$ имеет наибольшее значение. Таким образом, подставив $\tau = \tau^0 + \pi/2$ в (3.6), получим в безразмерных единицах величину половины расстояния между преградами

$$d = -h - \frac{1}{(\omega^2 - \varepsilon_1^2)(\omega^2 - \varepsilon_2^2)} + h \left[\frac{\varepsilon_1^2 - 1}{\cos(\omega \varepsilon_1 \pi/2)} - \frac{\varepsilon_2^2 - 1}{\cos(\omega \varepsilon_2 \pi/2)} \right]. \quad (3.7)$$

Зависимость (3.7), на основании которой можно найти зазор между преградами, соответствующий нарушению простейшего режима на границе C_h , приведена на рис. 6.

На этом же рисунке для сравнения с амплитудой основной гармоники приведена амплитуда третьей гармоники, вычисленная, согласно (3.4), для значений μ , h , ω , соответствующих оптимальному режиму.

4. ЗАДАЧА О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОСЦИЛЛЯТОРА С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО СЖАТОЙ ПРУЖИНОЙ КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ РАССМОТРЕННОЙ ЗАДАЧИ ($m = \infty$, $k_1 = 0$)

В работе [14] изучались простейшие периодические режимы системы с одной степенью свободы и нелинейностью за счет предварительного сжатия пружины. Однако выделение областей пространства параметров, соответствующих простейшему режиму, проводилось без исследования его устойчивости. Поскольку данная задача является частным случаем задачи, рассмотренной в разделах 1,2, при $m = \infty$ и $k_1 = 0$, представляется целесообразным дать ее строгое решение с исследованием устойчивости.

При $k_1 = 0$ и неподвижной массе m имеем:

$$\eta = 0; \quad \omega^2 = 0; \quad \gamma^2 = k_2/M\Omega^2. \quad (4.1)$$

В этом случае уравнение движения запишется в виде

$$\ddot{\xi} + \nu^2 \xi = \sin \tau - h \nu^2 f_1(\xi). \quad (4.2)$$

Обозначим через $x(\tau) = h \operatorname{sgn} \xi$ выход реле и вход линейного звена. Тогда по аналогии с преобразованиями, проведенными в разделе 1, выход линейного звена представим как сумму решения уравнения (4.2) с $\sin \tau$ в правой части

$$y_0(\tau) = \frac{\sin \tau}{\nu^2 - 1} = \alpha \sin \tau$$

и решения уравнения (4.2) $y_1(\tau)$, когда в правой части присутствует лишь выход реле.

Коэффициент передачи линейного звена

$$K(p) = -\frac{\nu^2}{p^2 + \nu^2} = \sum_{i=1}^2 \frac{c_i}{p - \lambda_i}, \quad (4.3)$$

где

$$c_{1,2} = \mp \nu/2j; \quad \lambda_{1,2} = \pm j\nu. \quad (4.4)$$

После введения новых переменных $y_i - \lambda_i y_i = c_i x$ имеем уравнения движения в областях G_{+h} и G_{-h} , совпадающие по виду с (1.13) и (1.14)*. Так как и теперь $\sum c_i = 0$, пластина скользящих движений, расположенная на поверхности переключений реле (1.15), также вырождается в линию.

При отыскании неподвижной точки преобразования T_+T_- , соответствующей простейшему симметричному режиму, воспользуемся уравнениями (2.1)–(2.4). С учетом (4.4) имеем:

$$\sin \tau^0 = 0; \quad \tau^0 = 0, \pi. \quad (4.5)$$

Условие переключения (2.6) теперь принимает более простой вид:

$$h \nu \operatorname{tg} \frac{\nu \pi}{2} + \frac{\cos \tau^0}{\nu^2 - 1} \geq 0. \quad (4.6)$$

Граница, на которой это условие нарушается, приведена на рис. 7а в виде кривой $h(\nu)$. Горизонтальной штриховкой отмечены области, в которых выполняется условие переключения для $\tau^0 = 0$, вертикальной — для $\tau^0 = \pi$.

Характеристическое уравнение (2.9) с учетом (4.4) имеет вид:

$$z^2 + 2z \frac{\alpha \cos \tau^0 \cos(\nu \pi) - h \nu \operatorname{tg}(\nu \pi/2)}{\alpha \cos \tau^0 + h \nu \operatorname{tg}(\nu \pi/2)} + 1 = 0. \quad (4.7)$$

Здесь опять имеет место сомнительный случай, который позволяет строго выделить лишь области неустойчивости, соответствующие наличию двух действительных корней. Границы этих областей соответствуют переходу пары комплексно-сопряженных корней в действительные:

* Здесь и далее следует учитывать, что коэффициент передачи для системы с двумя степенями свободы мы представляли в виде $\sum \frac{c_i}{p - \omega \lambda_i}$, тогда как для системы с одной степенью свободы используется выражение $\sum \frac{c_i}{p - \lambda_i}$.

$z_{1,2} = +1$ (граница N_{+1}) или $z_{1,2} = -1$ (граница N_{-1}). В результате получаем из (4.7) уравнения границ:

$$\text{граница } N_{+1}: \nu = 1, 3, 5, \dots; \quad (4.8)$$

$$\text{граница } N_{-1}: \nu = 0, 2, 4, \dots; \quad (4.9)$$

$$2h\nu + \alpha \sin(\nu\pi) \cos \tau^0 = 0.$$

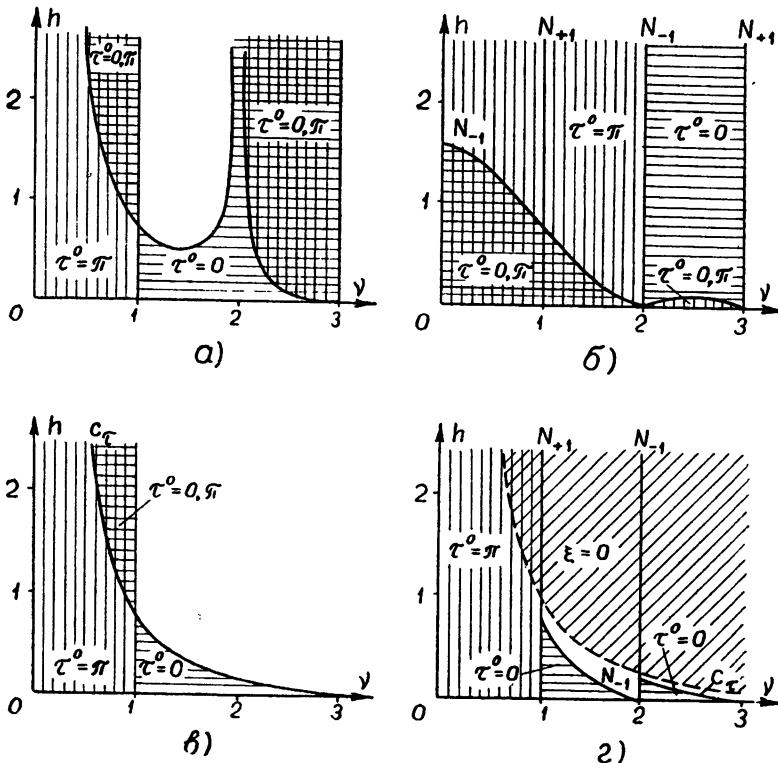


Рис. 7.

На рис. 7б приведены границы (4.8), (4.9) в плоскости параметров ν, h . Штриховкой выделены области, „подозрительные“ на устойчивость. окончательно же решить вопрос об устойчивости в выделенных областях можно, лишь отказавшись от консервативной модели. Введение в систему (4.2) коэффициента вязкого трения $\gamma > 0$ приводит к характеристическому уравнению

$$z^2 + 2z \frac{\sigma e^{-\tau\pi} \cos(\nu'\pi) \cos \tau^0 - h\nu' e^{\tau\pi} \operatorname{tg}(\nu'\pi/2)}{\sigma \cos \tau^0 + h\nu' e^{2\tau\pi} \operatorname{tg}(\nu'\pi/2)} + e^{-2\tau\pi} = 0. \quad (4.10)$$

Отсюда видно, что пара комплексно-сопряженных корней имеет модуль меньше единицы.

Наконец, граница появления лишних переключений реле C_τ , получаемая из (2.16), записывается для рассматриваемого случая в форме:

$$-h \left[1 - \frac{1}{\cos(\nu\pi/2)} \right] + \frac{\cos \tau^0}{\nu^2 - 1} = 0. \quad (4.11)$$

Она приведена на рис. 7в, где штриховкой выделены области отсутствия лишних переключений.

На основании результатов, приведенных на рис. 7а, б, в, нетрудно изобразить область существования и устойчивости простейшего периодического режима, что и сделано на рис. 7г.

Следует заметить, что благодаря предварительному сжатию пружины в системе возможен еще периодический режим, когда масса M неподвижна, т. е. $\xi = 0$. Он нарушается, когда амплитуда внешней силы становится равной силе предварительного сжатия $F = k_2 H$ (в безразмерных переменных $h\nu^2 = 1$). Эта граница пунктиром изображена на рис. 7г. Наклонной штриховкой выделена область, в которой возможно неподвижное состояние массы M . Сравнение полученных нами результатов (рис. 7г) с аналогичными результатами работы [14] свидетельствуют о том, что а) часть областей существования простейших режимов вообще выпадает из-за потери устойчивости и б) нет областей плоскости параметров, соответствующих двум возможным режимам при $\gamma^0 = 0$ и $\gamma^0 = \pi$, так как один из них оказывается неустойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Гопп, Демпферы крутильных колебаний коленчатых валов быстроходных двигателей, ГОНТИ, Харьков, 1938.
2. И. А. Лурье, Крутильные колебания в дизельных установках, Военмориздат, М—Л., 1940.
3. В. П. Терских, Расчеты крутильных колебаний силовых установок, З, Машгиз, М, 1954.
4. М. И. Фейгин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 608 (1959).
5. М. И. Фейгин, Изв. АН СССР, ОТН, мех. и машиностр., 5, (1960).
6. А. А. Андронов, Н. Н. Баутин, ДАН СССР, 13, 95 (1944).
7. А. А. Андронов, А. Г. Майер, Автоматика и телемеханика, 8, 304 (1947).
8. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М, 1959.
9. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 41 (1958).
10. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 2, 95 (1958); 1, 5—6, 146 (1958).
11. Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, 14, 556 (1953).
12. Ю. И. Неймарк, Уч. зап. ГГУ, сер. физ., вып. 30, 159 (1956).
13. J. P. Den Hartog, Mechanical Vibrations, New York, 1947.
14. J. P. Den Hartog and, S. J. Mikina, Trans. ASME, APM-54-15, 157 (1932).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 мая 1960 г.

CONTRIBUTION TO THE THEORY OF NONLINEAR DAMPER WITH PRELIMINARY TIGHTENING UP IN THE ELASTIC CONNECTION

M. I. Feigin

The dynamics of a nonlinear dynamic damper with preliminary tightening up in the elastic connection considered as a relay system and investigated by the method of pointwise transformation with resort to the bifurcation theory.

ВЛИЯНИЕ ОСНОВНЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ НА РАБОТУ ТИПОВОЙ СИСТЕМЫ НЕПРЯМОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Ю. А. Гопп

Сочетание операций D -разбиения и гармонической линеаризации приводит к понятию о кривой эквивалентных параметров нелинейной системы, которая используется для расчета нелинейной системы непрямого регулирования. Построение указанной кривой осуществляется по результатам вычислений, выполняемых при составлении D -кривой, что значительно уменьшает трудоемкость исследований и позволяет судить о влиянии различных нелинейностей, не прибегая к непосредственным вычислениям. Применение приближенного метода, не требующего столь жесткой идеализации, обнаружило новые причины, приводящие к возникновению периодических режимов, и указало дополнительные возможности их подавления.

В работах Андронова и его школы дано решение задачи о влиянии сухого трения на состояние системы прямого регулирования [1-3] и вырожденной системы непрямого регулирования [4,5]. Динамика нелинейных сервомеханизмов широко освещена в монографии [6]. Основные нелинейные задачи рассматривались Лурье и его сотрудниками [7-9].

В этих работах нелинейный эффект изучался строгим методом точечных преобразований поверхностей или методом интегрируемой аппроксимации, что дало достоверный материал по динамике простейших нелинейных систем. Авторы прибегали к далеко идущей идеализации реальных авторегулируемых устройств, сводящеих их к системам второго порядка и в отдельных случаях к системам третьего порядка [3,6]. Это объясняется тем, что при более высоких степенях наступает существенное усложнение вида аналитических выражений функций точечного преобразования, из-за чего становится невозможным получение обозримых результатов. В то же время, как показано Неймарком [10], имеется принципиальная возможность точного рассмотрения системы, линейная часть которой описывается уравнением неограниченного порядка.

Поэтому уже ряд лет культивируется другое направление, основанное на приближенных методах нелинейной механики Крылова и Боголюбова. Наибольшую популярность в теории регулирования метод гармонического баланса получил в форме, предложенной Гольдфарбом [11], где он сочетается с построением годографа Найквиста. Позже Попов [12] соединил метод эквивалентной линеаризации с кривой Михайлова. Известны также предложения об использовании для тех же целей операции D -разбиения [13, 14], введенной в расчетную практику Неймарком [15].

В настоящей работе сочетанием метода гармонического баланса с операцией D -разбиения изучается типовая система непрямого регулирования, описываемая уравнением четвертого порядка.

Суть заключается в том, что для решения нелинейных вопросов вводится кривая эквивалентных параметров, для построения которой используются вычисления, обычно выполняемые для построения D -кривой. Это уменьшает трудоемкость анализа и открывает пути для суждения о свойствах системы, не прибегая к прямым вычислениям.

Кроме того, порождающая линейная система приведена к физически ясным параметрам [16] и записана в форме, которая ей придана в работе [17].

Построение приближенного решения освобождает от необходимости прибегать к чрезмерно жесткой идеализации и открывает дополнительные возможности для подавления автоколебательных процессов, которые при других условиях остаются невыявленными. Это расширяет рамки инженерного расчета, а с его сравнением с данными строгой теории позволяет контролировать добывшие результаты.

1. Составление нормированных уравнений. На рис. 1 представлена структурная схема типовой системы непрямого регулирования с жесткой обратной связью в классических обозначениях. Наряду

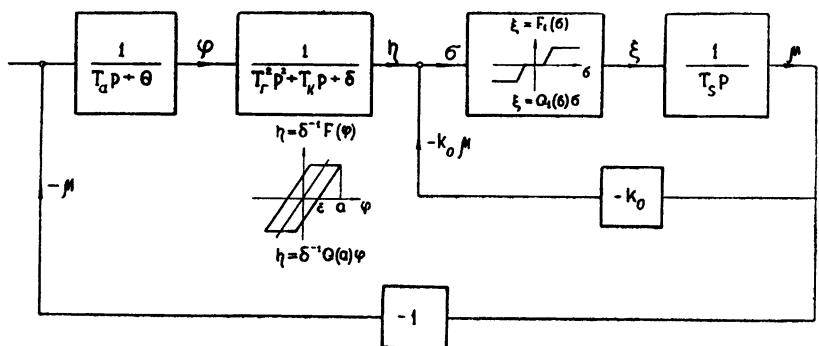


Рис. 1.

с этим предполагается, что в чувствительном элементе, помимо вязкого трения, имеется и сухое трение, а золотник сервомеханизма содержит зоны нечувствительности и насыщения или другие типичные нелинейности. В общую обратную связь включен элемент с зазором.

Метод гармонического баланса позволяет линеаризовать нелинейные функции $x_{\text{вых}} = F(x_{\text{вх}})$, так что

$$x_{\text{вых}} = Q(x_{\text{вх},0}) x_{\text{вх}}, \quad (1)$$

где коэффициент усиления $Q(x_{\text{вх},0})$ для неоднозначных характеристик есть комплексная величина, обычно представляемая в виде

$$Q(x_{\text{вх},0}) = q(x_{\text{вх},0}) + q_0(x_{\text{вх},0}) \bar{p}/\omega, \quad (2)$$

где $\bar{p} = j\omega$. Во многих случаях предпочтительнее пользоваться инверской величиной коэффициента усиления

$$Q^{-1}(x_{\text{вх},0}) = q'(x_{\text{вх},0}) + q'_0(x_{\text{вх},0}) \bar{p}/\omega, \quad (3)$$

где функции q предполагаются известными [11].

Для перехода к нормированному виду вводится безразмерное время

$$\bar{t} = t/\delta T_a, \quad (4)$$

после чего получим характеристическое уравнение системы

$$(\bar{p} + a) [\bar{r}\bar{p}^2 + \bar{k}\bar{p} + Q^{-1}(a)] [\bar{s}\bar{p}/Q_1(b) + k_0] + 1 = 0, \quad (5)$$

где параметры порождающей линейной системы

$$r = T_r^2/\delta^2 T_a^2, \quad k = T_k/\delta^2 T_a, \quad s = T_s/\delta T_a, \quad \alpha = \delta\Theta \quad (6)$$

характеризуют соответственно массу и вязкое трение регулятора, время сервомотора и коэффициент самовыравнивания объекта; α и δ — амплитудные значения входных характеристик.

2. Сухое трение в регуляторе. Полагая в (5) $Q_1(b) = 1$ и заменяя Q^{-1} согласно (3), получим при $k_0 = 1$ и $\bar{p} = j\omega$:

$$(s\omega^2 - \alpha)\omega^2 r - (1 + \sigma s)\omega^2 k = (s\omega^2 - \sigma)q'(a) + (1 + \sigma s)\omega q'_0(a) - 1; \quad (7)$$

$$(1 + \sigma s)\omega^2 r + (s\omega^2 - \alpha)k = (1 + \alpha s)q'(a) - (s\omega^2 - \sigma)\frac{1}{\omega}q'_0(a).$$

Эта система уравнений может быть использована дважды. При $q'(a) = 1$ и $q'_0(a) = 0$ она дает параметрические уравнения плоских сечений D -поверхности при $s = \text{const}$ для порождающей линейной системы:

$$r = \frac{1}{\omega^2} \left[1 - \frac{s\omega^2 - \alpha}{(s\omega^2 - \sigma)^2 + \omega^2(1 + \sigma s)^2} \right]; \quad (8)$$

$$k = \frac{1 + \alpha s}{(s\omega^2 - \alpha)^2 + \omega^2(1 + \alpha s)^2}.$$

Другая трактовка состоит в том, что в пространстве трех параметров фиксируется точка k^* , r^* , s^* и уравнения (7) решаются относительно нелинейных характеристик:

$$\begin{aligned} q'(a) &= \omega^2 r^* + \frac{s\omega^2 - \alpha}{(s\omega^2 - \alpha)^2 + \omega^2(1 + \sigma s)^2}; \\ q'_0(a) &= -\omega k^* + \frac{\omega(1 + \sigma s)}{(s\omega^2 - \alpha)^2 + \omega^2(1 + \sigma s)^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Система (9) позволяет найти параметр автоколебаний, вызванных сухим трением при настройке системы на определенные значения k^* , r^* , s^* . Исключая вторые слагаемые правых частей (9), с помощью системы (8), получим:

$$q'(a) = 1 + (r^* - r)\omega^2; \quad q'_0(a) = (k - k^*)\omega. \quad (10)$$

Последний результат означает, что, построив обычную D -кривую и зная k , r , s , отвечающие свободному параметру ω^2 , легко решить вопрос о возможных периодических режимах. Зная a_0 и ω_0 , можно использовать (10) для определения эквивалентных параметров нелинейной системы в функции текущего значения амплитуды колебаний:

$$r_{\text{экв}}(a) = r^* + \frac{1 - q'(a)}{\omega_0^2}; \quad k_{\text{экв}}(a) = k^* + \frac{q'_0(a)}{\omega_0}. \quad (11)$$

Опуская в (8) самовыравнивание, найдем, что D -кривая проходит через начало координат и пересекает ось k , если $s > 1$. Поэтому область устойчивости на плоскости k , r , выделяемая D -кривой и особой прямой $r = 0$, будет закрытой при $s > 1$ и открытой при $s < 1$ (рис. 2).

Решение системы (10) ведется путем подбора значений ω , при которых оба уравнения дают одинаковую величину амплитуды. Так как $q'(a) \geq 1$ и $q'_0(a) \geq 0$, то должно быть $r \leq r^*$ и $k \geq k^*$. Это опре-

деляет участок AB D -кривой для поиска значения ω (рис. 2а). Когда фигуративная точка k^*, r^* находится на границе устойчивости, то $q'(a)=1$, $q'_0(a)=0$. Из свойств функций q следует, что при $a=\infty$ графики функций

$$a = q^{-1}(\omega), \quad a = q_0^{-1}(\omega)$$

пересекаются в бесконечности. Отсюда ясно, что если при расположении фигуративной точки вблизи границы система (10) дает для a конечное значение, то по другую сторону около границы (10) не имеет решения.

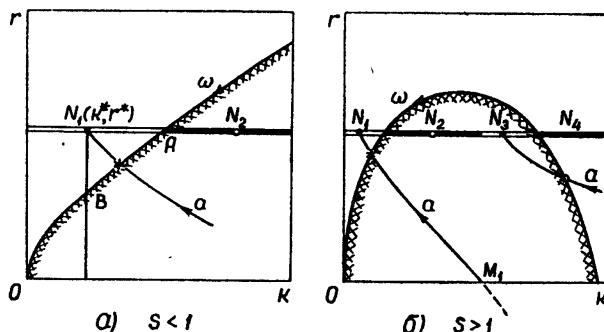


Рис. 2.

Изложенные выше соображения приводят к следующему. Для фигуративной точки N_1 (рис. 2б) система (10) имеет решение, что позволяет построить кривую эквивалентных параметров M_1N_1 (стрелка показывает направление роста амплитуд колебаний). По другую сторону границы периодические режимы не существуют и в точке N_2 система не теряет устойчивости под влиянием сухого трения. Отсутствуют автоколебания и для точки N_1 , когда нелинейность трения не может создать устойчивость процесса регулирования. Наконец, в точке N_3 возможны автоколебания. (Для открытой области устойчивости аналогичные зоны отмечены одинаковыми индексами.)

Когда амплитуда колебаний a приближается к ε (ε — нечувствительность регулятора), функции $q'(a)$ и $q'_0(a)$ стремятся к бесконечности. Поэтому, согласно (11), эквивалентная фигуративная точка для нелинейной системы, вычерчивающая кривую эквивалентных параметров, оказывается в бесконечности, а при $a \rightarrow \infty$ совпадает с первоначально фиксированной точкой N линейной системы. Теперь ясно, что автоколебания, возникающие при настройке на точку N_3 , соответствуют устойчивому предельному циклу, ибо при малых a эквивалентная точка располагается в неустойчивой области, а при больших a она попадает в устойчивую область. Наоборот, настройка системы на точку N_1 приводит к образованию неустойчивого предельного цикла.

Однако в последнем случае надо иметь в виду следующее. Принимая, что кривая эквивалентных параметров дважды пересекает границу области устойчивости (на особой прямой и на D -кривой), найдем, что имеются малый устойчивый и большой неустойчивый предельные циклы. Но при значениях a , мало отличающихся от ε , не соблюдаются физические предпосылки приближенного метода, так как движение из-за возможных остановок будет значительно отличаться от гармонического. При такой точке зрения часть кривой N_1M_1 ниже оси k следует отбросить и считать, что система имеет только один неустойчивый предельный цикл.

Независимо от высказанных предположений неустойчивая недодемпфированная линейная система при настройке ее на фигуративную точку N_1 под влиянием сухого трения не будет давать расходящихся колебаний при всех возмущениях, не приводящих к отклонениям a , большим, чем те, которые соответствуют отметке в точке пересечения кривой N_1M_1 с D -кривой. Иначе говоря, сухое трение может сделать неустойчивую линейную систему устойчивой в малом. Наряду с этим сухое трение в других случаях стимулирует развитие устойчивых автоколебаний (точка N_3) или не оказывает влияния на состояние системы.

Полагая в (8) $s = 0$, перейдем к уравнениям для системы прямого регулирования. В этом случае область устойчивости оказывается открытой или закрытой в зависимости от знака коэффициента самовыравнивания. Анализ влияния сухого трения в такой системе приводит к результатам, аналогичным полученным выше для системы непрямого регулирования. Это позволяет сравнить выводы по системе четвертого порядка с данными, полученными в [3], и убедиться в их идентичности (с тем различием, что два подслучаи, о которых говорилось при обсуждении точки N_1 , строгая теория дает как самостоятельные случаи).

Принимая в (5) $Q_1 = Q_2 = 1$, $k = r = 0$ и $k_0 = 0$ и воспользовавшись (2), получим при $p = j\omega$:

$$q(a) = \frac{1}{s(\omega^2 + \alpha^2)}; \quad q_0(a) = -\frac{\alpha}{s\omega(\omega^2 + \alpha^2)}, \quad (12)$$

откуда

$$\cdot 1/s^2 = q(a)/q_0'(a). \quad (13)$$

Используя графики q и q_0 в работе [12], найдем, что минимум правой части (13) равен 3,44. Поэтому в вырожденной системе непрямого регулирования без обратной связи невозможны автоколебания, если $1/s^2 = T_a/\delta\Theta^2 T_s < 3,44$. Строгая теория [5] дает значение этого критерия 3,04.

Поступая аналогично, найдем, что когда $\alpha = 0$, а $k_0 = 1$, критерий отсутствия автоколебаний $T_s/\delta T_a < 3,44$ по приближенной теории и $T_s/\delta T_a < 3,04$ — по строгой теории [7].

3. Однозначная нелинейность сервомотора. Из уравнения (5) ясно, что нелинейность сервомотора изменяет структуру уравнения звена иначе, чем сухое трение. Теперь эквивалентное время нелинейного сервомотора запишется в виде

$$s_{\text{экв}}(b) = s^*/Q_1(b), \quad (14)$$

где s^* — фиксированное значение параметра s , определяющее настройку порождающей линейной системы.

При однозначной нелинейности коэффициент усиления звена веществен и определяется из (2) при $p = 0$. Полагая в (5) $Q^{-1}(a) = Q_1(b) = k_0 = 1$ и $\alpha = 0$, получим параметрические уравнения плоских сечений D -поверхности относительно k и s при $r = \text{const}$ для порождающей линейной системы:

$$k = \frac{1 \mp \sqrt{1 - 4z(1 - rz)^2}}{2z}; \quad s = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4z(1 - rz)^2}}{2z(1 - rz)}, \quad (15)$$

где $z = \omega^2$. На рис. 3а, б, в показаны три вида областей устойчивости [17]. Для суждения о влиянии нелинейности надо обратиться к выражению (14), заменив в нем $Q_1(b)$ на $q'_1(b)$ согласно (3).

Графики функций $q'_1(b)$ с учетом зоны нечувствительности, зоны насыщения и обе характеристики одновременно представлены на рис. 4. Этот последний вариант практически наиболее интересен и поэтому рассматривается подробнее.

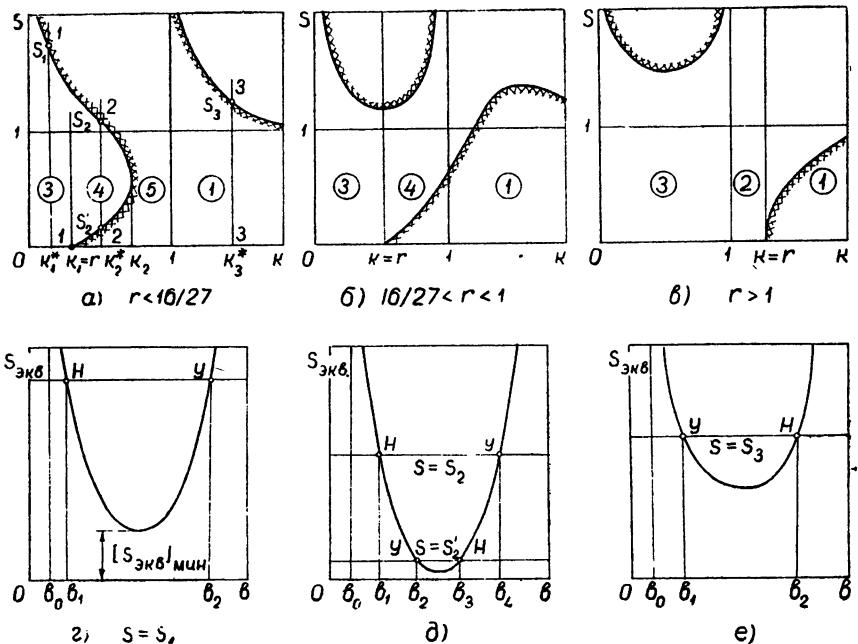


Рис. 3.

Пусть $r^* < 16/27$ и $k_1^* < k_1$ (сечение 1—1 на рис. 3а), а параметр линейного сервомотора s^* таков, что соблюдается неравенство

$$[s_{\text{ЭКВ}}(b)]_{\min} = s^*[q^{-1}(b)]_{\min} < s_1. \quad (16)$$

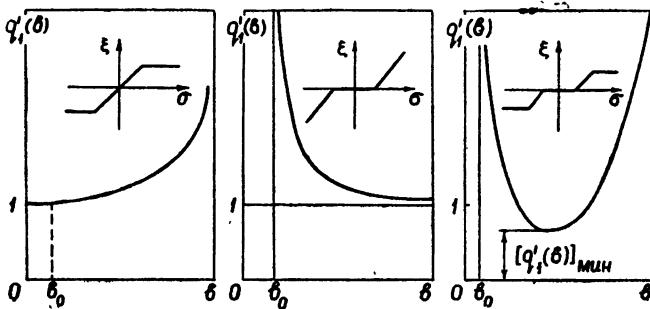


Рис. 4.

Тогда кривая эквивалентных параметров дважды пересекает прямую $s_1 = \text{const}$ (рис. 3г) и возможны автоколебания, частота которых определяется отметкой на D-кривой в сечении $k = k_1^*$, а амплитуды равны b_1 и b_2 . Предельный цикл, отвечающий малой амплитуде, исустойчив,

так как при $b_0 < b < b_1$ по кривой эквивалентных параметров видно, что фигуративная точка располагается в области устойчивости и колебания затухают. Наоборот, при $b_1 < b < b_2$ фигуративная точка попадает в неустойчивую часть плоскости параметров и колебания растут до $b = b_2$. Легко заметить, что другой возможный предельный цикл устойчив. Поэтому неустойчивая линейная порождающая система при быстром сервомоторе (s^* мало) становится устойчивой в малом, пока $b < b_1$, либо в ней возникают устойчивые автоколебания.

Увеличение s^* , сопровождаемое нарушением неравенства (16), означает, что кривая $s_{\text{экв}}$ не пересекает прямую $s_1 = \text{const}$ и первоначально неустойчивая система под влиянием нелинейности становится устойчивой; если же система была устойчивой ($s^* > s_1$), то сохраняет это состояние. Таким образом, при медленных сервомоторах (большое s^*) нелинейность может оказывать стабилизирующее действие.

Пусть по-прежнему $r^* < 16/27$, а $k_1 < k_2^* < k_2$ (сечение 2--2 на рис. 3). Теперь в зависимости от настройки s^* кривая эквивалентных параметров может пересекать обе прямые s_2 и $s_2' = \text{const}$, только прямую $s_1 = \text{const}$ и ни одну из них (рис. 3д). В первом из этих случаев существует четыре предельных цикла (из них два — устойчивые). Легко видеть, что система устойчива, пока $b < b_1$. Однако ввиду малости величины b_1 всегда существует вероятность, что под влиянием случайных импульсов даже при установленвшемся состоянии система регулирования перейдет в режим автоколебаний с амплитудой b_2 . При возмущениях, приводящих к начальным отклонениям $b > b_3$, устанавливаются устойчивые автоколебания большой амплитуды b_4 . Увеличение s^* , т. е. использование менее быстрых сервомоторов, когда кривая $s_{\text{экв}}(b)$ пересекает только прямую $s_2 = \text{const}$, несколько увеличивает диапазон устойчивости в малом. При весьма медленных сервомоторах нелинейность не вызывает появления автоколебаний.

Когда $k_2 < k_3^* < 1$, автоколебания не возникают при любых значениях s^* , однако хорошее качество переходного процесса возможно при малой величине s^* . Для значений k^* от единицы до бесконечности и при соблюдении неравенства (14) в системе возможны или устойчивые автоколебания амплитуды $b = b_1$, или она теряет устойчивость, когда $b > b_2$ (рис. 3е). При s^* , приближающемся к s_3 , система становится неустойчивой.

Для случая, когда $16/27 < r < 1$ (рис. 3б), возможны те же варианты периодических режимов; однако при этом исключается интервал по k , где автоколебания оказываются подавленными. Для случая, когда $r > 1$, появляется интервал $1 < k^* < k = r$, где порождающая система неустойчива и нелинейность рассматриваемого происхождения не может привести к стабилизации системы; кроме того, тогда оказываются невозможными состояния с двумя устойчивыми предельными циклами.

Графики, приведенные на рис. 3, могут быть использованы и для анализа влияния зоны нечувствительности, когда на кривых $s_{\text{экв}}$ нужно сохранить ниспадающую часть. При оценке роли зоны насыщения, наоборот, следует сохранять только восходящую ветвь тех же кривых.

Из сказанного следует, что предположение об идеальности регулятора, понижающее порядок системы до второго, затушевывает причины, приводящие к периодическим режимам за счет нечувствительности и насыщения сервомотора, так как при этом устойчивость обеспечивается при любом s . Поэтому нельзя дать рекомендации, способствующие подавлению автоколебаний в реальной, а не вырожденной системе непрямого регулирования. Уменьшением массы чувстви-

тельного элемента r и выбором вязкого трения k всегда можно исключить развитие автоколебаний, каково бы ни было время сервомотора (главным параметром в этом смысле служит k). Выше было выяснено, когда неустойчивая линейная система поддается стабилизации путем введения нелинейных элементов.

4. Многозначная нелинейность сервомотора. При оценке нелинейности типа гистерезиса коэффициент усиления звена берется в форме (3), что дает для эквивалентного параметра сервомотора (14)

$$s_{\text{экв}}(b) = \left[q'_1(b) + q'_{10}(b) \frac{p}{\omega} \right] s^*. \quad (17)$$

Поэтому D -разбиение порождающей системы выполняется по комплексному параметру s . Используя (5), получим:

$$u = \frac{1 - rz}{[(1 - rz)^2 + k^2 z] z}; \quad v = \frac{1}{Vz} - \frac{k Vz}{[(1 - rz)^2 + k^2 z] z}, \quad (18)$$

где $u + jv = s$ и $z = \omega^2$. Годограф s пересекает ось u при значениях z , определяемых равенством

$$z = 2[(2r - k^2) \pm \sqrt{(2r - k^2)^2 - 4r^2(1 - k)}] r^{-2}. \quad (19)$$

Если $k > 1$, одно значение z положительно. При $k < 1$ и условии

$$2r \geq k^2/(1 - \sqrt{1 - k}) \quad (20)$$

имеются два положительных значения z . Правая часть (20) достигает максимума, равного $32/27$, и неравенство соблюдается для всех $r > 16/27$. Однако это условие является достаточным, но не необходимым, так как неравенство (20) может соблюдаться и при $r < 16/27$. Наконец, если $k < 1$ и (20) не имеет места, положительных значений z не существует. В соответствии с этим на рис. 5 показаны типичные

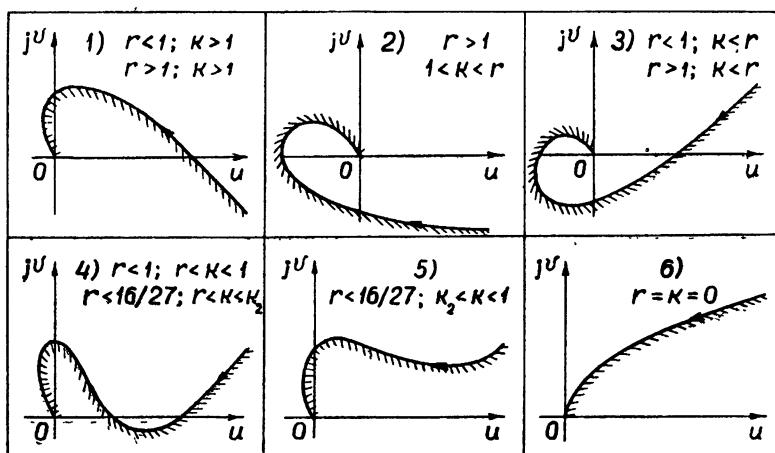


Рис. 5.

годографы комплексного параметра s для $\omega > 0$, выделяющие область устойчивости и отличающиеся друг от друга числом точек пересечения с осью u (устойчивый диапазон отмечен жирной линией),

Связь между D -разбиением по одному параметру и диаграммами Вышнеградского на рис. За, б, в устанавливается цифрами. Там же указаны интервалы для параметров k и r .

Для построения кривой эквивалентных параметров, согласно (17), на рис. ба показано поведение годографов инверсного коэффициента усиления для нелинейного звена с зоной нечувствительности и зазором [11]. Важно, что уменьшение относительного зазора $\Delta/2\epsilon$ смещает

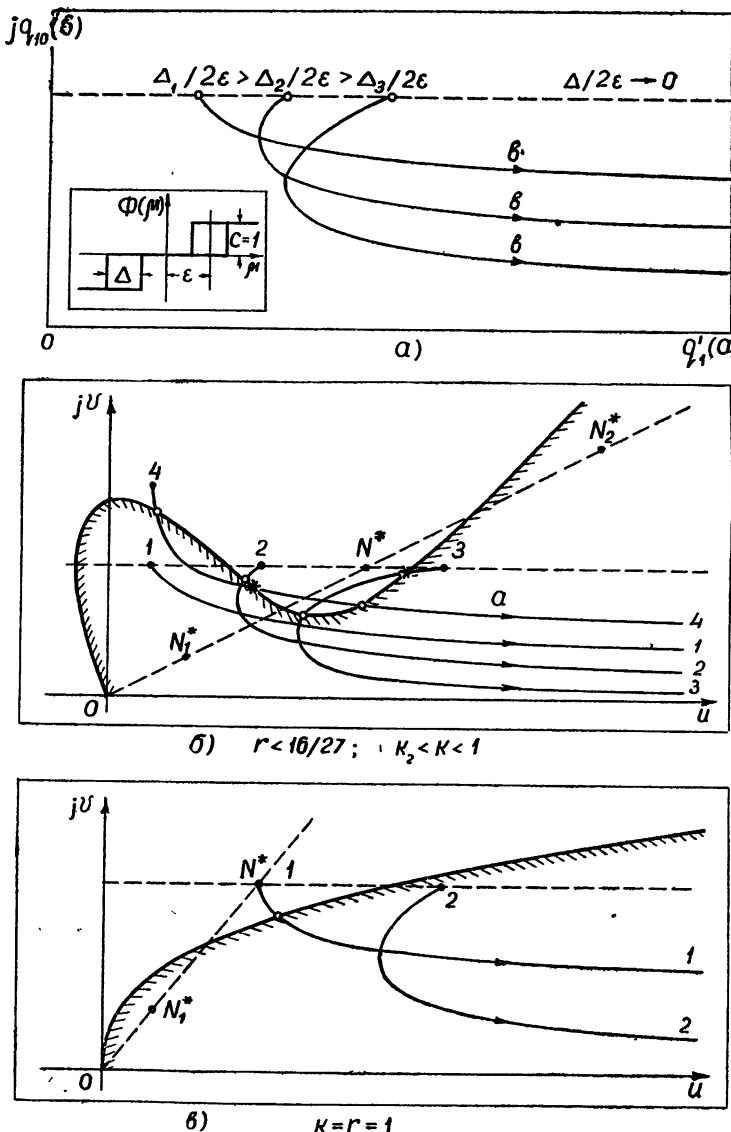


Рис. 6.

начальную точку годографа вправо. Для нахождения видов периодических режимов, возможных в системе непрямого регулирования при многозначной нелинейности типа гистерезиса, достаточно рассмотреть различные случаи взаимного расположения годографов s и $s_{\text{экв}}$ или, что то же самое, D -кривой и кривой эквивалентных параметров. На рис. бб это выполнено для случая, когда порождающая линейная

система устойчива при всех значениях $Re s$ (вариант 5 на рис. 5). В случае, когда изменение эквивалентных параметров определяется кривой 1—1, петля гистерезиса не нарушает устойчивости. Уменьшение относительного зазора деформирует кривую $s_{\text{экв}}$ и она совпадает с кривой 2—2. При этом образуется устойчивый предельный цикл. При последующем уменьшении $\Delta/2\varepsilon$ (кривая 3—3) образуются два предельных цикла — неустойчивый и устойчивый. Затем снова можно подавить автоколебания жестким ограничением зазоров. Кривая 4—4 указывает, что возможны три предельных цикла, из которых два устойчивы.

Когда начальная точка кривой $s_{\text{экв}}$ совпадает с точкой N^* , можно подавить автоколебания, уменьшая s^* до значения s_1^* или, наоборот, увеличивая до значений s_2^* , отвечающих figurativным точкам N_1^* или N_2^* . Такие широкие возможности устранения периодических режимов идеализированная трактовка не обнаруживает.

Для вырожденной системы (рис. 6в) устойчивые автоколебания (кривая 1—1) могут быть подавлены только уменьшением зазора и переходом на кривую 2—2 или только уменьшением времени сервомотора и перемещением figurativной точки из положения N^* в положение N_1^* . Наибольшее разнообразие периодических режимов сулит вариант 4 на рис. 5, когда возможно образование от одного до четырех периодических режимов. Исследование их не представляет теперь труда и должно производиться для конкретных значений параметров. Кривые эквивалентных параметров, не пересекающие границу устойчивости, не имеют четкого физического содержания, а только свидетельствуют об отсутствии периодических режимов.

На рис. 7а, б показано разделение плоскости параметров на области, где возникают автоколебания, полученное точным [18, 19] и при-

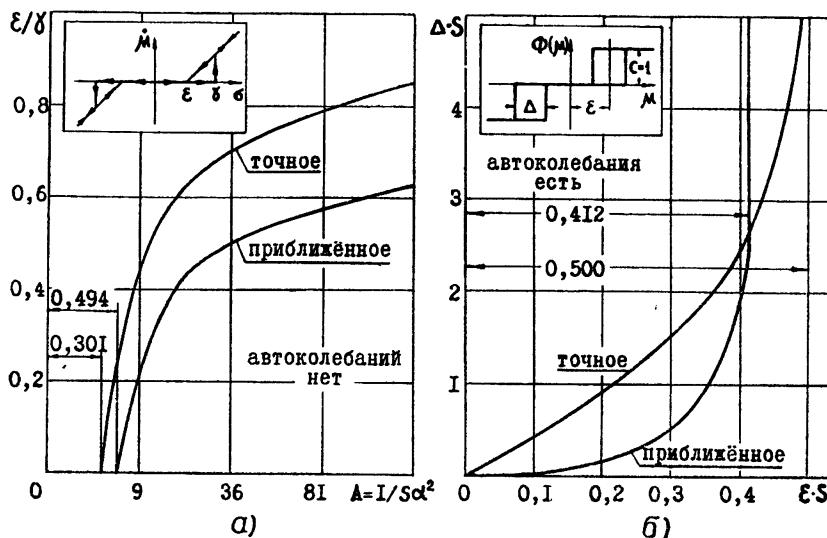


Рис. 7.

ближенным способами для вырожденной системы при учете падающей характеристики сухого трения и при образовании петли гистерезиса в сервомоторе. Как видно, количественные отклонения, даваемые методом гармонического баланса, могут быть весьма значительными; однако этот метод вполне удовлетворителен для качественного описания процесса.

Сочетание операций D -разбиения и гармонической линеаризации, приводящее к кривой эквивалентных параметров, дает простую расчетную схему для анализа возможностей возникновения или подавления автоколебательных режимов. С помощью этой же кривой непосредственно выясняется устойчивость найденных решений. Приближенный метод не требует жесткой идеализации и уместен при изучении систем, когда использование строгой теории приводит к пока непреодолимым затруднениям. Сравнение, выполненное для простых автономных систем, обнаружило, что гармоническая линеаризация дает правильное описание качественных черт процесса.

Влияние основных нелинейностей на работу типовой системы непрямого регулирования сводится к следующему. Сухое трение чувствительного элемента в недодемпфированной системе делает ее устойчивой в малом, а неустойчивую систему из-за передемпфирования делает автоколебательной. При других значениях параметра k , характеризующего вязкое трение, состояние системы под влиянием кулонова трения не изменяется. Эти результаты практически совпадают с тем, что получил Таль для системы прямого регулирования, и поэтому дают представление о влиянии сухого трения в регуляторе на поведение развитых систем автоматики (рис. 2).

Главный вывод о влиянии зон нечувствительности и насыщения в сервомоторе сводится к тому, что возникающие под их влиянием автоколебания могут быть при любой скорости сервомотора подавлены правильной настройкой по параметру k , если только массы чувствительного элемента достаточно малы: $r < 16,27$ (рис. 3).

Автоколебания, вызываемые многозначной нелинейностью типа гистерезиса, не всегда устраняются вариацией вязким трением. Но этого можно достичь, увеличивая или уменьшая время сервомотора или изменения относительный зазор (рис. 6б). Идеализация, принимающая, что k и r равны нулю, естественно, не могла оценить роль этих параметров в подавлении автоколебаний, а также не улавливала двойственного характера влияния s и Δ .

Заключения, вытекающие из приближенной трактовки, дают ориентировку при экспериментальной доводке авторегулирующих устройств и объясняют помехи, наблюдаемые на практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. Г. Майер, ДАН СССР, **43**, 58 (1944).
2. А. А. Андронов, А. Г. Майер, ДАН СССР, **47**, 345 (1945).
3. А. А. Галь, Автоматика и телемеханика, **14**, 604 (1953).
4. А. А. Андронов, Н. И. Баутин, Г. С. Горелик, Автоматика и телемеханика, **7**, 15 (1946).
5. А. А. Андронов, Н. И. Баутин, ДАН СССР, **46**, 304 (1945).
6. Н. С. Горская, И. Н. Крутова, В. Ю. Рутковский, Динамика нелинейных сервомеханизмов, изд. АН СССР, М., 1959.
7. А. И. Лурье, Советское котлотурбостроение, **3**, 9 (1946).
8. А. М. Кац, сб. Исследования в области регулирования паровых турбин, Госэнергоиздат, Л—М, 65, 1950.
9. А. М. Кац, сб. Исследования в области регулирования паровых турбин, Госэнергоиздат, Л—М, 118, 1950.
10. Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, **16**, 225 (1955).
11. Л. С. Гольдфарб, Автоматика и телемеханика, **8**, 349 (1947).
12. Е. П. Попов, Динамика систем автоматического регулирования, Гостехиздат, М., 1954.
13. Г. К. Круг, Труды II Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, **1**, изд. АН СССР, М., 1955, сгр. 251.
14. Ю. М. Астапов, Б. К. Чемоданов, Изв. высш. уч. зав — Машиностроение, **10**, 21 (1959).

15. Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, 9, 190 (1948).
16. И. А. Железцов, Автоматика и телемеханика, 10, 424 (1949).
17. И. А. Антонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 292 ((1959)).
18. В. В. Казакевич, Автоматика и телемеханика, 12, 465 (1951).
19. Основы автоматического регулирования, под ред. В. В. Соловьевника, Машгиз, М., 1954.

Омский машиностроительный институт

Поступила в редакцию
12 октября 1960 г.

THE INFLUENCE OF THE MAIN NONLINEARITIES ON THE WORK OF A STANDART INDIRECT CONTROL SYSTEM

Y. A. Gopp

The combination of the operation of *D*-mapping and harmonic linearization leads to the concept of the curve of the equivalent parameters which is utilized for the design of an indirect control nonlinear system. The plotting of the said curve is effected from results of calculations worked out upon drawing up of *D*-curve, which renders the investigation substantially less laborious and permits to give an idea of the influence of various nonlinearities without resorting to direct calculations. The application of the approximation method, which does not require such a strict idealization, has not only revealed new causes leading to the appearance of periodic regimes, but also indicated additional possibilities for their damping.

ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ НА ТИРАТРОНАХ С ХОЛОДНЫМ КАТОДОМ

· A. C. Котосонов

Статья посвящена методам использования тиаратронов с холодным катодом типа TX4B в цифровых вычислительных машинах и дискретных автоматических устройствах. Излагается метод расчета триггерных ячеек на одном и двух тиаратронах. Приводится схема универсальной одноламповой ячейки, пригодной для построения основных логических схем. В качестве примера использования тиаратронов в логических цепях рассмотрена схема реверсивного счетчика.

Для целей синтеза схем цифровых вычислительных машин и устройств автоматики с быстродействием порядка $10 \div 20 \text{ кгц}$ целесообразно применять тиаратроны с холодным катодом типа TX4B (в литературе лампы этого типа иногда называют тетродами тлеющего разряда). Эти лампы очень экономичны, имеют большой срок службы, малогабаритны, их параметры практически не зависят от температуры в пределах от -70 до $+90^\circ\text{C}$. Тиаратроны TX4B виброустойчивы и обладают световой индикацией.

Отметим, что в [1] были предложены схемы на безнакальных тиаратронах типа МТХ-90. Однако МТХ-90 имеют большой разброс параметров (иногда до 100% и более), и схемы на них не удовлетворяют требованиям надежности. Тетроды типа TX4B в силу примененного в них электростатического управления зажиганием [2] (в противоположность токовому в МТХ-90) имеют значительно большую стабильность по параметрам (разброс 5% от номинала). Такое управление зажиганием требует специфических методов расчета и разработки схем. Принципы расчета колышевых пересчетных схем на лампах подобного типа даются в работе [3].

В литературе [5,6] описаны логические схемы конъюнкции и дизъюнкции, использующие тиаратроны с холодным катодом. Однако в этих схемах для гашения горящих ламп необходимо разрывать анодные цепи по току (например, с помощью реле), что делает применение данных схем малоэффективным. Кроме того, в работах [5,6] не дана схема логического отрицания, без которой многие функции алгебры логики не могут быть реализованы [7].

В настоящей статье рассматриваются разнообразные схемные элементы и логические схемы на тетродах тлеющего разряда типа TX4B и методы их расчета. Основное внимание уделено методам получения максимального быстродействия триггерных схем и созданию универсальной одноламповой ячейки, пригодной для построения основных логических функций.

1. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые сведения о TX4B. Статическая и динамическая* характеристики зажигания, а также прин-

* Динамическая характеристика определяет зажигание тетрода при импульсных сигналах на второй сетке. Зависимость величины зажигающего импульса от его длительности τ объясняется физической природой газоразрядного прибора.

ципиональная схема тетрода показана на рис. 1. Первая сетка g_1 тетрода используется для создания подготовительного разряда, имитирующего термокатод обычного тиатрона, вторая сетка g_2 предназначена для управления зажиганием. Управляющим параметром при этом является напряжение на ней. В зависимости от напряжения на управляемой

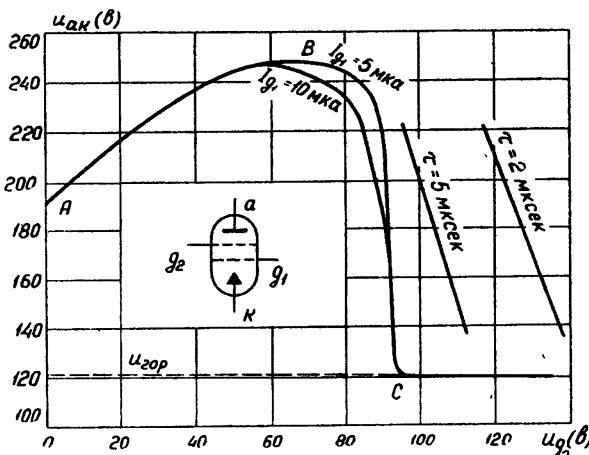


Рис. 1.

сетке u_{g_2} и напряжения на аноде тетрода по отношению к катоду u_{ak} в лампе может наступить разряд или из-за пробоя сначала между сеткой g_2 и анодом с последующим перебросом на основной промежуток, или непосредственно из-за пробоя промежутка анод—катод. Этим двум случаям соответствуют участки AB и BC характеристики зажигания (рис. 1).

Целесообразно выбирать рабочую точку на более крутом участке BC (BC —падающий участок, характерный для всех тиатронов). Выберем напряжение u_{g_2} на участке BC , а анодное напряжение E_a меньше соответствующего напряжения зажигания, но больше напряжения горения. Тогда небольшого положительного импульса будет достаточно, чтобы в лампе вспыхнул разряд. Так как в горящей лампе управляющее действие сетки отсутствует, то погасить ее можно лишь воздействием на основные электроды—катод и анод (кроме специальных режимов, где гашение осуществляется также по сетке; на них мы остановимся позже). Гашение по основным электродам может происходить, например, отключением анодного питания.

Характерным для всех ионных приборов параметром является время деионизации, т. е. минимальное время, после которого восстановление анодного питания не вызывает вторичного зажигания тиатрона. Время деионизации τ_d в функции анодного тока I_a и питающего напряжения E_a можно определить по кривым рис. 2.

2. Учитывая сказанное, приведем метод расчета для одной из возможных схем триггера (см. рис. 3). Как и всякий триггер, схема работает таким образом, что 1) в каждый момент времени горит* одна и только одна из двух ламп, 2) при очередном импульсе должна загореться негорящая и погаснуть горящая лампа.

Для горения лампы к основным электродам должно быть приложено напряжение, превышающее напряжение горения $u_{гор}$ (см. рис. 1), независимо от напряжения на управляющей сетке, а анодный ток I_a

* В дальнейшем мы употребляем термины для газоразрядных приборов.

через лампу должен превышать критический ток I_{kp} , т. е. такой минимальный ток, при котором еще сохраняется разряд через основной промежуток. Критический ток определяется конструкцией газоразрядного прибора и делителями напряжений в цепях сеток. Ток через лампу также не должен превышать наибольшего допустимого тока для

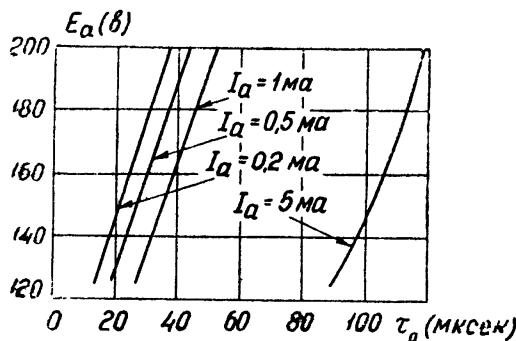


Рис. 2.

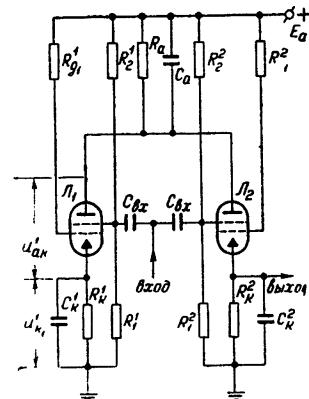


Рис. 3.

лампы. Чтобы не горела вторая лампа, напряжение между анодом и катодом u_{ak} этой лампы должно быть не больше напряжения зажигания при выбранном смещении u_g на второй сетке. Это условие определяет верхний предел по напряжению для выходного импульса, снимаемого с катода (рис. 3).

Обратимся теперь к условию опрокидывания схемы входными импульсами. При горении первой лампы L_1 напряжение между анодом и катодом второй лампы L_2 для симметричной схемы, как нетрудно видеть, больше u_{top} на величину напряжения $u_{k\text{ гор}}^1$ на катоде горящей лампы. Следовательно, очередной импульс может зажечь лампу L_2 . При этом напряжение на аноде L_1 упадет за счет тока через вторую лампу ниже напряжения горения u_{top}^1 и лампа L_1 погаснет. Сразу же после того, как загорится лампа L_2 и погаснет лампа L_1 , начнет заряжаться конденсатор C_{k_2} и разряжаться конденсатор C_{k_1} . Напряжение u_{ak}^1 первой лампы будет экспоненциально расти, стремясь к сумме напряжения горения и напряжения $u_{k\text{ гор}}^2$ на катоде горящего тетрода. Если время t нарастания напряжения u_{ak}^1 до напряжения горения меньше соответствующего времени деионизации, то лампа L_1 снова загорится (если выполнены условия по току для обеих ламп).

В самом деле (см. рис. 3),

$$u_{ak}^1 = u_{k\text{ гор}}^2 + u_k^2 - u_k^1, \quad (1)$$

причем

$$u_k^1 = u_{k\text{ гор}}^1 e^{-t/R_{k_1} C_{k_1}}; \quad (2)$$

$$u_k^2 = u_{k\text{ гор}}^2 [1 - e^{-(t/R_{k_2} C_{k_2}) (1 + R_{k_1}/R_a)}], \quad (3)$$

где u_k^1 и u_k^2 — напряжения на катодах первой и второй ламп соответственно, а остальные обозначения ясны из рис. 3 и текста.

Очевидно, что лампа L_1 сможет загореться вторично, если $u_k^2 \geq u_k^1$

и если время t_{\min} , за которое достигается это неравенство, меньше времени деионизации τ_d .

Найдем время t_{\min} , приравняв u_k^2 и u_k^1 и подставив их значения из равенств (2) и (3). Для симметричной схемы получаем уравнение

$$e^{-t/\tau_{\text{разр}}} = 1 - e^{-(t/\tau_{\text{разр}})(1 + R_k/R_a)}, \quad (4)$$

где $\tau_{\text{разр}} = C_k R_k$. Удобно искать решение в виде $\gamma = t_{\min}/\tau_{\text{разр}} = f(k)$; $k = R_k/R_a$. Полученное решение представлено на рис. 4.

Выбрав заранее ток лампы и взяв $t_{\min} > \tau_d$ (τ_d определяется по рис. 2, исходя из выбранного тока и напряжения анодного питания, равного напряжению горения), можно по рис. 4 найти постоянную времени $\tau_{\text{разр}}$ как функцию отношения k . Соблюдение указанных условий обеспечивает нормальную работу триггерных схем. Выбор тока, отношение сопротивлений R_k/R_a и $\tau_{\text{разр}}$ производится с учетом конкретных требований, которым должна удовлетворять схема (мощности выходного импульса, амплитуды импульса, быстродействия и т. п.). Необходимый ток подготовки и рабочая точка устанавливаются с помощью сопротивлений R_1 , R_2 и R_{g_1} (см. рис. 3).

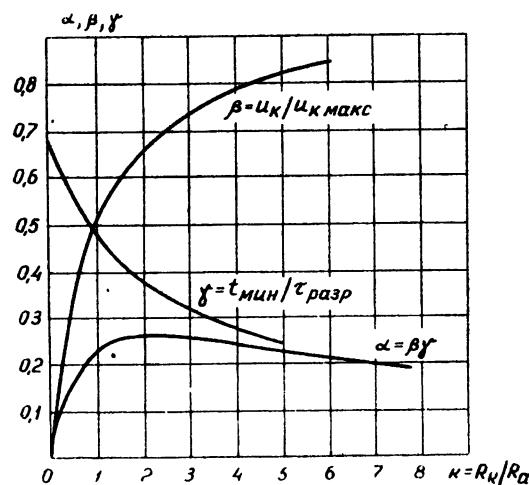


Рис. 4.

3. Предъявим определенные требования к характеристикам триггера. Прежде всего нас интересует максимальное быстродействие схемы. Период повторения входных импульсов определяется временем затухания всех переходных процессов в схеме, т. е. временем разряда катодной емкости погасшей лампы и временем заряда катодной емкости загоревшейся лампы. Поскольку для симметричной схемы эти временные постоянные равны соответственно $\tau_{\text{разр}} = R_k C_k$ и $\tau_{\text{зар}} = R_k C_k \times (R_k + R_a)^{-1}$, то период повторения входных импульсов мы будем определять неравенством $T_p \geq 3\tau_{\text{разр}}$, а максимальную частоту f_{\max} — формулой

$$f_{\max} = \frac{1}{(3 \div 4) \tau_{\text{разр}}} \approx 0,3 \frac{1}{\tau_{\text{разр}}}. \quad (5)$$

Используя решение уравнения (4), получаем:

$$f_{\max} \approx 0,3 \frac{f(k)}{t_{\min}} \leq 0,3 \frac{f(k)}{\tau_d}. \quad (6)$$

Из неравенства (6) видно, что для увеличения быстродействия триггерной схемы необходимо уменьшать время деионизации, т. е. уменьшать анодный ток (см. рис. 2) и увеличивать $f(k)$. Уменьшение анодного тока ограничивается его критическим значением, и, как показал

эксперимент, анодный ток должен превышать $(3 \div 4) I_{kp}$. Увеличение $f(k)$ связано с уменьшением отношения R_k / R_a (рис. 4), что приводит к уменьшению выходного импульса (рис. 3) и падению КПД схемы. На рис. 4 приведена кривая выигрыша $\alpha = \beta\gamma$, которой можно пользоваться при выборе параметров схемы.

По данной методике был рассчитан триггер, принципиальная схема которого приведена на рис. 3 со следующими параметрами: $I_a = 90 \text{ мА}$, $E_a = 240 \text{ в}$, $R_k = 620 \text{ ком}$, $R_a = 510 \text{ ком}$, $C_k = 51 \text{ пФ}$, $C_a = 39 \text{ пФ}$, $R_1 = 8,2 \text{ мгом}$, $R_2 = 9,1 \text{ мгом}$, $C_{bx} = 10 \text{ пФ}$, $R_{g_1} = 5,1 \text{ мгом}$. Выходное напряжение триггера $U_{bx} = 60 \text{ в}$. Триггер испытывался при напряжении входных импульсов $U_{bx} = 40 \text{ в}$, дифференцированных RC -цепочкой с постоянной времени 5 мксек. Схема устойчиво работала до частот порядка $30 \div 40 \text{ кГц}$ при анодном напряжении $220 \div 260 \text{ в}$. Тот же триггер при $C_k = 20 \text{ пФ}$, $R_1 = 2,7 \text{ мгом}$ и $R_2 = 3,0 \text{ мгом}$ работал до частот порядка 50 кГц . Емкость C_a , параллельная R_a , улучшает передний фронт снимаемого с катода импульса, что весьма существенно при синтезе схем. Соединяя непосредственно катод одной из ламп предыдущего триггера со входом последующего триггера (см. рис. 3), удалось получить бинарную пересчетную схему, работающую до частот порядка 50 кГц .

При экспериментальной проверке было обнаружено, что устойчивость работы схемы на высоких частотах повышается, если соблюдается условие, выраженное равенством

$$C_{bx}R_{bx} = (1 \div 1,2) R_k C_k,$$

где R_{bx} — эквивалентное сопротивление делителя напряжения в цепи второй сетки. Последнее, по-видимому, объясняется меньшим влиянием неуставновившихся процессов (при выполнении указанного равенства) на положение рабочей точки, когда период повторения входных импульсов становится меньше времени затухания переходного процесса.

4. Для обеспечения устойчивой работы схемы при колебаниях напряжения анодного питания важно, чтобы рабочая точка на характеристике зажигания при этих колебаниях оставалась в пределах рабочего участка. Этого можно достичь, например, стабилизировав напряжение U_g , питания второй сетки триггера при помощи дополнительного тиатрона (см. рис. 5). При этом для уменьшения влияния тока подготовительного разряда на чувствительность схемы сопротивление R_{g_1} выбирается в пределах $7,5 \div 15 \text{ мгом}$.

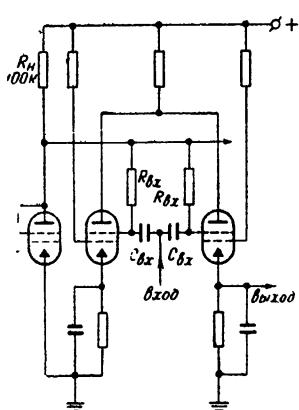


Рис. 5.

5. Особенностью газоразрядных приборов является то, что для одного и того же напряжения анодного питания и управляющего напряжения лампа может находиться в одном из двух состояний — горящем или негорящем. Поэтому в принципе возможен триггер на одной лампе. Используя специальные режимы, удалось реализовать одноламповую схему триггера, показанную на рис. 6. Если сопротивления R_a , R_k и напряжение E_a подобраны так, что $I_a = (1,2 \div 1,5) I_{kp}$, эта схема будет работать как триггер.

В самом деле, если лампа не горела, то приходящий положительный импульс сможет

ее зажечь, так как ток превышает критический. Если же лампа находилась в горящем состоянии, то приходящий импульс положительной полярности проходит через проводящую плазму на катод и заряжает емкость C_k . Вследствие этого ток через тиатрон становится меньше критического и разряд в промежутке сетка-анод прекращается (здесь также имеет место перехват электронов управляющей сеткой). Показанная на рис. 6 цепочка R_3C_a и сопротивление R_4 улучшают соответственно передний фронт выходного импульса и устойчивость работы триггера.

С указанными на рис. 6 значениями величин емкостей и сопротивлений входной цепи триггер работает устойчиво до частот порядка $20 \pm 25 \text{ кГц}$. Использование режимов, близких к критическим, позволяет получить для одноламповых триггеров большое быстродействие. В нашем эксперименте быстродействие однолампового триггера доводилось до 150 кГц ; однако уже при частоте входных импульсов порядка 60 кГц вследствие имеющихся в схеме паразитных емкостей и больших сопротивлений R_a и R_k выходной импульс с триггера становится настолько малым, что не воздействует на следующие ячейки. Следовательно, частотный предел однолампового триггера определяется величиной критического тока, лимитирующего выбор сопротивлений R_a и R_k . Увеличение значения критического тока и, как следствие этого, возможность уменьшения указанных сопротивлений позволит повысить быстродействие одноламповых триггеров.

При работе ячеек друг на друга принцип перебрасывания последующего триггера тот же самый, что и при воздействии отдельного источника входных импульсов. В самом деле, пусть последующий триггер находился в проводящем, а предыдущий — в непроводящем состоянии. Поскольку первоначальный бросок тока предыдущего триггера за счет разряда анодной емкости может превышать в несколько раз критический ток, а анодный ток горевшего тиатрона лишь немного превышает критический, то уже небольшая подзарядка катодной емкости последующего триггера приводит к перебрасыванию его состояния.

Заметим, что одноламповый триггер может перебрасываться и отрицательными перепадами напряжений; поэтому триггеры приходится связывать между собой с помощью кристаллических диодов, имеющих большие обратные сопротивления.

Некоторые модификации одноламповых триггеров очень удобны как элементы регистров. Подавая на анод такой ячейки короткие положительные импульсы, можно с катода считывать информацию, не уничтожая ее.

6. Переходим теперь к схемам реализации логических функций (примитивные схемы [4]). Ячейки на тиатронах работают по принципу импульсных усилителей, т. е., загоревшись, лампа должна погаснуть без воздействия извне. Поэтому эти ячейки рассчитываются на ток, заведомо меньший критического. Начальный ток через лампу создается за счет заряда конденсаторов. Разработанная одноламповая ячейка K позволила реализовать все логические функции. Принципиальная и символическая схема этой ячейки приведена на рис. 7а.

Положим $x_t = 0$ (соответственно $f_t = 0$) при отсутствии положительного импульса в точке x (в точке f) в момент t и $x_t = 1$ ($f_t = 1$) и при

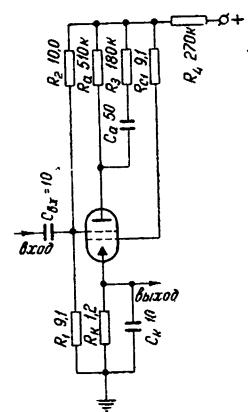


Рис. 6.

наличии положительного импульса в точке x (в точке f) в момент t . Аналогично, $\tilde{f}_t = 0$ при отсутствии отрицательного импульса в точке \tilde{f} в момент t и $\tilde{f}_t = 1$ при его наличии в момент t . При этом^{*}

$$f_t = \tilde{f}_t = x_t.$$

Импульсы с выходов f и \tilde{f} в дальнейшем подаются на управляющие

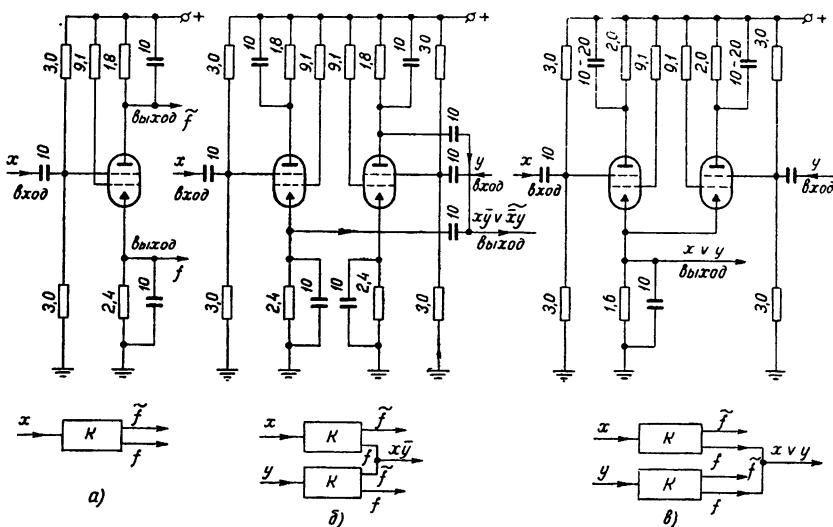


Рис. 7.

сетки тиаратронов**. Поэтому отрицательный импульс с выхода f не способен вызвать зажигание тиаратрона последующей ячейки. Однако если на управляющий электрод будут через емкости поданы одновременно отрицательный и положительный импульсы одинаковой амплитуды, то тиаратрон последующей ячейки не загорится: отрицательный импульс способен запретить действие положительного импульса при сложении их на емкостях. Если на емкостях складываются импульсы x и y , то результирующий импульс, как нетрудно видеть, может быть выражен формулой:

$$z = \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}.$$

Если же на поджигающий электрод последующей ячейки подан сигнал a V b , $(a \cdot \tilde{b}) = 0$, то зажигание тиаратрона вызывает лишь сигнал a . На рис. 7б и 7в показано, как можно получить на этих ячейках (с учетом только что сделанного замечания) функции отрицания импликаций и дизъюнкции (а с ними и все логические функции).

* Запаздывание импульса на выходе ячейки относительно импульса на входе за счет конечного времени срабатывания лампы не учитывается, мы предполагаем, что интервал между импульсами значительно больше величины этого запаздывания.

** Вообще говоря, работа ячейки может быть более полно рассмотрена при помощи трехзначной логики. Однако для наших целей достаточно приведенного здесь «двоичного» описания.

Все логические схемы, сделанные на ячейках K , работают вполне устойчиво до частот порядка 10 кгц (при согласовании постоянной времени входной и выходной цепи ячейки—до частот порядка 20–25 кгц). При этом изменение напряжения питания схемы возможно в пределах 220–260 в. Пороговая величина входного импульса для ячейки K равна 25–30 в при длительности входных импульсов 4–10 мксек. Выходной импульс ячейки K (положительный и отрицательный) имеет величину порядка 45–60 в в зависимости от напряжения питания. При работе ячеек друг на друга равенство амплитуд положительных и отрицательных импульсов, складывающихся на емкостях, выполняется автоматически, поскольку последние определяются универсальными параметрами.

Заметим, что для выполнения логической функции „и“ более целесообразно использовать кристаллические диоды с большим обратным сопротивлением (кремниевые).

Используя описанные ячейки K и триггерные схемы, можно построить любую непримитивную схему. В качестве примера приведем схему дифференциального бинарного счетчика. Логическая схема такого счетчика на электронных лампах (см. [1]) показана на рис. 8. Заметим, что реализовать эту логическую схему, имеющую сквозные входные

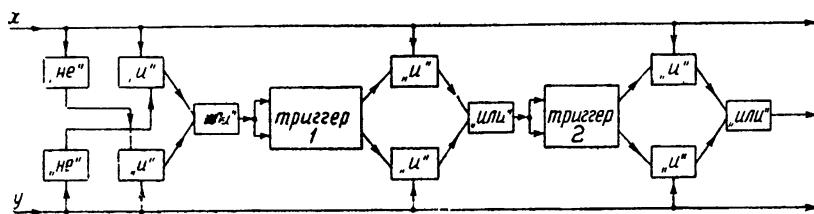


Рис. 8.

шины и указанные клапаны (схемы „и“), на тетродах ТХ4Б затруднительно. Дело в том, что время зажигания тиатрона не является пре-небрежимо малым и запаздывание на каждой лампе выходных импульсов относительно входных приводит к суммарному запаздыванию на нескольких разрядах, превышающему длительность входного импульса. Последняя же ограничивается постоянной дифференцирования входных цепей ячеек и поэтому не может быть увеличена.

Приведем некоторые соображения по построению логической схемы дифференциального бинарного счетчика, пригодные при реализации и других сходных непримитивных схем.

Прежде всего, в данной схеме необходимо отказаться от сквозных входных шин. Открывание клапанов „и“ (см. рис. 8) должно происходить следующим образом. Входной импульс открывает соответствующий клапан первого разряда (к данному разряду схемы будем относить триггер этого разряда и схему соединения его с триггером следующего разряда). Сигнал на входе клапана второго разряда появляется, если был сигнал на выходе клапана первого разряда и если изменение состояния первого триггера способно привести к изменению состояния второго триггера, т. е. если на надлежащем выходе первого триггера возник импульс и т. д. В противном случае все клапаны в последующих разрядах, начиная со второго, должны быть заперты. Это приводит к значительному увеличению надежности работы схемы, так как ложное срабатывание триггеров в старших разрядах исключ-

чается, поскольку на них вообще не подаются импульсы, если не срабатывают триггеры младших разрядов.

Указанным свойством не обладают схемы с общей входной шиной. Между тем точность работы старших разрядов часто особенно важна. Кроме того, быстродействие схемы с последовательным открыванием клапанов определяется быстродействием входного элемента (при условии, что быстродействие остальных элементов схемы не меньше).

При использовании ячеек типа K гораздо проще и экономнее получить схему отрицания импликации, чем схему „и“.

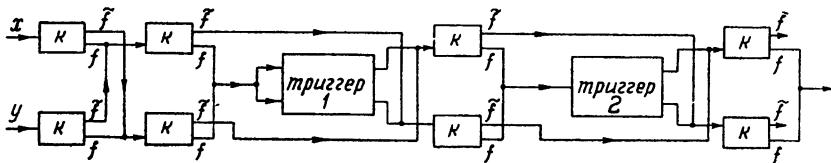


Рис. 9.

На рис. 9 приведена логическая схема дифференциального бинарного счетчика, синтезированная с учетом этих соображений. Нетрудно убедиться в том, что канонические уравнения для этой схемы совпадают с приведенными в [1] и что схема счетчика удовлетворяет поставленным выше требованиям.

Нами была экспериментально проверена схема счетчика на 5 разрядов. За недостатком места мы не приводим здесь принципиальной схемы, тем более, что схемы триггеров и ячеек K , из которых она составлена, приведены на рис. 3 и рис. 7. При монтаже схемы использовались сопротивления и емкости с 10% допуском. Схема работает нормально, если импульсы на входах x и y не разнятся по амплитуде более чем на 30 в и оба превышают пороговую величину 25 ± 30 в. Быстродействие схемы—порядка 10 кгц при напряжении анодного питания $E_a = 220 \pm 260$ в. При замене тиратронов работа схемы не нарушается.

Заметим, что при монтаже схемы паразитные емкости могут быть по величине сравнимы с применяемыми в схеме, поэтому длинные соединительные цепи нежелательны.

В заключение автор выражает глубокую благодарность М. Л. Цетлину и Л. М. Шехтману, предложившим тему работы и давшим ряд ценных советов, а также М. Д. Карасеву и Г. Е. Макар-Лиманову за критические замечания в процессе выполнения работы и участие в обсуждении результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Кораблев, Новые применения ламп с холодным катодом в импульсной аппаратуре, М., 1956.
2. Г. Е. Макар-Лиманов, Радиотехника и электроника, 4, 1274 (1959).
3. М. И. Гельштейн, Сб. материалов по вакуумной технике, вып. 21, Госэнергоиздат, М.—Л., 1959, стр. 36.
4. М. Л. Цетлин, Г. С. Эйдус, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, 5 — 6, 166 (1958).
5. J. E. Flood and J. B. Warman, Electronic Engineering, 28, 416 (1955), 28, 489 (1955).
6. R. Atonsohn, L'Onde Electrique, 38, 724 (1958).
7. Д. Гильберт, В. Аккерман, Основы теоретической логики, ИЛ., М., 1947.

LOGICAL CIRCUITS ON COLD CATHODE THYRATRONS

A. S. Kotosonov

The paper is devoted to methods of utilizing thyratrons with cold cathodes of the TX4Б type in digital computers and discrete automatic devices. A method is set forth for design of trigger cells with one and two thyratrons. The circuits is described of a general-purpose single-tube cell suitable for the design of the fundamental logical schemes. The circuit as an example of the utilization of thyratrons in logical schemes of a reversible computer is examined.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

К ВОПРОСУ О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ПЛАВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ СРЕДУ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

B. V. Писарева

В работе [1] рассматривался вопрос о границах применимости метода плавных возмущений в задаче о распространении излучения через среду со слабыми неоднородностями диэлектрической проницаемости. При этом были получены следующие условия пригодности решения, получаемого с помощью названного метода. Для больших значений волнового параметра $D = 4L/k_0 l^2 \gg 1$ приближенное решение для амплитуды и фазы справедливо при тех же ограничениях, что и решение, получаемое методом малых возмущений (здесь L —дистанция, k_0 —волновое число в вакууме, l —средний размер неоднородностей). В то же время при малых значениях волнового параметра область применимости решения, найденного методом плавных возмущений, шире области применимости решения, получаемого методом малых возмущений. Именно, при $D \ll 1$ приближенное решение ограничено лишь случаем малых изменений уровня $[\ln(A/A_0)]^2 \ll 1$ (где A и A_0 —амплитуды возмущенной и невозмущенной волн) [1].

Необходимо, однако, отметить, что способ нахождения границ применимости приближенного решения путем оценки членов дифференциальных уравнений, который использовался в работе [1], не является достаточно корректным. Строгое определение условий пригодности решения, полученного в работе [2], возможно, вообще говоря, только после решения нелинейного уравнения (см. работу [2]) или в результате нахождения второго приближения в методе плавных возмущений. Из требования малости среднеквадратичного значения второго приближения $\alpha^2 \sqrt{\bar{\Psi}_2}$ по сравнению со среднеквадратичным значением первого приближения $\alpha \sqrt{\bar{\Psi}_1}$ можно получить условия, при выполнении которых справедливо решение линеаризованного уравнения (см. формулу (7) статьи [2]). Здесь $\alpha = \sqrt{\mu^2}$, где μ —отклонение показателя преломления от среднего значения, а $\alpha^2 \Psi_1$ и $\alpha^2 \Psi_2$ —члены разложения решения Ψ в ряд по малому параметру α в методе плавных возмущений. Однако определение $\alpha^2 \sqrt{\bar{\Psi}_2}$ сопряжено со значительными трудностями, и для получения интегрального условия применимости решения линеаризованного уравнения мы воспользуемся решением для среднего значения второго приближения, найденным в работе [3].

При этом для $\bar{\Psi}_2$ было получено следующее выражение:

$$\bar{\Psi}_2 = -\frac{\sqrt{\pi}}{16} k_0^3 l^3 \ln(1+D^2) + i \frac{\sqrt{\pi}}{2} k_0^2 l L \left(1 - \frac{\operatorname{arc tg} D}{D} \right). \quad (1)$$

При большом волновом параметре $D \gg 1$ в выражении (1) второй член больше первого в отношении $D/\ln D$ и равен $i(\sqrt{\pi}/2) k_0^2 l L$. При выполнении обратного соотношения $D \ll 1$ преобладающим является первый член, равный $(\sqrt{\pi}/16) k_0^3 l^3 D^2$.

Производя сравнение $\alpha^2 |\bar{\Psi}_2|$ с $\sqrt{\bar{\Psi}_1} = \sqrt{\sqrt{\pi} k_0^2 L l \mu^2}$, мы получим, по крайней мере, необходимые условия применимости решения линеаризованного уравнения (7) работы [2], поскольку всегда имеет место соотношение $|\bar{\Psi}_2| \leq \sqrt{\bar{\Psi}_1}$. Для $D \ll 1$ это условие имеет вид:

$$\frac{\alpha^2 |\bar{\Psi}_2|}{\alpha \sqrt{\bar{\Psi}_1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\pi} L^3 \mu^2}{l^3}} \simeq 0,6 \sqrt{[\ln(A/A_0)]^2} \ll 1,$$

а для $D \gg 1$.

$$\frac{\alpha^2 |\psi_2|}{\alpha \sqrt{\frac{|\psi_2|}{|\psi_1|}}} = \sqrt{\frac{1/\pi}{2}} k_0^2 / L \sqrt{2} \approx 0.7 \sqrt{(a\psi_1)^2} \ll 1.$$

Таким образом, получаются те же границы применимости решения, найденного методом плавных возмущений, что и при менее строгом подходе [1]. Отметим, что неравенство $\sqrt{(a\psi_1)^2} \ll 1$ является при $D \gg 1$ также и достаточным условием, поскольку это есть условие справедливости решения получаемого методом малых возмущений [4].

Следует ожидать, что условие применимости метода плавных возмущений при $D \ll 1$, имеющее вид $\sqrt{[\ln(A_1/A_0)]^2} \ll 1$, является и необходимым и достаточным. Это вытекает из следующих соображений. Из вычисления $\bar{\psi}_2$ следует, что для значений $k_0 l \gg 1$ имеет место соотношение [3]

$$\psi_2 \simeq \frac{i}{4\pi} \int_v \frac{\exp\{ik_0[r-r_1] - (x-x_1)\}}{|r-r_1|} (\nabla_{r_1} \psi_1)^2 dv_1. \quad (2)$$

В то же время при малом волновом параметре $D \ll 1$ $(\nabla_{r_1} \psi_1)^2 \approx (\nabla_{r_1} S_1)^2$. Поскольку по порядку величин $(\nabla_{r_1} S_1)^2 (\nabla_{r_2} S_2)^2 \sim (\nabla_{r_1} S_1)^2 (\nabla_{r_2} S_2)^2$, имеем $|\psi_2| \sim \sqrt{\frac{|\psi_1|^2}{|\psi_2|}}$; следовательно, условие $\sqrt{[\ln(A_1/A_0)]^2} \ll 1$ является также и достаточным.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Писарева, Акуст. ж., 6, 87 (1960).
2. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геофиз., 2, 155 (1953).
3. Т. А. Широкова, Акуст. ж., 5, 485 (1959).
4. I. J. Howells, Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London, 252, 431 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 декабря 1960 г.

ФЛЮКТУАЦИИ ФАЗЫ И АМПЛИТУДЫ ПРИ СВЕРХДАЛЬНЕМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НАД ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Ф. Г. Басс, Э. А. Канер

В работах авторов [1-3] исследовались флюктуации радиоволн над плоской идеально отражающей границей раздела. Эта задача соответствует случаю, когда флюктуации электромагнитных волн обусловлены тропосферными неоднородностями на всей длине «луча», соединяющего излучатель с приемником.

Иначе обстоит дело, когда приемник расположен в области сравнительно глубокой тени. В этом случае флюктуационное поле определяется не «земным» лучом, интенсивность которого быстро падает за горизонт, а рассеянием на флюктуациях в той части пространства, которая видна из обоих корреспондирующих пунктов. Размеры эффективного рассеивающего объема малы по сравнению с длиной трассы и определяются пересечением диаграмм направленности приемной и передающей антенн.

Настоящая заметка посвящена определению интенсивности амплитудных и фазовых флюктуаций радиоволны, когда во флюктуационной части поля доминирует указанное выше рассеянное излучение, а среднее поле определяется по дифракционным формулам [4].

Флюктуационная составляющая электромагнитного поля в области тени определяется хорошо известной формулой [5]:

$$\xi(r) = (k^2/4\pi)^2 p [n'[en']] \int d\rho \delta\varepsilon(\rho) \exp(iq\rho) (rr_0)^{-1} \exp(ikr + ikr_0). \quad (1)$$

Здесь $k = \omega/c$, ω — частота, r_0 — расстояние от излучателя до рассеивающего объема, r — расстояние от рассеивающего объема до приемника, $p = 4\pi k^2 d$, d — дипольный момент излучателя, e — единичный вектор поляризации среднего поля внутри рассеивающего объема, $q = k(n - n')$ — изменение волнового вектора при рассеянии, kn , kn' — волновые векторы падающей и рассеянной волн соответственно, $\delta\varepsilon$ — флюктуации диэлектрической проницаемости. Зависимость от времени предполагается в виде $\exp(-i\omega t)$. Интегрирование в (1) проводится по эффективному рассеивающему объему, который определяется пересечением диаграмм (рис. 1).

С помощью формулы (1) легко показать, что для средних квадратов действительной (ξ_r) и мнимой (ξ_i) частей любой из проекций вектора ξ справедливы следующие соотношения:

$$\langle \xi_i^2 \rangle = \langle \xi_r^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |\xi|^2 \rangle; \quad \langle \xi_r \xi_i \rangle = 0. \quad (2)$$

Скобки $\langle \rangle$ означают статистическое усреднение. Соотношения (2) справедливы с относительной точностью, во всяком случае не меньшей, чем $(q r_0)^{-1} \ll 1$, где r_0 — характерные линейные размеры рассеивающего объема. В дальнейшем условие $q r_0 \gg 1$ предполагается выполненным.

В случае, когда флюктуационная составляющая мала по сравнению с регулярной, интенсивности флюктуаций фазы и относительной амплитуды однапаковы и равны [1,2]

$$\sigma = \langle |\xi|^2 \rangle / 2|E^2| = \frac{1}{2} (k^2 R \sin \gamma / 4\pi |V| g_1 g_2)^2 \int \langle \delta\varepsilon^2 \rangle (r_0 r)^{-1} dv W(q); \quad (3)$$

$$E = p V g_1 g_2 (4\pi R)^{-1} \exp(ikR), \quad (4)$$

где

$$W(q) = \int d\rho W(\rho) \exp(iq\rho), \quad (5)$$

$W(q)$ — фурье-компоненты коэффициента корреляции $W(\rho)$ флюктуаций $\delta\varepsilon$:

$$W(\rho) = \langle \delta\varepsilon(r) \delta\varepsilon(r + \rho) \rangle / \langle \delta\varepsilon^2 \rangle,$$

γ — угол между вектором поляризации e и вектором рассеянной волны kn' .

Величина E представляет среднее поле в точке приема, ослабленное по сравнению с полем в свободном пространстве $p \exp(ikR)/(4\pi R)$ в отношении $V g_1 g_2$ (V — функция ослабления данной составляющей поля [4], g_1 и g_2 — значения диаграмм направленности антенн в направлении на радиогоризонт, R — кратчайшее расстояние между приемником и передатчиком вдоль дуги большого круга; рис. 1). В формуле (3) в выражении для среднего квадрата флюктуационного поля $\langle |\xi|^2 \rangle$ пренебрежено рассеянием диффрагированного за горизонт поля, поскольку в области глубокой тени рассеяние мало (в соответствии с экспоненциальным убыванием среднего поля).

По мере увеличения расстояния между корреспондирующими пунктами флюктуационная компонента падает значительно медленнее регулярной составляющей. Поэтому средним полем на достаточно больших удалениях можно пренебречь по сравнению с флюктуационным. Этот факт хорошо известен и из экспериментальных данных по сверхдальнему распространению [6]. В работах [1,2] для этого случая получены среднеквадратичные флюктуации фазы и амплитуды:

$$\langle \delta\varepsilon^2 \rangle = \pi^2/3, \quad \langle (\ln A - \langle \ln A \rangle)^2 \rangle = \pi^2/24, \quad (6)$$

$$\langle \varphi \rangle = \pi/2, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2},$$

где φ — фаза, $\delta\varphi$ — флюктуации фазы, A — амплитуда полного поля. Характерно, что в данном случае интенсивность флюктуаций не зависит от конкретных свойств среды и структуры поля в пространстве.

Общая формула (3) для малых флюктуаций не дает явной зависимости их интенсивности от дистанции, частоты и других параметров, так как неизвестен явный вид фурье-компоненты функции корреляции $W(q)$. Чтобы получить эти зависимости, сделаем обычные предположения теории сверхдальнего распространения [6] о виде коэффициента корреляции $W(\rho)$ и характере убывания $\langle \delta\varepsilon^2 \rangle$ с высотой, а именно:

$$\langle \delta\varepsilon(r) \delta\varepsilon(r + \rho) \rangle = C_n h^{-n} \exp(-\rho/l), \quad (7)$$

где l — характерный радиус корреляции, n — целое число, C_n — константа.

Предполагая, что точка наблюдения находится в области глубокой тени, заменим множитель ослабления V первым членом его асимптотического выражения [4]. В результате зависимость флюктуаций от расстояния определяется функцией

$$\sigma \sim R^{-2(n+1)} (g_1 g_2)^{-2} |f(h_0) f(h)|^{-1} \exp(2t_i x), \quad (8)$$

где $x = (ka/2)^{1/3} \Theta$, $t_i \approx 2,03$ —мнимая часть первого корня соответствующей функции Эйри, $f(h)$ — высотный множитель, h, h_0 — высоты передатчика и приемника соответственно, a — эквивалентный радиус Земли, Θ — геоцентрический угол. На больших расстояниях $R \approx \Theta a$ (рис. 1).

В последней формуле не учтено отражение от поверхности Земли. Учет отражения лишь несколько изменит величину эффективного рассеивающего объема и скажется только на множителе порядка единицы. С увеличением расстояния флюктуации быстро растут в соответствии с экспоненциальным убыванием среднего поля, что подтверждает качественные соображения, высказанные без доказательства в работах [1, 2]. Некоторое замедление роста флюктуаций с дистанцией связано с наличием множителя $R^{-2(n+1)}$. Согласно экспериментальным данным [6], $n \approx 2$. Резкое возрастание флюктуаций, очевидно, может быть также обусловлено малостью диаграмм g_1, g_2 в направлении на радиогоризонт.

В соответствии с формулой (6), на больших расстояниях флюктуации насыщаются, а не возрастают до бесконечности, как следует из (8). Разумеется, формулы (3), (8) при этом не применимы.

В заключение авторы выражают благодарность А. В. Меню за обсуждение результатов настоящей заметки.

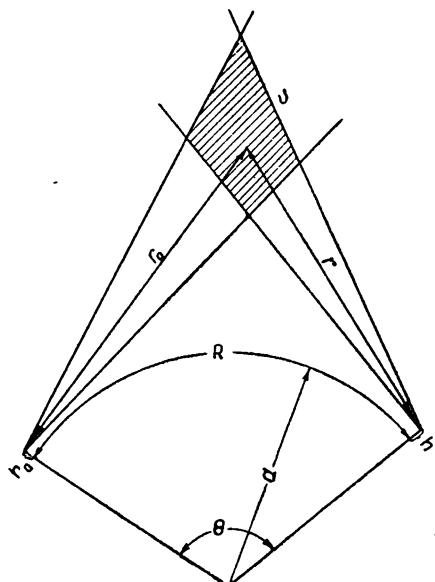


Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Э. А. Канер, Ф. Г. Басс, ДАН СССР, 127, 792 (1959).
- 2 Э. А. Канер, Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 553 (1959).
- 3 Ф. Г. Басс, Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 565 (1959).
- 4 В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1946.
- 5 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1958.
- 6 Д. И. Высоковский, Некоторые вопросы дальнего распространения ультракоротких волн, изд. АН СССР, М., 1958.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
21 октября 1960 г.

О НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Ю. И. Неймарк

Пусть точка M^* ($x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$) является состоянием равновесия системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

и пусть в области D переменных x_1, x_2, \dots, x_n , содержащей точку M^* , определенно-

положительная функция $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такова, что поверхности $V=C$ (C —постоянная) образуют в области D семейство замкнутых поверхностей, стягивающихся к состоянию равновесия при $C \rightarrow 0$, и во всех точках области D , кроме точки M^* ,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n < 0. \quad (2)$$

При выполнении этих условий будем говорить, что функция V в области D является функцией Ляпунова системы (1). Из существования функции Ляпунова следует, как известно, что состояние равновесия M^* асимптотически устойчиво и что область $V < C^*$, где постоянная C^* выбрана так, что область $V < C^*$ целиком лежит внутри области D , принадлежит области притяжения состояния равновесия M^* .

Цель настоящей заметки состоит в формулировке следующих двух общих замечаний.

1. Пусть правые части системы уравнений (1) зависят от параметров $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$, так что

$$f_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \sigma_1, \dots, \sigma_m),$$

и пусть G — область в пространстве параметров, для каждой точки которой фиксированная функция $V(x_1, \dots, x_n)$ является функцией Ляпунова. Тогда функция V будет функцией Ляпунова и для системы уравнений более общего вида

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n; \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)), \quad (3)$$

получаемой из системы (1) путем замены постоянных $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ произвольными функциями $\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$ с областью значений, не выходящей за пределы области G (предполагается, что переменные x_1, \dots, x_n принадлежат области D).

2. Пусть функция $V(x_1, \dots, x_n; \sigma_1, \dots, \sigma_m)$, зависящая от параметров $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, удовлетворяет первому требованию, предъявляемому к функции Ляпунова при любых значениях $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ из замкнутой области G . Тогда если после замены постоянных $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ на некоторые функции $\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$ с областью значений, не выходящей за пределы области G , выполняется второе требование

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n + \sum_{j=1, k=1}^{j=m, k=n} \frac{\partial V}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_k} f_k < 0, \quad (4)$$

то функция $V(x_1, x_2, \dots, x_n; \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n))$ является функцией Ляпунова системы уравнений (1) в области D .

Каждое из этих утверждений допускает обобщение на случай, когда параметры $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ заменяются функциями $\varphi_1(x_1, \dots, x_n, t), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n, t)$, зависящими не только от переменных x_1, x_2, \dots, x_n , но и от времени t . При этом под областью значений функций $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ следует понимать область значений $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ при всех возможных x_1, \dots, x_n из области D и при $t_0 \leq t < +\infty$, где t_0 — момент времени, с которого рассматривается поведение изучаемой системы. Кроме того, к первой части выражения (4) добавится сумма вида

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial V}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \sigma_j}{\partial t} \quad (5)$$

и выполнение условий (2) или (4) следует требовать при всех t , лежащих в интервале $t_0 \leq t < +\infty$.

Научно-исследовательский физико-технический
институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию
12 января 1961 г.

О Т Р Е Д А К Ц И И

Редакция «Радиофизики» получила от В. И. Михельсона (Белгород) письмо по поводу статьи С. Е. Токаря и Л. Н. Литвиненко «Применение метода парамагнитного резонанса для определения концентрации растворенного в воде кислорода», Радиофизика, т. II, № 4, 1959 г., стр. 660.

Редакция ознакомила авторов статьи с письмом В. И. Михельсона. Ниже печатаются письмо В. И. Михельсона, ответ одного из авторов статьи (С. Е. Токаря) и замечания В. И. Михельсона по поводу этого ответа.

В РЕДАКЦИЮ ЖУРНАЛА «ИЗВЕСТИЯ ВУЗов, СЕРИЯ РАДИОФИЗИКИ»

В выпуске № 4 за 1959 г. была помещена статья С. Е. Токаря и Л. Н. Литвиенко «Применение метода парамагнитного резонанса для определения концентрации растворенного в воде кислорода».

В статье сравниваются 2 кривые: растворимость кислорода в воде (в координатах $N \cdot 10^2 - T^\circ$) и относительной величины поглощения при парамагнитном резонансе в координатах $Q - T^\circ$.

При этом на основании вида кривых—максимум одной соответствует минимуму другой—делается вывод о возможности определения кислорода в воде по изменению относительной величины поглощения.

Однако минимум кривой ($10^2 - T^\circ$) основан на опечатке в книге. Никакого минимума растворимости кислорода при 20° не существует. Величина $a_{20} = 0,031$, а не $0,0131$ [1]. Придти к выводу, что эта цифра ошибочна, можно было очень просто—критически сравнить обе таблицы, приведенные в справочнике Кэй и Лэби [2].

Между тем, необходимость в достоверном физическом методе определения кислорода в воде очень велика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Handbook of Chemistry and Physics 37th ed. 1955—56. Chem. Rubber. Publ. Co p.1606
2. Справочник физика-экспериментатора, Д. Кэй, Т. Лэби, ИЛ, М., 1949, стр. 284.

20 сентября 1960 г.

В. И. Михельсон.

В РЕДАКЦИЮ ЖУРНАЛА «РАДИОФИЗИКА»

По поводу письма В. И. Михельсона

Возможность определения концентрации растворенного в воде кислорода вытекает из экспериментально установленного факта-зависимости относительной интенсивности парамагнитного поглощения от концентрации растворенного в воде кислорода.

На основании вида кривых (рис. 2а и 2б) сделано только заключение о характере этой зависимости (пропорциональность между величинами $1/Q$ и N).

Как показали более точные измерения, эта зависимость отличается от линейной и является более сложной. Из сказанного следует, что приведенные в письме замечания не могут служить опровержением основного вывода статьи о возможности применения метода парамагнитного резонанса для определения концентрации растворенного в воде кислорода.

За указание на неточность заимствованных из справочника данных о растворимости кислорода авторы благодарят т. Михельсона.

30 декабря 1960 г.

С. Е. Токарь.

В РЕДАКЦИЮ ЖУРНАЛА «РАДИОФИЗИКА»

Возможность применения метода парамагнитного резонанса для определения растворенного в воде кислорода в моем письме сомнению не подвергалась.

Но очень трудно представить себе, как можно получить экспериментальную (!) кривую ($Q - T$), которая полностью соответствует по своему ходу кривой ($N - T$), основанной на опечатке.

Ведь если нет минимума на кривой ($N - T$), то не должно быть и максимума на кривой ($Q - T$). Авторы же приводят этот максимум как результат эксперимента.

Далее, из кривой ($Q - T$) можно заключить, что одно и то же значение Q , например, 0,4, наблюдается при трех разных температурах, т. е. соответствует трем различным концентрациям кислорода. А это прямо противоречит выводу о пропорциональной зависимости между $1/Q$ и N . Одно из двух: или нет зависимости ($1/Q - N$) или приведенная кривая ($Q - T$)—результат недостаточно проверенных экспериментальных данных.

5 февраля 1961 г.

В. И. Михельсон.