

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ ЖУРНАЛА № 6, 1960 г.

| Стр. | Строка    | Напечатано  | Следует читать   |
|------|-----------|---|--|
| 968  | 8 сверху  | ... относительный вклад неотклоняющегося  | ... относительный вклад отклоняющегося   |
| 986  | 13 сверху | ... $\left\{ \epsilon_{пл} + \omega \frac{\partial \epsilon_{пл}}{\partial \omega} \right\}^{-1}$ | ... $\left\{ \epsilon_{пл} + 2\omega \frac{\partial \epsilon_{пл}}{\partial \omega} \right\}^{-1}$ |
| 1019 | 10 сверху | одновременного распределения ...  | одномерного распределения ...  |
| 1121 | 2 сверху  | $d = 2\theta [(\omega_1^2 - \omega_2^2 - \theta^2)^2 \dots]$                                      | $d = 2\theta [(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \theta^2)^2 \dots]$                                       |

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ ЖУРНАЛА № 1, 1961 г.

|     |           |  |  |
|-----|-----------|--|--|
| 4   | 2 снизу   | Forth All-Union ...  | Fourth All-Union ...   |
| 5   | 2 снизу   | ... оболочки Земли [6] ...   | ... оболочки Земли [6?] ...  |
| 52  | 1 снизу   | ... $\int_0^{z_0} r^{-2\pi p} V^{\sin^2 \varphi_0 + 2az} dz$   | ... $\int_0^{z_0} e^{-2\pi p V^{\sin^2 \varphi_0 + 2az}} dz$   |
| 53  | 16 сверху | $\frac{\dots [1 - r^{-2l/l_0}]^{1/2}}{\dots [1 - r^{-2l/l_0}]^{1/2}}$  | $\frac{\dots [1 - e^{-2l/l_0}]^{1/2}}{\dots [1 - e^{-2l/l_0}]^{1/2}}$  |
| 66  | 2 сверху  | ... $ k_{\perp} - v $  | ... $ k_{\perp} - v $  |
| 79  | 17 сверху | ... $\equiv \frac{\partial}{\partial t} W = \dots$   | ... $\equiv \frac{\partial}{\partial t} W'_E = \dots$  |
| 81  | 19 снизу  | ... $\Delta_{\mathbf{v}} f + S = 0$  | ... $\nabla_{\mathbf{v}} f + S = 0$  |
| 87  | 9 сверху  | + $(d\epsilon/d\omega)_0 \Omega$   | + $(d\epsilon/d\omega)_0 \omega_0 \Omega$  |
|     | 11 сверху | ... $\iint_{-\infty}^{\infty} \left( \sigma(\omega_0) + \left( \frac{d\sigma}{d\omega} \right)_0 \Omega \right) \dots$ | ... $\iint_{-\infty}^{\infty} \left( \sigma(\omega_0) + \left( \frac{d\sigma}{d\omega} \right)_0 \Omega \right) \dots$ |
| 121 | 7 снизу   | ... $+ 2h \frac{dq_1}{dt} q_1 \omega_0^2 [1 + m \cos \omega_H t]$ ...  | ... $+ 2h \frac{dq_1}{dt} + q_1 \omega_0^2 [1 + m \cos \omega_H t]$ ...  |
| 128 | 2 снизу   | ... $= -2 \frac{\sin(\theta/2)}{p} e^{-ky} \dots$  | ... $= -2 \frac{\sin(\theta/2)}{p} e^{-jkv} \dots$   |

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

|  |     |
|--|-----|
| Докуцаев В П Движение ионизированного газа в верхней атмосфере (обзор)   | 5   |
| Кайдановский Н Л и Саломонович А Е. Об определении характеристик поверхности Луны по ее наблюдениям на радиотелескопах высокой разрешающей способности                       | 40  |
| Бенедиктов Е. А., Митяков Н А О поглощении космического радионизлучения в ионосфере  | 44  |
| Приймак Г И. Возможная роль рассеяния звука на слоистых неоднородностях морской среды в образовании поля в зоне геометрической тени  | 49  |
| Басс Ф. Г. К теории комбинационного рассеяния волн на неровной поверхности   | 58  |
| Брауде С. Я., Островский И. Е. и Санин Ф. С. Использование понятия отрицательного эквивалентного радиуса Земли для оценки интенсивной рефракции радиоволн                    | 67  |
| Гинзбург В. Л. О законе сохранения и выражении для плотности энергии в электродинамике поглощающей диспергирующей среды  | 74  |
| Андропова И. А. О сплошном спектре тока при периодической переполаризации сегнетоэлектриков  | 90  |
| Малахов А. Н., Никонов В. Н. О корреляции флуктуаций амплитуды и частоты генераторов   | 104 |
| Гершензон Е. М., Любимова Т. Ф., Птицына Н. Г., Рожкова Г. И., Эткин В. С. К исследованию сверхрегенеративного режима одноконтурных параметрических усилителей               | 113 |
| Гершензон Е. М., Дьяков Ю. Е., Соина Н. В., Смирнова Л. А., Эткин В. С. Расширение полосы пропускания параметрических усилителей с помощью связанных контуров                | 121 |
| Альтшулер Ю. Г., Татаренко А. С., Скородумов В. И. Двухрядная лестничная замедляющая система   | 126 |
| Княпин С. Д. Об одной релейной системе регулирования неустойчивого объекта   | 136 |
| Княпин С. Д. О зависимости от параметров динамики одной релейной системы регулирования с неустойчивым объектом   | 151 |
| Цеглин М. Л., Горохов Ю. С., Матусова А. П., Мельникова В. А., Таранович Т. М., Шабашов В. М. Прибор для регистрации и диагностики нарушений ритмической деятельности сердца | 165 |
| Кетков Ю. Л. Прошивка координатной матрицы запоминающего устройства на магнитных сердечниках, работающей по принципу многократного совпадения токов                          | 173 |

### Краткие сообщения и письма в редакцию

|  |     |
|--|-----|
| Зиничев В. А., Рыжов Ю. А., Юдин О. И. Метод исследования рассеяния радиоволн в тропосфере под большими углами     | 177 |
| Крупнов А. Ф., Наумов А. И., Скворцов В. А. Отпаянный молекулярный генератор с геттер-ионным насосом и охлаждением | 178 |
| Ахманов С. А., Романюк А. К., Струков М. М. О свойствах двухконтурного параметрического генератора                 | 179 |
| Дьяков Ю. Е. Шум-фактор двухконтурной системы при параметрическом воздействии на один из контуров                  | 182 |
| Анишин Н. С. Прибор для записи и воспроизведения непрерывно изменяющихся напряжений                                | 184 |

### Хроника

|   |     |
|---|-----|
| IV Всесоюзная конференция Министерства высшего и среднего специального образования СССР по радиоэлектронике | 187 |
|---|-----|

## ДВИЖЕНИЕ ИОНИЗИРОВАННОГО ГАЗА В ВЕРХНЕЙ АТМОСФЕРЕ

В. П. Докучаев

(обзор)

### Содержание

|   | Стр |
|---|-----|
| Введение  | 5   |
| 1 Система электродинамических уравнений для неполоностью ионизированного газа | 7   |
| 2 Ветры в верхней атмосфере   | 11  |
| 3 Дрейф плазмы в верхней атмосфере  | 14  |
| 4 Движение неоднородностей электронной концентрации в ионосфере               | 16  |
| 5 Регулярные движения в ионосфере   | 18  |
| 6 Происхождение ионосферных неоднородностей                                   | 21  |
| а. Неоднородности в E-области ионосферы                                       | 22  |
| б. Неоднородности в F-области ионосферы                                       | 26  |
| 7 Гидродинамическая связь ионосферы с тропосферой                             | 31  |
| 8 Электродинамическая связь ионосферы с внешней атмосферой (экзосферой)       | 33  |
| Литература  | 35  |

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время имеется значительное количество экспериментальных данных по измерению скоростей движения ионизированных воздушных масс в верхней атмосфере. В систематизированном виде результаты экспериментальных исследований изложены в ряде обзорных статей [1-3]. Данные измерений, полученные различными авторами, часто носят противоречивый характер. Это обусловлено в основном двумя причинами. Первая из них заключается в том, что поля ветровых скоростей в ионосфере подвержены регулярным коротко- и долгопериодическим возмущениям, которые могут быть локальными либо глобальными. Последние встречаются значительно реже. Вторая причина заметного расхождения в определениях величины и направления скоростей движения обусловлена методическими трудностями обработки экспериментального материала.

Тем не менее, к настоящему времени установлены некоторые важные характерные особенности этих движений (по сравнению с атмосферными движениями в тропосфере и стратосфере) и найдены некоторые общие закономерности. Так, например, обнаружены приливные движения в ионосфере, крупномасштабные волновые движения, а также измерены постоянные составляющие скоростей движений, которые обусловлены общей циркуляцией в верхней атмосфере [4,5].

В последнее время все большее внимание уделяется экспериментальному исследованию нерегулярной компоненты скорости движения. Гармонический анализ суточных изменений величины и направления скорости движения указывает на присутствие приливных вариаций с различными периодами 24, 12, 8 и 6 часов. Это обусловлено резонансными свойствами атмосферной оболочки Земли [6] и, возможно, нелинейными эффектами в ионосфере.

Неразрывно связан с динамикой движений в ионосфере вопрос о происхождении ионосферных неоднородностей электронной концентрации. Экспериментально установленные параметры, характеризующие времена жизни и размеры этих неоднородностей, согласуются по порядку величины с теоретически рассчитанными значениями. Исключения составляют мелкомасштабные неоднородности  $F$ -области ионосферы, механизм происхождения которых остается пока неизвестным. Имеющийся к настоящему времени экспериментальный материал все еще не позволяет определить картину общей циркуляции воздушных масс в ионосфере.

Существует несколько различных радиофизических методов измерения скорости движения понижированных масс воздуха в ионосфере (выше 50 км): метод разнесенного приема с малой базой, наблюдения за дрейфом ионизированных метеорных следов, метод разнесенного приема с большой базой для наблюдения за движением крупномасштабных неоднородностей [5]. Исследование мерцания радиозвезд, обусловленного рассеянием радиоволн на ионосферных неоднородностях электронной концентрации, также позволяет определять скорости движения этих неоднородностей [6]. Методика экспериментальных измерений и их обработка при использовании пространственно разнесенных приемников подробно изложена в целом ряде работ [4-9]. Отражение радиоволн от ионизированных метеорных следов позволяет определить их скорости дрейфа в ветровых полях ионосферы [13-15].

Помимо радиофизических методов, следует указать на измерения скоростей ветра в тропосфере, стратосфере и ионосфере с помощью визуальных и оптических наблюдений за перламутровыми и серебристыми облаками [10-12]. Широко используются визуальные и оптические наблюдения дрейфа светящихся долгоживущих метеорных следов [16-18]. Имеются сведения о возможности использования геофизических ракет для измерения скоростей ветра [19-21]. В таблице 1 перечислены основные методы измерений скорости движения в атмосфере Земли и указаны области высот, доступные измерениям тем или иным способом. Таким образом, в значительном интервале высот верхней атмосферы можно изучать поля ветровых скоростей с помощью методов, перечисленных в таблице 1.

Таблица 1

| Исследуемая область высот (км) | Название исследуемых областей высот   | Метод измерения скорости движения воздушных масс  |
|--------------------------------|---|---|
| 0-32<br>35-60<br>50-85         | Тропосфера и нижняя часть стратосферы<br>Верхняя часть стратосферы и $D$ -область ионосферы             | Шары-зонды, дымовые снаряды, наблюдения перламутровых облаков<br>Аномальное распространение звука от взрывов<br>Наблюдения за серебристыми облаками |
| 70-120                         | Область максимальной частоты появления метеорных следов ( $M$ -область)<br>$E$ и $F$ -области ионосферы | Наблюдения визуальные, оптические и радиотехнические за дрейфом метеорных следов  |
| 90-300                         |   | Пространственно-разнесенный радиоприем с малой базой  |
| 250-450                        | Область, ответственная за мерцание радиозвезд   | Пространственно-разнесенный радиоприем с большой базой, наблюдения мерцания радиозвезд  |
| 50-?                           |   | Ракетные измерения  |

Изучение динамических процессов в верхней атмосфере в теоретическом аспекте достигло некоторого успеха в применении к нижней части ионосферы ( $M$ - и  $E$ -области высот), где электронно-ионный газ можно рассматривать как пассивную примесь к неионизированному газу. Установлено, что движение неполностью ионизированного газа

в магнитном поле Земли на указанных высотах порождает короткопериодические суточные вариации этого поля вследствие возникновение электрических токов индукции. Электродинамическая теория этих вариаций (теория атмосферного динамо) исходит из наличия строго определенных полей скорости ветра в области высот  $90 \div 120$  км. Теория находится в удовлетворительном качественном (и отчасти количественном) согласии с данными наблюдений за вариациями геомагнитного поля на поверхности Земли. Происхождение неоднородностей электронной концентрации в  $M$ - и  $E$ -областях ионосферы, которые обуславливают эффекты ионосферного рассеяния и фединг радиоволн, связано с турбулизацией воздушных течений на этих высотах [26,27].

Совершенно иное положение занимают вопросы динамики движений в  $F$ -области ионосферы. Ионизированную компоненту газа в этой области атмосферы нельзя рассматривать как пассивную примесь. При изучении процессов с характерными периодами больше одного часа следует учитывать заметное воздействие пондермоторной силы электродинамического происхождения на движение всего газа в целом. Сильное индукционное торможение плазмы препятствует ее увлечению движением нейтрального газа в  $F$ -области. В работах [28, 29] сделан вывод, что движения плазмы в этой области могут возникать только при наличии сторонних электрических полей. Остается открытым вопрос о происхождении и характере этих полей, а также указанный выше вопрос о механизме возникновения мелкомасштабных неоднородностей с размерами  $l \sim 1 \div 10$  км в  $F$ -области ионосферы. Вследствие большой кинематической вязкости среды числа Рейнольдса в этой области высот чрезвычайно малы; поэтому вряд ли можно предположить турбулентное происхождение для этих неоднородностей. К настоящему времени предложено несколько различных механизмов возникновения неоднородностей в  $F$ -области. Все они требуют критического подхода и дальнейшей разработки, так как ни один из них не в состоянии удовлетворительно объяснить имеющиеся экспериментальные данные.

Цель этой работы заключается в том, чтобы представить по возможности полный и вместе с тем краткий обзор теории движений и механизмов образования ионосферных неоднородностей в верхней атмосфере. Хотя, как указано выше, в  $F$ -области ионосферы трудно установить причину образования мелкомасштабных неоднородностей, тем не менее, ниже будет проведено обсуждение возможных механизмов с тем, чтобы уяснить основные трудности, возникающие при попытках дать теоретическую интерпретацию этого явления. Круг рассматриваемых ниже вопросов можно назвать электродинамической метеорологией верхней атмосферы, поскольку электродинамические силы оказывают существенное влияние на характер движения газа.

## 1 СИСТЕМА ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗИРОВАННОГО ГАЗА

Неполностью ионизированные массы воздуха в верхней атмосфере ( $h > 50$  км) представляют собой трехкомпонентную смесь газов. В ее состав входят электроны, ионы и нейтральные частицы (молекулы или атомы). Вследствие этого при гидродинамическом описании движений в такой смеси необходимо пользоваться системой уравнений переноса количества движения для отдельных компонент [30, 31]:

$$\rho_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \rho_k \mathbf{F}_k + q_k N_k E + \frac{N_k q_k}{c} [\mathbf{v}_k \mathbf{H}_0] + \sum_{j=1}^3 \nu_{kj} \rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_j). \quad (1.1)$$

Здесь индекс  $k=1, 2, 3$  относится к частицам разного сорта;  $q_k, N_k, \rho_k, \mathbf{v}_k$ —соответственно заряд, концентрация, плотность массы и скорость  $k$ -той компоненты смеси,  $\nu_{kj}$ —число соударений между частицами  $k$ -го и  $j$ -го сортов в единицу времени,  $H_0$ —постоянное магнитное поле (в нашем случае—магнитное поле Земли). Производная в левой части каждого из трех уравнений имеет вид:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad}).$$

В дальнейшем будем считать, что положительные ионы—это однократно ионизированные атомы нейтрального газа ( $q_k = \pm e$ , где  $e$ —заряд электрона). Заметим, что помимо внешних сил вектор  $F_k$  содержит градиент тензора плотности потока импульса для данной компоненты [12]. С большой степенью точности можно полагать, что плазма является квазинейтральной, т. е.  $N_p = N_i = N$  [1].

Систему уравнений (1.1) необходимо дополнить электродинамическими уравнениями Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (1.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}; \quad (1.3)$$

$$\text{div } \mathbf{h} = 0; \quad (1.4)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{j}$ —плотность электрического тока,  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{E}$ —напряженности магнитного и электрического полей.

Из уравнений (1.1) можно заключить, что все три компоненты смеси газов взаимодействуют между собой через соударения  $\nu_{kj}$ . С другой стороны, на ионы обоих знаков действуют электромагнитные силы, что влечет за собой необходимость учитывать соотношения между электромагнитными величинами в форме (1.2)—(1.5).

Очевидно, что теоретический анализ движений в ионосфере непосредственно на базе системы уравнений (1.1)—(1.5) является чрезвычайно сложным и не обладает достаточной физической наглядностью. В связи с этим для удобства введем, следуя работам [11—13], хорошо известные макроскопические величины: скорость движения системы в целом  $\mathbf{v}$ , скорость движения ионизированной части плазмы  $\mathbf{v}_p$  и плотность электрического тока  $\mathbf{j}$ , связанные следующими соотношениями:

$$\mathbf{v} = \frac{\rho_p \mathbf{v}_p + \rho_n \mathbf{v}_n}{\rho} \quad (\rho = \rho_p + \rho_n); \quad (1.6)$$

$$\mathbf{v}_p = \frac{\rho_e \mathbf{v}_e + \rho_i \mathbf{v}_i}{\rho_p} \quad (\rho_p = \rho_e + \rho_i); \quad (1.7)$$

$$\mathbf{j} = eN(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e); \quad (1.8)$$

где индексы  $e, i, p, n$  относятся соответственно к электронам, ионам, плазме и незаряженным частицам.

Исключим из системы (1.1) величины  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}_n$  с помощью уравнений (1.6)—(1.8). Тогда получим новую систему уравнений для макроскопических переменных:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} H_0]; \quad (1.9)$$

$$\rho_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} + \left(1 + \frac{\rho_p}{\rho_n}\right) (\rho_i \nu_i + \rho_e \nu_e) (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}) = F_p + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{H}_0] + \frac{\nu_e \rho_i (\nu_e - \nu_i)}{eN\rho_p} \mathbf{j}; \quad (1.10)$$

$$\frac{1}{cN} \left\{ \frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{\rho_e \nu_e + \rho_i (\nu_i + \nu_{ei})}{\rho_p} \mathbf{j} + \omega_e [\mathbf{j} \boldsymbol{\tau}] \right\} \nu_e \left(1 + \frac{\rho_p}{\rho_n}\right) (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}) - \omega_e [(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}) \boldsymbol{\tau}] = \frac{eE^*}{m_e} - \left(\frac{F_i}{m_i} - \frac{F_e}{m_e}\right) \frac{1}{N}; \quad (1.11)$$

$$E^* = E + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0]. \quad (1.12)$$

Здесь  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор в направлении магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ . Числа соударений, входящие в эти соотношения, определяются формулами [14]:

$$\nu_{ei} = \frac{5,5}{T^{3/2}} N \ln \frac{220T}{N^{1/3}}; \quad \nu_e = 3,6 \cdot 10^{-10} N_m \sqrt{T}; \quad (1.13)$$

$$\nu_i = 2 \cdot 10^{-9} N_m \sqrt{m_e T / m_i},$$

где  $T$  — температура,  $m_e$  и  $m_i$  — масса электрона и иона,  $\nu$  имеет размерность  $\text{сек}^{-1}$ . В формуле (1.11)  $\omega_e = eH_0/m_e c$  — гирочастота электрона в магнитном поле  $\mathbf{H}_0$ ,  $E^*$  — эффективное электрическое поле, включающее динамо-поле индукции  $\frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0]$ .

Для полностью ионизованного газа уравнения (1.9) — (1.12) переходят в следующие:

$$\rho_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{H}_0] + F_p; \quad (1.14)$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \nu_{ei} \mathbf{j} + \omega_e [\mathbf{j} \boldsymbol{\tau}] = \frac{e^2 N}{m_e} E^* + eN \left(\frac{F_i}{m_i} - \frac{F_e}{m_e}\right); \quad (1.15)$$

$$E = E + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_p \mathbf{H}_0]. \quad (1.16)$$

В ионосфере можно считать газ полностью ионизованным выше 700 км.

При учете сжимаемости среды к этим уравнениям необходимо добавить уравнения непрерывности для плазмы, электрического тока и всей среды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \text{div} \rho_p \mathbf{v}_p &= 0; \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} &= 0; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Уравнение (1.9) описывает движение центра масс всей системы, уравнение (1.10) выражает перенос механического импульса ионизован-

ной компоненты газа, и, наконец, уравнение (1.11) представляет собой обобщенный закон Ома.

Однако и в этой форме уравнения (1.9)—(1.11) остаются все еще сложными. В связи с этим мы вынуждены воспользоваться некоторыми предположениями о характере интересующих нас динамических процессов, а также воспользоваться определенными соотношениями между параметрами верхней атмосферы. Во-первых, ограничимся рассмотрением таких движений в ионосфере, когда характерные изменения во времени имеют квазипериоды, значительно большие, чем величина, обратная числу соударений ионов с молекулами  $T \gg \nu_i^{-1}$ . Во-вторых, в  $M$ -,  $E$ - и  $F$ -областях ионосферы можно считать, что с большой степенью точности выполняется условие  $\rho_n \gg \rho_p$ . В-третьих, будем пренебрегать сжимаемостью среды. Действительно, из экспериментальных данных известно, что число Маха  $M = v/v_T \sim 0,1$  в магнито-спокойные дни и  $M \sim 1$  в магнито-возмущенные дни.

При выполнении этих условий в уравнениях (1.10) и (1.11) можно пренебречь инерционными членами  $d/dt$  от  $\mathbf{v}_p$  и  $\mathbf{j}$ , а также считать, что

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_n + \frac{\rho_p}{\rho_n} \mathbf{v}_p \approx \mathbf{v}_n.$$

При сделанных предположениях система уравнений (1.9)—(1.12) значительно упрощается и принимает следующий вид\*

$$\rho_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = F_n + \frac{1}{c} [\mathbf{j}H_0]; \quad (1.9a)$$

$$(\rho_i \nu_i + \rho_e \nu_e) (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}) = F_p + \frac{1}{c} [\mathbf{j}H_0] + \frac{\rho_e \rho_i (\nu_e - \nu_i)}{eN \rho_p} \mathbf{j}; \quad (1.10a)$$

$$\mathbf{j} = \sigma_0 [\mathbf{E}^* \boldsymbol{\tau}] \boldsymbol{\tau} + \sigma_1 [[\boldsymbol{\tau} \mathbf{E}^*] \boldsymbol{\tau}] + \sigma_2 [\boldsymbol{\tau} \mathbf{E}^*]; \quad (1.11a)$$

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_n H_0]. \quad (1.12a)$$

В уравнении (1.11a) электрическая проводимость вдоль силовых линий магнитного поля  $\sigma_0$ , проводимость поперек этих линий  $\sigma_1$  и проводимость Холла  $\sigma_2$  определяются формулами [23]:

$$\begin{aligned} \sigma_0 = e^2 N \left( \frac{1}{m_e \nu_e} + \frac{1}{m_i \nu_i} \right); \quad \sigma_1 = e^2 N \left[ \frac{\nu_e}{m_e (\nu_e^2 + \omega_e^2)} + \frac{\nu_i}{m_i (\nu_i^2 + \omega_i^2)} \right]; \\ \sigma_2 = e^2 N \left[ \frac{\omega_e}{m_e (\omega_e^2 + \nu_e^2)} - \frac{\omega_i}{m_i (\omega_i^2 + \nu_i^2)} \right]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

В дальнейшем мы будем в основном интересоваться случаем малых скоростей, когда можно пренебречь нелинейными членами  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ , и будем считать среду несжимаемой, т. е. полагать  $|\mathbf{v}| \ll v_T$ , где  $v_T = \sqrt{\kappa T / m_i}$ . В ионосфере  $v_T \sim 500$  м·сек<sup>-1</sup>, а средняя скорость регулярных движений  $v$ , измеренная экспериментально, порядка 50 м·сек<sup>-1</sup>.

Система уравнений (1.9a)—(1.12a) позволяет, в принципе, исследовать ламинарные дозвуковые течения в верхней атмосфере. Мы не будем в дальнейшем касаться вопросов адаптации метеорологических

\* Уравнение (1.11a) легко получить непосредственно из системы (1.1) путем несложных преобразований

полей в ионосфере, а также процессов установления стационарных состояний в отдельных компонентах смеси, которые протекают весьма сложно и не изучены до настоящего времени. Заметим только, что процессы установления электрического тока  $\mathbf{j}$  и скорости дрейфа плазмы  $\mathbf{v}_p$  определяются временем  $\tau \sim \nu_{im}^{-1}$ . Для полностью ионизированного газа ток  $\mathbf{j}$  устанавливается за время  $\tau \sim \nu_{ei}^{-1}$ .

Внешние силы неэлектрического происхождения  $F_e$  и  $F_i$ , действующие на заряженные частицы, можно включить в выражение для напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  [35, 36]. Как правило, они значительно меньше реальных электрических сил и, в частности, меньше поля индукции  $\frac{1}{c} [\mathbf{v}_n \mathbf{H}_0]$ , поэтому ими можно во многих случаях пренебречь. Относительно системы (1.9a)–(1.12a) можно сделать следующее общее заключение: всякое внешнее воздействие на неполовностью ионизированный газ типа ионосферы (нагревание, приливные силы, перепад давления) приводит к возникновению движения неионизированной компоненты газа. Это влечет за собой появление поля индукции  $E_{инд} = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0]$ , которое иногда называют динамо-полем [28, 37]. Образуясь в этом поле электрические токи, в свою очередь, оказывают воздействие как на движение ионизированной, так и на движение нейтральной компоненты плазмы. В дальнейшем мы будем называть скорость движения неионизированных частиц  $V_n$  скоростью ветра, а скорость движения центра массы ионов  $V_p$  скоростью дрейфа плазмы. Ниже мы приступаем к конкретному анализу некоторых решений системы уравнений (1.9a)–(1.12a) применительно к различным областям ионосферы.

## 2. ВЕТРЫ В ВЕРХНЕЙ АТМОСФЕРЕ

Движение нейтральной компоненты слабо ионизированного газа типа ионосферы рассматривалось в работе [38]. При наличии градиента давления, силы тяжести, а также с учетом силы Кориолиса уравнение (1.9a) запишется в виде:

$$\rho_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = \text{grad } p_n + \rho_n \mathbf{g} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{H}_0] + 2 [\boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{v}_n] + \gamma_n \nabla^2 \mathbf{v}_n. \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{v}_n$ ,  $p_n$ ,  $\rho_n$  — скорость ветра, давление и плотность среды,  $\gamma_n$  — динамическая вязкость газа,  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения,  $\boldsymbol{\omega}_0$  — угловая скорость вращения Земли,  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока, определяемая формулой (1.11a). В отсутствие электродинамической силы  $\frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{H}_0]$  уравнение (2.1) переходит в хорошо известное уравнение движения воздушных масс, которым обычно пользуются в тропосферной метеорологии [39, 42].

Используя теорию подобия, проведем полуколичественный анализ влияния электродинамической силы на характер движения воздушных масс. При этом будем считать, что указанное влияние сводится к индукционному торможению электропроводного газа, движущегося в магнитном поле Земли под действием внешних сил. Обозначим характерный пространственный масштаб, на котором заметно изменяется скорость ветра, через  $l_v$ , а характерный временной масштаб изменения этой скорости через  $\tau_v$ . Как известно, число Рейнольдса определяется следующим образом:

$$Re = v_l l_v / \nu, \quad (2.2)$$

где  $v_t$  — пульсационная скорость масштаба  $l_i$  [32],  $\nu = \eta_i/\rho$  — кинематическая вязкость среды. Число Рейнольдса характеризует по порядку величины отношение силы инерции к силе вязкого трения.

При наличии градиента средней скорости и изменения температуры с высотой большую роль играет безразмерное число Ричардсона [40]

$$Ri = \frac{g \left[ \frac{dT}{dz} \right]_{ад} + (dT/dz)_{ад}}{l(\partial u/\partial z)^2}, \quad (2.3)$$

где  $(dT/dz)_{ад} = -g/c_p$ ,  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении.

Если сила Архимеда значительно превышает инерционную силу, то турбулентность будет подавлена. Из формулы (2.3) легко видеть, что крупномасштабные движения всего сильнее подвержены стабилизирующему действию архимедовых сил ( $Ri \sim l$ ). При числах  $Ri < 0$  стратифицированная среда неустойчива, в то время как при  $Ri > 0$  она становится устойчивой<sup>\*</sup>. Когда число  $Ri$  возрастает, то при этом в турбулентном течении подавляются все более и более мелкомасштабные вихри. Вполне допустимо считать, что безразмерные характеристики турбулентности являются функциями от числа  $Ri$  [131].

При наличии пондеромоторной силы электромагнитного происхождения удобно ввести следующие два безразмерных числа:

$$M = \sigma H_0^2 l_i^2 / \nu c^2; \quad L = \sigma_1 H_0^2 \tau_i / \rho c^2, \quad (2.4)$$

которые позволяют оценить влияние электрической проводимости среды на движения в магнитном поле Земли.

Число Гартмана  $M$  характеризует по порядку величины отношение силы индукционного торможения к силе вязкого трения. При больших числах  $M$  джоулевы потери преобладают над потерями за счет вязкости среды. Число  $L$  определяет отношение силы индукционного торможения к инерционной силе. При малых  $L$  можно считать, что процесс установления электрических токов, воздействующих на движение среды, очень длительный. В этом случае влияние пондеромоторной силы на движение незначительно.

Как показано экспериментально, движения в ионосфере характеризуются тем, что вертикальные скорости, по крайней мере, на порядок меньше горизонтальных [43]. Поэтому в дальнейшем мы будем интересоваться только горизонтальными движениями. В качестве характерного внешнего масштаба горизонтальных движений в обзоре всюду используется высота однородной атмосферы  $z_0$ .

Таблица 2

| Параметры атмосферы | Средняя высота области ( $\kappa$ м) | Высота однородной атмосферы $z_0$ (в м) | Кинематическая вязкость $\nu$ ( $\text{см}^2 \text{сек}^{-1}$ ) | Среднее значение наблюдаемой скорости дрейфа $V_p$ (м $\text{сек}^{-1}$ ) | Число Рейнольдса $Re$ | Число Гартмана $M = \frac{\sigma H_0^2 z_0^2}{\nu c^2}$ | Время установления $\tau = \frac{N_m}{N \nu_{im}}$ |
|---------------------|--------------------------------------|---|---|---|-----------------------|---|--|
| Область высот       |                                      |   |   |   |                       |   |  |
| M-область           | 90                                   | 6,5                                     | $1,2 \cdot 10^4$  | 25  | $4 \cdot 10^4$        | 0,13  | 3 суток  |
| E-область           | 110                                  | 8,5                                     | $3 \cdot 10^5$  | 50  | $14 \cdot 10^4$       | 20  | 10 часов   |
| F1-область          | 200                                  | 50                                      | $1 \cdot 10^9$  | 80  | 45                    | 25  | 1 час  |
| F2-область          | 300                                  | 61                                      | $7,8 \cdot 10^9$  | 100   | 7,8                   | 16  | —  |

\* Обычное предположение, что  $Ri_{кр} = 1$ , не обосновано теоретически и не подтверждается экспериментально. На это обстоятельство указал В. И. Татарский.

В таблице 2 приведены указанные выше безразмерные числа  $Re$  и  $M$  для различных областей ионосферы. Как видно из этой таблицы, турбулентные течения вполне возможны в  $M$ - и  $E$ -областях атмосферы ( $Re > Re_{кр} = 50$ ). Выше 200 км ( $F1$ - и  $F2$ -области) вследствие большой кинематической вязкости и джоулевых потерь турбулизация электропроводного газа в ионосферных течениях невозможна при тех скоростях, которые обнаруживаются в экспериментах [44]. Числа Гартмана в верхней части  $E$ -области и в  $F$ -областях ионосферы становятся больше единицы. Это является следствием того факта, что электродинамическое индукционное торможение преобладает над силами вязкого трения в этих областях. Время установления электрического тока, вызывающего индукционное торможение всего газа в целом,

$$\tau_{инд} = \rho c^2 / \sigma H_0^2 \sim N_m \cdot N_{v_{im}} \quad (2.5)$$

В  $E$ -слое  $\tau_{инд} \sim 10$  часов, а в  $F$ -области  $\tau_{инд} \sim 1$  часа. Таким образом, магнитное поле Земли оказывает влияние в основном на крупномасштабные движения в ионосфере с большими временными периодами, т. е. на движения типа общей циркуляции.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Введем стандартную систему координат, направив ось  $x$  на восток, ось  $y$  на север, ось  $z$  вертикально вверх, и обозначим компоненты скорости ветра по этим направлениям соответственно через  $u$ ,  $v$  и  $w$ . В соответствии с данными эксперимента будем считать, что  $w = 0$ . Уравнение движения (2.1) в проекциях на оси координат имеет вид [38]:

$$\frac{du}{dt} - \left( 2\omega_{0z} + \frac{\sigma_2 H_0 H_z}{\rho c^2} \right) v + \frac{\sigma_1 H_0^2}{\rho c^2} u = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (2.6)$$

$$\frac{dv}{dt} + \left( 2\omega_{0z} + \frac{\sigma_2 H_0 H_z}{\rho c^2} \right) u + \frac{\sigma_1 H_z^2}{\rho c^2} v = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.7)$$

где  $\omega_{0z} = \omega_0 \sin \varphi$ ,  $\omega_0 = 7 \cdot 10^{-5}$  сек $^{-1}$ ,  $H_0 = 0,5 \sqrt{1+3 \sin^2 \varphi}$  — магнитное поле Земли,  $\varphi$  — геомагнитная широта.

Укажем на некоторые следствия, вытекающие из уравнений (2.6) и (2.7). Члены, содержащие проводимости  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , появляются вследствие действия электродинамической силы и оказывают различные по характеру воздействия на движение атомарной (или молекулярной) составляющей плазмы. Компонента этой силы, связанная с поперечной проводимостью  $\sigma_1$ , обуславливает индукционное торможение, пропорциональное скорости движения, в то время как холловская составляющая этой силы (проводимость  $\sigma_2$ ) вызывает гироскопический эффект и действует на ветер подобно силе Кориолиса. При  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  (2.6) и (2.7) переходят в хорошо известные уравнения, описывающие колебания ветра около геострофического направления [38]. Вводя обозначения  $\lambda = \sigma_1 H_z^2 / \rho c^2$  и  $\Omega = 2\omega_{0z} + \sigma_2 H_0 H_z / \rho c^2$ , получим следующее стационарное решение уравнений (3.6) и (3.7) при заданном поле давления  $p$ :

$$u = - \frac{\lambda \partial p / \partial x + \Omega \partial p / \partial y}{\rho (\lambda^2 + \Omega^2)}; \quad v = - \frac{\lambda \partial p / \partial y - \Omega \partial p / \partial x}{\rho (\lambda^2 + \Omega^2)}. \quad (2.8)$$

В  $D$ - и  $M$ -областях ионосферы эти формулы переходят в известные соотношения для компонент скорости геострофического ветра:

$$u = - \frac{1}{2\rho\omega_{0z}} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad v = \frac{1}{2\rho\omega_{0z}} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.9)$$

Это означает, что ветер дует вдоль изобарических поверхностей и не имеет компоненты в направлении градиента давления.

В  $E$ -области ионосферы на высотах 110–130 км скорость ветра определяется иными соотношениями:

$$u \approx -\frac{1}{\rho\Omega} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad v \approx \frac{1}{\rho\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.10)$$

т. е. она по-прежнему направлена вдоль изобар, но ее модуль определяется не только угловой скоростью вращения Земли и плотностью среды, но и параметром  $\sigma_2 H_0 H_z / c^2$ , который в этой области сравним и даже может оказаться больше, чем  $2\rho\omega_z$ . Действительно, при  $\sigma_2 = 4 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\rho = 3 \cdot 10^{-11} \text{ г.см}^{-3}$ ,  $H_0 = 0,5 \text{ гс}$ ,  $\sigma_2 H_z^2 / \rho c^2 \sim 10^4 \text{ сек}^{-1}$ . На высотах больше 145 км выполняется условие  $|\sigma_1 H_z^2 / \rho c^2| \gg |2\omega_{0z} + \sigma_2 H_0 H_z / \rho c^2|$  и скорость ветра приобретает компоненту в направлении градиента давления. При этом ветры теряют всякое сходство с геострофическими ветрами нижней атмосферы. На высоте  $h=145 \text{ км}$  угол, образованный направлением скорости ветра с изобарическими поверхностями, определяется из соотношения

$$\text{tg } \alpha = \lambda / \Omega = 10^\circ, \quad (2.11)$$

если считать, как общепринято, что градиент давления имеет только меридиональную составляющую. На высотах  $h \sim 300 \text{ км}$   $\alpha \sim 75^\circ$ , т. е. направление скорости ветра очень близко к направлению градиента давления. Выше 145 км можно считать приближенно, что

$$u \approx \frac{1}{\rho\lambda} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad v \approx -\frac{1}{\rho\lambda} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.12)$$

Таким образом, при построении модели общей циркуляции в верхней атмосфере следует всегда иметь в виду иной характер связи поля ветровых скоростей с полем давления, в особенности, если интересоваться медленно меняющимися во времени динамическими процессами ( $L < 1$ ).

После ознакомления с движением нейтральной компоненты плазмы мы перейдем теперь к обсуждению вопроса о дрейфе ионизированной компоненты в ветровых полях воздушных масс.

### 3. ДРЕЙФ ПЛАЗМЫ В ВЕРХНЕЙ АТМОСФЕРЕ

В предыдущем разделе получено выражение для компонент скорости ветра в электропроводной среде, находящейся в магнитном поле. В этом разделе рассматривается дрейф плазмы при наличии заданного поля ветровых скоростей  $\mathbf{v}_n$  и электрического поля  $\mathbf{E}$  [28, 29, 45, 46]. Как было указано, время установления стационарной скорости дрейфа плазмы определяется величиной, обратной числу соударений ионов с молекулами  $t_p = \nu_{im}^{-1}$ . В  $E$ -слое для высоты  $z=100 \text{ км}$   $t_p = 10^{-3} \text{ сек}$ , в  $F$ -области  $t_p = 1 \text{ сек}$ . В квазистационарном состоянии при  $t > t_p$  скорость дрейфа определяется следующим выражением (см. формулу (1.10а)):

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_n + \frac{1}{\rho_p \nu_{im} c} [\mathbf{j} \mathbf{H}_0] + \frac{m_e \nu_{em}}{\rho_p e \nu_{im}} \mathbf{j} \quad (3.1)$$

При выполнении условия  $\omega_H \Omega_H > \nu_e' \nu_{im}$ , где  $\nu_e' = \nu_{ei} + \nu_{em}$ , выражение (3.1) можно представить в виде [45]:

$$v_{pz} = v_{nz} + \frac{eE_z \nu_{em}}{m_i \nu_{im} \nu_e}; \quad (3.2)$$

$$v_{px} = \left(1 - \frac{\tau_i^2}{1 + \tau_i^2}\right) v_{nx} + \frac{eE_x}{m_i \nu_i (1 + \tau_i^2)} + \frac{e\tau_i E_y}{m_i \nu_i (1 + \tau_i^2)}; \quad (3.3)$$

$$v_{py} = -\frac{\tau_i}{1 + \tau_i^2} v_{nx} - \frac{e\tau_i E_y}{m_i \nu_i (1 + \tau_i^2)} + \frac{eE_x}{m_i \nu_i (1 + \tau_i^2)}, \quad (3.4)$$

где ось  $z$  выбрана вдоль магнитного поля, а вектор скорости ветра лежит в плоскости  $xz$ . В формулах (3.2)–(3.4) учтено, что  $m_i \gg m_e$ ,  $m_i \nu_i \gg m_e \nu_e$ ,  $\nu_e \gg \nu_i$ , и введено для удобства обозначение  $\tau_i \approx \omega_i / \nu_i$ .

В отсутствие электрического поля ( $E = 0$ ) скорость дрейфа в направлении магнитного поля совпадает со скоростью ветра  $v_{pz} = v_{nz}$ , а в перпендикулярной к этому полю плоскости определяется соотношениями

$$v_{px} = \left(1 - \frac{\tau_i^2}{1 + \tau_i^2}\right) v_{nx}; \quad v_{py} = -\frac{\tau_i}{1 + \tau_i^2} v_{nx}. \quad (3.5)$$

В ионосфере на высоте 100 км  $\tau_i = 10^{-2}$ , т. е., как следует из приведенных формул, имеет место полное увлечение ионизированной части плазмы нейтральными атомами  $v_p \approx v_n$ . На высоте 145 км  $\tau_i = 10$ , следовательно,  $v_{pz} = v_{nz}$ ,  $v_{px} = 10^{-2} v_{nx}$  и  $v_{py} = 10^{-1} v_{nx}$ .

Таким образом, область высот 110–130 км является переходной для скоростей дрейфа: ниже 110 км скорости дрейфа в отсутствие электрических полей практически совпадают со скоростью ветра, выше 130 км ионизированная компонента дрейфует со скоростью ветра лишь в направлении магнитного поля. В плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, скорость дрейфа на несколько порядков меньше скорости ветра. Это обусловлено тем, что возникающие под действием ветра токи индукции интенсивно тормозят движение плазмы поперек геомагнитного поля и она не увлекается движением нейтральных частиц. Торможение должно быть очень сильным в  $F$ -области ионосферы, где  $\tau_i \gg 1$ .

В связи с этим обстоятельством в работах [28, 29] утверждается, что причиной дрейфа ионизированного газа в  $F$ -области являются электрические поля. Действительно, при  $\tau_i \gg 1$  в этой области ионосферы формулы (3.2)–(3.4) переходят в следующие:

$$v_{pz} = v_{nz} + \frac{e\nu_{em}}{m_i \nu_{im} \nu_e} E_z; \quad (3.2a)$$

$$v_{px} = \frac{c}{H_0} E_y; \quad v_{py} = -\frac{c}{H_0} E_x. \quad (3.6)$$

Однако вопрос о происхождении этих электрических полей и об их величине до настоящего времени окончательно не решен (см. разделы 6 и 8). В работах [28, 47] считалось, что в ионосфере вследствие ограниченной толщины ионосферных слоев отсутствуют вертикальные электрические токи. В этом случае возникает поляризационный заряд на „стенках“ ионосферных слоев и, следовательно, в среде появляется электрическое поле поляризации. Расчеты, произведенные в работе [28], дают для поляризационного поля величину  $E_{\text{пол}} \approx 4E_{\text{инд}}$ , в то время как по данным работы [47]  $E_{\text{пол}} \sim E_{\text{инд}}$ .

Заметим, что радиофизические методы исследования скоростей дрейфов в верхней атмосфере, перечисленные в разделе 1, не позволяют определять непосредственно ни скорости ветра, ни скорости дрейфа. Все указанные методы определяют только скорость перемещения неоднородностей электронной концентрации. В связи с этим возникает естественная необходимость рассмотреть движение отдельной неоднородности электронной концентрации в ионосфере и установить связь между скоростью ветра и скоростью движения неоднородностей.

#### 4. ДВИЖЕНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В ИОНОСФЕРЕ

Рассмотрим движение отдельной неоднородности электронной концентрации в ионосфере под действием ветра [16]. Будем считать, что вследствие анизотропии коэффициента амбиполярной диффузии [36] эта неоднородность имеет протяженность в направлении силовых линий магнитного поля значительно большую, чем в перпендикулярной к ним плоскости. Это позволяет моделировать неоднородность сплошным круговым цилиндром с концентрацией  $N'$  и осью, ориентированной по силовым линиям геомагнитного поля  $H_0$ . Обозначим концентрацию заряженных частиц вне цилиндра  $N$  и предположим, что концентрация неионизированных молекул (или атомов)  $N_n$  одна и та же вне и внутри цилиндра. Без ограничения общности выберем систему координат таким образом, чтобы ось  $z$  была направлена параллельно магнитному полю, а ось  $x$  в направлении скорости ветра. В такой постановке задача впервые рассматривалась в работе [28], где был сделан вывод, что стационарное движение неоднородности невозможно. В работе [46] проведено более последовательное решение задачи с учетом гидродинамического условия непрерывности потока плазмы через поверхность цилиндра, которое отсутствовало в [28]. Ниже приводится постановка задачи и анализ решения.

В качестве исходных необходимо воспользоваться уравнениями (1.10a)—(1.11a), считая скорость  $\mathbf{v}_n$  заданной и направленной по оси  $x$ . Третьим членом справа в формуле (1.10a) можно пренебречь по сравнению со вторым, начиная с высоты, где  $\omega_e \gg \nu_e$  ( $z = 85$  км). В этом предположении необходимые для решения уравнения запишутся в виде:

$$(\rho_e \nu_e + \rho_i \nu_i) (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_n) = \frac{1}{c} [\mathbf{j} H_0]; \quad (4.1)$$

$$\mathbf{j} = \sigma_1 \left( -\text{grad } S + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_n H_0] \right) + \sigma_2 \left[ \tau \left( -\text{grad } S + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_n H_0] \right) \right], \quad (4.2)$$

где  $E_p = \text{grad } S$ —электрическое поляризационное поле зарядов, возникающих на стенке цилиндрической неоднородности вследствие различной электрической проводимости цилиндра и окружающей его плазмы. Уравнение для нахождения потенциала  $S$  получается из требования  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  вне и внутри цилиндра, и его решение легко определить из условия непрерывности электрического тока через стенку цилиндра  $j_R = j'_R$ . Поляризационные электрические поля внутри цилиндра имеют вид:

$$E_{p,x} = \frac{2(k-1)\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2(k+1)^2 + \sigma_2^2(k-1)^2} \frac{H_0 v_n}{c}; \quad (4.3)$$

$$E_{p,y} = \frac{(k-1)[\sigma_1^2(k+1) + \sigma_2^2(k-1)]}{\sigma_1^2(k+1)^2 + \sigma_2^2(k-1)^2} \frac{H_0 v_n}{c}, \quad (4.4)$$

где  $k=N'/N$ —отношение концентраций плазмы внутри и вне цилиндра, а проводимости  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  определяются формулами (1.18) и относятся к среде, окружающей неоднородность.

Второе условие стационарности движения является гидродинамическим и налагает требование непрерывности потока плазмы через граничную поверхность цилиндра:

$$N'n(\mathbf{v}'_p - \mathbf{v}_n) = Nn(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_n + V), \quad (4.5)$$

где  $\mathbf{n}$ —единичный вектор нормали к поверхности цилиндра, а  $V$ —скорость дрейфа неоднородности относительно плазмы. Уравнение (4.5) позволяет определить компоненты скорости движения цилиндра в неподвижной системе координат. В обозначениях, принятых в работе [16], получим:

$$\frac{V_{x0}}{v_n} = 1 - G\sigma_1 - \frac{2[(k-1)/(k+1)](\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_1^2 + [(k-1)/(k+1)]^2 \sigma_2^2} G\sigma_1, \quad (4.6)$$

$$\frac{V_{y0}}{v_n} = -G\sigma_2 - \frac{2[(k-1)/(k+1)]^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_1^2 + [(k-1)/(k+1)]^2 \sigma_2^2} G\sigma_2, \quad (4.7)$$

где  $G=H_0^2/c^2(\rho_e v_e + \rho_i v_i)$ . Легко видеть, что при  $k=1$  плазма дрейфует со скоростями, определяемыми формулами (3.5). Последние члены в (4.6) и (4.7) выражают влияние полей поляризации на скорость дрейфа неоднородности. Физически это влияние обусловлено тем обстоятельством, что поляризационный заряд течет со стенок цилиндра и возникающий при этом электрический ток создает при наличии магнитного поля дополнительное торможение неоднородности. В случае очень большой степени ионизации газа внутри цилиндра, когда  $k \gg 1$ , из формул (4.6) и (4.7) следует, что

$$\frac{V_{x0}}{v_n} = 1 - 3G\sigma_1; \quad (4.8)$$

$$\frac{V_{y0}}{v_n} = -3G\sigma_2, \quad (4.9)$$

т. е. происходит увеличение в три раза эффекта индукционного торможения ( $G\sigma_1$ ) и в три раза возрастает гироскопический эффект. Случай  $k \gg 1$  реализуется в ионизированных метеорных следах, в которых электронная концентрация в начальный момент имеет значение  $N = 10^8 \div 10^{10} \text{ см}^{-3}$ . Однако в области максимальной частоты формирования метеорных следов ( $z \sim 80 \div 90 \text{ км}$ )  $G\sigma_1$  и  $G\sigma_2 \ll 1$  и, следовательно, скорости дрейфа метеорных следов по величине и по направлению должны совпадать со скоростью ветра  $\mathbf{v}_p \approx \mathbf{v}_n$ .

Большой практический интерес представляет случай, с которым приходится сталкиваться в ионосфере, когда неоднородности электронной концентрации сравнительно слабые и  $(k-1)/(k+1) \sim 10^{-2}$ . При этом

$$\frac{V_{x0}}{v_n} = 1 - G\sigma_1 - 2G\sigma_1 \left(1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right) 10^{-2}; \quad (4.10)$$

$$\frac{V_{y0}}{v_n} = -G\sigma_2 - 2G\sigma_2 \left(1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right) 10^{-4}.$$

В области высот  $130 \pm 10 \text{ км}$  отношение  $\sigma_2/\sigma_1$  максимально и имеет величину  $\sigma_2/\sigma_1 \approx 20$  [28], следовательно,  $(\sigma_2/\sigma_1)^2 \approx 400$ . Из формул (4.10) можно заключить, что заметное изменение скоростей дрейфа вследствие поляризации неоднородностей происходит в динамо-области,

где отношение  $(\sigma_2/\sigma_1)$  имеет максимум. Ниже 130 км и выше этого уровня  $\sigma_2 \ll \sigma_1$  и поляризационные поправки к скоростям дрейфа незначительны.

Таким образом, ионосферные неоднородности перемещаются под действием ветра со скоростями дрейфа окружающей плазмы, за исключением динамо-области, где возможны заметные отклонения скорости движения неоднородностей от скорости дрейфа. Заметим, что проведенное здесь рассмотрение относится к движению неоднородности в форме бесконечного цилиндра, ориентированного вдоль оси  $z$ . Вполне очевидно, что подобная модель далека от реальности. В работе [151] анализируется движение под действием ветра ионосферной неоднородности в форме эллипсоида вращения. Сделан вывод, что стационарное движение невозможно. Неустойчивость движения неоднородности такой формы обусловлена воздействием геомагнитного поля. Оценки времени распада неоднородностей с размером  $L \sim 100$  м заключены в пределах 10 —  $10^1$  сек [151].

### 5. РЕГУЛЯРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ИОНОСФЕРЕ

Радиофизические методы наравне с другими методами, перечисленными в таблице 1, позволяют с достаточной точностью определять величину и направление скорости дрейфа неоднородностей электронной

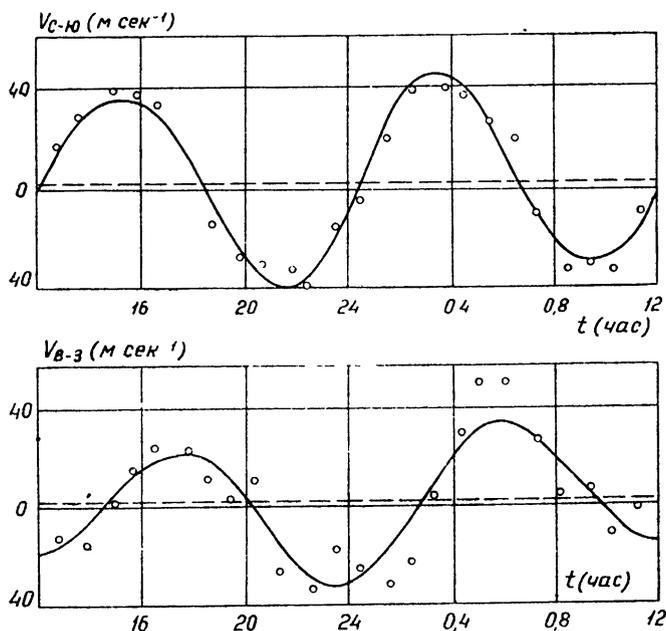


Рис 1 Суточные вариации среднечасового значения скорости ветра в  $M$ -области ионосферы. Представлены две компоненты этой скорости — одна в направлении север—юг, другая в направлении восток—запад [14].

концентрации в ионосфере. На рис. 1 приведены суточные вариации северо-южной и восточно-западной составляющих полной скорости ветра для высоты 92,5 км. Эти данные получены с помощью радиотехнической аппаратуры для наблюдения за перемещением ионизированных метеорных следов. Аналогичные записи вариаций дрейфа получены для  $E$ - и  $F$ -областей ионосферы [1, 3 50—57]. Гармонический ана-

лиз экспериментальных данных о суточных вариациях скоростей движения показал, что для  $M$ -,  $E$ - и  $F$ -областей верхней атмосферы можно выделить суточную и полусуточную гармоники, а также постоянную составляющую этой скорости. Помимо этих трех основных составляющих скорости обнаружены и другие гармоники с периодами 8 и 6 часов. В зависимости от географических координат точки наблюдения ионосферных дрейфов амплитуда и фаза указанных составляющих скорости движения заметно различаются. Анализ экспериментальных данных за период одного года свидетельствует о наличии сезонных вариаций всех трех составляющих скорости. Кроме указанных компонент скорости дрейфа имеется нерегулярная составляющая, происхождение и характер которой будут рассмотрены в разделе 6.

Происхождение суточной и полусуточной составляющих скорости дрейфа обусловлено воздействием на ионосферу приливообразующих сил со стороны Солнца и Луны [5-8]. Вторым не менее важным фактором в возбуждении суточных вариаций скоростей является тепловое воздействие Солнца [65]. Теория колебаний скорости ветра и давления с периодом 24 часа и 12 часов хорошо и детально разработана для тропосферы и стратосферы [59-62]. Полный количественный анализ приливных колебаний в тропосфере приведен в монографии [62], где изложена „резонансная“ теория приливов. Согласно этой теории, в атмосфере Земли могут происходить свободные колебания воздушных сферических слоев, ограниченных с одной стороны поверхностью Земли, а с другой стороны поверхностями, где имеют место минимумы температуры (высоты  $z_1=15$  км,  $z_2=85$  км). Наличие резонансных периодов колебаний атмосферы ведет к тому, что солнечно-полусуточные колебания в ионосфере преобладают над лунно-полусуточными, хотя приливообразующая сила у первых в 2,5 раза меньше, чем у вторых. Приливо-резонансная теория объясняет это явление наличием естественного 12-часового периода свободных колебаний у атмосферы Земли.

Колебательные движения воздушных масс с периодами в 12 и 24 часа в ионосфере приводят к образованию соответствующих им индукционных динамо-полей и электрических токов. В свою очередь, токи вызывают вариации напряженности геомагнитного поля на поверхности Земли. Этот механизм происхождения геомагнитных вариаций получил название теории атмосферного динамо [22, 23, 63, 65]. При наличии электрических токов в среде, находящейся в магнитном поле, возникают пондеромоторные силы, изменяющие характер движения всех компонент ионосферной плазмы. В соответствии с уравнениями (1.10а)—(1.12а) при известном распределении токовой системы  $\mathbf{j}$  можно определить поле скоростей дрейфа  $\mathbf{v}_D$ . Токовые системы, соответствующие экспериментально установленному распределению геомагнитных вариаций на поверхности Земли, приводятся в монографии [22].

По найденным системам токов в работах [24, 66, 67] получены связанные с ними скорости дрейфа плазмы. Электрические токи, вызывающие вариации напряженности геомагнитного поля, расположены в сравнительно узкой полосе высот 110÷140 км (динамо-область, где электрическая проводимость Холла имеет максимальное значение  $\sigma_3 \sim 40\sigma_1$  [28, 29]). В динамо-области эффективная электропроводность определяется как комбинация проводимостей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ :

$$\sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2^2/\sigma_1,$$

т. е.  $\sigma_3$  больше любой из них. Вследствие этого электрический ток в этой области высот значительно сильнее, чем в других участках ионосферы. Эффективная проводимость  $\sigma_3$  обусловлена элект-

рической поляризацией среды с неоднородной проводимостью. В работе [28] было показано, что меридиональные электрические токи в высоких и средних широтах текут к экватору и близ него образуют зональный струйный ток большой силы. Этот вывод теории был подтвержден экспериментальными измерениями токов близ геомагнитного экватора с помощью запуска геофизических ракет [152]. В других областях ионосферы электрические токи значительно менее интенсивны и в меньшей степени влияют на магнитное поле Земли. Тем не менее, выше 140 км характер движения понижированных воздушных масс определяется этими токами.

Теория атмосферного „динамо“ находится в удовлетворительном качественном согласии с результатами экспериментальных исследований. Однако сопоставление результатов расчета с опытными данными приводит к целому ряду расхождений [69, 70]. Тем не менее, можно полагать, что дальнейшее развитие динамо-теории для нижней части ионосферы ( $z < 140$  км) позволит объяснить закономерности в изменении скоростей дрейфа. Для объяснения закономерностей движений в  $F$ -области ионосферы необходимо принимать во внимание воздействие электродинамических сил на движение нейтральной компоненты газа [38].

Постоянная составляющая скоростей дрейфа, которая остается после усреднения их за несколько суток, обусловлена общей циркуляцией воздушных масс в верхней атмосфере. Первые попытки

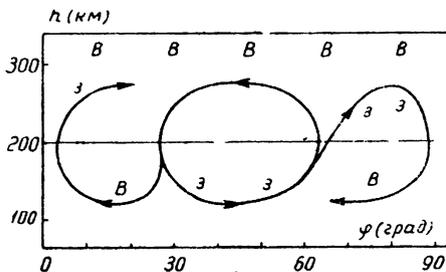


Рис. 2. Схематическая модель общей циркуляции [72]. Стрелками указано направление течений в меридиональной плоскости; буквы отражают направление зональных течений. По оси абсцисс отложена географическая широта  $\varphi$

с этим представляется маловероятным, что схема циркуляции, изображенная на рис. 3, дает действительное представление о ветрах в верхней атмосфере.

В настоящее время данные о направлении и величине постоянной составляющей скорости дрейфа в различных районах над поверхностью земного шара [1-3, 74-77] не позволяют составить законченную модель общей циркуляции в ионосфере. Это обусловлено целым рядом причин. Во-первых, размещение станций, где проводятся наблюдения скоростей дрейфа в ионосфере, крайне неравномерно по поверхности Земли (см., например, [78]). Во-вторых, методика измерений скоростей дрейфа с помощью трех разнесенных в пространстве радиоприемников не позволяет в общем случае определить истинную величину и направление скорости дрейфа ионосферной плазмы. Последнее обусловлено тем, что анизотропия масштабов неоднородностей затрудняет опреде-

строить модель общей циркуляции для высот больше 50 км изложены в работах [71, 72]. На рис. 2 и 3 воспроизведены предложенные в этих работах системы общей циркуляции. Следует заметить, что система, представленная на рис. 3, аналогична той, которая дана для тропосферы в работе [73]. В работах по общей циркуляции воздушных масс в ионосфере предполагалось, что скорость дрейфа совпадает со скоростью ветра, который считался геострофическим. Однако, как было показано в разделах 2 и 3, оба эти предположения не имеют места в ионосфере. В связи

ление компоненты скорости дрейфа в направлении вытянутости неоднородностей [79-81].

В заключение обратим внимание на тот факт, что общая циркуляция в ионосфере должна быть связана с циркуляцией в тропосфере и, с другой стороны, безусловно подвержена влиянию крупномасштаб-

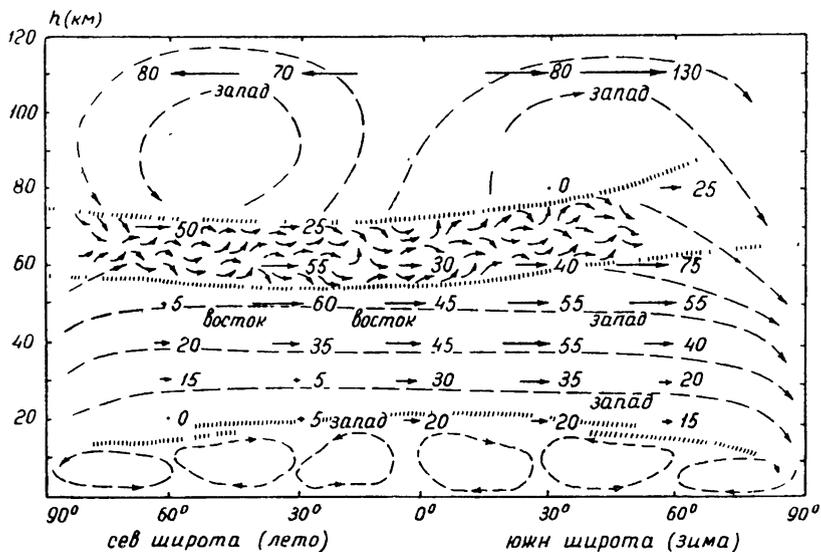


Рис. 3 Предполагаемая картина движений общей циркуляции в атмосфере до высоты 120 км (Келлог и Шиллинг). Цифры около стрелок указывают величину скорости движения.

ных глобальных движений в экзосфере, которые носят магнитогидродинамический характер. Эти вопросы будут рассмотрены в разделах 7 и 8.

### 6. ПРОИСХОЖДЕНИЕ ИОНОСФЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Большое значение для электродинамической метеорологии верхней атмосферы имеет механизм образования ионосферных неоднородностей (отдельных облаков повышенной электронной концентрации). Все радиофизические методы исследования движений в верхней атмосфере основаны на изучении движения этих неоднородностей. Облачная структура в распределении электронной концентрации обнаружена фактически во всех областях ионосферы. На различных высотах неоднородности имеют свои характерные размеры и определенное время жизни. Это обусловлено как различием в происхождении неоднородностей, так и различными свойствами окружающей их среды. Изучение процессов образования, движения и распада неоднородностей представляет интерес как для выяснения общей картины динамики движений в верхней атмосфере, так и для теории рассеяния радиоволн [82].

Следует отметить, что в метеорной области высот и в E-области ионосферы образование неоднородностей электронной концентрации обусловлено турбулентными течениями воздушных масс. Ниже будет проведен расчет основных характерных параметров турбулентных неоднородностей в этих областях и сопоставление их с экспериментально найденными значениями. Результаты расчета вполне удовлетворительно согласуются с опытными данными. Однако механизм образования неоднородностей в F-области ионосферы до настоящего времени остается

не вполне ясным. Это относится в первую очередь к мелкомасштабным неоднородностям с размерами  $4 \div 10$  км, которые обнаружены экспериментально [83]. Ниже приводится краткое обсуждение возможных механизмов образования неоднородностей в ионосфере. Это позволит уяснить основные трудности, встречающиеся при попытках дать теоретическую интерпретацию возникновению неоднородностей в  $F$ -области.

#### а. Неоднородности в $E$ -области ионосферы

В нижней части этой области ионосферы помимо неоднородностей, происхождение которых связано с динамическим режимом течений в атмосфере, возникают облака ионизированного газа вследствие пролета метеорных частиц. Действительно, в районе высот  $80 \div 100$  км находится область, где происходит „сгорание“ большинства метеорных частиц. В результате этого процесса образуются ионизированные метеорные следы, близкие по форме к круговым цилиндрам. Их протяженность измеряется десятками километров, а поперечное сечение в момент образования имеет размер порядка одного метра. В начальный момент концентрация электронов ( $n$ ), следовательно, и ионов, так как метеорная плазма квазинейтральна) достигает величины  $N = 10^8 \div 10^{10}$  эл.см<sup>-3</sup>, что в значительной мере превышает концентрацию электронов даже в максимуме  $E$ -области, где  $N \approx 1,5 \cdot 10^5$  эл.см<sup>-3</sup>.

Фотографические и радиолокационные методы исследования метеорных следов позволяют определять скорость дрейфа метеорной плазмы в поле ветровых скоростей окружающего их газа [84]. Ввиду того, что концентрация нейтральных частиц на указанных высотах метеорной области ( $M$ -область)  $N_m = 10^{13}$  см<sup>-3</sup> и, следовательно,  $N \ll N_m$ , плазму в метеорных следах можно рассматривать как пассивную примесь в окружающей ее атмосфере. Изучение дрейфа и процесса распада метеорных следов позволяет получить сведения не только о характере ветров в нижней части  $E$ -области, но также дает возможность определить температуру и плотность атмосферы на этих высотах [85, 86]. Метод разнесенного приема радиоволн, отраженных в  $E$ -области ионосферы, также позволяет измерять скорости дрейфа ионизированного газа на высотах  $100 \div 130$  км.

Результаты экспериментального исследования как тем, так и другим методом указывают наличие неоднородностей электронной концентрации в  $E$ -области ионосферы.

Происхождение и характер неоднородностей электронной концентрации в  $M$ - и  $E$ -областях верхней атмосферы удовлетворительно объясняются наличием турбулентных течений. Ламинарные ветровые потоки воздушных масс турбулизируются при больших числах Рейнольдса

$$Re = v_1 l_1 / \nu, \quad (6.1)$$

где  $v_1$  — пульсационная скорость крупномасштабных вихрей\*,  $l_1$  — характерный внешний масштаб турбулентности,  $\nu$  — коэффициент динамической вязкости. Единственным внешним масштабом, имеющим размерность длины и характеризующим изменение плотности атмосферы с высотой, в рассматриваемой задаче является шкала высоты однородной атмосферы (плотность меняется по закону  $\rho = \rho_0 e^{-z/z_0}$ ). Таким образом, необходимо положить  $l_1 = z_0$  (см. таблицу 2).

\* Использование пульсационной скорости (если она измеряется экспериментально) для оценки числа Рейнольдса более целесообразно, чем средней скорости движения. На это обстоятельство мое внимание обратил Г. С. Голицын.

Оценки числа Рейнольдса в метеорной области высот и в *E*-области указаны в таблице 2. Эти значения намного превышают критическое число Рейнольдса  $Re_{кр}$ . Действительно, лабораторные исследования по турбулизации свободных струйных течений указывают, что турбулентность наступает при  $Re_{кр} = 30$  [87]. Таким образом, числа Рейнольдса в *M*- и *E*-областях значительно превосходят эту цифру. Ввиду этого к течениям с вертикальным масштабом меньше шкалы высоты  $z_0$  можно применять основные соотношения теории однородной изотропной турбулентности.

При наличии турбулентного течения в среде имеется целый спектр неоднородностей с характерными размерами  $l_i$ , заключенными в пределах  $l_2 \cdot l_1 \leq l_i$ , где  $l_1$  и  $l_2$  — соответственно внешний и внутренний масштабы турбулентности. Пусть пульсационная скорость неоднородности с масштабом  $l_i$  равна  $v_i$  и ее время распада —  $\tau_i$  (аналогично  $v_2$  и  $t_2$  — скорость и время распада вихрей внутреннего масштаба  $l_2$ ). Для пульсационной скорости  $i$ -ой неоднородности выполняется соотношение  $v_i \tau_i = l_i$ . При турбулентном течении непрерывно происходит перекачка кинетической энергии от крупномасштабных неоднородностей к мелко-масштабным, где в основном происходит ее диссипация вследствие перехода в тепло. Эта схема разработана для локально однородной и локально изотропной турбулентности Колмогоровым и Обуховым [88, 89]. Инвариантом для кинематических параметров неоднородностей различного масштаба является величина турбулентной мощности, приходящаяся на единицу массы  $\varepsilon = v_i^3 / \tau_i = v_i^3 / l_i = \text{const}$ . Следовательно, должно выполняться следующее соотношение:

$$\varepsilon = v_1^3 / l_1 = v_2^3 / l_2. \quad (6.2)$$

С другой стороны, для неоднородностей с внутренним масштабом турбулентности

$$\varepsilon = v_2^2 / l_2^2. \quad (6.3)$$

Из соотношений (6.2) и (6.3) легко получить выражение для основных характерных параметров неоднородностей внутреннего масштаба:

$$l_2 = (v_1^3 / \varepsilon)^{1/3}, \quad v_2 = (\varepsilon v_1)^{1/4}, \quad t_2 = (v_1 / \varepsilon)^{1/2}. \quad (6.4)$$

Для неоднородностей внешнего масштаба соответственно имеем:

$$l_1 = z_0, \quad v_1 = (\varepsilon z_0)^{1/3}, \quad t_1 = (z_0^2 / \varepsilon)^{1/3}, \quad (6.5)$$

где  $z_0$  — высота однородной атмосферы\*. Корреляционный анализ экспериментальных исследований вариации скорости ветра с высотой в *M*-области показал, что внешний масштаб турбулентности  $l_1 = 6$  км [90, 91]. Это значение очень близко к размеру высоты однородной атмосферы в этой области  $z_0 = 6,7$  км.

Заметим, что в работах Букера и Коэна [92-94] была сделана попытка применить теорию однородной изотропной турбулентности к движениям в *M*-, *E*- и *F*-областях ионосферы. Для метеорной области Букер и Коэн пытались объяснить наличие долгоживущих метеорных следов за счет процесса турбулентной диффузии [93]. Букер считал, что в *F*-области ионосферы и в области, ответственной за мерцание радиозвезд, неоднородности также имеют турбулентное происхождение.

\* Обзор по турбулентности в *M*-области ионосферы содержится также в работе [14], где использованы более строгие формулы теории однородной изотропной турбулентности.

ние. Для метеорной области в этих работах мощность турбулентной диссипации оценена, исходя из значений числа Ричардсона. Букер получил  $\varepsilon = 2,5 \cdot 10^5 \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$ . При этом им было найдено, что  $t_2 = 0,4 \text{ сек}$  и  $l_2 = 1,4 \text{ м}$ . Однако изучение экспериментальных данных о распределении радиотражений от метеорных следов по длительности, изучение фединга сигналов, отраженных от следов, и прямые измерения времени  $t_2$  указывают на неправильность оценок Букера [90, 91, 95-97].

В работах [90, 91, 96] путем прямых экспериментальных измерений установлено среднее время распада неоднородностей внутреннего масштаба  $t_2 \approx 30 \text{ сек}$ . Измерения коэффициента диффузии в  $M$ -области были выполнены в [98], так на высоте 95 км  $D = 4 \cdot 10^4 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$ . Как известно, можно считать, что  $D \approx \nu$ . Исходя из экспериментально найденных значений  $l_1 = z_0$ ,  $\nu$  и  $t_2$ , можно оценить величину мощности турбулентной диссипации  $\varepsilon = 44 \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Это значение на порядок больше аналогичной величины в тропосфере, где  $\varepsilon = 5 \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$  [99], и в  $2 \cdot 10^4$  раз меньше, чем по оценкам Букера. Для полученной величины  $\varepsilon = 44 \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$  легко определить из формул (6.4), (6.5) параметры неоднородностей с внутренним масштабом:

$$l_2 = 10 \text{ м}, \quad \nu_2 = 0,3 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}, \quad t_2 = 30 \text{ сек}. \quad (6.6)$$

Для неоднородностей внешнего масштаба, принимая в качестве характерного размера величину высоты однородной атмосферы  $z_0 = 6,5 \text{ км}$ , получим:

$$l_1 = 6,5 \text{ км}, \quad \nu_1 = 3 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}, \quad t_1 = 35 \text{ мин}. \quad (6.7)$$

Таким образом, в  $M$ -области имеется спектр неоднородностей турбулентного происхождения, характеристические параметры которых заключены в пределах

$$10 \text{ м} \leq l_i \leq 6,5 \text{ км}, \quad 0,3 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1} \leq \nu_i \leq 3 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}, \\ 30 \text{ сек} \leq t_i \leq 36 \text{ мин}. \quad (6.8)$$

Следует отметить, что в работе [131] из экспериментальных данных о диффузионном расплывании долгоживущих метеорных следов получено значение  $\varepsilon = 3000 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-3}$ . При этом нижние границы величин кинематических параметров неоднородностей получаются следующими:  $t_2 = 15 \text{ сек}$ ,  $\nu_2 = 2 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ ,  $l_2 = 6 \text{ м}$ .

Диагностика теории рассеяния радиоволн большое значение имеют неоднородности в распределении ионизированной компоненты газа. Ввиду этого необходимо выяснить, с какими флюктуациями электронной концентрации связаны неоднородности с кинематическими параметрами  $l_i$ ,  $\nu_i$  и  $t_i$ . Этот вопрос исследован в работах [100, 101].

При однородном распределении электронной концентрации в окружающей атмосфере и при наличии турбулентного течения возникают флюктуации этой концентрации. Можно получить, что как в случае изотермических, так и адиабатических флюктуаций

$$\left| \frac{\Delta N}{N} \right| = \frac{3}{2} \frac{\overline{v_i^2}}{v_T^2}, \quad (6.9)$$

где  $\overline{v_i^2}$  — средний квадрат турбулентной скорости неоднородности  $i$ -го масштаба,  $v_T$  — тепловая скорость молекул (или атомов) воздуха. Для вихрей внешнего масштаба  $v_i = 3 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ , а  $v_T = 460 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ , и, следовательно, в нижней части  $E$ -области ионосферы  $|\Delta N/N| \approx 10^{-4}$ . Эта

величина на два порядка меньше той, которая наблюдалась экспериментально [49].

При наличии градиента температуры вызываемые им флуктуации электронной плотности вычисляются по следующей формуле [100]:

$$\left| \frac{\overline{\Delta N}}{N} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{l_i}{z_0} \left( \frac{\alpha}{mg} \frac{dT_0}{dz} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \right), \quad (6.10)$$

где  $\gamma$ —отношение удельных теплоемкостей газа  $\gamma = c_p/c_v$ ,  $l_i$ —характерный масштаб неоднородности,  $z_0 = \alpha T/mg$ . Для высоты 125 км в работе [100] получено, что  $|\Delta N/N| \sim 10^{-2}$ . Это значение хорошо согласуется с результатами эксперимента.

Наконец, если распределение электронной концентрации по высоте является неоднородным, то в этом случае флуктуации электронной концентрации определяются по формуле [100, 101]

$$\left| \frac{\Delta N}{N} \right| = \frac{l_i}{\sqrt{3}} \frac{\text{grad } N}{N} \sim \frac{l_i}{\sqrt{3} z_m}, \quad (6.11)$$

где  $z_m$ —полутолщина ионосферного слоя. Для  $E$ -области  $z_m = 20$  км и, следовательно,

$$10^{-4} < \left| \frac{\Delta N}{N} \right| < 3 \cdot 10^{-1}. \quad (6.12)$$

Этот спектр флуктуаций электронной плотности также согласуется с результатами работ [49, 102]. Оценки позволяют сделать вывод, что флуктуации электронной плотности в турбулентных потоках, имеющих место в  $M$ - и  $E$ -областях, обусловлены температурным градиентом и градиентом электронной концентрации. Характеристические параметры неоднородностей турбулентного происхождения в  $E$ -области ионосферы несущественно отличаются от вышеуказанных параметров  $M$ -области. Воспользуемся тем, что изменения мощности турбулентной диссипации от высот тропосферы до высот  $M$ -области сравнительно незначительны. Вследствие этого можно считать, что в  $E$ -области  $\varepsilon \approx 44 \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Кинематическая вязкость на высоте 110 км имеет величину  $\nu = 6 \cdot 10^5 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$ . Используя вновь формулы (6.4) и (6.5), при  $z_0 = 10$  км, найдем следующие пределы изменения кинематических параметров неоднородностей:

$$\begin{aligned} 70 \text{ м} &\leq l_i \leq 10 \text{ км}, & 0,7 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1} &\leq v_i \leq 10 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}, \\ 10 \text{ сек} &\leq t_i \leq 17 \text{ мин}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Помимо указанных неоднородностей, в  $M$ - и  $E$ -областях ионосферы экспериментально обнаружены крупномасштабные неоднородности с ясно выраженной анизотропией размеров [103]. Горизонтальная протяженность этих неоднородностей достигает 150–200 км. Их происхождение, по-видимому, связано с волновыми движениями типа внутренних волн [104], которые возбуждаются за счет отсутствия гидродинамического равновесия в отдельных областях верхней атмосферы.

Таким образом, турбулизация воздушных течений в  $M$ - и  $E$ -областях ионосферы является причиной возникновения неоднородностей в распределении электронной концентрации. Основные выводы теории, приведенные в этом параграфе, как указывалось выше, хорошо согласуются с экспериментальными данными.

### б. Неоднородности в $F$ -области ионосферы

В  $F$ -области ионосферы вследствие весьма большой величины вязких напряжений турбулизация воздушных течений невозможна. Высокая электропроводность среды и воздействие на ее движения магнитного поля Земли является дополнительной причиной, препятствующей возникновению турбулентности [103]. Оценки чисел Рейнольдса для движений в  $F1$ - и  $F2$ -областях, приведенные в таблице 2, свидетельствуют о том, что  $Re < Re_{кр}$ . В связи с этим для объяснения происхождения неоднородностей в  $F$ -области ионосферы был предложен целый ряд различных физических механизмов.

Так, например, в работе [106] предполагалось, что захваченная гравитационным полем Солнца межзвездная материя, выпадая на ночную сторону Земли, способна создавать дополнительную ионизацию на высоте 300—400 км над земной поверхностью. Критическое обсуждение и детальная разработка этой гипотезы, а также сопоставление с экспериментальными данными проводится в работах [107, 108]. Однако для того, чтобы подобный механизм имел место, необходим поток бомбардирующих Землю частиц с большой энергией и концентрацией. Так по расчетам, проведенным в работах [108], концентрация частиц, бомбардирующих неосвещенную Солнцем поверхность Земли, должна быть  $n \sim 10^7 - 10^9 \text{ см}^{-3}$ , что представляется невероятным. Напомним, что концентрация межпланетного водорода на орбите Земли  $n_H \approx 10^2 \text{ см}^{-3}$ . Рассматриваемый механизм не позволяет объяснить образование мелко-масштабных неоднородностей с размерами 3—7 км, которые наблюдаются в области мерцаний радиозвезд. В рамках этого механизма нельзя понять хорошо установленные экспериментальные факты—корреляцию мерцания радиозвезд (его вызывают неоднородности электронной концентрации на высоте  $z \geq 300 \text{ км}$ ) с геомагнитной активностью, а также наличие мерцаний (следовательно, и неоднородностей) в дневное время.

В работе [109] выдвинута гипотеза о том, что размытость  $F$ -области и мерцание радиозвезд генетически связаны с низкоширотными полярными сияниями. Предполагается, что вторжение интенсивных корпускулярных потоков в атмосферу Земли вызывает вышеуказанные явления. Этот механизм позволяет объяснить тот факт, что мерцание радиозвезд тесно связано с геомагнитной активностью и должно наблюдаться нерегулярно. Легко понять причину возрастания частоты появления мерцаний с увеличением геомагнитной широты пункта наблюдения. Это обусловлено тем, что корпускулярные потоки средней интенсивности почти не проникают на низкие широты. Однако совершенно невозможно объяснить локализацию области мерцаний на ночной стороне Земли (суточный ход) и наблюдение мерцаний на экваторе [110].

В работе [111, 156] обсуждается еще один возможный механизм образования неоднородностей—конвективная неустойчивость газа. Известно, что в приземном слое атмосферы и в фотосфере Солнца конвективная неустойчивость играет большую роль и ведет к образованию неоднородной ячеистой структуры линий тока в среде (ячейки Бенара). Конвективная неустойчивость в идеальной жидкости или в газе возникает при выполнении следующего условия:

$$dT/dz < -g/c_p, \quad (6.14)$$

т. е. при условии, что температурный градиент превышает адиабатический градиент и является отрицательным. Здесь  $g$ —ускорение силы тяжести,  $c_p$ —теплоемкость газа при постоянном давлении. Для атомар-

ного кислорода  $\dot{c}_p = 1,04 \cdot 10^7$ ,  $g = 900 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$  на высоте 300–400 км, тогда  $|dT/dz|_{\text{ад}} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ К см}^{-1}$ . Влияние вязкости и теплопроводности затрудняет развитие конвективной неустойчивости.

Так, в случае вязкой несжимаемой жидкости для реализации неустойчивости помимо выполнения условия (6.14) необходимо, чтобы

$$R = \frac{g \sigma |dT/dz| d^1}{\nu} > R_c, \quad (6.15)$$

где  $R$  — число Рэлея,  $\alpha$  и  $\nu$  — коэффициенты температуропроводности и кинематической вязкости,  $\sigma$  — коэффициент объемного расширения. Для идеального газа  $\alpha \approx 1/T_0$ ,  $\alpha \sim \nu$ . В качестве вертикального масштаба  $d$  будем вновь пользоваться величиной высоты однородной атмосферы. Полагая для верхней части  $F$ -области  $d = z_0 = 65 \text{ км}$ ,  $\nu \sim \alpha \sim 6 \cdot 10^9$ ,  $T \sim 10^3 \text{ К}$  и критическое значение числа Рэлея  $R_{\text{кр}} = 658$ , легко рассчитать температурный градиент, при котором выполняется условие (6.15):  $|dT/dz| > 10^{-5} \text{ К}$ .

Следует заметить, что влияние электродинамической вязкости (джоулевы потери) преобладает над динамической в  $F$ -области. На это обстоятельство указывают оценки числа Гартмана  $M = 110$ , приведенные в таблице 2. Однако, как показано в работе [112], при таких значениях числа  $M$  критическое число Рэлея  $R_{\text{кр}}$  не изменяется по порядку величины. Таким образом, минимальное значение температурного градиента  $|dT/dz| \sim 10^{-4} \text{ К км}^{-1}$  оказывается вполне достаточным для возникновения конвективной неустойчивости. При этом в среде возникают восходящие и нисходящие течения, в которых линии тока имеют вид ячеек. Восходящие потоки идут по центру ячеек, а нисходящие по их боковым поверхностям. Вертикальные размеры отдельных ячеек не превосходят 65 км в  $F$ -области. Течение в каждой ячейке носит ламинарный характер, так как числа Рейнольдса для течения внутри них  $Re \ll Re_{\text{кр}}$ .

Следует отметить две основные трудности, с которыми встречается этот механизм. Во-первых, отсутствуют экспериментальные данные о наличии отрицательных температурных градиентов выше 85 км над поверхностью Земли. Наоборот, современные представления о постепенном переходе от ионосферы к межпланетному газу с высокой температурой  $T = 2 \cdot 10^4 \text{ К}$  [113] вынуждают считать, что выше 85 км температура непрерывно возрастает от значения 190°К до указанной в [113]. Попытки рассмотреть возможные локальные механизмы нагрева верхней атмосферы, сопровождающиеся образованием области с отрицательным температурным градиентом над нагретыми участками атмосферы, остаются пока безрезультатными. Например, если предположить, что нагрев происходит за счет падения на ночную сторону Земли межзвездного газа, то необходимо, чтобы плотность потока падающих частиц превышала значение  $10^{12} \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Это значение очень велико, хотя и совпадает с оценкой, приведенной в работе [114] и полученной другим путем.

Нагрев верхней атмосферы магнитогидродинамическими волнами, возбуждаемыми в экзосфере солнечными корпускулярными потоками, рассматривался в работе [115]. Вывод, сделанный в ней, заключается в том, что нагрев этими волнами фактически не меняет температуры  $F$ -области, за исключением периодов очень сильных магнитных бурь. Таким образом, эти попытки обойти первую трудность механизма конвективной неустойчивости остаются безрезультатными.

Вторая трудность указанного механизма заключается в том, что движение неионизированной компоненты газа в  $F$ -области поперек

магнитного поля Земли не сопровождается дрейфом ионизированной компоненты. Это обусловлено тем, что за время  $\tau \sim \nu_{im}^{-1} = 1 \text{ сек}$  в среде возникают электрические токи, препятствующие дрейфу плазмы перпендикулярно к силовым линиям магнитного поля. Следовательно, хотя магнитное поле слабо влияет на критерий наступления конвективной неустойчивости, оно, с другой стороны, препятствует увлечению ионизированной компоненты конвективными движениями неионизированного газа. Указанные трудности в интерпретации механизма образования мелкомасштабных неоднородностей в  $F$ -области за счет конвективной неустойчивости не позволяют в настоящее время считать этот процесс ответственным за создание неоднородностей.

Иное объяснение происхождению неоднородностей в  $E$ -области выдвинуто Даггом [116]. Он воспользовался идеей Мартина об электрической связи  $E$ - и  $F$ -областей ионосферы. Вследствие большой электрической проводимости среды вдоль силовых линий геомагнитного поля [28, 29, 117] эти линии должны быть эквипотенциальными. Отсюда в [116] сделан вывод, что электрические поля, создаваемые ветрами в динамо-области, будут проникать в  $F$ -область и вызывать в ней дрейф плазмы. Дагг предполагает, что при наличии турбулентных течений в динамо-области должны возникнуть соответствующие им компоненты пульсирующего электрического поля индукции  $E = \frac{1}{c}[\mathbf{v}_i H_0]$ , которые, распространяясь вверх, вызовут нерегулярные

движения в  $F$ -области. Количественный анализ этого механизма в указанных работах полностью отсутствует. В связи с этим в [118] был рассмотрен вопрос о распространении низкочастотных электромагнитных волн из  $E$ -области в  $F$ -область ионосферы. Времена распада мелкомасштабных неоднородностей в  $E$ -области не меньше 10 сек (см. формулы (6.13)), и, следовательно, генерируемые при движении индукционные поля будут иметь период  $T \geq 10 \text{ сек}$ . Электромагнитные волны с такими периодами распространяются из  $E$ -слоя в  $F$ -слой вследствие процесса диффузии, так как токи смещения для этих периодов крайне малы по сравнению с токами проводимости. Можно показать, что даже без учета расхода энергии электромагнитной волны на возбуждение дрейфа плазмы по пути распространения в  $F$ -область волна достигает ее значительно ослабленной, и она не в состоянии создать наблюдаемые скорости дрейфа. При анализе вопроса о распространении волн необходимо учесть анизотропию электропроводности  $\sigma$ , а также изменение  $\sigma$  с высотой  $z$ .

Уравнения, описывающие распространение электромагнитного поля, имеют вид [118]:

$$\frac{d^2 E_{\parallel}}{dz^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - i \frac{4\pi\sigma_{\parallel 0(0)}}{c^2} e^{z/z_0} \right) E_{\parallel} = 0; \quad (6.16)$$

$$\frac{d^2 E_{\perp}}{dz^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - i \frac{4\pi\sigma_{\perp 0(0)}}{c^2} e^{z/z_0} \right) E_{\perp} = 0, \quad (6.17)$$

где  $E_{\parallel}$  — компонента напряженности электрического поля вдоль силовых линий геомагнитного поля,  $E_{\perp}$  — компонента поля  $\mathbf{E}$  волны в плоскости, перпендикулярной к этим линиям,  $z$  — высота над  $E$ -слоем,  $k$  — проекция волнового вектора на плоскость  $x, y$ ,  $\sigma_{\parallel 0}$  и  $\sigma_{\perp 0}$  — электропроводности в динамо-области. Предполагалось, что электрические проводимости  $\sigma_{\parallel}$  и  $\sigma_{\perp}$  не меняются в горизонтальном направлении.

Решение этих уравнений выражается в цилиндрических функциях.

Асимптотическое поведение решений в  $F$ -области описывается следующими формулами [118]:

$$E_{\perp}(z) = E_{\perp 0} e^{-kz}; \quad E_{\parallel}(z) = E_{\parallel 0} e^{-z/\lambda_{\parallel 0} - (z/\lambda_{\parallel 0}) e^{z/2z_0} (1+i)}, \quad (6.18)$$

где  $\lambda_{\parallel 0}$  — толщина скин-слоя вдоль магнитного поля в динамо-области. В нашем случае  $\lambda_{\parallel 0} = 100$  км,  $z_0 = 10$  км и легко показать, что напряженность поля  $E_{\parallel}$  чрезвычайно мала в  $F$ -области (вследствие сильного поглощения). Компонента напряженности электрического поля  $E_{\perp}$  эффективно проникает на расстояние  $\Delta z \sim 1/k \sim l_i$ , где  $l_i$  — горизонтальный характерный размер неоднородности в  $E$ -области.

Таким образом, распространение в  $F$ -область всего спектра электрических полей, генерируемых локально изотропной турбулентностью в  $E$ -области и имеющих масштабы  $l_i \leq 10$  км, оказывается практически невозможным. Возмущения большого масштаба с размерами  $l \geq 100$  км в  $E$ -области сопровождаются также соответствующими неоднородностями индукционного электрического поля. Такие возмущения распространяются без существенного ослабления в  $F$ -область. Они создают в ней определенные поля скоростей дрейфа. Однако подобная интерпретация электромагнитного переноса поля скорости дрейфа из одной области в другую не позволяет объяснить причину заметного увеличения скоростей дрейфа в  $F$ -области по сравнению с  $E$ -областью, и наличие масштабов  $l_i \sim 5 \div 10$  км.

В работах [68, 119, 120] предложен совершенно иной механизм образования ионосферных неоднородностей. В них рассматривается неоднородное поле скоростей  $v_n$  нейтрального газа в неполностью ионизированной плазме. Вектор скорости  $v_n$  соленоидален, т. е.  $\text{div } v_n = 0$ . При наличии внешнего магнитного поля скорость дрейфа  $v_p$  в направлении магнитного поля значительно больше, чем в перпендикулярном к нему направлении. Скорость дрейфа  $v_p$  не является в этом случае соленоидальным вектором, и ионизированный газ локально сжимается. Приближенная оценка флуктуаций электронной плотности при этом дана в работе [120]:

$$\frac{\delta N}{N} \sim \frac{\omega_e \omega_i}{\sqrt{(\nu_e^2 + \omega_e^2)(\nu_i^2 + \omega_i^2)}}. \quad (6.19)$$

Выше 140 км, где  $\nu_i \ll \omega_i$ , из формулы (6.19) легко получить, что  $\delta N \sim N$ , т. е. флуктуации электронной концентрации в  $F$ -области должны быть сравнимы со средним значением. Экспериментальные исследования не подтверждают этого вывода [19].

Путем экспериментальных исследований движений в ионосфере установлено наличие крупномасштабных неоднородностей электронной концентрации в  $M$ -,  $E$ - и  $F$ -областях [103, 121–126]. Горизонтальные размеры этих неоднородностей в  $F$ -области обычно  $100 \div 500$  км, временной период  $T \sim 5 \div 20$  мин, скорость перемещения  $300 \div 500$  м·сек<sup>-1</sup> [125]. Крупномасштабные движения в верхней атмосфере имеют хорошо выраженную анизотропию формы. Так, например, по данным работы [103], горизонтальный размер неоднородности поля скоростей в  $M$ -области  $l_{\text{гор}} = 150$  км, в то время как вертикальный масштаб  $l_{\text{верт}} = 6,5$  км. Очевидно, что и в  $F$ -области ионосферы вертикальный масштаб не должен превосходить величину высоты однородной атмосферы (в  $F$ -области  $z_0 \approx 40$  км). В работе [123] указано, что обнаружена анизотропия, обусловленная влиянием магнитного поля на движение и диффузию неоднородностей. Методика экспериментальных исследований

движений крупномасштабных неоднородностей в  $F$ -области ионосферы изложена в работах [5, 127].

Физическая природа крупномасштабных движений в различных областях атмосферы рассмотрена в ряде работ [128–131]. Считается, что указанные неоднородности обусловлены волновыми движениями газа в атмосфере. Вследствие действия поля тяжести эти волны не являются чисто звуковыми. Обычно принято называть их внутренними (или целлюлярными) волнами. Адиабатические внутренние гравитационные волны в невязкой изотермической атмосфере описываются следующим дисперсионным уравнением [130]:

$$\omega^4 - \omega^2 c^2 (k_x^2 + k_z^2) + i\gamma g \omega^2 k_x + (\gamma - 1) g^2 k_x^2 = 0. \quad (6.20)$$

где  $\omega$  — частота волны,  $k_x$  — горизонтальное волновое число,  $k_z$  — проекция волнового вектора на вертикальную ось,  $g$  — ускорение поля тяжести,  $c = (\gamma g z_0)^{1/2}$  — скорость звука,  $\gamma$  — отношение теплоемкостей. При этом изменения плотности среды, давления и скорости в волне имеют вид  $e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)}$ . Средние значения плотности и давления изменяются с высотой по закону  $p_0, \rho_0 \sim e^{-z/z_0}$ , в то время как в волне  $p, \rho$  и  $v$  экспоненциально растут с высотой пропорционально  $e^{z/2z_0}$ . Следовательно, плотность энергии в волне  $\rho_0 v^2 / 2$  с высотой не меняется. В метеорной области крупномасштабные возмущения, так же как и в  $F$ -области „перемещающиеся“ возмущения, являются примером внутренних волн в ионосфере. Вопрос о генерации этих волн ни в одной из цитированных работ не рассматривался. Частицы жидкости во внутренних гравитационных волнах совершают движения по эллиптическим траекториям. В работе [128] указано, что магнитное поле Земли должно несколько деформировать траектории движения частиц, вследствие чего вносится дополнительная анизотропия формы линий тока. Однако количественные расчеты этого эффекта не производились. Подробное обсуждение теории внутренних волн в ионосфере должно базироваться на более полных экспериментальных исследованиях крупномасштабных неоднородностей.

Возможно, что динамические процессы в ионосфере носят гораздо более сложный характер и являются нелинейными по своей природе. В отличие от обычной турбулентности в изотропной и однородной среде, в верхней атмосфере крупномасштабные движения существенно анизотропны и происходят в неоднородной среде. Приливы и ветровые системы общей циркуляции атмосферы могут служить постоянным источником энергии для более мелких масштабов движения — внутренних волн с различными волновыми числами ( $k_x, k_z$ ). Нелинейный механизм перераспределения энергии от крупномасштабных движений к мелкомасштабным аналогичен тому, который имеет место в однородной турбулентности. Сложность расчетов этой модели не позволяет пока получить какие-либо количественные результаты.

Таким образом, ни один из рассмотренных выше механизмов не дает удовлетворительного объяснения происхождению мелкомасштабных неоднородностей с размером  $5 \div 10$  км в  $F$ -области ионосферы. С другой стороны крупномасштабные неоднородности с горизонтальными размерами  $100 \div 500$  км интерпретируются как внутренние волны в верхней атмосфере. Внутренние волны могут генерироваться в областях атмосферы, где отсутствует либо гидродинамическое, либо термодинамическое равновесие, т. е. обусловлены неустойчивостью крупномасштабных движений в атмосфере и конвективной неустойчивостью движущегося газа (ниже  $F$ -области).

После этого замечания перейдем к вопросу о взаимной связи ионосферы с другими областями атмосферы Земли.

## 7. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ ИОНОСФЕРЫ С ТРОПОСФЕРОЙ

Попытки изучить взаимосвязь между метеорологическими явлениями в нижней атмосфере и в ионосфере не привели пока к окончательному решению вопроса о том, насколько существенна эта связь для динамики каждой из указанных областей. Тем не менее, из экспериментальных исследований установлено, что указанная взаимосвязь безусловно имеется. В первую очередь взаимное влияние тропосферы и ионосферы должно сказаться на характере общей циркуляции в атмосфере Земли.

Результаты сравнения экспериментально установленного суточного хода вариаций барометрического давления на поверхности Земли с изменениями истинных высот и критических частот ионосферных слоев приведены в работах [132-134]. В [132] отмечается, что изменение минимальной высоты  $F$ -области и среднего значения электронной концентрации в  $E$ -области следует с некоторым сдвигом по фазе за изменениями барометрического давления на поверхности Земли. Гармонический анализ всех параметров ионосферных слоев указывает на то, что их спектральный состав аналогичен спектральному составу вариаций барометрического давления на поверхности Земли [58]. Методом наложения эпох установлена связь между прохождением фронтов холодных воздушных масс в тропосфере и изменением критической частоты и действующей высоты  $F2$ -области ионосферы. На рис. 4 воспроизведены результаты этой работы. По оси абсцисс отложены дни до прохождения фронта со знаком минус и после его прохождения — со знаком

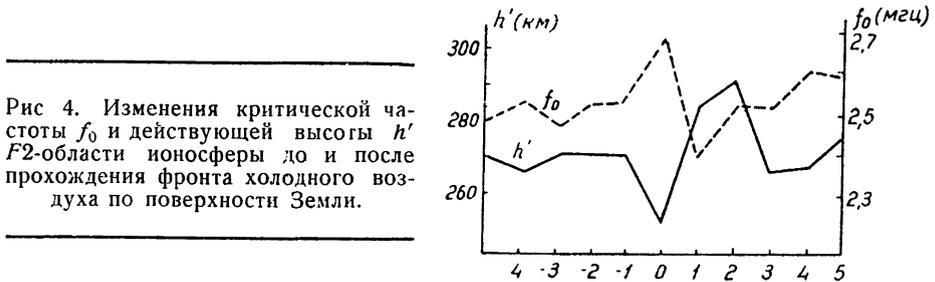


Рис 4. Изменения критической частоты  $f_0$  и действующей высоты  $h'$   $F2$ -области ионосферы до и после прохождения фронта холодного воздуха по поверхности Земли.

плюс, причем ключевой (или нулевой) день совпадает с моментом прохождения фронта полярного воздуха над пунктом наблюдения. Из приведенного рисунка видно, что изменения критической частоты происходят в противофазе к изменениям высоты  $F2$ -области. Гармонический анализ барограмм на поверхности Земли выявляет наличие в вариациях давления гармоник с периодами 24, 12 и 8 часов (иногда присутствует хорошо выраженная шестичасовая гармоника). Аналогичные составляющие, но с иными амплитудами и фазами, обнаружены при гармоническом анализе суточного хода критических частот и высот  $E$ - и  $F$ -областей ионосферы. Как уже указывалось в разделе 5, при гармоническом анализе скоростей дрейфа ионизированного газа также обнаруживаются эти спектральные составляющие.

С другой стороны, в метеорологии надежно установлена тесная связь барических и ветровых полей: всякое барическое поле вызывает определенное поле ветровых скоростей (например, геострофический ветер), и любое изменение барического поля сопровождается изменением поля ветровых скоростей. Процесс установления этого взаимного соответствия векторного поля скоростей и скалярного поля давления, при изменениях последнего, называется процессом адаптации. Этот процесс подробно рассмотрен в работах [136, 137]. Следовательно, кор-

реляция барических полей в тропосфере и в ионосфере автоматически должна повлечь за собой корреляцию между соответствующими ветровыми полями в этих областях. К сожалению, в литературе отсутствуют какие-либо данные об этой корреляции. Вполне возможно, что локальные ветровые системы типа бризов и долинных ветров не передаются через тропосферу и стратосферу в  $E$ - и  $F$ -области ионосферы и не имеют своих прототипов выше  $5 \div 8$  км. Однако крупномасштабные изменения метеорологических полей в тропосфере, например, фронты полярных и тропических воздушных масс, имеющие квазипериоды порядка  $1 \div 10$  суток и характерный размер (протяженность)  $L \sim 1000$  км, в состоянии оказывать заметное воздействие на ионосферные области. Это обусловлено тем, что температурные инверсии в нижней атмосфере и в  $M$ -области не препятствуют распространению в верхнюю атмосферу этих возмущений.

Обратное воздействие верхних слоев атмосферы (экзосферы и ионосферы) на распределение давления на поверхности Земли обсуждается в работах [138]. В них изложены экспериментальные данные о корреляции между вариациями барометрического давления на поверхности Земли и  $K$ -индексом геомагнитной активности. Методом наложения эпох изучалось поведение меридиональной компоненты градиента давления во время сильных магнитных бурь. На рис. 5 представлены результаты этого анализа. Легко видеть, что градиент

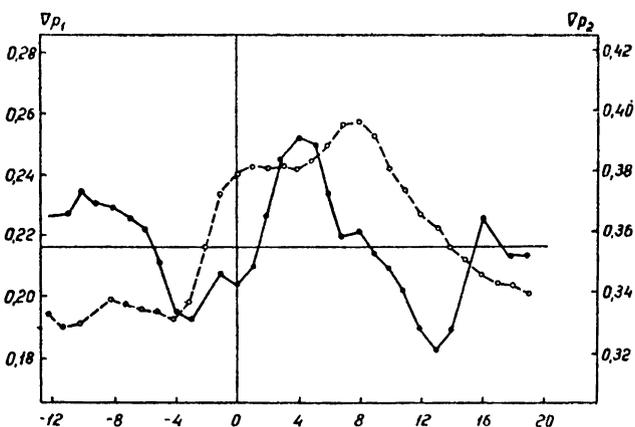


Рис. 5. Изменение градиента барометрического давления на поверхности Земли до и после начала сильных геомагнитных бурь:

сплошной линией отображены результаты измерений, проведенных в Сев. Америке ( $\nabla p_1$ ), пунктиром — для данных по Европе ( $\nabla p_2$ ). По оси абсцисс отложены дни до и после прохождения бури.

давления достигает максимального значения через 4 дня после начала геомагнитного возмущения. В течение последующих десяти дней градиент давления постепенно уменьшается. Эти результаты получены из анализа экспериментальных данных по Северной Америке. При их сравнении с данными европейских метеорологических и магнитных станций обнаружено заметное различие в поведении осредненных вариаций меридионального градиента давления.

Таким образом, из приведенных выше экспериментальных данных следует, что имеется определенная взаимосвязь между динамическими

процессами в ионосфере и тропосфере. Эта связь является гидродинамической и осуществляется за счет крупномасштабных возмущений, которые распространяются без заметного ослабления из одной области высот в другую.

Возможный гидродинамический механизм этой связи предложен в работах [141—143]. В них рассматривается гидродинамическая схема чередующихся по знаку крупномасштабных вихревых возмущений. Над тропосферным циклоном развивается в нижней стратосфере антициклон. В средней стратосфере на высоте  $20 \div 50$  км возникает циклон. Наконец, в *D*- и *F*-областях ионосферы над указанным циклоном развивается антициклон. Эта последовательность циклонических и антициклонических вихрей достигает *F*-области ионосферы, где вследствие большой динамической вязкости и электропроводности среды энергия вихрей превращается в тепло. В работе [143] показано, что действие корпускулярной радиации приводит к некоторому нагреванию верхней атмосферы в районе геомагнитных полюсов и к последующему гидродинамическому воздействию на всю атмосферу по рассмотренной выше схеме. Заметим, что время установления процессов в схеме, оцененное в [143] ( $\tau \sim 1$  суток), совпадает по порядку величины с тем, которое обнаружено экспериментально  $\tau = 4 - 5$  суток [138]. Более детальный анализ связи тропосферы с верхними слоями атмосферы в настоящее время невозможен вследствие отсутствия экспериментальных работ в этом направлении. В частности, остается открытым вопрос о корреляции ветровых систем в различных областях.

#### 8. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ ИОНОСФЕРЫ С ВНЕШНЕЙ АТМОСФЕРОЙ (ЭКЗОСФЕРОЙ) [155].

Непосредственно выше *F2*-области ионосферы располагается область земной атмосферы, которую принято называть внешней атмосферой или экзосферой. Она стала привлекать внимание геофизиков сравнительно недавно и поэтому сведения о ее составе и физических процессах в ней еще незначительны. Внешняя атмосфера на расстоянии  $5 \div 7$  земных радиусов от центра Земли переходит в межпланетный газ с концентрацией  $10 \div 100$  частиц  $\text{см}^{-3}$  и температурой  $T = 2 \cdot 10^4 \text{°K}$  [113, 139, 144—146]. Степень ионизации в экзосфере достигает 99%. Магнитное поле Земли оказывает определяющее влияние на движение газа в экзосфере [145]. Солнечные корпускулярные потоки воздействуют в первую очередь на эти внешние слои земной атмосферы. В целом ряде работ [139, 145, 146] предполагается, что эти потоки возбуждают магнитогидродинамические собственные колебания экзосферы. В нижележащие слои атмосферы распространяется значительная часть энергии этих колебаний в виде низкочастотных электромагнитных волн. Вследствие высокой электропроводности ионосферы распространение в ней имеет характер процесса диффузии электромагнитных полей [147]. Достигая поверхности Земли, эти поля регистрируются как нерегулярные вариации геомагнитного поля. Слабые корпускулярные потоки сопровождаются определенным типом вариаций—геомагнитными микропульсациями. Интенсивные корпускулярные потоки вызывают разнообразные формы вариаций магнитного поля Земли—микропульсации, бухтообразные изменения и, наконец, магнитные бури [37].

Совершенно очевидно, что электромагнитные поля, обуславливающие эти вариации, проходя через ионосферу, будут взаимодействовать с электропроводным газом, сопровождаясь электрическими то-

ками проводимости и соответствующими им скоростями дрейфа плазмы. Действительно, в работах [1, 148–150] установлена связь скоростей дрейфа ионосферных неоднородностей с  $K$ -индексом геомагнитной активности. Обнаружено, что с ростом геомагнитной активности увеличиваются скорости дрейфа ионосферной плазмы. Если в  $E$ -слое это возрастание незначительно, то в  $F$ -области и в области, ответственной за мерцание радиозвезд, оно хорошо заметно. На рис. 6 представлены результаты экспериментальных исследований связи скоростей дрейфа в

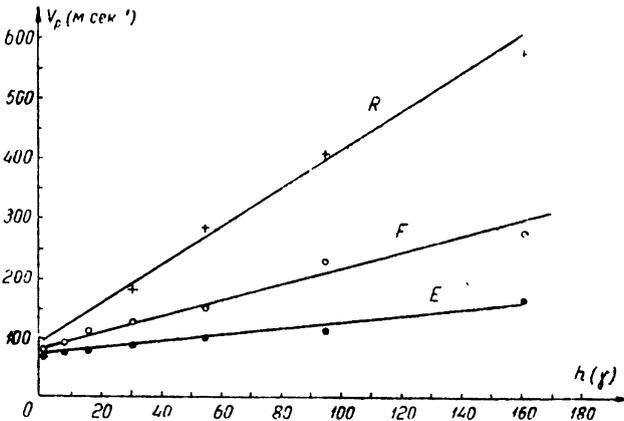


Рис 6 Зависимость средней скорости дрейфа плазмы в ионосфере от средней амплитуды геомагнитных вариаций на поверхности Земли: кривая  $E$ —для  $E$ -области ионосферы,  $F$ —для  $F$ -области,  $R$ —для области, ответственной за мерцание радиозвезд.

различных областях верхней атмосферы с амплитудой вариаций геомагнитного поля на поверхности Земли. Заметим, что обычно в работах приводится зависимость скорости дрейфа от  $K$ -индекса, который, в свою очередь, является нелинейной функцией амплитуды геомагнитных возмущений.

Рассмотрим с количественной стороны вопрос о влиянии на движения в ионосфере низкочастотного электромагнитного поля, диффундирующего из экзосферы. Будем интересоваться только компонентой напряженности электрического поля  $E_{\perp}$ , так как продольная компонента  $E_{\parallel}$  испытывает сильное поглощение вследствие большой электропроводности среды вдоль магнитного поля Земли (см. раздел 6). Уравнение, описывающее распространение электрического поля  $E$ , имеет вид:

$$\nabla^2 E_{\perp} = \frac{4\pi\sigma_{\perp}}{c^2} \frac{\partial E_{\perp}}{\partial t}, \quad (8.1)$$

где  $\sigma_{\perp}$  выражается формулой (1.18). Связь между напряженностями электрического и магнитного полей в волне выражается уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} \sigma_{\perp} E_{\perp}; \quad \operatorname{rot} E_{\perp} = -\frac{1}{c} \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (8.2)$$

Следует заметить, что  $E_{\perp}$  в рассматриваемом случае не содержит поля индукции. Это обусловлено тем, что время установления поля скоростей ветра под действием электрических сил определяется величиной  $\tau = (N_m N) \nu_{im}^{-1}$ . В  $F$ -области это время порядка суток, а в

$E$ -области еще больше. Если интересоваться процессами с характерным периодом  $T \leq 5$  часов, то, естественно, можно пренебречь воздействием электрических полей на движение неионизированной компоненты газа. С другой стороны, интересующие нас периоды геомагнитных возмущений  $T > \nu_{im}^{-1}$ , и, следовательно, уравнение движения ионизированной компоненты плазмы имеет вид:

$$\rho_p \nu_i \mathbf{v}_p = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{H}_0], \quad (8.3)$$

где  $\rho_p = m_i N$  — плотность ионов в плазме,  $\nu_i$  — число соударений ионов с молекулами (или атомами).

Рассмотрим отдельную гармоническую составляющую электромагнитного возмущения  $E_{\perp} \sim e^{i(\omega t - k z)}$ . Из уравнения (8.1) легко установить дисперсионное соотношение между частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$ :

$$k^2 = 4\pi i \omega \sigma / c^2. \quad (8.4)$$

Из уравнений (8.2) и (8.3) находим связь скорости дрейфа с электрическим полем геомагнитного возмущения:

$$\mathbf{v}_p = \frac{\sigma_{\perp}}{\rho_p \nu_i c} [\mathbf{E}_{\perp} \mathbf{H}_0]. \quad (8.5)$$

Скорость дрейфа перпендикулярна к магнитному полю Земли и к вектору напряженности электрического поля. Найдем величину скорости дрейфа, подставив в выражение (8.5) значение  $E_{\perp}$  из уравнения (8.2) и, используя формулу (8.4), окончательно получим:

$$v_p = \left[ \frac{H_0^2}{4\pi \rho_p c} \frac{V 2\pi \sigma_{\perp} \omega}{\nu_i} \right] \frac{h}{H_0}. \quad (8.6)$$

Пользуясь этим соотношением, проведем расчет коэффициента, заключенного в квадратные скобки, для различных областей ионосферы и сравним его с теми значениями, которые получаются экспериментально, например, из данных рис. 6.

Частотный спектр возмущений магнитного поля Земли в ионосфере и на поверхности Земли, безусловно, один и тот же. Оценим, каковы будут скорости дрейфа в ионосфере, соответствующие прохождению бухтообразного возмущения через ионосферу ( $T \sim 1$  часа,  $h \sim 100 \gamma$ , где  $\gamma = 10^{-5}$  эрстед). В  $F$ -области  $\nu_i = 1 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\sigma_{\perp} = 3 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}$  и связь скорости дрейфа с амплитудой вариации геомагнитного поля  $v_p \sim 1,4 \cdot 10^7 h$ . В  $E$ -области ионосферы аналогичный расчет приводит к соотношению  $v_p = 0,2 \cdot 10^7 h$ . Эти значения согласуются по порядку величины с найденными из данных рис. 6.

При  $h = 100 \gamma$  скорость дрейфа плазмы в  $E$ -области возрастает на  $20 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Еще более значительное возрастание скорости дрейфа наблюдается в области, ответственной за мерцание радиозвезд. Обратим внимание на то, что возрастание скорости дрейфа в  $F$ -области при  $h = 100 \gamma$ , вычисленное по формуле (8.6), несколько меньше того значения, которое дано на рис. 6. Это обусловлено тем, что в формулу (8.6) подставлялось значение напряженности магнитного поля  $h$ , измеренное на поверхности Земли. Очевидно, что в  $F$ -области оно несколько больше, и это устраняет отмеченное расхождение.

В заключение этого обзора целесообразно сделать некоторые общие замечания о перспективах развития ионосферной электродинамики. Дальнейшие экспериментальные исследования скоростей дрейфа

в ионосфере над различными пунктами земного шара позволяет определить систему ветров общей циркуляции, а также изменения амплитуды и фазы приливов в зависимости от геомагнитной широты и долготы места наблюдения. Всестороннее изучение взаимосвязи вариаций метеорологических и геомагнитных параметров на поверхности Земли с электродинамическими параметрами в верхней атмосфере даст возможность установить роль ионосферы в динамическом режиме всей атмосферы. Касаясь развития теории электродинамических процессов в ионосфере, следует отметить, что центральное место в настоящее время занимает вопрос о происхождении неоднородностей электронной концентрации в  $F$ -области ионосферы (см. раздел 6.б). Ведется большая работа по выяснению специфических особенностей турбулентности в ионизированном газе типа ионосферы [25, 131]. В области изучения регулярных движений (приливы, общая циркуляция) следует отметить последние работы Уайта [153, 154], где электродинамическая теория движений в ионосфере дополняется учетом резонансных свойств колебаний атмосферы, которые возбуждаются гравитационными и тепловыми источниками.

Выражаю благодарность Г. С. Голлицыну, В. Л. Гришкевичу и В. И. Татарскому за просмотр рукописи и ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. B. H. Briggs, M. Spencer, Rep. Progr. Phys., **17**, 245 (1954).
2. S. Deb, J. Atm. Terr. Phys., **4**, 28 (1953).
3. T. Schimazaki, Rep. Ionosph. Space Res. Jap., **13**, 21 (1955).
4. D. Jerg, J. Atm. Terr. Phys., **8**, 247 (1956).
5. The Measurement of ionospheric drifts, Instruction Manual, ed. Beynon and G. M. Brown, Pergamon Press, 1956.
6. A. Hewish, Proc. Roy. Soc., **209**, 81 (1951).
7. B. H. Briggs, G. J. Phillips, D. H. Shin, Proc. Phys. Soc., **B63**, 106 (1951).
8. G. J. Phillips, M. Spencer, Proc. Phys. Soc., **B68**, 481 (1955).
9. J. Ratcliffe, Rep. Progr. Phys., **19**, 188 (1956)
10. E. H. Vestine, J. Roy. Ast. Soc. Can., **28**, 303 (1934)
11. В. В. Федынский, Метеорология, **7**, 95 (1950).
12. Ф. Х. Лудлам, УФН, **65**, 407 (1958).
13. L. A. Manning, O. G. Villard, A. M. Peterson, Proc. IRE, **38**, 877 (1950).
14. J. S. Greenhow, Phil. Mag., **41**, 682 (1950).
15. C. D. Ellyett, Phil. Mag., **41**, 694 (1950).
16. В. В. Федынский, Астрон. ж., **21**, 291 (1944).
17. C. P. Oliver, Proc. Amer. Phil. Soc., **91**, 315 (1948).
18. W. Liller, F. L. Wipple, J. Atm. Terr. Phys. Suppl., **1**, 112 (1954).
19. H. D. Edwards, J. F. Bedinger, E. R. Manning, C. D. Cooper, The Airglow and Aurorae, Pergamon Press, 1955, p. 122.
20. И. С. Шкаловский, В. Г. Курт, сб. Искусственные спутники Земли, вып. 3, изд. АН СССР, М., 1959
21. E. R. Manning, J. Geoph. Res., **64**, 587 (1959).
22. S. Chapman, J. Bartels, Geomagnetism, **2**, Oxford, 1940.
23. S. K. Chakrabarty, R. Pratar, J. Geoph. Res., **59**, 1 (1954).
24. E. H. Vestine, J. Geoph. Res., **59**, 33 (1954).
25. Г. С. Голицын, ДАН СССР, **132**, 315 (1960).
26. H. G. Booker, J. Geoph. Res., **63**, 97 (1957)
27. J. S. Greenhow, E. L. Neufeld, J. Atm. Terr. Phys., **16**, 384 (1959).
28. D. F. Martyn, Phil. Trans. Roy. Soc., **A246**, 306 (1953)
29. D. F. Martyn, Conf. Phys. Ionosph., Cambridge, 1955, p. 163.
30. S. Chapman, T. G. Cowling, The Mathematical Theory of Nonuniform Gases, Camb. Univ. Press, 1953.
31. A. Schlüter, Zeit. Naturforsch., **5a**, 72 (1950); **6a**, 73 (1951)
32. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1954
33. Л. Спидцер, Физика полностью ионизированного газа, ИЛ, М., 1958.
34. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, ГИТТЛ, М., 1955

35. J. H. Piddington, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.*, **114**, 6 (1951).
- 36 В П Докучаев, Изв высш уч зав—Радиофизика, **3**, 50 (1960)
- 37 С. К Митра, *Верхняя атмосфера*, ИЛ, М, 1955
- 38 В. П. Докучаев, Изв АН СССР, сер геофиз, **5**, 783 (1959)
- 39 Д Брент, *Физическая и динамическая метеорология*, ИЛ, М, 1935
- 40 Л. С. Гандин, Д. Л. Лайхтман и др, *Основы динамической метеорологии*, Гостехиздат, М, 1955.
41. G. J. Haltiner, F. L. Martyn, *Dynamical and Physical Meteorology*, McGraw-Hill Comp, 1957.
- 42 Н Е Кочин, собр. соч, **1**, изд АН СССР, М, 1949.
43. L. A. Manning, *J. Geoph. Res.*, **64**, 2047 (1959).
44. J. A. Ratcliffe, *J. Geoph. Res.*, **64**, 2102 (1959).
45. Б Н Гершман, В Л Гинзбург, Изв высш. уч зав—Радиофизика, **2**, 9 (1959).
- 46 В. П. Докучаев, Изв. высш уч зав—Радиофизика, **1**, 1, 34 (1958).
47. J. A. Fejer, *J. Atm. Terr. Phys.*, **4**, 184 (1953)
48. P. C. Clemmow, M. A. Johnson, K. Weekes, *The Phys. of Ionosphere (Rep Phys. Soc. Conf)*, Cambridge, 1955, p. 136.
- 49 Е А Бенедиктов, Н. А Митяков, Изв высш уч зав. — Радиофизика, **3**, 733 (1960)
50. J. A. Harvey, *Austr. J. Phys.*, **8**, 4 (1955).
51. J. A. Thomas, M. J. Burke, *Austr. J. Phys.*, **9**, 4 (1956).
52. B. W. Osborne, *J. Atm. Terr. Phys.*, **6**, 117 (1955).
53. R. Sethuraman, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, **2** (1958)
54. V. Agy, *Polar Atmosphere Symposium*, part II, 23 (1957).
55. B. H. Briggs, *J. Atm Terr. Phys.*, **12**, 89 (1958).
56. C. D. Salzberg, R. Greenstone, *J. Geoph. Res.*, **56**, 521 (1951).
57. L. Harang, K. Pederson, *J. Geoph. Res.*, **62**, 183 (1957).
58. D. F. Martyn, *Tidal Phenomena in the Ionosphere*, Special rep. URSI, **2**, 1956.
59. G. J. Taylor, *Proc. Roy. Soc.*, **A126**, 169 (1929).
60. G. J. Taylor, *Proc. Roy. Soc.*, **A156**, 318 (1937).
61. C. L. Pekeris, *Proc Roy Soc*, **A158**, 650 (1937).
62. M. V. Wilkes, *Oscillation of the Earth's Atmosphere*, Camb Univ. Press, 1949.
63. B. Steward, *Encyclopaedia Britannica 9th ed.*, 1882, p. 36.
64. A. Schuster, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A208**, 163 (1908).
65. H. K. Sen, M. L. White, *J. Geoph. Res.*, **60**, 483 (1955).
66. H. Maeda, *J. Geomagn. Geoelectr.*, **7**, 121 (1955).
67. H. Maeda, *Rep. Ionosph. Res. Japan*, **9**, 148 (1955); **10**, 49 (1956).
68. J. W. Dungey, *Cosmical Electrodynamics*, Camb Univ. Press, 1958.
69. R. L. Ingraham, *J. Atm. Terr. Phys.*, **16**, 263 (1959).
70. W. G. Baker, *Phil. Trans Roy. Soc.*, **A246**, 295, (1953).
71. W. W. Kellogg, G. F. Schilling, *J. Meteorol.*, **8**, 222 (1951).
72. D. G. Yerg, *J. Meteorol.*, **8**, 244 (1951).
73. C. G. Rossby, *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, **28**, 53 (1947).
74. Л В Гришкевич, Н А Митяков, Тр. Сиб. ФТИ, **37**, 185 (1959).
- 75 В В Толстов, *Раднотехника и электроника*, **3**, 760 (1958).
- 76 Л. В Гришкевич, В Д Гусев, Ю В Кушнеревский, С Ф Миркотан, Е Г Прошкин, сб *Исследования ионосферы и метеоров.*, изд АН СССР, М, 1960, стр 19.
- 77 Ы Л Кашеев, Н Т Цымбал, Е. Г. Прошкин, сб. Дрейфы и неоднородности в ионосфере, изд АН СССР, М, 1960, стр. 40.
- 78 Б. Х. Бриггс, Предварительное сообщение на конф. URSI, 1959.
79. J. P. Wild, J. A. Roberts, *J. Atm. Terr. Phys.*, **8**, 55 (1956).
80. N. F. Barber, *J. Atm. Terr. Phys.*, **8**, 318 (1956).
- 81 Л В Гришкевич, Тр Ростовского Симпозиума по ионосфере, 1961 (в печати)
82. J. Ratcliffe, *Rep Progr. Phys.*, **19**, 188 (1956); перевод в сб *Пр. совр. физ.*, **10**, (1957).
- 83 Ю Л Кокурин, сб *Дрейфы и неоднородности в ионосфере*, изд АН СССР, 1959, М., стр 60.
84. J. S. Greenhow, *Phil. Mag.*, **45**, 364 (1954).
- 85 А Б Ловелл, *Метеорная астрономия*, ГИТТЛ, М, 1958.
86. Л. А. Катасев, *Фотографические методы метеорной астрономии*, ГИТТЛ, М, 1957
87. E. N. Andrade, *Proc. Phys., Soc.*, **51**, 784 (1939).

- 88 А. Н. Колмогоров, ДАН СССР, 30, 301 (1941); 32, 16 (1941).
- 89 А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геогр и геофиз., 4—5, 453 (1941).
90. J. S. Greenhow, E. L. Neufeld, J. Geoph. Res., 64, 2129 (1959).
91. J. S. Greenhow, E. L. Neufeld, J. Atm. Terr. Phys., 16, 384 (1959).
92. H. G. Booker, J. Geoph. Res., 61, 673 (1956); 63, 97 (1957).
93. H. G. Booker, R. Cohen, J. Geoph. Res., 61, 707 (1956).
94. H. G. Booker, Polar Atmosphere Symposium, part II, Pergamon Press, 1957, p. 52.
95. L. A. Manning, V. R. Eshleman, J. Geoph. Res., 62, 367 (1957); 63, 737 (1958).
96. J. S. Greenhow, J. Geoph. Res., 64, 2208 (1959).
97. В. П. Докучаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 199 (1960).
98. J. S. Greenhow, E. L. Neufeld, Atm. Terr. Phys., 6, 133 (1955).
99. D. Brunt, Phil. Mag., Ser. VII, 1, 523 (1926).
100. R. M. Gallet, Proc. IRE, 43, 1240 (1955).
101. F. Villars, V. F. Weisskopf, Proc. IRE, 43, 1232 (1955).
102. D. K. Bailey, R. Bateman, L. V. Berkner, H. G. Booker, G. F. Montgomery, E. M. Purcell, W. W. Weisner, Phys. Rev., 86, 141 (1952).
103. J. S. Greenhow, E. L. Neufeld, Proc. Phys. Soc., 75, 228 (1960).
104. C. O. Hines, J. Geoph. Res., 64, 2210 (1959).
105. Б. Н. Гершман, Труды Сиб. ФТИ, 37, 99 (1959).
106. A. Hewish, Proc. Roy. Soc., A214, 494 (1952).
107. В. Л. Гинзбург, ДАН СССР, 84, 245 (1952).
108. G. A. Narrower, Canad. J. Phys., 35, 512 (1957); 35, 792 (1957).
109. A. M. Peterson, O. G. Villard, R. L. Leadabrand, P. B. Gallagher, J. Geoph. Res., 60, 497 (1955).
110. J. R. Koster, J. Atm. Terr. Phys., 12, 213 (1958).
111. Б. Н. Гершман, В. Л. Гинзбург, ДАН СССР, 100, 647 (1955).
112. S. Chandrasekhar, Phil. Mag., 43, 501 (1952).
113. И. С. Шкловский, Астроном. журн., 35, 557 (1958).
114. В. J. O'Brien, Nature, 182, 4634 (1958).
115. A. J. Dessler, J. Geoph. Res., 64, 397 (1959).
116. M. Dagg, J. Atm. Terr. Phys., 10, 194 (1957); 10, 204 (1957).
117. D. F. Martyn, J. Geoph. Res., 64, 2178 (1959).
118. Б. Н. Гершман, В. П. Докучаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 843 (1959).
119. J. W. Dungey, J. Atm. Terr. Phys., 8, 39 (1956).
120. J. W. Dungey, J. Geoph. Res., 64, 2188 (1959).
121. G. H. Munro, Proc. Roy. Soc., A202, 208 (1950).
122. D. E. Martyn, Proc. Roy. Soc., A201, 216 (1950).
123. R. E. Price, Rep. Conf. Phys. Ionosph., Cambridge, 1955, p. 181.
124. Л. А. Драчев, Ю. В. Березин, Радиотехника и электроника, 2, 1234 (1957).
125. В. Д. Гусев, Л. А. Драчев, С. Ф. Миркотан, Ю. В. Березин, М. П. Князевский, М. Б. Виноградов, Т. А. Гайлит, ДАН СССР, 123, 817 (1958).
126. L. H. Heisler, Austral. J. Phys., 11, 1 (1958).
127. В. Д. Гусев, Л. А. Драчев, Радиотехника и электроника, 1, 747 (1956).
128. D. F. Martyn, Proc. Roy. Soc., A189, 241 (1947).
129. C. O. Hines, Proc. IRE, 47, 176 (1959).
130. C. O. Hines, J. Geoph. Res., 64, 2210 (1959).
131. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 551 (1960).
132. D. F. Martyn, O. O. Pulley, Proc. Roy. Soc., A154, 455 (1936).
133. N. C. Gerson, Proc. IRE, 38, 1456 (1950).
134. J. Vannoni, A. J. Higgs, D. F. Martyn, G. H. Munro, Proc. Roy. Soc., A174, 298 (1940).
135. S. J. Bauer, J. Geoph. Res., 62, 425 (1957).
136. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геофиз., 13, 1 (1949).
137. А. С. Монин, А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геофиз., 11, 1360 (1958).
138. R. Shapiro, J. Meteorol., 13, 335 (1956); 15, 435 (1958), 16, 569 (1959).
139. J. W. Dungey, Phys. Ionosph., Phys. Soc., London, 1955, p. 223.
140. J. W. Dungey, Ionosph. Res. Lab. Pensilv. State Univ., Sci. Rep., 1954, p. 69.
141. Л. Р. Ракипова, Труды ЛГО, вып. 28 (90), 1951.
142. Л. Р. Ракипова, Изв. АН СССР, сер. геофиз., 2, 15 (1947).
143. Л. Р. Ракипова, сб. Физика солнеч. корп. потоков, изд. АН СССР, 1957, стр. 273.
144. D. E. Blackwall, Nature, 181, 1237 (1958).

145. T. Obayashi, Rep. Ionosph. Res. Japan, **12**, 301 (1958).
146. S. Akasofu, Rep. Ionosph. Res. Japan, **10**, 227 (1956).
147. J. H. Piddington, Geoph. J., **2**, 173 (1959).
148. J. H. Chapman, Canad. J. Phys., **31**, 120 (1953).
149. K. Tsukamoto, J. Ogato, Rep. Ionosph. Japan., **13**, 48 (1959).
150. В. А. Чеча, В. Е. Зеленков, сб. Дрейфы и неоднородности в ионосфере, изд. АН СССР, М., 1959, стр. 50.
151. S. Kato, Rep. Ionosph. Space Res. Japan, **13**, 62 (1959).
152. S. F. Singer, E. Maple, W. A. Bowen, J. Geoph. Res., **56**, 265 (1951).
153. M. L. White, J. Geoph. Res., **65**, 153 (1960).
154. M. L. White, J. Atm. Terr. Phys., **17**, 220 (1960).
155. В. П. Докучаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 901 (1960)
156. Б. Н. Гершмаи, В. Л. Гинзбург, Уч. зап. ПГУ, **30**, 3 (1956).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
24 августа 1960 г.

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНОСТИ ЛУНЫ ПО ЕЕ НАБЛЮДЕНИЯМ НА РАДИОТЕЛЕСКОПАХ ВЫСОКОЙ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

*Н. Л. Кайдановский и А. Е. Саломонович*

Предложена методика обработки результатов наблюдений радиоизлучения Луны, выполняемых на радиогелископах высокой разрешающей способности. В отличие от обычных методов, применяемых в случае использования радиогелископов умеренной разрешающей способности, по данным наблюдений оказывается возможным непосредственно построить кривые изменения относительной излучательной способности и широтного распределения поверхностной температуры. Определение характеристик поверхности Луны производится затем без дополнительных допущений о виде указанных кривых.

Согласно теории теплового радиоизлучения Луны, развитой Троицким [1], для однородной сферической модели яркостная радиотемпература Луны

$$T_e(\varphi, \psi, t) = T_{e_0} + \sum_{n=1}^{\infty} T_{e_{\sim n}} \cos(n\omega t - n\varphi - \xi_n), \quad (1)$$

где

$$T_{e_0} = (1 - R) \left[ T_n + \frac{a_0}{2} D\tau_1(\psi) \right]; \quad (2)$$

$$T_{e_{\sim n}} = (1 - R) \frac{a_n D\tau_1(\psi)}{\sqrt{1 + 2\delta_n \cos\alpha + 2\delta_n^2 \cos^2\alpha}}.$$

Здесь  $\varphi$  и  $\psi$ —соответственно селенографические долгота и широта,  $R(\varphi, \psi)$ —коэффициент отражения на границе поверхности,  $T_n$ —ночная температура поверхности,  $D = T_n - T_{\text{п}}$ , причем  $T_{\text{п}}$ —температура поверхности в подсолнечной точке,  $\tau_1(\psi)$ —функция распределения темпера-

туры поверхности при освещении Луны Солнцем,  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tau_1(z) \cos(nz) dz$ ,

$\omega$ —угловая частота смены фаз (частота вращения Луны),  $\xi_n = \arctg \frac{\delta_n}{1 + \delta_n}$

—сдвиг по фазе  $n$ -ой гармоники переменной составляющей яркостной температуры по сравнению с переменной составляющей температуры на поверхности,  $\delta_n = \beta_n/\alpha$ —отношение глубины проникновения электромагнитной волны  $1/\alpha$  к глубине проникновения  $n$ -ой гармоники температурной волны  $1/\beta_n$ ,  $\alpha$ —угол падения луча из глубины лунной коры на поверхность.

Поскольку до последнего времени наблюдения за радиоизлучением Луны производились с помощью радиотелескопов сравнительно низкой разрешающей способности, непосредственно измерялась не  $T_e(\varphi, \psi, t)$ ,

а некоторая усредненная по диску Луны температура, зависящая от диаграммы направленности антенны радиотелескопа [1].

Для определения по данным измерений физических характеристик поверхности необходимо было пользоваться значениями температур  $T_n$ ,  $T_p$ , полученными из радиометрических наблюдений. Кроме того, оказывалось необходимым задаваться видом функций  $R(\varphi, \psi)$  и  $\gamma(\psi)$ , как это и сделано в работе [1]. При этом обычно использовались данные, полученные в ходе оптических измерений, либо вводились предположения (например, о законе изменения коэффициента отражения  $R$  с расстоянием до центра диска), не подтверждавшиеся непосредственными измерениями в радиодиапазонах\*.

Выполненные до настоящего времени на радиотелескопах со сравнительно низкой разрешающей способностью исследования радиоизлучения Луны в диапазоне волн от 0,8 до 75 см [2] вместе с теорией [1] и результатами радиометрических измерений температуры поверхности [3] позволили оценить диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  и величину эффективной электропроводности  $\sigma = \epsilon c \operatorname{tg} \Delta/2\lambda$ , где  $\Delta$  — угол электрических потерь и  $c$  — скорость света. Следует, однако, подчеркнуть, что все рассчитанные по данным таких наблюдений характеристики являются усредненными по всей поверхности Луны, поскольку они получены из измерений яркостных температур, усредненных („размазанных“) по диску.

Создание радиотелескопов с высокой разрешающей способностью в миллиметровом и сантиметровом диапазонах [4] позволяет измерять не только усредненные значения яркостных радиотемператур, но и распределение этих температур по диску Луны в зависимости от фазы [5]. Эти измерения вместе с детальными радиометрическими измерениями поверхностной температуры позволяют, в принципе, определить характеристики отдельных участков на поверхности Луны без дополнительных предположений о характере распределения поверхностной температуры и о законе изменения излучательной способности. При этом предположения о модели поверхности должны будут относиться лишь к исследуемому участку и могут быть сделаны на основании фотографических данных с большим основанием, чем для всего лунного диска в целом.

К сожалению, детальные радиометрические измерения распределения поверхностной температуры Луны еще не выполнены. Поэтому истолковать данные измерений радиоизлучения Луны, выполненные даже на радиотелескопах с высокой разрешающей силой, возможно лишь, опираясь на измеренные еще в 1930 г. Петтитом и Никольсоном [3] значения  $T_n$  и  $T_p$ , а также исходя из предположения об однородности поверхности Луны.

Тем не менее, уже сейчас измерения с помощью остронаправленных радиотелескопов с игольчатой диаграммой позволяют получить непосредственно функции распределения излучательной способности  $1-R$  и поверхностной температуры  $\gamma(\psi)$  по диску Луны. Ниже приведены соображения о том, каким образом в рамках теории [1] можно по результатам измерений построить интересующие нас функции.

Поскольку с помощью радиотелескопов измеряется не распределение  $T_e(\varphi, \psi, t)$ , а его проекция на картинную плоскость, представляется целесообразным перейти от селенографических координат  $\varphi, \psi$  к прямоугольным координатам  $x, y$  на указанной плоскости. Оси координат параллельны соответственно экватору и центральному меридиану лунного диска. Координаты  $x, y$  связаны с  $\varphi, \psi$  очевидными соотношениями

\* Данные, получаемые при радиолокации Луны, дают лишь косвенные сведения о  $R$ .

$$x = r \sin \varphi \cos \psi; \quad y = r \sin \psi, \quad (3)$$

где  $r$  — радиус Луны. Для точек на экваторе

$$x = r \sin \varphi, \quad y = 0; \quad (4)$$

для точек на центральном меридиане

$$x = 0, \quad y = r \sin \psi. \quad (5)$$

Рассмотрим сначала постоянную составляющую

$$T_e(x, y) = [1 - R(x, y)] [T_{11} + (a_0/2) D \tilde{\gamma}_1(y)],$$

где

$$\tilde{\gamma}_1(y) = \gamma_1 \left( \arcsin \frac{y}{r} \right).$$

В картинной плоскости радиозофоты  $T_{e_0} = \text{const}$  представляют собой близкие к овальным линии с общим центром в центре диска и осью симметрии, проходящей вдоль оси  $y$ . Это следует из предположения об однородности поверхности Луны. Переменная составляющая  $T_{e_{\sim}}$ , накладываясь на распределение  $T_{e_0}$ , искажает, вообще говоря, симметрию изофот и перемещает точку с максимальной яркостью в направлении подсолнечной точки, что смещает „центр тяжести“ излучения.

Распределение постоянной составляющей  $T_{e_0}$  можно выделить из двумерных распределений яркостной температуры, полученных в течение лунации при помощи радиотелескопа с высокой разрешающей способностью. В тех случаях, когда оказывается возможным пренебречь высшими гармониками в  $T_{e_{\sim}}$  и отличием  $\cos \sigma$  от 1, приближенную картину радиозофот постоянной составляющей можно получить, непосредственно используя распределения  $T_e(x, y)$ , найденные при максимальных смещениях „центра тяжести“ излучения, т. е. при  $\omega t - \xi = \Phi = \pi/2$  или  $\Phi = 3\pi/2$ .

По изофотам постоянной составляющей  $T_{e_0}$  можно, в свою очередь, построить кривую распределения  $\tilde{\gamma}_1(y)$ , а затем определить значение диэлектрической проницаемости. Как это видно из дальнейшего, наблюдения необходимо производить при ориентации линейно-поляризованного облучателя радиотелескопа, составляющей угол  $\pm \pi/4$  с лунным экватором (осью  $Ox$ ). Распределение вдоль экватора (вдоль оси  $x$  на картинной плоскости) постоянной составляющей температуры, согласно (1), (2) с учетом (5), таково:

$$T_e(x, 0, \Phi) = [1 - R(x, 0)] \left\{ T_{11} + \frac{a_0}{2} D + \frac{a_1 D}{\sqrt{1 + 2\delta_1 + 2\delta_1^2}} \left( \cos \Phi \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} + \sin \Phi \frac{x}{r} \right) \right\}.$$

Отсюда при  $\Phi = \pi/2$

$$\frac{T_e(x, 0, \pi/2) + T_e(-x, 0, \pi/2)}{2T_e(0, 0, \pi/2)} = \frac{1 - R(x, 0)}{1 - R(0, 0)}. \quad (6)$$

С другой стороны, при  $\Phi = \pi/2$  распределение вдоль меридиана

$$T_e(0, y, \pi/2) = T_{e_0}(0, y, \pi/2).$$

Вместе с тем, согласно (1), распределение постоянной составляющей вдоль центрального меридиана

$$\frac{T_{e_0}(0, y, \pi/2)}{T_{e_0}(0, 0, \pi/2)} = \frac{[1 - R(0, y)] [T_n + (a_0/2)D \tilde{\eta}(y)]}{[1 - R(0, 0)] [T_n + (a_0/2)D]} \quad (7)$$

Считая, что распределение (6) излучательной способности не зависит от местных особенностей лунной коры и одинаково вдоль  $Ox$  и  $Oy$  (что имеет место при выбранной поляризации), можно подобрать такую  $\tilde{\eta}(y)$  (при  $T_n$  и  $D$ , известных по радиометрическим измерениям), чтобы правая часть (7) наилучшим образом соответствовала левой части, полученной из измерений. Определив вид функции  $\tilde{\eta}(y)$ , и, следовательно, зная  $a_0$ , найдем из (2) значение  $1 - R$  и диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$ .

Измерение амплитуд гармоник переменной составляющей яркостной температуры, после того как излучательная способность  $1 - R$  и функция  $\eta(\psi)$  (а следовательно, и  $a_n$ ) уже определены, позволяет найти из (2) отношение глубин проникновения электромагнитной и гармоники тепловой волн  $\delta_n = \beta_n/\alpha$ , а также вычислить эффективную электропроводность  $\sigma$  и угол электрических потерь  $\Delta$ .

Измерение распределения постоянной составляющей яркостной температуры по диску Луны позволяет, вместе с тем, оценить справедливость принятых в [1] допущений. Для этого можно вычислить изменение излучательной способности ( $1 - R$ ) вдоль экватора для найденного значения  $\varepsilon$  и сравнить его с кривой, построенной непосредственно по данным наблюдений.

Таким образом, при исследовании радиоизлучения Луны с помощью радиотелескопов с высокой разрешающей способностью оказывается возможным определить важные характеристики лунной поверхности непосредственно из самих измерений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Тронцкий, *Астроф. ж.*, **31**, 511 (1954).
2. Сб Луна под ред. А. В. Маркова, Физматгиз, М., 1960.
3. E. Pettit, S. B. Nicholson, *Astrophys. J.*, **71**, 102 (1930).
4. А. Е. Саломонович, *Радиотехника и электроника*, **4**, 2092 (1959).
5. Н. А. Аменицкий, Р. И. Носкова, А. Е. Саломонович, *Астроф. ж.*, **37**, 185 (1960).

Физический институт  
им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию  
3 сентября 1960 г.

#### ON THE DETERMINATION OF THE MOON'S SURFACE CHARACTERISTICS FROM OBSERVATIONS OBTAINED WITH HIGH RESOLUTION RADIO TELESCOPES

*N. L. Kaidanovsky, A. E. Salomonovitch*

A method is suggested for processing the results of observations of the Moon radio emissions obtained with high resolution radio telescopes. This method differs from usual ones applied to the case of moderate resolution radio telescopes. It is possible in correspondence with data observed to plot directly the curves of the variation both in the relative radiation capacity and the latitude distribution of the surface temperature. The determination of the moon's surface characteristics is then carried out without any additional assumptions about the form of the indicated curves.

## О ПОГЛОЩЕНИИ КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ В ИОНОСФЕРЕ

Е. А. Бенедиктов, Н. А. Митяков

Приводятся результаты численного расчета поглощения радиоволн на частоте 18,6 мГц при нормальном падении космического радиоизлучения на ионосферу. Показано, что в дневные часы поглощение в слое  $F$  в два—три раза превышает поглощение в нижних слоях ионосферы ( $D$  и  $E$ ). Указывается на возможность определения температуры вблизи максимума слоя  $F$  по данным о поглощении в слое  $F$  и полной электронной концентрации в ионосфере  $\int Ndz$ .

В работах [1,2], посвященных измерению поглощения радиоволн в ионосфере радиоастрономическим методом, делаются попытки разделить общее поглощение на поглощение в слоях  $D$  и  $F$  ионосферы. Методика такого разделения основана на предположении, что поглощение в слое  $F$  определяется только критической частотой  $f_c$  слоя  $F$ , тогда как поглощение в нижележащих слоях не зависит от  $f_c$ . При этом было получено, что в дневные часы поглощение в слое  $D$  сравнимо или больше поглощения в слое  $F$ . С другой стороны, в [3] приводятся результаты сопоставления одновременных измерений поглощения как радиоастрономическим методом, так и методом вертикального зондирования, которые свидетельствуют о том, что в умеренных широтах вклад слоя  $F$  в общее поглощение в полдень в 2—3 раза превышает вклад нижележащих слоев. Аналогичные результаты были получены для утренних часов в работе [4] по данным измерений напряженности поля радиосигналов первого и второго искусственных спутников Земли. Столь большое расхождение результатов трудно объяснить различием местоположения и времени наблюдений, оно, по-видимому, связано с некорректностью методики разделения поглощения, использованной в [1,2] (см. подробнее [3]). Как показано ниже, этот вывод подтверждается также количественными оценками величины поглощения в различных слоях ионосферы, основанными на современных данных об ионосферных слоях. То обстоятельство, что поглощение космического радиоизлучения в основном определяется слоем  $F$ , позволяет использовать результаты измерений поглощения для получения дополнительных сведений о слое  $F$ .

При нормальном падении радиоволн на ионосферу для частот, значительно превышающих критическую частоту, поглощение радиоволн в ионосфере определяется выражением [5]

$$\Gamma = 4,34 \frac{e^2}{\pi m c f^2} \int_0^{\infty} N \nu dz = 1,16 \cdot 10^{-2} f^{-2} \int_0^{\infty} N \nu dz \quad (\text{дб}), \quad (1)$$

где  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $c$  — скорость света,  $f$  — частота,  $N$  — концентрация электронов,  $\nu$  — эффективное число соударений.

Как известно [5], эффективное число соударений  $\nu$  до высоты порядка 150 км определяется соударениями с нейтральными молекулами, а в слое  $F$  — соударениями с ионами. В нижней ионосфере величина  $\nu$

неоднократно измерялась и оценивалась различными авторами [6,7]. Концентрация электронов  $N$  также достаточно хорошо известна [8], поэтому можно оценить значения  $N^2$  на различных высотах. В таблице 1 сведены ориентировочные данные об изменении  $N$  и  $\nu$  с высотой для летнего полудня, взятые из работ [6, 7, 8].

Таблица 1

| $z$ (км) | 60               | 70               | 80                   | 90                 | 100                | 120                | 150         |
|----------|------------------|------------------|----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-------------|
| $\nu$    | $4-7 \cdot 10^7$ | $1-2 \cdot 10^7$ | $2-1 \cdot 10^6$     | $2-5 \cdot 10^5$   | $0,5-1 \cdot 10^5$ | $0,5-1 \cdot 10^4$ | $\sim 10^3$ |
| $N$      | $\sim 10$        | $3 \cdot 10^2$   | $7 \cdot 10^2$       | $2 \cdot 10^3$     | $2 \cdot 10^4$     | $10^5$             | $\sim 10^5$ |
| $N^2$    | $4-7 \cdot 10^8$ | $3-6 \cdot 10^9$ | $1,4-2,8 \cdot 10^9$ | $0,4-1 \cdot 10^9$ | $1-2 \cdot 10^9$   | $0,5-1 \cdot 10^9$ | $\sim 10^8$ |

Численные оценки величины поглощения по формуле (1) с использованием данных таблицы 1 показывают, что поглощение в нижних слоях ионосферы для частоты 18,6 мГц в полдень составляет  $0,3 \pm 0,5$  дБ, что согласуется с экспериментальными данными работы [3]. Нетрудно найти поглощение в слое  $F$  при заданной модели слоя. Действительно, для слоя  $F$  эффективное число соударений определяется выражением [3]

$$\nu = \frac{5,5N}{T^{1/2}} \ln \left( 220 \frac{T}{N^{1/3}} \right), \tag{2}$$

где  $T$ —электронная температура. Учитывая слабую зависимость логарифмического множителя от  $T$  и  $N$ , можно считать для оценок поглощения этот множитель постоянным. Полагая в приближенных расчетах  $T = 1000^\circ\text{K}$  и  $N = 10^6$ , имеем

$$\nu = \frac{45N}{T^{1/2}}. \tag{2a}$$

Подставляя (2a) в (1), имеем для поглощения в слое  $F$

$$\Gamma_F = 0,52 f^{-2} \int \frac{N^2}{T^{1/2}} dz. \tag{3}$$

Электронная концентрация  $N$  имеет максимум на высоте 300 км, в то время как температура в слое  $F$  монотонно возрастает с высотой. Поскольку  $N^2$  изменяется с высотой гораздо быстрее, чем  $T^{-1/2}$ , можно вынести из-под знака интеграла некоторое среднее значение  $T_0^{-1/2}$ , определяемое температурой области вблизи максимума слоя  $F$ . Поэтому можно написать

$$\Gamma_F = 0,52 f^{-2} T_0^{-1/2} \int N^2 dz. \tag{3a}$$

Распределение электронной концентрации в слое  $F$  в первом приближении подчиняется следующему закону [9]:

$$N = \begin{cases} N_0 \left( 1 - \frac{z^2}{z_1^2} \right) & (z < 0) \\ N_0 \exp \left( -\frac{z}{z_2} \right) & (z > 0) \end{cases}. \tag{4}$$

где  $N_0$ —концентрация электронов в максимуме слоя,  $z_1$  и  $z_2$  — параметры нижней и верхней частей слоя и  $z$  отсчитывается от максимума слоя. В этом случае

$$\int_{-z_1}^{\infty} N^2 dz = \frac{N_0^2}{2} \left( z_2 + \frac{16}{15} z_1 \right) \quad (5)$$

и, таким образом,

$$\Gamma_F = 0,26 f^{-2} T_0^{-1/2} N_0^2 \left( z_2 + \frac{16}{15} z_1 \right). \quad (6)$$

Для стандартных значений параметров слоя  $F$  ( $N_0 = 10^6$  ( $f_c \sim 9$  мГц),  $z_1 = 150$  км,  $z_2 = 300$  км и  $T_0 = 1000^\circ\text{K}$ ) получаем для частоты  $f = 18,6$  мГц поглощение  $\Gamma_F = 1,1$  дБ. Эта величина также согласуется с экспериментальными данными работы [3]. Таким образом, интегральное поглощение радиоволн в ионосфере на частотах, значительно превышающих критическую частоту, определяется в основном поглощением в слое  $F$ .

Существенно, что соотношение (6) при других известных параметрах позволяет определить температуру  $T_0$  вблизи максимума слоя  $F$ . Максимальная электронная концентрация  $N_0$  и полутолщина  $z_1$  нижней части слоя  $F$  легко определяются из высотно-частотных характеристик ионосферы. Параметр  $z_2$ , характеризующий верхнюю часть слоя  $F$ , можно получить, привлекая данные измерений полной электронной концентрации в столбе единичного сечения  $\int N dz$ .

Используя равенство  $N_0 = 1,24 \cdot 10^{-8} f_c^2$ , для нашей модели слоя можно написать

$$\int N dz = 1,24 \cdot 10^{-8} f_c^2 z_{\text{эфф}}, \quad (7)$$

где эффективная толщина ионосферы

$$z_{\text{эфф}} = z_2 + \frac{2}{3} z_1. \quad (8)$$

Из (6)—(8) получим

$$T_0 = \left( \frac{3,1 \cdot 10^8}{\int N dz + 5 \cdot 10^{-9} z_1 f_c^2} \frac{f^2}{f_c^2} \Gamma_F \right)^{-2/3}. \quad (9)$$

Ошибки при определении  $T_0$  связаны в основном с погрешностями измерения величин  $\Gamma_F$  и  $\int N dz$ . Относительная погрешность

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} \approx \frac{2}{3} \left( \frac{\Delta \int N dz}{\int N dz} + \frac{\Delta \Gamma_F}{\Gamma_F} \right). \quad (10)$$

Если относительная ошибка при измерении  $\int N dz$  составляет 10%, а при измерении поглощения—20%, то ошибка определения температуры не будет превышать 20%. При этом ошибку, связанную с неточностью определения логарифмического множителя в выражении (2) можно исключить методом последовательных приближений. Для дневного периода приведенные оценки, по всей вероятности, соответствуют действительности. Ночью, когда величина поглощения мала, относительная ошибка может возрастать в основном из-за неопределенности величины так называемого „остаточного поглощения“ [3].

Опубликованные в [3] экспериментальные данные о поглощении

в слое  $F$  на частоте 18,6 мГц позволяют рассчитать произведение  $T_0^{-3/2} z_{эфф}$ .

Действительно, из (6)–(8) можно получить, что

$$T_0^{-1/2} z_{эфф} \left( 1 + 0,4 \frac{z_1}{z_{эфф}} \right) = 2,5 \cdot 10^{16} \frac{f^2}{f_c^2} \Gamma_F. \quad (11)$$

Обычно величиной  $0,4 \frac{z_1}{z_{эфф}}$  можно пренебречь по сравнению с единицей, так что (11) определяет в первом приближении произведение  $T_0^{-3/2} z_{эфф}$ . Значения  $\Gamma_F$ ,  $f_c$  и  $T_0^{-1/2} z_{эфф}$  для октября 1959 г. даны в таблице 2. Максимальное значение  $T_0^{-1/2} z_{эфф}$  наблюдается в утренние

Таблица 2

| Время                    | 8                      | 10                  | 12                  | 14                  | 16                  | 18                  | 20                  |
|--------------------------|------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $\Gamma_F$ (дб)          | 0,32                   | 0,75                | 0,95                | 0,92                | 0,77                | 0,50                | 0,30                |
| $f_c$ (мГц)              | 7,9                    | 10,5                | 11,8                | 11,8                | 10,8                | 8,4                 | 6,2                 |
| $T_0^{-1/2} z_{эфф}$     | $7,3 \cdot 10^2$       | $5,45 \cdot 10^2$   | $4,25 \cdot 10^2$   | $4,15 \cdot 10^2$   | $4,7 \cdot 10^2$    | $8,4 \cdot 10^2$    | $10,5 \cdot 10^2$   |
| $T_0=1000^\circ\text{K}$ | $\frac{z_{эфф}}{(КМ)}$ | 220                 | 160                 | 130                 | 125                 | 140                 | 320                 |
|                          | $\int Ndz$             | $1,7 \cdot 10^{13}$ | $2,2 \cdot 10^{13}$ | $2,2 \cdot 10^{13}$ | $2,1 \cdot 10^{13}$ | $2 \cdot 10^{13}$   | $2,2 \cdot 10^{13}$ |
| $T_0=1500^\circ\text{K}$ | $\frac{z_{эфф}}{(КМ)}$ | 400                 | 300                 | 240                 | 230                 | 260                 | 550                 |
|                          | $\int Ndz$             | $3,1 \cdot 10^{13}$ | $4,1 \cdot 10^{13}$ | $4,1 \cdot 10^{13}$ | $4,0 \cdot 10^{13}$ | $3,7 \cdot 10^{13}$ | $4 \cdot 10^{13}$   |
| $T_0=2000^\circ\text{K}$ | $\frac{z_{эфф}}{(КМ)}$ | 620                 | 450                 | 370                 | 350                 | 390                 | 900                 |
|                          | $\int Ndz$             | $4,8 \cdot 10^{13}$ | $6,2 \cdot 10^{13}$ | $6,2 \cdot 10^{13}$ | $6 \cdot 10^{13}$   | $5,9 \cdot 10^{13}$ | $6,2 \cdot 10^{13}$ |

и вечерние часы; к полудню это произведение монотонно уменьшается. Это может быть вызвано как увеличением температуры в полдень, так и уменьшением эффективной толщины ионосферы или обоими этими процессами, происходящими одновременно. В таблице приведены также оценки толщины слоя  $z_{эфф}$  и полной электронной концентрации  $\int Ndz$  для температур 1000°K, 1500°K и 2000°K. Следует отметить, что полученные значения  $z_{эфф}$  и  $\int Ndz$  не противоречат общепринятым данным. Если считать, что полная электронная концентрация в полдень в 2—3 раза больше, чем в утренние и вечерние часы, то по данным таблицы 2 следует заключить, что наиболее вероятные значения температуры днем  $T_0 \sim 2000^\circ\text{K}$ , а вечером и утром  $T_0 \sim 1000^\circ\text{K}$ . Следует иметь в виду, что эти оценки нельзя считать окончательными, поскольку мы не располагали данными о полной электронной концентрации. Можно полагать, что одновременные измерения поглощения в слое  $F$  и полной электронной концентрации  $\int Ndz$  могут дать более надежные сведения о температуре вблизи максимума слоя  $F$  и ее изменениях во времени.

В заключение авторы пользуются случаем поблагодарить В. Л. Гинзбурга и Г. Г. Гетманцева за внимание к работе и ценные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. P. Mitra, C. A. Shain, *J. Atm. Terr. Phys.*, **4**, 904 (1953).
2. R. V. Bhonsle, K. R. Ramanathan, *J. Sci. Industr. Res. Suppl.*, **17A**, 40 (1958)
3. Е. А. Бенедиктов, Ю. С. Коробков, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, Л. Н. Ходалева, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **3**, 957 (1960).
4. А. Н. Казанцев, Т. С. Романова, А. Я. Клементенко, *Радиотехника и электроника*, **3**, 1107 (1958).
5. В. Л. Глиэбург, *Распространение радиоволн в плазме*, ГИТТЛ, М., 1961.
6. M. Nicolet, *J. Atm. Terr. Phys.*, **3**, 200 (1953).
7. J. A. Kane, *J. Geophys. Res.*, **64**, 133 (1959).
8. R. J. Nertney, *J. Atm. Terr. Phys.*, **3**, 92 (1953)
9. Я. Л. Альнерт, *УФН*, **65**, 161 (1958)

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
6 июня 1960 г.

## ON THE ABSORPTION OF COSMIC RADIO EMISSION IN THE IONOSPHERE

*E. A. Benediktov, N. A. Mitiakov*

Results are given of the numerical calculation of the absorption of radio waves on 18.6 megacycles per second when cosmic radio emission falling normal on the ionosphere. It is shown that during the daytime absorption in the *F* layer is 2—3 times higher than absorption in the lower layers of the ionosphere (*D* and *E*). The possibility is pointed out of determining the temperature in the vicinity of the *F* layer maximum using both the data of the absorption in the *F* layer and the total electron amount in the ionosphere  $\int Ndz$ .

## ВОЗМОЖНАЯ РОЛЬ РАССЕЯНИЯ ЗВУКА НА СЛОИСТЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ МОРСКОЙ СРЕДЫ В ОБРАЗОВАНИИ ПОЛЯ В ЗОНЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕНИ

Г. И. Приймак

Проведена оценка возможной величины поля рассеяния в зоне геометрической тени, обусловленного рассеянием прямого звука на слое, расположенном в освещенной зоне и содержащем слоистые неоднородности типа симметричного слоя Эпштейна. Проведенный расчет показывает, что в зависимости от степени «сплюснутости» неоднородностей (резкости границы) и размеров области, заполненной неоднородностями, можно получить довольно высокий уровень рассеянного (точнее, отраженного) поля по сравнению с полем объемного рассеяния и диффракционным полем.

Существование в море относительно тонких слоев, содержащих тепловые слоисто-вытянутые неоднородности, весьма вероятно. Это было показано в работах [1-3]\*. Внутри таких относительно тонких слоев—с толщиной до  $50 \div 100$  см—заключены тепловые неоднородности, представляющие собой сплюснутые по высоте и вытянутые в направлении среднего течения образования. Возможно, по-видимому, существование и более толстых слоев. Не исключено также, что такое представление является по существу тождественным системе внутренних волн разных порядков, в свою очередь покрытых еще более мелкой „рябью“.

Ниже сначала приводится известное выражение для коэффициента отражения электромагнитных волн от тонкого слоя определенной формы. В дальнейшем это выражение используется для учета отражения от отдельной вытянутой неоднородности, множество которых и заполняет статистическим образом рассматриваемый слой.

### 1. ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛН ЧЕРЕЗ ТОНКИЕ СЛОИ, РЕШЕНИЯ ЭПШТЕЙНА—РАУЭРА\*\*

При рассмотрении общего вида гипергеометрического дифференциального уравнения второго порядка Эпштейн находит преобразование, приводящее уравнение к волновому [7,9]. В общем случае наклонного падения плоской электромагнитной волны на слой, форма которого задается найденным преобразованием, для составляющей по оси  $z$  получается уравнение вида

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} + k_0 [n_1^2(z) + \varepsilon_0 \cos^2\alpha] \Psi = 0, \quad (1)$$

где  $\Psi(z)$ —вспомогательная функция, позволяющая определить амплитуды составляющих электромагнитного поля,  $n_1^2(z) = n^2(z) - \varepsilon_0$ ,  $\alpha$ —угол

\* Ранее физически подобные слои были обнаружены в тропосфере и ионосфере [4-6].

\*\* В настоящем рассмотрении, кроме основной литературы [7,8], мы пользовались также работами Троицкого [4,5], проделавшего подобные расчеты для распространения радиоволн в тропосфере. Раздел 4 почти полностью взят из работы [4], однако изложен применительно к нашему случаю.

падения волны на слой,  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость на границе слоя,  $k_0 = 2\pi/\lambda = \omega/c_0$  — волновое число,  $n(z)$  — коэффициент преломления.

Слой предполагается горизонтальным (плоскость  $xz$ ); ось  $z$  направлена вниз, волна падает сверху; нормаль к фронту волны лежит в плоскости  $xz$ . Форма слоя задается выражением, определяющим ход  $n(z)$  с высотой:

$$n^2(z) = n_0^2 - N \frac{e^{mz}}{1 + e^{mz}} - M \frac{4e^{mz}}{(1 + e^{mz})^2}, \quad (2)$$

где  $n_0$  — коэффициент преломления вне слоя,  $M, N, m$  — постоянные. Две основные формы слоя, описываемые этим выражением, показаны на рис. 1. Для симметричного слоя (кривая *a*)  $N=0, M \neq 0$ , для переходного слоя (кривая *b*)  $M=0, N \neq 0$ . „Глубина“ слоев соответственно равна  $M$  и  $N$ , а относительная ширина равна  $\lambda S$ , где  $S = 2k_0/m = 4\pi/\lambda m$  [7].

Если несколько варьировать преобразование (2), то можно получить ряд видоизменений основных вариантов слоев [7, 10]. Далее нас будет интересовать лишь симметричный слой.

Из общего решения уравнения (1) следует, что отношение амплитуд отраженной и падающей волн  $R$  (коэффициент отражения) для симметричного слоя определяется выражением:

$$|R| = \left\{ \left[ \operatorname{sh}^2(2p\pi \sin \varphi) / \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \sqrt{1 + 16p^2 M} \right) \right] + 1 \right\}^{-1/2}, \quad (3)$$

где  $p = S/2 = l/\lambda = k_0/m, m = 2\pi/\lambda m$ ,  $\varphi$  — угол скольжения,  $l$  — толщина (ширина) слоя, определенная как расстояние между точками пересечения касательных (проведенных через точки перегиба) с асимптотами (рис. 1).

При  $|M| \ll \sin^2 \varphi$  из (3) легко получить:

$$|R| \approx 4\pi p^2 |M| / \operatorname{sh}(2\pi p \sin \varphi) \quad (4)$$

и далее

$$|R| \approx 8\pi p^2 |M| \exp[-2\pi p \sin \varphi]. \quad (5)$$

Из (5) следует, что максимальный коэффициент отражения получается примерно при

$$p = p_{\text{онт}} = 1/\pi \sin \varphi. \quad (6)$$

Зависимость  $|R|$  от  $p$ , вернее  $|R||M|^{-1} \sin^2 \varphi$  от  $p/p_{\text{онт}}$  представлена на рис. 2\*.

Как видно, зависимость  $|R|$  от  $p$  имеет резонансный характер: при малых  $p$  величина  $|R|$  растет; при  $p > 1/\pi \sin \varphi$  величина  $|R|$  уменьшается.

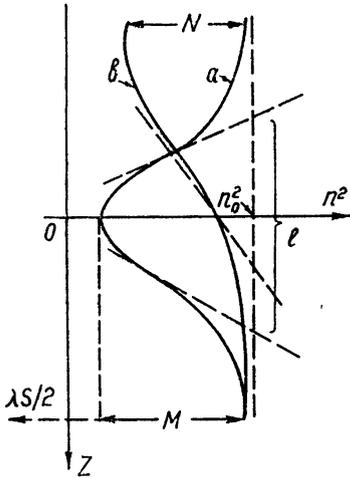


Рис. 1.

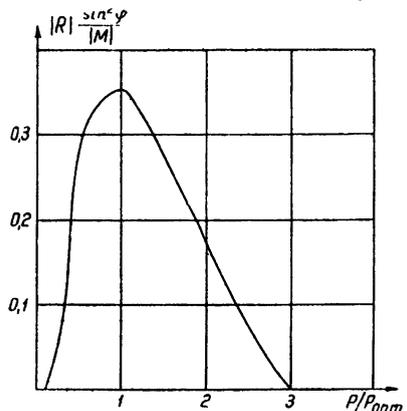


Рис. 2.

\* Рис. 2, 3 взяты из работы [4]

На графике рис. 3\* представлены кривые зависимости  $|R|$  от угла скольжения  $\varphi$  при разных значениях  $p=l/\lambda$  и  $|M|$ .

2 АКУСТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Все вышензложенное равно приложимо и к случаю акустических волн. Так, для вспомогательной функции  $\Psi(z)$ , связанной с амплитудой звукового давления  $p$  формулой  $\Psi = p/\sqrt{\rho}$  (где  $\rho$ —плотность), имеем уравнение, аналогичное уравнению (1)\*\*. Из рис. 1 и формулы (2) видно, что коэффициент  $M$  просто связан с квадратом максимального значения показателя преломления в слое  $n_m^2$  и квадратом показателя преломления в однородной среде  $n_0^2$ :

$$|M| = n_{1m}^2 = n_m^2 - n_0^2 \quad (7)$$

Выразим  $|M|$  через амплитуду тепловых неоднородностей (флуктуаций) морской среды, образующих симметричные слои, о которых идет речь. Так как

$$n_m = \frac{c_0}{c_0 + \Delta c_m}, \quad (8)$$

где  $c_0$ — скорость звука вне слоя (слоистой неоднородности),  $\Delta c_m$ —максимальная флуктуация скорости звука, то

$$|M| = |n_{1m}^2| = \left| \frac{c_0^2}{(c_0 + \Delta c_m)^2} - 1 \right| \approx \left| \frac{2\Delta c}{c_0 + 2\Delta c_m} \right| \quad (9)$$

Как известно,

$$\Delta c_m \approx b\Delta t_m, \quad (10)$$

где  $\Delta t_m$ —максимальная флуктуация температуры,  $b$ —численный коэффициент\*\*\*.

Величина  $\Delta t_m$  экспериментально может быть определена лишь как статистический параметр, получаемый из целой серии наблюдений над ансамблем различных по толщине  $l$  слоистых неоднородностей. Определяя  $\Delta t_m$  как разность температур, взятых на пространственном интервале, равном полутолщине слоя  $l/2$  (или на временном интервале, соответствующем данному пространственному), для среднего квадрата этой разности, являющегося по определению структурной функцией  $D(l/2)$ , в стационарном случае имеем:

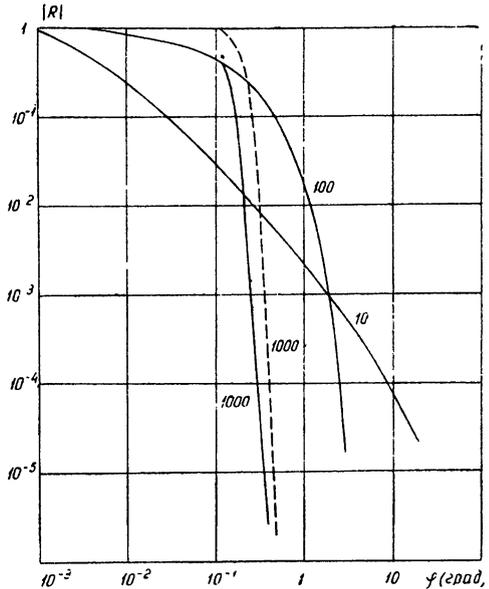


Рис. 3. Зависимость  $|R|$  от  $\varphi$ . Цифры над кривыми указывают значения  $p=l/\lambda$ : ———  $M=10^{-6}$ ; - - -  $M=10^{-6}$ . Значения  $|M| \approx 6 \cdot 10^{-4}$ ;  $6 \cdot 10^{-5}$ ;  $6 \cdot 10^{-6}$  соответствуют следующим величинам амплитуды тепловых флуктуаций  $(\Delta \bar{t}^2)^{1/2}$ : 0,1; 0,01; 0,001°C.

\* Рис 2, 3 взяты из работы [1]

\*\* Кроме того, для получения волнового уравнения в неоднородной среде необходимо пренебречь производными от плотности по координатам (см., например, [8])

\*\*\* Коэффициент  $b \approx 4,21$  по формуле для скорости звука Вуда и  $b \approx 4,62$  по формуле для скорости звука Дель Гроссо [11] ( $\Delta t_m$  берется при этом в °C, а  $\Delta c_m$  - в м сек<sup>-1</sup>).

$$\overline{\Delta t_m^2} = D(l/2) = (\overline{t_1 - t_2})^2 = 2\overline{\Delta t_0^2} [1 - R(l/2)], \quad (11)$$

где  $\overline{\Delta t_0^2}$  — средний квадрат амплитуды флюктуаций в точке пространства, взятый по ансамблю наблюдаемых слоистых неоднородностей,  $\overline{\Delta t_m^2}$  — средний квадрат максимальной амплитуды слоистой неоднородности, вычисленный как средний квадрат разности флюктуаций на расстоянии  $l/2$  по тому же ансамблю неоднородностей,  $R(l/2)$  — коэффициент корреляции флюктуаций температуры.

Рассмотрим далее конкретный случай. Допустим, что в среде, имеющей линейный градиент средней скорости звука с глубиной, есть область (слой), заполненная слоистыми неоднородностями симметричного типа. Если в такую среду поместить излучатель (вне слоя или внутри последнего), то в результате отражения от слоистых неоднородностей возможно некоторое засвечивание зоны тени.

Рассмотрим этот эффект. Не ограничивая общности, поместим для конкретности излучатель выше слоя, содержащего неоднородности. Тогда, обозначив угол скольжения какого-либо луча на границе области через  $\varphi_0$  и ведя отсчет толщины (глубины) от этой границы вниз по оси  $z$ , имеем известное из геометрической акустики соотношение для изменения угла скольжения по мере проникновения луча вглубь слоя:

$$\sin^2 \varphi \approx \sin^2 \varphi_0 + 2az, \quad (12)$$

где  $a$  — относительный градиент скорости звука. Для модуля коэффициента отражения от симметричной слоистой неоднородности, находящейся на глубине  $z$  и попавшей под луч, на основании формулы (5) имеем:

$$|R| = 8\pi p^2 |M| \exp(-2\pi p \sqrt{\sin^2 \varphi_0 + 2az}). \quad (13)$$

Если распределение неоднородностей масштаба  $l$  в пространстве считать случайным, имеющем постоянную среднюю плотность, то легко найти суммарный эффект многих неоднородностей. Действительно, если  $z_n$  — случайная координата слоистой неоднородности, то условием неперекрывания отдельных неоднородностей (одинакового размера) будет соотношение

$$z_n - z_{n-1} \geq l,$$

а условием равномерности распределения в среднем — равенство

$$\overline{z_n - z_{n-1}} = \alpha_0 l,$$

означающее, что неоднородности удалены в среднем на расстояние  $\alpha_0 l$  ( $\alpha_0$  — фактор заполнения). Тогда вероятность отражения на интервале  $dz$

$$\Phi = dz/\sigma_0 l,$$

а плотность вероятности попадания точки отражения в некоторый интервал глубин

$$p_0 = 1/\alpha_0 l.$$

Считая фазы волн, отраженных от отдельных неоднородностей масштаба  $l$ , случайными, можно сложить интенсивности этих волн и получить суммарное отраженное поле (амплитуду) от всех неоднородностей указанного размера. Если  $A_0$  — амплитуда падающей волны, то

$$A_l^2 = \int_0^{z_0} A_0^2 |R|^2 p_0 dz = A_0^2 \frac{64\pi^2 p^4}{\sigma_0 l} |M|^2 \int_0^{z_0} l^{-2\pi p \sqrt{\sin^2 \varphi_0 + 2az}} dz. \quad (14)$$

Беря интеграл по  $z$  и интегрируя далее по всевозможным размерам  $l$ , имеем:

$$\begin{aligned} \overline{A^2} = \overline{A_0^2} \frac{64\pi^2}{\sigma_0 a \lambda^4} & \left[ \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} |M|^2 l^3 \exp(-2\pi p \sin \varphi_0) \left( \frac{\sin \varphi_0}{2\pi p} + \frac{1}{4\pi^2 p^2} \right) dl - \right. \\ & \left. - \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} |M|^2 l^3 \exp(-2\pi p \sqrt{\sin^2 \varphi_0 + 2az_0}) \left( \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi_0 + 2az_0}}{2\pi p} + \frac{1}{4\pi^2 p^2} \right) dl \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Для вычисления интеграла (15) необходимо выразить  $|M|$  через  $l$  явным образом. Из формул (9)–(11) получим:

$$|M| \approx \left| \frac{2b \{2\overline{\Delta t_0^2} [1-R(l/2)]\}^{1/2}}{c_0 + 2b \{2\overline{\Delta t_0^2} [1-R(l/2)]\}^{1/2}} \right| = \left| \frac{2bD(l/2)}{c_0 + 2bD(l/2)} \right|, \quad (16)$$

где для  $R(l/2)$  или  $D(l/2)$ , вообще говоря, могут быть взяты различные выражения. Рассмотрим два случая:

$$1) \quad R(l/2) = \exp[-2l/l_0]; \quad (17)$$

$$2) \quad D(l/2) = c_1 l^{2/3}. \quad (18)$$

Первый случай соответствует часто употребляемой линейной экспоненте, второй—закону „двух третей Колмогорова—Обухова“.

Для  $|M|$  из (16) соответственно получаем: в первом случае\*

$$\begin{aligned} |M| &= \left| \frac{2b \Delta t_m}{c_0 + 2b \Delta t_m} \right| = \left| \frac{2b \sqrt{2} (\overline{\Delta t_0^2})^{1/2} [1-R(l/2)]^{1/2}}{c_0 + 2b \sqrt{2} (\overline{\Delta t_0^2})^{1/2} [1-R(l/2)]^{1/2}} \right| = \\ &= \left| \frac{2 \sqrt{2} b (\overline{\Delta t_0^2})^{1/2} [1 - l^{-2/l_0}]^{1/2}}{c_0 + 2 \sqrt{2} b (\overline{\Delta t_0^2})^{1/2} [1 - l^{-2/l_0}]^{1/2}} \right|, \end{aligned} \quad (19)$$

где значения  $\overline{\Delta t_0^2}$  и  $l_0$  определяются экспериментально; во втором случае

$$|M| = \left| \frac{2b [D(l/2)]^{1/2}}{c_0 + 2b [D(l/2)]^{1/2}} \right| = \left| \frac{2b \sqrt{c_1} l^{1/3}}{c_0 + 2b \sqrt{c_1} l^{1/3}} \right|, \quad (20)$$

где  $c_1$  выражается через среднее квадратичное значение флуктуаций температуры  $(\overline{\Delta t_0^2})^{1/2}$ . Для определения этой связи необходимо рассмотреть возможную конструкцию слоя, содержащего неоднородности.

### 3. СТРУКТУРА НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ

Рассмотрим горизонтальный слой, состоящий из статистического набора тепловых неоднородностей разных размеров  $l_i$  с разной интенсивностью  $\Delta t_i$ . При этом не исключено некоторое вырождение в том смысле, что разные по размерам  $l_i$  неоднородности могут обладать одинаковой интенсивностью  $\Delta t_i$  и одинаковые по размерам неоднород-

\* Может показаться, что использование корреляционной функции такого вида в данном случае неправомерно, ибо функция относится к сферически-симметричным неоднородностям. Однако степень вытянутости симметричной неоднородности может быть невелика, по-видимому, достаточно, чтобы продольный размер неоднородности был больше длины волны падающего излучения.

ности могут иметь разную интенсивность в зависимости от их положения в слое. При этом имеется в виду, что в слое нет горизонтальных градиентов интенсивности; слой представляет собой лишь „вертикальную неоднородность“, достаточно гладко переходящую в устойчивые средние параметры выше и ниже слоя. Это предположение основано на экспериментальном факте отсутствия в открытом море значительных горизонтальных градиентов температуры (по крайней мере, по сравнению с вертикальными).

Введем функцию  $F(z, l_i)$ , характеризующую распределение по сечению слоя (по вертикали  $z$ ) слоистых неоднородностей сорта  $l_i$ . Если форму этих отдельных неоднородностей описывать функцией  $f(z, l_i)$ , где  $z$  меняется в пределах  $\pm l_i/2$ , а не по всей толщине слоя, как в  $F(z, l_i)$ , то вне этого интервала функция  $f(z, l_i)$  тождественно равна нулю, а максимальное значение этой функции равно единице. В таком случае можно считать, что  $F(z, l_i)$  „набрана“ из функций  $f(z, l_i)$ , расположенных по оси  $z$  случайным образом, т. е. со сдвигом по  $z$  на случайную величину  $z_n$ . Тогда

$$F(z, l_i) = \sum_n f(z + z_n, l_i). \quad (21)$$

Продолжая „конструировать“ неоднородный слой, наложим некоторые ограничения на интервал изменения случайной величины  $z_n$ :

$$1) \quad z_n - z_{n-1} \geq l_i; \quad 2) \quad \overline{z_n - z_{n-1}} = \sigma_0 l_i. \quad (22)$$

Первое условие означает, что неоднородности (сорта  $l_i$ ) не перекрывают друг друга; второе — что эти неоднородности расположены в среднем на расстоянии  $\sigma_0 l_i$  друг от друга (т. е.  $\sigma_0$  является коэффициентом заполнения).

Далее очевидно, что среднее значение  $\overline{F(z, l_i)} = 0$  (как у стационарной случайной функции).

Если максимальную амплитуду неоднородности  $l_i$  обозначить через  $T_i$ , то амплитуда отдельной неоднородности распределена по оси  $z$  как

$$\Delta t_i(z) = T_i f(z, l_i), \quad (23)$$

т. е. „степень неоднородности“ убывает к краям последней. Действительно, из-за процессов молекулярной теплопроводности резкие градиенты температуры на малых пространственных интервалах быстро выравниваются. Таким образом, к „краям“ неоднородность постепенно сглаживается, сливаясь с окружающей „средней средой“. Такие представления нам кажутся физически весьма правдоподобными. Тогда для среднего квадрата амплитуды температурной флуктуации  $\overline{\Delta t_i^2}$  имеем:

$$\overline{\Delta t_i^2} = T_i^2 \overline{[F(z, l_i)]^2}, \quad (24)$$

где усреднение проводится по совокупности неоднородностей сорта  $l_i$ , случайным образом расположенных по  $z$ .

Суммируя по разным размерам неоднородностей  $l_i$ , в случаях дискретного и непрерывного спектров имеем соответственно:

$$\overline{\Delta t_0^2} = \sum_i T_i^2 \overline{[F(z, l_i)]^2}; \quad (25)$$

$$\overline{\Delta t_0^2} = \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} T_l^2 \overline{[F(z, l)]^2} dl, \quad (26)$$

где  $T_l$  можно назвать спектральной плотностью интенсивности флуктуаций температуры.

Для величины  $\overline{[F(z, l_i)]^2}$ , учитывая (26), имеем:

$$\overline{[F(z, l_i)]^2} = \overline{\left[ \sum_n f(z + z_n, l_i) \right]^2} = \sum_n \overline{[f(z + z_n, l_i)]^2} = \frac{1}{\sigma_0 l} \int_{-z_0 l/2}^{\sigma_0 l/2} f^2(z, l_i) dz = \gamma_0. \quad (27)$$

Эта операция по усреднению квадрата полной функции  $\overline{[F(z, l_i)]^2}$  проводится по всем значениям случайной величины  $z_n$ . Функция  $F(z, l_i)$  как было сказано, „набрана“ из отдельных неоднородностей—функций  $f(z + z_n, l_i)$ , которые в среднем сдвинуты по оси  $z$  на расстояние  $\sigma_0 l$ . Поэтому усреднение можно производить и на интервале  $\sigma_0 l$ . Средний квадрат функции  $F(z, l_i)$  при этом считается равным на всех интервалах  $\sigma_0 l^2$ . Все это справедливо, конечно, при условии случайного изменения аргумента  $z + z_n$  функции  $f(z + z_n, l)$  уже на интервале  $\sigma_0 l$ , что и имеет место по определению.

Так как в дальнейшем для получения симметричной формы отдельной слоистой неоднородности функцию  $f(z, l)$  необходимо выбирать в виде  $f(z/l)$ , то  $\gamma_0$  в (27) будет постоянной величиной. В интересующем нас случае мы выбрали  $\Delta t_m^2 = T_l^2 = D(l/2) = c_1 l^{2/3}$ . Тогда из (26) и (27) имеем:

$$\overline{\Delta t_0^2} = c_1 \gamma_0 \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} l^{2/3} dl = \frac{3}{5} c_1 \gamma_0 (l_{\max}^{5/3} - l_{\min}^{5/3}). \quad (28)$$

Таким образом,  $c_1$  определяется через средний квадрат суммарной амплитуды флюктуаций, вычисленной по области, содержащей неоднородности слоистого характера:

$$c_1 = \frac{5}{3} \frac{\overline{\Delta t_0^2}}{\gamma_0 (l_{\max}^{5/3} - l_{\min}^{5/3})}, \quad (29)$$

где  $\gamma_0$  определяется формулой (27) при заданной функции  $f(z/l)$ .

#### 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММАРНОЙ АМПЛИТУДЫ ОТРАЖЕНИЯ

Проведем вычисление выражения (15) для  $|M|$  вида (20). Интегралы можно условно записать так:

$$\overline{A^2} = A_0^2 D \left[ \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} l^2 \left( p' + \frac{q'}{l} \right) \exp(-ml) \frac{b^2 c_1 l^{2/3}}{(c_0 + 2b\sqrt{c_1} l^{1/3})^2} dl - \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} l^2 \left( p'' + \frac{q''}{l} \right) \exp(-m'l) \frac{b^2 c_1 l^{2/3}}{(c_0 + 2b\sqrt{c_1} l^{1/3})^2} dl \right]. \quad (30)$$

Вычисление этих интегралов можно провести до конца; однако приходится оперировать с довольно громоздкими выражениями. Поэтому сделаем некоторые допущения, значительно упрощающие вычисления и не занижающие искомую величину  $\overline{A^2}$ . Положим  $z_0 \rightarrow \infty$  и  $l_{\min} = 0$ ,  $l_{\max} = \infty$ , что можно сделать в связи с наличием в подынтегральном выражении экспоненциального множителя. Кроме того, при  $z_0 \rightarrow \infty$  угол скольжения волны близок к  $\pi/2$  и коэффициент отражения убы-

\* В этом случае суммирование в (27) проводить не нужно.

вает. При сделанных допущениях второй интеграл выражения (30) исчезает. Первый же интеграл дает следующее:

$$\begin{aligned} \overline{A^2} = & A_0^2 \frac{128\pi b^2 c_1}{\alpha_0 a \lambda^3} \left[ \int_0^{\infty} l^{\alpha_0} \frac{\exp(-2\pi \sin \varphi_0 l / \lambda) (\sin \varphi_0 + \lambda / 2\pi l)}{(c_0 + 2b\sqrt{c_1} l^{1/3})^2} dl \right] \approx \\ & \approx A_0^2 \frac{384 \pi b \sqrt{c_1} \sin \varphi_0}{\alpha_0 a \lambda^3 c_0} \left\{ \frac{2\pi \sin \varphi_0}{\lambda} \left[ \Gamma(3) \frac{\lambda^3}{(2\pi \sin \varphi_0)^3} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{2b\sqrt{c_1}}{c_0} \Gamma\left(\frac{10}{3}\right) \left(\frac{\lambda}{2\pi \sin \varphi_0}\right)^{10/3} \right] - 2 \left[ \frac{\lambda^2}{(2\pi \sin \varphi_0)^2} \Gamma(2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2b\sqrt{c_1}}{c_0} \left(\frac{\lambda}{2\pi \sin \varphi_0}\right)^{7/3} \Gamma\left(\frac{7}{3}\right) \right] \right\} + A_0^2 \frac{64b\sqrt{c_1}}{\alpha_0 a \lambda^2 c_0} \left\{ \frac{10\pi \sin \varphi_0}{\lambda} \left[ \left(\frac{\lambda}{2\pi \sin \varphi_0}\right)^2 \Gamma(2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2b\sqrt{c_1}}{c_0} \left(\frac{\lambda}{2\pi \sin \varphi_0}\right)^{7/3} \Gamma\left(\frac{7}{3}\right) \right] - 3 \left[ \frac{\lambda}{2\pi \sin \varphi_0} - \frac{2b\sqrt{c_1}}{c_0} \left(\frac{\lambda}{2\pi \sin \varphi_0}\right)^{4/3} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

где  $\Gamma$  -- гамма-функция и

$$c_1 = \frac{5}{3} \gamma_0 \left( \frac{\Delta t_0^2}{l_{\max}^3 - l_{\min}^3} \right). \quad (32)$$

Для вычисления  $\gamma_0$  необходимо задать функцию  $f(z, l) = f(z/l)$ . В рассматриваемом случае симметричной слоистой неоднородности весьма удобной является функция (см. [4])

$$f(z/l) = \text{ch}^{-2}(\pi z/l). \quad (33)$$

Тогда для  $\gamma_0$  имеем:

$$\gamma_0 = \frac{2}{\alpha_0 l} \int_0^{\alpha_0 l/2} \frac{dz}{\text{ch}^4(\pi z/l)} \approx \frac{4}{3\pi \alpha_0}. \quad (34)$$

Результаты конкретного расчета зависимости  $\overline{A^2}/A_0^2 = I_R/I_L$  (коэффициента отражения) от угла скольжения  $\varphi_0$  для указанных ниже начальных данных, весьма близких к реальным, приведены на рис. 4:  $a \approx 10^{-5} \text{ см}^{-1}$  (что соответствует  $a_l \approx 0,4 \text{ град} \cdot \text{м}^{-1}$ );  $\alpha_0 = 2$ ;  $l_{\max} = 100, 1000 \text{ см}$ ;  $l_{\min} = 10, 100 \text{ см}$ ;  $\gamma_0 \approx (4/3)\pi\alpha_0$ ;  $\Delta t_0^2 = (0,05^\circ\text{C})^2 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ град}^2$ ;  $b = 4,2 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{град}^{-1} = 420 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$ ;  $c_0 = 15 \cdot 10^4 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ ;  $\lambda = 10 \text{ см}$  ( $\nu = 15 \text{ кгц}$ ).

График рис. 4 указывает на относительно высокий уровень отраженного поля. Как и следовало ожидать, исходя из рис. 2 и 3, график рис. 4 указывает на уменьшение отражения при увеличении  $p=l/\lambda$ , а также с ростом угла скольжения.

Следует заметить, что оценочный расчет проведен, как указывалось выше, при ряде допущений, несколько завышающих результат. Однако приведенная оценка может служить для ориентировки. Она свидетельствует о целесообразности дальнейшего исследования задачи, рассмотренной в настоящей статье.

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность М. Г. Кольцовой, проведшей числовой расчет.

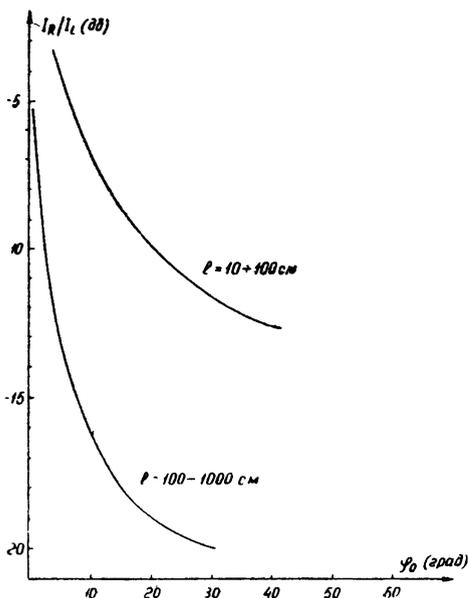


Рис. 4. Зависимость  $I_R/I_i$  от  $\varphi_0$  ( $\nu = 15 \text{ кгц}$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Г. И. Приймак, В. И. Киселев, Отчет Акустич ин-та АН СССР, 1956.
- 2 Г. И. Приймак, В. И. Киселев, Отчет Акустич ин-та АН СССР, 1957.
- 3 D. C. Whitmarsh, E. Skudrzyk and R. J. Urick, IASA, **29**, 1124 (1957).
- 4 В. Н. Троицкий, Радиотехника, **1**, 7 (1956); **5**, 3 (1956).
- 5 В. Н. Троицкий, Сб трудов НИИ, **1**, 3 (1956).
- 6 Д. М. Высоковский, Некоторые вопросы дальнего тропосферного распространения ультракоротких радиоволн, изд. АН СССР, М., 1958.
- 7 Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
- 8 Л. М. Бреховский, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
- 9 P. Epstein, Proc. Nat. Acad. Am., **16**, 627 (1930).
- 10 K. Rawer, Ann. Phys., **35**, 385 (1939).
- 11 П. П. Гансзон, Метеорология и гидрология, **4**, 30 (1958)

Акустический институт  
АН СССР

Поступила в редакцию  
28 июля 1960 г.

#### THE POSSIBLE ROLE OF SOUND SCATTERING ON THE STRATIFIED INHOMOGENEITIES OF SEA MEDIUM IN PRODUCING A FIELD IN THE GEOMETRICAL SHADOW ZONE

G. I. Priymak

An estimation has been made of the possible magnitude of a scattered sound field in the geometrical shadow zone, as a result of direct scattering on the layer situated in the illuminated zone and containing stratified inhomogeneities of the Epstein's symmetrical layer type. The estimation shows that depending on the degree of "flatness" of the inhomogeneities (sharpness of boundary) and on dimensions of the region filled with inhomogeneities, it is possible to obtain a fairly high level of scattered (or, to be more precise, reflected) field in comparison with the field of volume scattering and the diffraction field.

## К ТЕОРИИ КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ ВОЛН НА НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ф. Г. Басс

Рассматривается комбинационное рассеяние электромагнитных и звуковых волн на неровных поверхностях

Задача о рассеянии электромагнитных и звуковых волн на неровной поверхности рассматривалась неоднократно; для пологих неровностей наиболее полно рассеяние электромагнитных волн исследовалось Гансом [1], Андроновым и Леонтовичем [2].

Авторы работ [1] и [2] вычислили интенсивность электромагнитных волн, рассеянных молекулярными шероховатостями поверхности жидкости (образовавшимися за счет тепловых флуктуаций), без каких-либо предположений о диэлектрической проницаемости рассеивающей поверхности. Окончательный ответ в работах [1,2] получен именно для этого случая. Однако очень часто представляют интерес неровности поверхности, имеющие другую физическую природу, например, волны изгиба в тонких пластинах, гравитационные колебания в глубоких и мелких бассейнах и т. д. В связи с этим желательно получить решение задачи без детализации природы возникновения неровностей.

В настоящей работе выражение для интенсивности получается в виде, пригодном при любой природе неровностей поверхности. Естественно, что это решение эквивалентно полученному в [1,2] и переходит в него в случае молекулярных шероховатостей.

Примененный в настоящей статье метод возмущений в сочетании с нелокальными граничными условиями быстрее приводит к цели, нежели методы [1,2], и, по нашему мнению, имеет определенный методический интерес.

Наряду с интенсивностью рассеянного излучения исследуется и его частотный спектр. Показано, что при рассеянии на поверхности, изменяющейся по времени, имеет место эффект комбинационного рассеяния, аналогичный эффекту Мандельштама—Рамана.

Помимо рассеяния электромагнитных волн рассмотрено рассеяние звуковых волн. Построенная общая теория применена к ряду конкретных случаев.

В работе рассматриваются лишь пологие неровности, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{\max}^2, \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_{\max}^2 \ll 1; \quad \frac{2\pi \zeta_{\max}}{\lambda} \ll 1,$$

где  $z = \zeta(x, y)$  — форма рассеивающей поверхности,  $\lambda$  — длина волны падающего излучения. Наложённые ограничения указывают на малость высоты неровностей по сравнению с длиной волны и на пологость неровностей. Кроме того, мы будем предполагать, что частота изменения поверхности во времени много меньше частоты падающего излучения, что позволяет применить квазистатическое приближение.

Как будет видно ниже, сформулированная задача является част-

ным случаем более общей задачи об излучении волн токами, текущими по поверхности вещества с произвольной диэлектрической проницаемостью, к решению которой мы и перейдем.

### 1. ПОЛЕ НАД ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ С НЕОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрим сначала следующую электродинамическую задачу. На плоскости раздела  $z = 0$  двух сред (верхней и нижней), с комплексными диэлектрическими проницаемостями 1 и  $\varepsilon$  соответственно, заданы следующие граничные условия:

$$[n, E - E'] = \frac{4\pi}{c} J; \quad [n, H - H'] = \frac{4\pi}{c} j; \quad (n, E - \varepsilon E') = 4\pi\delta. \quad (1)$$

Здесь через  $E$  и  $H$  обозначены электрическое и магнитное поля в среде с диэлектрической проницаемостью 1, через  $E'$  и  $H'$  — те же величины в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ ;  $J$  — поверхностный магнитный ток,  $j$  — поверхностный электрический ток,  $n$  — нормаль в положительном направлении к плоскости  $z = 0$ ,  $\delta$  — поверхностная плотность заряда. Все величины зависят от времени по закону  $e^{-i\omega t} f(t)$ , где  $f(t)$  является функцией времени, настолько медленно меняющейся по сравнению с  $e^{-i\omega t}$ , что все расчеты можно вести для монохроматических волн, учитывая дополнительную зависимость от времени лишь в окончательных результатах.

Поле в полупространстве с диэлектрической проницаемостью, равной 1, находится весьма просто с помощью нелокальных граничных условий [3,4], которые надо обобщить на случай, когда есть поверхностные токи. Если известно поле в верхнем полупространстве, то поле в нижнем полупространстве с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  находится без труда.

Нелокальные граничные условия на плоскости при наличии поверхностных токов выводятся точно так же, как это сделано в [3,4], и имеют следующий вид:

$$[n, E(r)] + \frac{1}{2\pi} \int dr' \frac{e^{ik \frac{\varepsilon}{\varepsilon} |r-r'|}}{|r-r'|} \left\{ ik [n, [n, H]] - \frac{1}{\varepsilon} [n, \nabla E_z] \right\} = \frac{4\pi}{c} \left\{ J(r) + \frac{ik}{2\pi} \int dr' \frac{e^{ik \frac{\varepsilon}{\varepsilon} |r-r'|}}{|r-r'|} \left[ n, j + \frac{1}{k^2 \varepsilon} \nabla(\nabla j) \right] \right\}. \quad (2)$$

Здесь  $r$  и  $r'$  — двумерные векторы с компонентами  $x, y$  и  $x', y'$  соответственно,  $k = \omega/c$ ; величины под интегралом, аргумент которых не указан, зависят от переменной интегрирования  $r'$ . При выводе граничных условий (2)  $\delta$  было исключено из ответа с помощью уравнения непрерывности.

Граничное условие и однородные уравнения Максвелла полностью определяют нашу задачу. Уравнения Максвелла удобно взять в виде векторной формулы Грина на поверхности  $z = 0$ :

$$E(r) = \frac{1}{2\pi} \int dr' \{ ik [n, H] \Phi + [ [n, E], \nabla'_{\perp} \Phi ] + E_z \nabla'_{\perp} \Phi \}, \quad (3)$$

где

$$\nabla'_{\perp} = i \frac{\partial}{\partial x'} + j \frac{\partial}{\partial y'}; \quad \Phi = \frac{e^{ik |r-r'|}}{|r-r'|}$$

( $i$  и  $j$  — орты, направленные вдоль координатных осей  $x$  и  $y$ ).

Формулы (2) и (3) составляют систему интегральных уравнений с разностными ядрами для  $E$  и  $H$ .

Применяя преобразование Фурье к (2) и (3), получим обыкновенные векторные уравнения для  $E_x$  и  $H_x$  (индекс  $x$  обозначает компоненту Фурье от величины, при которой он стоит; например,  $E_x = \int dr E(r) e^{-ixr}$ ). Эта система легко решается, и для  $E_x$  получается такое выражение:

$$E_x = \frac{4\pi/c}{a(x) + \varepsilon^{1/2} b(x)} \left\{ \frac{x(1 - \varepsilon) \{ (n[x, J_x]) - b(x) \varepsilon^{-1/2} (j_x x) \}}{k^2 \varepsilon [a(x) + \varepsilon^{-1/2} b(x)]} - \varepsilon^{1/2} b(x) [n, J_x] - j_x + \frac{x}{k^2 \varepsilon} (x j_x) \right\} - \frac{4\pi n \{ (n[x, J_x]) - b(x) \varepsilon^{-1/2} (j_x x) \}}{c k [a(x) + \varepsilon^{-1/2} b(x)]}, \quad (4)$$

где

$$a(x) = (1 - x^2/k^2)^{1/2}, \quad b(x) = (1 - x^2/k^2\varepsilon)^{1/2}.$$

Электрическое поле в любой точке пространства, очевидно, определяется через  $E_x$  следующим образом:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx E_x e^{i(xr + i\sqrt{k^2 - r^2}z)}. \quad (5)$$

Если расстояние, на котором точка наблюдения находится от участка, где  $j$  и  $J$  существенно отличны от нуля, достаточно велико по сравнению с размерами этого участка и особенности  $E$ , не играют роли, то интеграл в формуле (5) можно вычислить методом перевала. Поскольку вычисление этого интеграла подробно описано в работе [5], мы сразу приведем ответ:

$$E(r) = \frac{k}{2\pi i} E_0 \frac{e^{ikR}}{R} \cos \theta + O\left[\frac{1}{(kR)^2}\right]. \quad (6)$$

В формуле (6) через  $R$  обозначено расстояние от участка, где  $J$  и  $j$  существенно отличны от нуля, до точки наблюдения; через  $E_0$  обозначена величина  $E_x$ , в которой вектор  $x$  положен равным  $v$  — вектору с компонентами  $k \sin \theta \cos \varphi$ ,  $k \sin \theta \sin \varphi$ ;  $\theta$  и  $\varphi$  — углы в сферической системе координат, под которыми видна точка наблюдения с участка, где  $j$  и  $J$  существенно отличны от нуля. Если таких участков несколько, то  $E(r)$  является суммой членов, соответствующих каждому участку.

Поле в нижнем полупространстве с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  определяется формулой, совершенно аналогичной (5), с той только разницей, что в (5)  $z$  нужно заменить на  $-z$  и  $E_x$  на  $E'_x$  ( $E'_x$  выражается через  $E_x$  при помощи граничных условий (1)). Поле на достаточно больших расстояниях получается с помощью метода перевала. В дальнейшем нас будут интересовать лишь поля в верхнем полупространстве.

Остановимся на особенностях подынтегрального выражения. Предположим, что  $J_x$  и  $j_x$  особенностей не имеют и  $|\varepsilon| > 1$ . В этом случае  $E_x$  имеет полюс, который, как показано в [5], существенен при  $|\varepsilon| \gg 1$  и малых углах скольжения.

Этот случай также может быть рассмотрен, если использовать методику [1] вычисления интеграла в формуле (5). Однако здесь ре-

зультаты получаются значительно проще, если использовать метод возмущений [6]. При этом может быть также учтена кривизна поверхности. Указанный вопрос заслуживает отдельного рассмотрения, и в настоящем сообщении мы им заниматься не будем.

Таким образом, точки наблюдения, находящиеся вблизи поверхности, из рассмотрения исключаются. Отметим только, что на достаточно больших расстояниях поле вблизи поверхности убывает не как  $R^{-1}$ , а как  $R^{-2}$ .

Перейдем к задаче о рассеянии звука. Обозначим через  $\psi$  потенциал звуковых волн. Неоднородные граничные условия для звука запишутся так:

$$\rho\psi \quad \rho'\psi' = p(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\psi'}{\partial z} = v(\mathbf{r}). \quad (7)$$

Здесь  $p(\mathbf{r})$  — величина, пропорциональная внешнему поверхностному давлению;  $v(\mathbf{r})$  — поверхностная нормальная составляющая скорости,  $\rho$  и  $\rho'$  — плотности вещества верхнего и нижнего полупространства.

Граничное условие и уравнение, которое надлежит решить, определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial z} + \frac{\rho}{2\pi\rho'} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{ik'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (\Delta'_\perp + k'^2)\psi &= \\ = v(\mathbf{r}) + \frac{1}{2\pi\rho'} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{ik'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (\Delta'_\perp + k'^2)p; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

В (8) и (9) введены следующие обозначения:

$$\Delta'_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}, \quad k = \omega/s, \quad k' = \omega/s',$$

$s$  и  $s'$  — скорости звука в верхнем и нижнем полупространстве соответственно.

Из (8) и (9) для  $\psi_z$  получается выражение

$$\psi_z = \frac{k'f'(\mathbf{x})p_x - i v_z \rho'}{\rho'kf(\mathbf{x}) + \rho k'f'(\mathbf{x})}, \quad (10)$$

где

$$f(\mathbf{x}) = (1 - x^2/k^2)^{1/2}, \quad f'(\mathbf{x}) = (1 - x^2/k'^2)^{1/2}.$$

## 2. РАССЕЯНИЕ ВОЛН НА НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В настоящем разделе мы покажем, что задача о рассеянии волн на неровной поверхности приводится к предыдущей.

Обозначим через  $N$  вектор нормали к поверхности  $z = \zeta(x, y)$ . Точные граничные условия на поверхности  $z = \zeta(x, y)$  для полей  $\tilde{E}$  и  $\tilde{H}$  запишутся так:

$$[N, \tilde{E} - \tilde{E}'] = 0; \quad [N, \tilde{H} - \tilde{H}'] = 0; \quad (\tilde{E} - \epsilon\tilde{E}', N) = 0. \quad (11)$$

В случае поверхности, удовлетворяющей неравенствам, приведенным в начале статьи, отклонение поверхности от плоскости можно рассматривать как возмущение. Искать поля  $\tilde{E}$  и  $\tilde{H}$  мы будем в виде:

$$\tilde{E} = E_0 + E, \quad \tilde{H} = H_0 + H, \quad \tilde{E}' = E'_0 + E', \quad \tilde{H}' = H'_0 + H'. \quad (12)$$

Здесь величины с индексом нуль соответствуют невозмущенным полям, величины без индексов -- поправкам за счет неровностей.

Разлагая (11) по степеням  $\zeta$  и переходя к граничным условиям на поверхности  $z = 0$ , получим для  $E$  равенства вида (1) с  $J$  и  $j$ , определяемыми выражениями:

$$J = \frac{c}{4\pi'} \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} [n, \nabla_{\perp} E_{0z} \zeta], \quad j = \frac{c}{4\pi} ik(1 - \varepsilon) E_{0\perp} \zeta. \quad (13)$$

Вектор  $E_{0\perp}$  имеет компоненты  $E_{0x}$  и  $E_{0y}$ . Формулы (13) отвечают соотношениям (7) работы [1]. Подставляя  $J$  и  $j$  из формул (13) в (4), найдем поле, рассеянное неровностями.

Для дальнейшего необходимо сделать какие-либо предположения о характере поля в нулевом приближении. Допустим, что рассеивающие неровности занимают площадь  $S$ , причем характерные размеры этой площади настолько малы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения, что для электромагнитного поля можно пользоваться формулой (6). Кроме того, будем считать падающую волну плоской:

$$E_n = A e^{-i(\omega t - k_{\perp} r - k_z z)} \quad (14)$$

(здесь  $k_{\perp}$  -- вектор с компонентами  $k \sin \alpha \cos \beta$ ,  $k \sin \alpha \sin \beta$ ). Тогда поле нулевого приближения, являющееся суммой падающей и отраженной от плоскости  $z = 0$  волн, можно записать так:

$$E_0 = e^{-i(\omega t - k_{\perp} r)} \sum_{l=x, y, z} (e^{-ik_z z} + V_l(\alpha, \beta) e^{ik_z z}) A_l i_l, \quad (15)$$

$V_l(\alpha, \beta)$  -- коэффициент отражения соответствующей компоненты,  $i_l$  -- орт вдоль  $l$ -ой оси.

На поверхности  $z = 0$

$$E_0 = P e^{-i(\omega t - k_{\perp} r)}, \quad P_l = [1 + V_l(\alpha, \beta)] A_l. \quad (16)$$

Подставляя (16) в выражение для  $J$  и  $j$ , окончательно для рассеянного поля на больших расстояниях находим:

$$E(r, t) = U(\mathbf{v}, \mathbf{k}_{\perp}) \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \xi(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{v}, t); \quad (17)$$

$$U = \frac{k(1 - \varepsilon) \cos \Theta}{2\pi [a(\mathbf{v}) + \varepsilon^{1/2} b(\mathbf{v})]} \left\{ \frac{(1 - \varepsilon) \mathbf{v} [\varepsilon^{-1} \nu^2 P_z - \varepsilon^{-1/2} kb(\mathbf{v}) (\mathbf{v} P_{\perp})]}{[a(\mathbf{v}) + \varepsilon^{-1/2} b(\mathbf{v})] k^2 \varepsilon} + \right. \\ \left. + \mathbf{v} b(\mathbf{v}) \varepsilon^{1/2} P_z - k \left[ P_{\perp} - \frac{\mathbf{v} (\mathbf{v} P_{\perp})}{k^2 \varepsilon} \right] \right\} - \\ - \frac{n(1 - \varepsilon) [\varepsilon^{-1} \nu^2 P_z - k \varepsilon^{-1/2} b(\mathbf{v}) (\mathbf{v} P_{\perp})]}{2\pi [a(\mathbf{v}) + \varepsilon^{-1/2} b(\mathbf{v})]} \cos \Theta; \quad (18)$$

$$\xi(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{v}, t) = \int_S d\mathbf{r}' e^{i(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{v})r'} \zeta(\mathbf{r}', t). \quad (19)$$

Для звуковых волн граничные условия на поверхности  $z = \zeta(x, y)$  запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial \psi}{\partial N} = \frac{\partial \psi'}{\partial N'}; \quad \rho \psi = \rho' \psi'. \quad (20)$$

Переходя снова на плоскость  $z = 0$ , получим граничные условия вида (7), где  $p(\mathbf{r})$  и  $v(\mathbf{r})$  имеют такой вид:

$$p(\mathbf{r}) = (\rho' - \rho) \frac{\partial \psi_0}{\partial z} z; \tag{21}$$

$$v(\mathbf{r}) = \frac{(\rho' - \rho)}{\rho'} \left[ \nabla (\zeta \nabla_{\perp} \psi_0) + \frac{k^2 \rho' - k'^2 \rho}{\rho' - \rho} \psi_0 z \right].$$

Если падающую волну можно считать плоской, с амплитудой  $\psi'_0$ , то рассеянное поле имеет вид:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = W(\mathbf{v}, \mathbf{k}_{\perp}) \frac{e^{i(kk - \omega t)}}{R} \xi(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{v}, t); \tag{22}$$

$$W(\mathbf{v}, \mathbf{k}_{\perp}) = \frac{k \cos \Theta (\rho' - \rho) \psi'_0}{2\pi [\rho' k f(\mathbf{v}) + \rho k' f'(\mathbf{v})]} \times \tag{23}$$

$$\times \left\{ \left( \mathbf{v} \mathbf{k}_{\perp} - \frac{k^2 \rho' - k'^2 \rho}{\rho' - \rho} \right) [V(\sigma, \beta) + 1] + f'(\mathbf{v}) k' k \cos \alpha [V(\alpha, \beta) - 1] \right\}.$$

### 3. КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ ВОЛН

Допустим, что поверхность  $\zeta(\mathbf{x}, y, t)$  является однородной и стационарной случайной функцией координат и времени. Тогда частотный спектр рассеянного излучения определяется преобразованием Фурье от временной корреляционной функции полей (см., например, [7]). Эти функции для скалярного и векторного полей запишутся следующим образом:

$$e_{ik}(\tau) = \overline{E_i(t + \tau) E_k^*(t)} = \frac{e^{-i\omega\tau}}{R^2} U_i(\mathbf{v}, \mathbf{k}_{\perp}) U_k(\mathbf{v}, \mathbf{k}_{\perp}) \times \tag{24}$$

$$\times \overline{\xi(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{v}, t + \tau) \xi^*(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{v}, t)};$$

$$\Psi(\tau) = \overline{\psi(t + \tau) \psi^*(t)} = \frac{e^{-i\omega\tau}}{R^2} |W(\mathbf{v}, \mathbf{k}_{\perp})|^2 \overline{\xi(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{v}, t + \tau) \xi(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{v}, t)}.$$

Черта в формуле (24) обозначает усреднение по времени или, что в силу эргодической теоремы одно и то же, по ансамблю. Статистические свойства  $e_{ik}(\tau)$  и  $\Psi(\tau)$  определяются величиной  $\overline{\xi(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{v}, t + \tau) \xi^*(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{v}, t)}$ . Такие средние неоднократно вычислялись (см., например, [8]); поэтому мы сразу приведем ответ:

$$\overline{\xi(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{v}, t + \tau) \xi^*(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{v}, t)} = SQ(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{v}, \tau);$$

$$Q(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{v}, \tau) = \int \int d\eta K(\eta, \tau) e^{i(k - \eta)\tau}; \tag{25}$$

$$K(\eta, \tau) = \overline{\zeta(\mathbf{r} + \eta, t + \tau) \zeta(\mathbf{r}, t)}.$$

Как вытекает из (24) и (25), для того чтобы найти частотный спектр  $e_{ik}(\tau)$  и  $\Psi(\tau)$ , необходимо найти  $Q(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{v}, \tau)$ . Последняя величина будет определена, если задаться тем или иным механизмом колебания рассеивающей поверхности.

Рассмотрим подробно излучение, рассеянное гравитационно-капиллярными волнами на поверхности тяжелой несжимаемой жидкости.

Потенциал в несжимаемой идеальной жидкости  $F$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta F = 0$  и следующим граничным условиям на поверхности  $z = 0$  [9]:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = - \left( g - \frac{\alpha}{\rho'} \Delta_{\perp} \right) \zeta, \quad (26)$$

где  $g$  — ускорение земного тяготения,  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения. Любую функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа, с помощью формулы Грина на поверхности  $z = 0$  можно записать так:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = - \frac{1}{2\pi} \int \frac{dr'}{|r - r'|} \Delta_{\perp} F.$$

Дифференцируя это соотношение по времени и подставляя  $\partial F / \partial z$  и  $\partial F / \partial t$  из (26), для  $\zeta$  получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \zeta(r, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dr'}{|r - r'|} \left( g - \frac{\alpha}{\rho'} \Delta_{\perp}' \right) \Delta_{\perp}' \zeta(r', t). \quad (27)$$

Чтобы получить уравнение для функции корреляции  $K(\eta, \tau)$ , домножим (27) на  $\zeta(r_1, t_1)$ , усредним и положим

$$r - r_1 = \eta, \quad r' - r_1 = \eta', \quad t - t_1 = \tau.$$

В результате получим:

$$\frac{\partial^2 K(\eta, \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\eta'}{|\eta - \eta'|} \left( g - \frac{\alpha}{\rho'} \Delta_{\perp}' \right) \Delta_{\perp}' K(\eta', \tau). \quad (28)$$

Теперь нетрудно найти  $Q(\tau)$ . Для этого нужно умножить левую и правую части уравнения (28) на  $e^{i(k_{\perp} - \nu)\eta}$  и проинтегрировать по  $\eta$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Прделав эти операции, найдем:

$$\frac{d^2 Q(\tau)}{d\tau^2} + |k_{\perp} - \nu| \left( g + \frac{\alpha}{\rho'} |k_{\perp} - \nu|^2 \right) Q(\tau) = 0, \quad (29)$$

откуда

$$Q(\tau) = (Q_1 e^{i\Omega\tau} + Q_2 e^{-i\Omega\tau}), \quad (30)$$

где

$$\Omega = \sqrt{|k_{\perp} - \nu| \left( g + \frac{\alpha}{\rho'} |k_{\perp} - \nu|^2 \right)}. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (24), найдем:

$$e_{ik}(\tau) = \frac{S}{R^2} U_i(\nu, k_{\perp}) U_k^*(\nu, k_{\perp}) [Q_1 e^{-i(\omega - \Omega)\tau} + Q_2 e^{-i(\omega + \Omega)\tau}];$$

$$\Psi(\tau) = \frac{S}{R^2} |W(\nu, k_{\perp})|^2 [Q_1 e^{-i(\omega - \Omega)\tau} + Q_2 e^{-i(\omega + \Omega)\tau}]. \quad (32)$$

Из (32) следует, что частотный спектр рассеянного излучения состоит из двух частот:

$$\omega_{\pm} = \omega \pm \Omega(k_{\perp} - \nu). \quad (33)$$

Эти частоты расположены симметрично относительно частоты падающего излучения  $\omega$  и сдвинуты на одинаковую величину  $\Omega(k_{\perp} - \nu)$ .

Такой спектр типичен для комбинационного рассеяния. Интенсивность рассеянного излучения  $I$  определяется формулами\*

$$I_{\text{эл}} = \text{Re} \frac{cS}{8\pi R^2} Q(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{v}, 0) (|U|^2 - U_l U_k^* \mu_l \mu_k);$$

$$I_{\text{зв}} = \frac{ck^2 S_S}{R^2} |W|^2 Q(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{v}, 0).$$
(34)

Здесь  $Q = Q_1 + Q_2$ ,  $\mu$  — единичный вектор в направлении наблюдения.

Выше мы рассматривали рассеяние волн на случайных колебаниях поверхности. Нетрудно видеть, что поле, рассеянное регулярными колебаниями поверхности, будет иметь тот же частотный спектр. Действительно, если регулярная функция  $\zeta(\mathbf{r}, t)$  разлагается в интеграл Фурье и площадь  $S$  настолько велика, что в выражении для  $\xi(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{v}, t)$  интегрирование без заметной ошибки можно распространить на всю плоскость, то вследствие идентичности уравнений (27) и (28)  $\xi(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{v}, t)$  будет удовлетворять уравнению (29). Вследствие этого временная зависимость рассеянного поля будет описываться формулой типа (32).

Все выше изложенное переносится без изменения на случай, когда форма поверхности удовлетворяет уравнению

$$\widehat{L}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_\perp\right)\zeta(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (35)$$

где  $\widehat{L}$  — произвольная функция своих аргументов, не зависящая от  $r$  и  $t$ . К виду (35) приводятся не только дифференциальные уравнения в частных производных, но и интегродифференциальные уравнения с различными ядрами и бесконечными пределами.

В указанном случае частотный спектр будет состоять из  $l$  гармоник с частотами  $\omega + \Omega_l$ , где  $\Omega_l$  являются корнями дисперсионного уравнения

$$\widehat{L}(-i\Omega, -i(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{v})) = 0.$$

Приведем некоторые примеры.

1. Рассеяние волн на колебаниях в жидкости в бассейне конечной глубины:

$$\widehat{L}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_\perp\right) = \nabla_\perp^2 - \frac{1}{gh} \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad \Omega = \pm \sqrt{gh} |\mathbf{k}_\perp - \mathbf{v}|$$

(здесь  $h$  — глубина бассейна).

2. Рассеяние на волнах изгиба тонкой пластины:

$$\widehat{L}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_\perp\right) = \rho_n \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma a^2}{12(1-\sigma)} \nabla_\perp^4;$$

$$\Omega = \pm \sqrt{\frac{a^2 \gamma}{12\rho_n(1-\sigma)}} |\mathbf{k}_\perp - \mathbf{v}|^2$$

(здесь  $\rho_n$  — плотность пластины,  $\gamma$  — модуль Юнга,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона,  $a$  — толщина пластины).

\* Величина  $Q$ , входящая в (34), определяется условиями появления шероховатостей. Так, например, в работах [1,2] эта величина находится из закона равнораспределения

## 3. Рассеяние на колебаниях мембраны:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{\perp}\right) = \nabla_{\perp}^2 - \frac{\rho_{\nu} b}{T} \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad \Omega = \pm \sqrt{\frac{\rho_{\nu} b}{T}} |k_{\perp} - \nu|$$

(здесь  $\rho_{\nu}$  — плотность,  $b$  — толщина и  $T$  — натяжение мембраны).

Для того, чтобы развитая теория была справедлива в трех последних случаях, глубина затухания электромагнитной волны должна быть меньше  $h$ ,  $a$ ,  $b$ , так как иначе нелокальные граничные условия в приведенной форме неприменимы.

Отметим, что в направлении зеркального отражения (при  $k_{\perp} = -\nu$ )  $\Omega = 0$ .

Частотный спектр рассеянного излучения может быть получен из элементарных квантовомеханических соотношений. Пусть на плоскости  $z = 0$  распространяются колебания с импульсом  $h\mathbf{x}$  и энергией  $h\Omega(\mathbf{x})$ . Если на эту поверхность падают волны, взаимодействующие с этими колебаниями, то законы сохранения энергии и импульса запишутся так:

$$\omega' = \omega + \Omega(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \mathbf{k}_{\perp} - \nu.$$

Здесь  $\omega'$  — частота рассеянного излучения,  $\omega$  — частота падающего излучения,  $\mathbf{k}_{\perp}$  и  $\nu$  — составляющие волновых векторов падающего и рассеянного поля в плоскости  $z = 0$ . Подставляя  $\mathbf{x}$  в выражение для  $\omega'$ , снова получим:

$$\omega' = \omega + \Omega(\mathbf{k}_{\perp} - \nu).$$

Вообще говоря, спектр векторов  $\mathbf{x}$  может быть дискретным. Тогда падающее излучение будет рассеиваться лишь в направлениях  $\nu$ , которые определяются соотношением

$$\nu = \mathbf{k}_{\perp} + \mathbf{x}_n, \quad (36)$$

с частотами

$$\omega' = \omega + \Omega(\mathbf{x}_n).$$

Соотношение (36) является аналогом закона Брэгга—Вульфа для комбинационного рассеяния на поверхности.

Автор выражает искреннюю благодарность Э. А. Канеру за ценные дискуссии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. Gans, Ann. Phys., **79**, 204 (1926).
2. А. А. Андронов и М. А. Леонтович, Собр. соч. А. А. Андропова, изд. АН СССР, М., 1956, стр. 5.
3. Ф. Г. Басс, Радиотехника и электроника, **5**, 389 (1960).
4. Ф. Г. Басс, Радиотехника и электроника (в печати).
5. Л. М. Бреховский, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1960.
6. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, М., 1953.
7. В. Б. Давенпорт и В. Л. Руг, Введение в теорию случайных сигналов и шумов, ИЛ, М., 1960.
8. Ф. Г. Басс, В. Г. Бочаров, Радиотехника и электроника, **3**, 180 (1958).
9. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.

Харьковский институт  
радиофизики и электроники АН УССР

Поступила в редакцию  
2 июля 1960 г.

## CONTRIBUTION TO THE THEORY OF THE COMBINATION SCATTERING OF WAVES ON A ROUGH SURFACE

F. G. Bass

The combination scattering of electromagnetic and sound waves on rough surfaces is considered.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ЭКВИВАЛЕНТНОГО РАДИУСА ЗЕМЛИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ИНТЕНСИВНОЙ РЕФРАКЦИИ РАДИОВОЛН

С. Я. Брауде, И. Е. Островский, Ф. С. Санин

Предлагается применить известный метод спрямления лучей для учета сферичности Земли (при расчете поля по отражательным формулам) к случаю положительной рефракции  $dn/dh < -1,5710 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$  ( $n$ —показатель преломления,  $h$ —высота над поверхностью Земли), ввести понятие отрицательного эквивалентного радиуса Земли. Задача сводится к плоской введенном соответствующих приведенных высот. Приводятся формулы и расчетные кривые, связывающие высоты интерференционных максимумов со значениями отрицательного эквивалентного радиуса на заданном расстоянии от источника излучения. Все расчеты ведутся в предположении о постоянстве градиента показателя преломления с высотой в достаточно высоком слое атмосферы.

Как известно [1-3], для достаточно коротких радиоволн в тех случаях, когда высоты корреспондирующих пунктов велики по сравнению с длиной волны, расчет напряженности поля в точке приема (в области прямой видимости) может быть проведен, исходя из методов геометрической оптики, по отражательной формуле, в которой рефракцию и кривизну Земли можно учесть, заменяя действительный радиус Земли  $a$  эквивалентным радиусом  $a_3$ , а высоты передающей и приемной антенн  $h_1$  и  $h_2$ —приведенными высотами  $h'_1$  и  $h'_2$ , где

$$h'_1 = h_1 - r_1^2/2a_3; \quad h'_2 = h_2 - r_2^2/2a_3. \quad (1)$$

Здесь  $r_1$  и  $r_2$ —расстояния от передатчика и приемника до точки, в которой отраженный луч касается Земли (см. рис. 1).

Для вычисления  $r_1$  и  $r_2$  в случае выпуклой сферической Земли легко получить следующие формулы [4] (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{h_1 - r_1^2/2a_3}{r_1} = \frac{h_2 - r_2^2/2a_3}{r_2}; \\ r_1 + r_2 &= r, \end{aligned} \quad (2)$$

которые сводятся к кубическому уравнению относительно  $r_1$  и  $r_2$ . В ряде случаев можно пользоваться приближенными значениями  $r_1$  и  $r_2$ . Так, в случае, когда  $\gamma \rightarrow 0$  [4],  $r_1$  и  $r_2$  могут быть с достаточной точностью вычислены по формулам

$$r_1 = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}} r; \quad r_2 = \frac{\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}} r, \quad (3)$$

и отражательная формула для напряженности поля принимает вид:

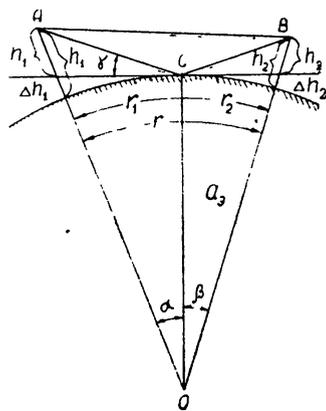


Рис. 1.

$$E = \frac{346 \sqrt{P_{\text{квт}} D}}{r_{\text{км}}} \left| \sin \left[ \frac{2\pi h_1 h_2}{r \lambda} \left( 1 - \frac{r^2}{r_r^2} \right)^2 \right] \right| \text{ мВ} \cdot \text{м}^{-1}, \quad (4)$$

где

$$r_r = \sqrt{2a_s} (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \quad (5)$$

— дальность радиогоризонта. Формула (4) справедлива в пределах изменения  $r$  примерно от  $0,4 r_r$  до  $0,7 r_r$  при рефракции, соответствующей выпуклой сферической Земле.

Оценим величину изменения дальности действия радиолокационной станции в зависимости от значения  $a_s$ .

Пусть точечная цель находится в освещенной зоне в пределах нижней части лепестка. Для определения величины отраженного от этой цели сигнала  $S$  можно воспользоваться выражением

$$S = \frac{PD^2 \lambda^2 \sigma}{64\pi^3 r^4} \left\{ 2 \sin \left[ \frac{2\pi h_1 h_2}{r \lambda} \left( 1 - \frac{r^2}{r_r^2} \right)^2 \right] \right\}^4, \quad (6)$$

где  $\sigma$  — эффективная отражающая поверхность цели.

Допустим, что  $S_{\text{мин}}$  — минимально различимая станцией мощность отраженного от цели сигнала. Тогда  $r$  есть максимальное расстояние, на котором данная цель обнаруживается радиолокационной станцией при рефракции, оцениваемой значением эквивалентного радиуса Земли  $a_s$ . При стандартной рефракции дальность обнаружения этой же цели  $r_c$  может быть получена из выражения (6) заменой  $r_r$  на

$$r_{rc} = \sqrt{2a_{s,c}} (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}),$$

где  $r_{rc}$  — дальность радиогоризонта при стандартной рефракции, для которой эквивалентный радиус Земли  $a_{s,c}$  принимается равным 8500 км.

Для отношения  $r/r_c$  имеем из (6):

$$\frac{r}{r_c} = \frac{\sin \left[ (2\pi h_1 h_2 / r \lambda) (1 - r^2 / r_r^2)^2 \right]}{\sin \left[ (2\pi h_1 h_2 / r_c \lambda) (1 - r_c^2 / r_{rc}^2)^2 \right]}. \quad (7)$$

В случае углов, меньших  $18^\circ$ , когда синус можно заменить его аргументом, выражение (7) упрощается и принимает вид:

$$\frac{r}{r_c} = \frac{1 - r^2 / r_r^2}{1 - r_c^2 / r_{rc}^2}. \quad (7a)$$

Если учесть, что (6) справедливо при  $r/r_r \leq 0,7$  и  $r_c/r_{rc} \leq 0,7$ , то из (7a) следует, что отношение  $r/r_c$  будет иметь максимальное значение при  $r_r \rightarrow \infty$  и не может быть больше 2.

Из приведенных соображений ясно, что изменение рефракции от стандартной до соответствующей „плоской Земле“ может увеличить дистанцию обнаружения низких целей, обычно теряемых радиолокационными станциями на расстояниях меньше  $0,7 r_r$ , не более чем в два раза.

Хотя принятое для учета рефракции понятие эквивалентного радиуса Земли  $a_s$  основывается на лучевой трактовке, Фок [5] показал, что в ряде случаев это понятие применимо и в области тени и полутени, в которых понятие луча теряет смысл. Оказывается, что эквивалентным радиусом Земли можно пользоваться в диффракционных формулах на любых расстояниях, если параметр

$$\delta = \frac{\lambda^{2/3}}{2h_0} \left( \frac{a_3}{\pi^2 \varepsilon} \right)^{1/3}$$

равен нулю или мал (здесь  $h_0$ —высота, на которой существенно изменение градиента показателя преломления). Из выражения для  $\delta$  видно, что при одинаковом распределении показателя преломления (одинаковом  $h_0$ ) применение  $a_3$  будет тем более оправдано, чем короче длина радиоволн  $\lambda$ .

Итак, влияние рефракции в тропосфере в случае некоторых „средних“ условий может быть учтено заменой истинного радиуса Земли  $a$  на эквивалентный радиус  $a_3$ , положительный или отрицательный в зависимости от значения градиента показателя преломления атмосферы  $dn/dh$ , причем отрицательное значение эквивалентного радиуса Земли соответствует случаям, когда градиент показателя преломления  $dn/dh < 1,57 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-1}$  в достаточно высоком слое атмосферы\*.

Возможность применения понятия отрицательного эквивалентного радиуса Земли представляет практический интерес, поскольку в случае сверхрефракции подсчет поля связан с очень сложным и громоздким решением волнового уравнения, особенно для области геометрической видимости. Вместе с тем, в литературе широко применяют для оценки рефракции понятие положительного эквивалентного радиуса Земли и не используют понятие отрицательного  $a_3$ .

Ниже приводится количественная оценка интенсивной положительной рефракции радиоволн с помощью отрицательного эквивалентного радиуса Земли. Как показывает опыт, лепестковая структура поля на сантиметровых и миллиметровых радиоволнах сохраняется еще при очень интенсивной положительной рефракции. Поэтому аналогично тому, как это сделано для случая положительного  $a_3$ , можно вывести формулы, позволяющие по значению высоты какого-либо интерференционного максимума или минимума определить значение  $a_3 < 0$ . При таком выводе предполагается, что изменение показателя преломления с постоянным значением градиента  $dn/dh < -1,57 \cdot 10^{-7}$  простирается на значительную высоту, т. е. мы имеем дело с высоким волноводом. Очевидно, что при такой рефракции выпуклая Земля должна быть заменена „вогнутой“.

Аналогично тому, как это сделано при выводе формулы (4), подсчет поля при распространении над „вогнутой“ сферической Землей может быть сведен к расчету поля над „плоской“ Землей путем замены истинных высот передающей и приемной антенн  $h_1$  и  $h_2$  приведенными высотами  $h'_1$  и  $h'_2$ . Пользуясь рис. 2, получим:

$$h'_1 = h_1 + \Delta h_1; \quad h'_2 = h_2 + \Delta h_2; \quad (8)$$

$$r_1 = \sqrt{2a_3 \Delta h_1}; \quad r_2 = \sqrt{2a_3 \Delta h_2}$$

Применяя теорему синусов и учитывая малость углов  $\alpha$  и  $\beta$ , найдем

$$\text{tg } \gamma = \frac{h_1 + r_1^2/2a_3}{r_1} = \frac{h_2 + r_2^2/2a_3}{r_2}; \quad (9)$$

$$r_1 + r_2 = r.$$

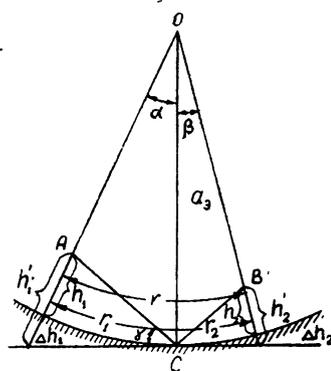


Рис. 2

\* Значение  $dn/dh = -1,57 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-1}$  соответствует  $a_3 \rightarrow \infty$ .

Условие для интерференционных максимумов принимает вид:

$$\frac{2\pi h_1' h_2'}{r\lambda} = \frac{2\pi}{r\lambda} \left( h_1 + \frac{r_1^2}{2a_3} \right) \left( h_{2\text{макс}} + \frac{r_2^2}{2a_3} \right) = (1 + 2k) \frac{\pi}{2}, \quad (10)$$

где  $k=0,1,2, \dots$ .

Из (9) и (10) можно путем несложных вычислений рассчитать для данной длины волны и высоты передающей антенны (на заданном расстоянии между передающей и приемной антеннами) высоты максимумов лепестков в зависимости от значения отрицательного  $a_3$ .

Выведем соответствующие расчетные формулы. Из (9) имеем:

$$h_2 = \left( \frac{h_1}{r_1} + \frac{r_1 - r_2}{2a_3} \right) r_2. \quad (11)$$

Подставив это значение  $h_2$  в (10), получим:

$$\left( h_1 + \frac{r_1^2}{2a_3} \right)^2 = \frac{(1 + 2k) r \lambda}{4} \frac{r_1}{r_2}. \quad (12)$$

Введем обозначение

$$r_2 = mr. \quad (13)$$

Тогда (12) переписывается в виде:

$$\left[ h_1 + \frac{r^2(1-m)^2}{2a_3} \right]^2 = \frac{(1 + 2k)r(1-m)\lambda}{4m}. \quad (12a)$$

Придавая  $m$  различные значения, из (12a) легко вычислить значения  $a_3$ ; по известному  $a_3$  из (11), которое с помощью (13) приводится к виду

$$h_{2\text{макс}} = \frac{h_1 m}{1-m} + \frac{r^2 m(1-2m)}{2a_3}, \quad (11a)$$

вычисляется  $h_{2\text{макс}}$ .

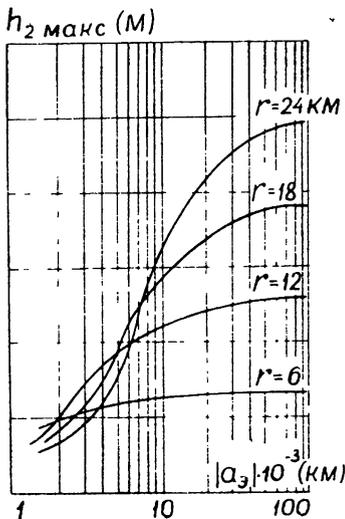


Рис. 3.

На рис. 3 приведены значения  $h_{2\text{макс}}$  — высот третьих интерференционных максимумов ( $1 + 2k = 5$ ) на  $\lambda = 3,2$  см при высоте передающей антенны  $h_1 = 18$  м для четырех расстояний между корреспондирующими пунктами  $r$ : 6, 12, 18 и 24 км. На малом расстоянии от передатчика ( $r = 6$  км) высота интерференционного максимума заметно отличается от значения  $h_{2\text{макс}}$  для  $a_3 \rightarrow \infty$  только при очень малых  $|a_3|$ , что соответствует весьма интенсивной положительной рефракции. При больших значениях  $r$  имеется некоторый интервал значений  $a_3$ , при которых  $h_{2\text{макс}}$  резко снижается.

Пользуясь рисунками, подобными рис. 3, можно построить семейство кривых, характеризующих положение какого-либо интерференционного максимума  $h_{2\text{макс}}$  в зависимости от рас-

\* Этот метод подсчета значений  $h_{2\text{макс}}$  может быть применен и в случае положительных значений  $a_3$ , что освобождает от необходимости решения кубического уравнения.

стояния  $r$  при различных значениях отрицательного  $a_3$ . На рис. 4 приведены вычисленные таким образом значения  $h_{2\text{макс}}$  в зависимости от  $r$  при различных значениях эквивалентного радиуса Земли — положительных и отрицательных. Подсчет произведен для третьего интерференционного максимума при высоте передающей антенны 18 м ( $\lambda=3,2$  см;  $1+2k=5$ ).

При отрицательных значениях  $a_3$  высота интерференционного максимума сначала увеличивается с расстоянием, затем начинает снижаться. По мере увеличения степени рефракции уменьшение высоты интерференционного максимума начинается с более близких расстояний и меньших высот.

Полученными соотношениями можно воспользоваться для оценки изменения дальности действия радиолокационной станции

при рефракции, соответствующей отрицательному эквивалентному радиусу Земли. Величина сигнала  $S$ , отраженного от точечной цели, определится снова из формулы (6), в которой приведенные высоты радиолокационной станции и цели  $h_1$  и  $h_2$  определяются соотношениями (8) и (9).

Если  $r$  есть максимальное расстояние, на котором обнаруживается цель при заданной рефракции, а  $r_c$  — максимальная дальность обнаружения этой же цели при стандартной рефракции, то аналогично (7) получим:

$$\frac{r}{r_c} = \frac{\sin(2\pi h_1' h_2' / r_c \lambda)}{\sin[(2\pi h_1 h_2 / r_c \lambda) (1 - r_c^2 / r^2)^2]} \quad (14)$$

Задавшись значениями  $h_1$ ,  $h_2$  и  $r_c$ , можно вычислить  $r/r_c$ , т. е. превышение дальности обнаружения точечной цели радиолокационной станцией при интенсивной рефракции по отношению к дальности обнаружения  $r_c$  при стандартной рефракции для различных значений отрицательного  $a_3$ .

Обозначим

$$\sin(2\pi h_1' h_2' / r_c \lambda) = \sin(\zeta \pi / 2) \quad (15)$$

В зависимости от значения  $a_3$  для заданных  $h_1$  и  $h_2$  параметр  $\zeta$  будет принимать различные значения; соответственно будет изменяться и значение  $r/r_c$ . Максимальное значение  $r/r_c$  будет при  $\zeta=1$ .

Вычисление  $r/r_c$  можно производить в следующем порядке:

1) по заданным значениям  $h_1$  и  $h_2$  определяем

$$r_{rc} = 4,1 (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2});$$

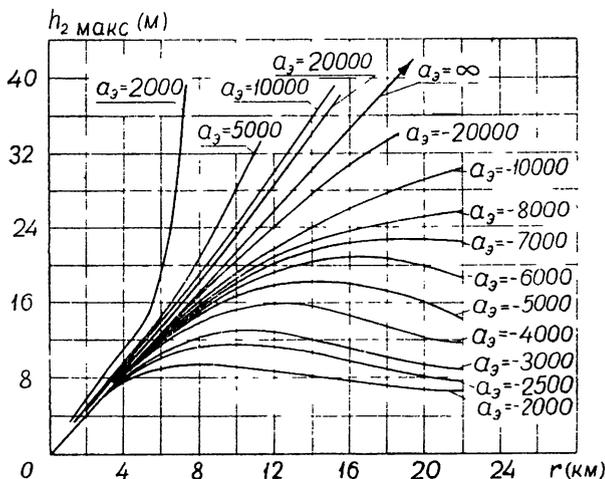


Рис. 4

2) задавшись значением  $r_c/r_{1c} = \gamma$ , определяем

$$r_c = \sigma r_{1c};$$

3) вычисляем

$$\sin [(2\pi h_1 h_2 / r_c \lambda) (1 - r_c^2 / r_{1c}^2)]^2 = A;$$

4) задавшись значением  $\zeta$ , находим  $r = A^{-1} r_c \sin(\pi \zeta / 2)$ ;

5) из соотношения

$$\left[ h_1 + \frac{(1-m)^2 r^2}{2a_3} \right]^2 = \frac{\zeta r \lambda (1-m)}{4m}, \quad (14a)$$

зная  $\zeta$  и  $r$ , вычисляем  $a_3$  для различных  $m = r_2/r$ ;

6) зная  $m$  и соответствующее  $a_3$ , из

$$h_2 = m h_1 / (1-m) + m(1-2m) r^2 / 2a_3, \quad (11a)$$

определяем  $h_2$ , соответствующее данному значению  $a_3$ , и строим кривую  $h_2$  в зависимости от  $a_3$ ;

7) на этой кривой находим значение  $a_3$ , соответствующее выбранной нами высоте цели  $h_2$ .

В таблице 1 приведены для примера результаты подсчета  $r/r_c$  при различных значениях отрицательного  $a_3$  для высот радиолокационной станции и точечной цели 18 и 6 м соответственно.

Таблица 1

| $h_1$ (м) | $h_2$ (м) | $r_c/r_{1c}$ | $a_3$ (км) | $r_c$ (км) | $r$ (км) | $r/r_c$ | $\zeta$ |
|-----------|-----------|--------------|------------|------------|----------|---------|---------|
| 18        | 6         | 0,8          | - 600 000  | 21,9       | 53,6     | 2,45    | 0,2     |
| "         | "         | "            | - 100 000  | "          | 140      | 6,4     | 0,6     |
| "         | "         | "            | - 80 000   | "          | 165      | 7,5     | 0,8     |
| "         | "         | "            | - 65 000   | "          | 174      | 7,9     | 1       |

Для заданных высот радиолокационной станции (18 м) и цели (6 м) максимальная дальность обнаружения цели  $r_{\max} = 174$  км имеет место при рефракции, соответствующей значению  $a_3 = -65000$ . При большей степени рефракции максимальная дальность обнаружения цели не увеличится. Отраженный от цели сигнал будет по мере удаления цели осциллировать, пока  $\zeta$  не станет меньше 1. Для значений  $r$ , при которых  $|\sin(\zeta\pi/2)| = 0$ , сигнал от цели будет пропадать, а при  $|\sin(\zeta\pi/2)| = 1$  сигнал будет проходить через максимум.

Как следует из приведенных соотношений, превышение дальности обнаружения цели зависит не только от степени рефракции, но также и от высот радиолокационной станции и цели. Это имеет место как при положительных, так и при отрицательных значениях  $a_3$ .

В заключение следует указать, что в основе проведенного рассмотрения лежит предположение о постоянстве градиента показателя преломления в достаточно высоком слое атмосферы. В какой мере такая идеализация допустима, можно будет установить, сравнив полученные выводы с экспериментальными данными.

Считаем своим долгом выразить благодарность Н. Н. Комарову за помощь в проведении вычислений.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Б. А. Введенский, Распространение ультракоротких волн, Связьиздат, М., 1938
- 2 А. Н. Шукин, Распространение радиоволн, Связьиздат, М., 1940.
- 3 Б. А. Введенский и М. И. Пономарев, Изв. АН СССР, сер. технич., 9, 1201 (1946)
- 4 М. П. Долуханов, Распространение радиоволн, Связьиздат, М., 1951
- 5 В. А. Фок, Исследование по распространению радиоволн, изд. АН СССР, М., 1948.

Институт радиопизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
10 июня 1960 г.

### THE USE OF THE CONCEPT OF NEGATIVE EQUIVALENT EARTH'S RADIUS FOR ESTIMATING THE STRONG REFRACTION OF MICRO WAVES

*S. Ya. Braude, I. E. Ostrovsky, F. S. Sanin*

The concept of the negative equivalent Earth's radius is introduced in the well known rays alignment method to be applied to the case of the positive refraction:  $dn/dh < -1,57 \cdot 10^{-7} m^{-1}$  ( $n$ —being the refractive index,  $h$ —height above Earth's surface). The Earth's sphericity is taken into account and Frenel's formulas are used for the field calculations. The problem comes to plane boundary one by the introduction of the corresponding reduced heights. Formulas and curves are given for the heights of the interference maximums versus the values of the negative equivalent radius at the given distance from the source of radiation. All calculations are carried out with the assumption that there exists a constant gradient of the refractive index in a sufficiently thick atmospheric layer.

---

## О ЗАКОНЕ СОХРАНЕНИЯ И ВЫРАЖЕНИИ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ

В. Л. Гинзбург

Обсуждается вопрос о законе сохранения энергии в электродинамике и выражении для плотности энергии в случае поглощающей диспергирующей среды. Феноменологические выражения сравниваются с результатами, получающимися для плазмы при использовании кинематического уравнения, а также уравнения движения для механической модели с трением. Кратко затронут вопрос о скорости распространения сигналов в поглощающей среде.

Несмотря на то, что вопрос о законе сохранения и выражении для плотности энергии в электродинамике принадлежит к числу основных, здесь до сих пор имеются известные неясности. Последнее относится, главным образом, к случаю поглощающей диспергирующей

среды. Так, известное выражение  $W_F = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^t E(\partial D/\partial t) dt$ , даже когда

оно приводится к виду  $\text{const} \cdot E^2$ , при наличии поглощения не может рассматриваться как полная плотность энергии (достаточно сказать, что выражение  $W_E$  может быть отрицательным; см. ниже). Более того, в наиболее современном курсе [1] (см. § 61) понятие о внутренней энергии при наличии поглощения вообще считается не имеющим смысла. С другой стороны, при микроскопическом подходе с использованием определенных моделей просветивших сред (плазмы, совокупности осцилляторов), а также рассматривая некоторые эквивалентные цепи, можно получить простые выражения для плотности энергии, которые на первый взгляд представляются вполне разумными (см. [2] § 68, [3,4]). Соотношение же между феноменологическим и упомянутым модельным подходами, насколько нам известно, нигде не обсуждается\*. Кроме того, некоторые другие моменты, относящиеся к этому кругу вопросов, обычно излагаются недостаточно точно (это имеет место, например, в появившейся совсем недавно работе [6]). В силу сказанного, как можно надеяться, окажется оправданным опубликование настоящей статьи, хотя речь в ней в конце концов идет о весьма простых вещах (вместе с тем автору известно, что не только у него одного здесь долгое время не было должной ясности).

1. Основные уравнения поля запишем в обычном виде:

$$\text{rot } H = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}; \quad \text{rot } E = - \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1)$$

\* Исключение составляет § 22 монографии [5], где автору уже в корректуре удалось частично изложить соображения, которые приводятся в настоящей статье.

где среда для простоты считается немагнитной ( $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ )<sup>2</sup>, а внешние (сторонние) токи отсутствующими (в [1] оба члена  $\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  записаны в виде  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ , в настоящей же статье используются общепринятые обозначения). Из (1) следует теорема Пойнтинга:

$$\frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{H^2}{8\pi} + \mathbf{jE} = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{EH}], \quad (2)$$

где рассматриваются вещественные величины.

Для гармонических полей, пропорциональных  $e^{i\omega t}$ , в неподвижной линейной среде и без учета пространственной дисперсии

$$D_i^{(\omega)} = \varepsilon_{ik}(\omega) E_k^{(\omega)}; \quad j_i^{(\omega)} = \tau_{ik}(\omega) E_k^{(\omega)}; \quad \varepsilon'_{ik} = \varepsilon_{ik} - i \frac{4\pi}{\omega} \tau_{ik} \quad (3)$$

(по дважды встречающимся индексам производится суммирование). Если же среда, кроме того, изотропна, то

$$D^{(\omega)} = \varepsilon(\omega) E^{(\omega)}; \quad j^{(\omega)} = \tau(\omega) E^{(\omega)}; \quad \varepsilon' = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2 = \varepsilon - i \frac{4\pi\tau}{\omega}. \quad (4)$$

Учет анизотропии лишь несколько усложняет обозначения. Поэтому ниже будем считать среду изотропной (см., однако, дополнение).

В определенных областях частот оказывается возможным пренебречь дисперсией или поглощением, а иногда и тем и другим. Так, для плазмы, как известно,

$$\varepsilon' = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega(\omega - i\nu)}; \quad \varepsilon = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 + \nu^2}; \quad \sigma = \frac{\Omega^2\nu}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)}; \quad \Omega^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}. \quad (5)$$

Здесь  $N$  — электронная концентрация и  $\nu$  — число соударений электронов с другими частицами. При этом формулы (5) строго справедливы в случае независимости числа соударений от скорости; вообще же формула (5) с  $\nu = \nu_{\text{эфф}}$  отвечает приближению „элементарной теории“ [3].

Если  $\omega^2 \ll \nu^2$ , то в первом приближении можно пренебречь дисперсией, т. е. зависимостью  $\varepsilon$  и  $\sigma$  от  $\omega$ :

$$\varepsilon = 1 - \frac{\Omega^2}{\nu^2}; \quad \sigma = \frac{\Omega^2}{4\pi\nu}; \quad \omega^2 \ll \nu^2. \quad (6)$$

В противоположном предельном случае

$$\varepsilon = 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega^2}, \quad \sigma = 0, \quad \nu \rightarrow 0, \quad (7)$$

т. е. поглощение отсутствует, но дисперсией пренебречь нельзя, если только существенно отличие  $\varepsilon$  от единицы.

При отсутствии дисперсии теорема (2) записывается в особенно часто используемой форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon E^2 + H^2}{8\pi} \right) + \sigma E^2 = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{EH}], \quad (8)$$

<sup>2</sup> Для среды с не равной единице комплексной магнитной проницаемостью  $\mu'(\omega)$  или тензором  $\mu'_{ik}(\omega)$  все результаты получаются совершенно так же, как это делается ниже в отношении среды с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon'(\omega)$  или  $\varepsilon'_{ik}(\omega)$  и  $\mu' = 1$  (см. также дополнение к статье).

причем выражение

$$W^{(0)} = W_E^{(0)} + \frac{H^2}{8\pi} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi} \quad (9)$$

иногда интерпретируется как плотность энергии поля в среде. Общее выражение  $(1/4\pi)E(\partial D/\partial t)$  сводится к виду  $\partial \bar{W}_E/\partial t$  для произвольной среды, но при квазимонохроматическом характере поля и усреднении по высокой частоте (это усреднение обозначается чертой). Соответствующий вывод в общем хорошо известен (см., например, [1,2,4,5]). Однако с целью некоторого обобщения и уточнения этот вывод воспроизводится также в дополнении к настоящей статье.

Для изотропной и немагнитной среды (см. дополнение)

$$\overline{\frac{1}{4\pi} E \frac{\partial D}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{W}_E}{\partial t}; \quad \bar{W}_E = \frac{1}{8\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \bar{E}^2 = \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} E_0 E_0^*; \quad (10)$$

$$\bar{W} = \bar{W}_E + H^2/8\pi.$$

При отсутствии поглощения (т. е. при  $\sigma = 0$ ) энтропия, изолированной в других отношениях системы, не изменяется и в переменном электромагнитном поле. Поэтому величины  $W^{(0)}$  или  $\bar{W}$  (см. (9) и (10)) могут рассматриваться в качестве внутренней энергии\* поля в среде в термодинамическом смысле этого понятия. При наличии поглощения энтропия непостоянна, а в (2) фигурируют уже два объемных члена (а именно,  $(1/4\pi)E(\partial D/\partial t) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{H^2}{8\pi}$  и  $jE$ ). Поэтому не приходится говорить о термодинамической внутренней энергии, а разграничение между изменением энергии и потерями (диссипацией), по крайней мере, требует специального анализа. Последнее будет особенно ясно из дальнейшего. Здесь же заметим, что при наличии поглощения величины  $W_E^{(0)}$  или  $\bar{W}_E$  могут быть отрицательными. Так, для плазмы в случае (6)

$$W_E^{(0)} = \left(1 - \frac{\Omega^2}{v^2}\right) \frac{E^2}{8\pi}, \quad \bar{W}_E = \bar{W}_E^{(0)} \quad (11)$$

и при  $v^2 < \Omega^2 = 4\pi e^2 N/m$ , очевидно,  $W_E^{(0)} < 0$ .

Этот результат не противоречит принципу возрастания энтропии в связи с тем, что  $W^{(0)}$  не есть внутренняя энергия. Тем не менее, во избежание недоразумений, остановимся на этом моменте несколько подробнее. Для замкнутой системы или любой области, в которую нет притока энергии (т. е.  $\oint [EH]_n ds = 0$ ), из (8) следует соотношение

$$\int [W^{(0)}(t') - W^{(0)}(t)] dV = - \int_t^{t'} \int_V \sigma E^2 dV dt.$$

Если все источники поля были выключены, например, в момент  $t'$ , то при  $t' \rightarrow \infty$  поле полностью затухнет,  $W^{(0)}(\infty) = 0$  и в силу закона возрастания энтропии вся энергия должна перейти в тепло, т. е.

$$\int W^{(0)}(t) dV = \int \frac{\varepsilon E^2 + H^2}{8\pi} dV = \int_t^\infty \int_V \sigma E^2 dV dt > 0. \quad (12)$$

\* При постоянной температуре (а не энтропии) речь идет уже о свободной энергии

Отсюда следует, что\*  $\sigma > 0$  и  $\varepsilon > 0$  (предполагается, что для рассматриваемого процесса поле  $H$  достаточно слабо по сравнению с полем  $E$ ). Условие (12) не противоречит сказанному ранее в применении к плазме, так как при переходе от (8) к (12) рассматривался процесс выключения поля. В этом же случае отнюдь автоматически не гарантирована возможность пренебрежения дисперсией и использования соотношения (8). Так, в отсутствие источников, при условии  $\text{rot } H = 0$ , из (1) получаем уравнение

$$\frac{\partial D}{\partial t} + 4\pi j = \frac{\varepsilon \partial E}{\partial t} + 4\pi \sigma E = 0, \quad (13)$$

где во втором выражении предполагается отсутствующим дисперсия. Согласно (13),  $E = E(0)e^{-(4\pi\sigma/\varepsilon)t}$  и при  $\sigma > 0$ ,  $\varepsilon < 0$  поле нарастало бы. В квазиравновесной системе это, конечно, невозможно. Конкретно же для плазмы уравнение (13) просто нельзя использовать. Действительно, из уравнения (13) или его решения ясно, что характерное время изменения поля  $T \sim \varepsilon/4\pi\sigma$ , т. е. при спектральном разложении появляются в основном частоты  $\omega \sim 4\pi\sigma/\varepsilon$ . Легко видеть, что при таких частотах условие отсутствия дисперсии  $\omega^2 \ll v^2$  и условие  $\varepsilon < 0$  одновременно соблюдаться не могут (см. (6)).

Сказанное свидетельствует лишь об очевидной ограниченности соотношения (8). Но эти ограничения на свойства среды и характерные частоты изменения поля в рассматриваемых процессах (поле в конденсаторе, поле волны в свободном пространстве и т. д.) сами по себе еще не препятствуют интерпретации (и при наличии поглощения) выражений  $\mathcal{W}_E^{(0)}$  или  $\overline{W}_E$  в качестве некоторой плотности или средней плотности энергии в условиях, когда  $(1/4\pi)E(\partial D/\partial t) = (\partial/\partial t)\mathcal{W}_E^{(0)}$  или  $(1/4\pi)E(\partial \overline{D}/\partial t) = (\partial/\partial t)\overline{W}_E$ . Действительно, величина  $\mathcal{W}_E^{(0)}$  фигурирует в (8) как некоторая функция состояния, стоящая под знаком производной по времени (то же относится к  $\overline{W}_E$  в (10)\*\*). В этом отношении поглощение ничего не меняет. Далее, при достаточно слабом поглощении величины  $\mathcal{W}_E^{(0)}$  и  $\overline{W}_E$  близки к соответствующим выражениям для внутренней энергии при отсутствии поглощения. С другой стороны, при наличии существенного поглощения величины  $\mathcal{W}_E^{(0)}$  и  $\overline{W}_E$ , вообще говоря, не равны полной плотности энергии системы, а представляют собой лишь ее часть, выделенную по своему характеру (речь идет о характере соответствующего члена в (8) или (10)). Если не касаться возможного спора о терминологии (называть или не называть  $\mathcal{W}_E^{(0)}$  и  $\overline{W}_E$  плотностью энергии), то в рамках феноменологической теории никаких вопросов в обсуждаемом плане не видно. Напротив, представляет несомненный интерес анализ энергетических соотношений на основе микроскопической картины или использования каких-то моделей среды.

2. Рассмотрим модель „плазмы“, состоящую из свободных частиц с зарядом  $e$  и массой  $m$ , движущихся со скоростью  $u$  в электрическом

\* Условие  $\sigma(t) = \delta > 0$  обязательно только для равновесных или квазиравновесных систем, когда поле  $E$  при выключении источников монотонно затухает

\*\* Выделенность этих случаев состоит именно в том, что более общее выражение  $W_E = (1/4\pi) \int_{-\infty}^t E(\partial D/\partial t) dt$  зависит от значения поля не только в рассматриваемый момент  $t$ , т. е. зависит не только от состояния системы, но и от ее истории.

поле  $E$  и находящихся также под действием силы трения (объемный заряд предполагается скомпенсированным ионным „фоном“). В этом случае

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = eE - m\nu\mathbf{u} \quad (14)$$

(здесь  $\mathbf{u}$  зависит только от  $t$  и производная записана в виде  $d/dt$  просто для удобства; вместе с тем ниже при использовании уравнения (14) поле и концентрацию частиц придется считать не зависящими от координат). Такое уравнение широко используется в физике плазмы в так называемом приближении „элементарной теории“ (см. [3] и выше). Из (14) получается выражение (5) для  $\varepsilon'$ . Если же дополнить (14) силой  $(1/c)[\mathbf{u}\mathbf{H}^{(0)}]$ , где  $\mathbf{H}^{(0)}$  — внешнее магнитное поле, то придем к модели магнитоактивной плазмы. Такое обобщение в интересующем нас плане несущественно, и ниже будет рассматриваться только изотропная плазма. Заметим также, что, добавляя к (14) некоторую силу  $\nabla U$ , можно рассмотреть и связанные „электроны“ (например, для осциллятора  $U = (m/2)\omega_i^2 r^2$ ,  $\mathbf{u} = \partial\mathbf{r}/\partial t$ ; среда из таких осцилляторов рассмотрена в [3–5]). Применение уравнения (14) к плазме оправдано больше, чем в каком-либо другом случае, в частности, потому, что в плазме действующее поле равно среднему макроскопическому полю (см. [2,5]). Нас интересует поведение среды в квазимонохроматическом поле

$$E(t) = \frac{1}{2} \{ E_0(t)e^{i\omega_0 t} + E_0^*(t)e^{-i\omega_0 t} \}; \quad (15)$$

$$H(t) = \frac{1}{2} \{ H_0(t)e^{i\omega_0 t} + H_0^*(t)e^{-i\omega_0 t} \},$$

где  $E_0(t)$  и  $H_0(t)$  медленно (по сравнению с периодом  $2\pi/\omega_0$ ) меняются во времени.

Для установившегося процесса можно положить  $E_0(t) = \text{const}$ ; тогда из (14) и (15) имеем:

$$\mathbf{u} = \frac{e}{2m} \left( \frac{E_0 e^{i\omega_0 t}}{i\omega_0 + \nu} + \frac{E_0^* e^{-i\omega_0 t}}{-i\omega_0 + \nu} \right);$$

$$\bar{K} = \frac{\overline{m\mathbf{u}^2}}{2} = \frac{e^2 E_0 E_0^*}{4m(\omega_0^2 + \nu^2)}; \quad (16)$$

$$\overline{e\mathbf{u}E} = m\nu\bar{u}^2 = \frac{e^2 \nu E_0 E_0^*}{2m(\omega_0^2 + \nu^2)}.$$

Рассмотрим теперь сумму кинетической энергии всех частиц  $NK$  и энергии поля без частиц  $\bar{E}^2/8\pi = E_0 E_0^*/16\pi$ . Очевидно,

$$\bar{W}'_E = NK + \frac{\bar{E}^2}{8\pi} = \left\{ 1 + \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega_0^2 + \nu^2)} \right\} \frac{E_0 E_0^*}{16\pi}. \quad (17)$$

При отсутствии поглощения (при  $\nu=0$ ), как это ясно из (5) и (10),

$$\bar{W}'_E = \left( 1 + \frac{4\pi e^2 N}{m\omega_0^2} \right) \frac{E_0 E_0^*}{16\pi} = \left( \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \right)_{\omega_0} \frac{E_0 E_0^*}{16\pi} = \bar{W}_E. \quad (18)$$

Величина  $\bar{W}'_E$  всегда положительна, при  $\nu=0$  равна внутренней энергии  $\bar{W}_E$ , а при наличии поглощения также имеет ясный физический смысл

суммы кинетической энергии и энергии поля при отсутствии частиц. Поэтому кажется довольно естественным считать энергию  $\overline{W}_E$  средней плотностью энергии электрического поля в среде, как это и делается в [2-4]. Возникает, однако, вопрос о связи выражения (17) с феноменологическими величинами при наличии поглощения и, в частности, с величиной

$$\overline{W}_E = \left( \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \right)_{\omega_0} \frac{E_0 E_0}{16\pi} = \left( 1 + \frac{4\pi e^2 (\omega_0^2 - \nu^2) N}{m(\omega_0^2 + \nu^2)^2} \right) \frac{E_0 E_0}{16\pi}, \quad (19)$$

где использована формула (5) для  $\varepsilon$ . Именно решению этого вопроса и посвящена в основном настоящая статья.

В модели (14) полная плотность тока, связанного с движением зарядов, равна

$$eNu \equiv j_t = j + \frac{dP}{dt} = j + \frac{d(D-E)}{4\pi dt}, \quad (20)$$

где  $P=(D-E)/4\pi$ —поляризация. Поэтому, умножая (14) на  $Nu$ , имеем для любого поля  $E$ :

$$\frac{\partial mNu^2/2}{\partial t} = eNuE - mN\nu u^2 = jE - \frac{\partial E^2}{\partial t} \frac{1}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} E \frac{\partial D}{\partial t} - mN\nu u^2 \quad (21)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( NK + \frac{E^2}{8\pi} \right) \equiv \frac{\partial W}{\partial t} = jE + \frac{1}{4\pi} E \frac{\partial D}{\partial t} - mN\nu u^2. \quad (22)$$

В сочетании с теоремой Пойнтинга (2), из (22) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( NK + \frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi} \right) = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [EH] - mN\nu u^2. \quad (23)$$

Это соотношение имеет совершенно ясный смысл закона сохранения энергии. причем  $-mN\nu u^2$  есть работа силы трения над частицами, переходящая в тепло. В случае квазимонохроматического поля (15), после усреднения по высокой частоте, уравнение (23) принимает вид (см. также (16) и дополнение):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( NK + \frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left( 1 + \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega_0^2 + \nu^2)} \right) \frac{E_0 E_0}{16\pi} + \frac{H_0 H_0}{16\pi} \right\} = \\ &= -\frac{c}{16\pi} \operatorname{div} \{ |E_0 H_0^*| + |E_0^* H_0| \} - mN\nu \overline{u^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

В то же время феноменологическое уравнение (Д.9) для среды с  $\varepsilon$  и  $\sigma$ , определяемыми согласно (5), дает (см. также (19)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left( 1 + \frac{4\pi e^2 N (\omega_0^2 - \nu^2)}{m(\omega_0^2 + \nu^2)^2} \right) \frac{E_0 E_0}{16\pi} + \frac{H_0 H_0}{16\pi} \right\} + \frac{e^2 N \nu}{2m(\omega_0^2 + \nu^2)} E_0 E_0 + \\ + \frac{ie^2 N \omega_0 \nu}{2m(\omega_0^2 + \nu^2)^2} \left( \frac{\partial E_0}{\partial t} E_0 - E_0 \frac{\partial E_0}{\partial t} \right) = -\frac{c}{16\pi} \operatorname{div} \{ |E_0 H_0| + |E_0^* H_0| \}; \end{aligned} \quad (25)$$

$$1 + \frac{4\pi e^2 N (\omega_0^2 - \nu^2)}{m(\omega_0^2 + \nu^2)^2} = \left( \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \right)_{\omega_0}; \quad \frac{e^2 N \nu}{m(\omega_0^2 + \nu^2)} = \sigma; \quad -\frac{2e^2 N \omega_0 \nu}{m(\omega_0^2 + \nu^2)^2} = \left( \frac{d\sigma}{d\omega} \right)_{\omega_0}.$$

Уравнения (24) и (25) относятся к одной и той же модели и не могут противоречить друг другу. Отсюда ясно, что для квазимонохроматического процесса (15) при использовании уравнения (14) работа силы трения (отождествляемая с количеством выделяющегося тепла) в единицу времени равна

$$mN\gamma\bar{u}^2 = \frac{e^2N\gamma}{2m(\omega_0^2 + \gamma^2)} E_0 E_0 - \frac{8\pi e^2 N \gamma^2}{m(\omega_0^2 + \gamma^2)^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E_0 E_0}{16\pi} \right) + \\ + \frac{ie^2 N \omega_0 \gamma}{2m(\omega_0^2 + \gamma^2)^2} \left( \frac{\partial E_0}{\partial t} E_0 - E_0 \frac{\partial E_0}{\partial t} \right). \quad (26)$$

К этому же результату легко придти непосредственно из (14). Действительно, из (14) для любого поля  $E$ , исчезающего при  $t = -\infty$ , имеем:

$$u = e^{-\gamma t} \int_{-\infty}^t \frac{c}{m} E(t') e^{\gamma t'} dt'. \quad (27)$$

Подставляя сюда поле (15), после возведения в квадрат и усреднения получим (ниже  $\tau = t'' - t'$ ):

$$\frac{4m^2}{e^2} e^{2\gamma t} \bar{u}^2 = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \{ E_0(t') E_0^*(t'') e^{i\omega_0(t' - t'')} e^{\gamma(t' + t'')} + \text{к. с.} \} dt' dt'' = \\ = \int_{-\infty}^t dt'' \int_{t''-t}^{\infty} \{ E_0(t'' - \tau) E_0^*(t'') e^{-(i\omega_0 + \gamma)\tau} e^{2\gamma t''} + \text{к. с.} \} d\tau = \\ = \int_{-\infty}^t \{ E_0(t'') E_0^*(t'') e^{2\gamma t''} \int_{t''-t}^{\infty} e^{(i\omega_0 - \gamma)\tau} d\tau + \text{к. с.} \} dt'' - \\ - \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\partial E_0(t'')}{\partial t''} E_0^*(t'') e^{2\gamma t''} \int_{t''-t}^{\infty} \tau e^{-(i\omega_0 - \gamma)\tau} d\tau + \text{к. с.} \right\} dt''. \quad (28)$$

Здесь используется то обстоятельство, что медленность изменения функции  $E_0(t'' - \tau)$  позволяет ограничиться интегрированием по небольшой области значений  $\tau$  около точки  $t''$ . Производя в (28) интегрирование по  $\tau$ , вводя переменную  $\xi = t - t''$  и опять разлагая

$$E_0(t'') = E_0(t - \xi) = E_0(t) - \frac{\partial E_0(t)}{\partial t} \xi,$$

приходим к выражению (26); при этом члены типа  $(\partial^2 E_0 / \partial t^2) E_0^*$  и  $(\partial E_0 / \partial t)(\partial E_0^* / \partial t)$  отбрасываются как малые в силу предполагаемой медленности изменения функции  $E_0(t)$ .

После всего сказанного картина становится ясной.

В феноменологическое уравнение (усредненную теорему Пойнтинга) (Д.9) или (25) в качестве характеристик среды могут входить и фактически входят только функции частоты  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  и их производные. Вместе с тем, обычная интерпретация члена  $\mathbf{jE} = \sigma E^2$ , как тепла, выделяющегося в единицу времени и в единице объема, вообще говоря, неправильна. В гармоническом (монохроматическом) поле, когда  $E_0(t) = \text{const}$ , действительно  $\sigma E_0 E_0^* / 2 = (e^2 N \gamma / 2m(\omega_0^2 + \gamma^2)) E_0 E_0^* = mN\gamma\bar{u}^2$  (см. (25) и (26)).

В более же общем случае, в частности, в квазимонохроматическом поле (15),  $\sigma E_0 E_0^*/2 \neq mNv\bar{u}^2$ . Другими словами, в феноменологическом уравнении типа (Д.9) (в частности, в (25)) каждый из членов в левой части в общем случае не имеет определенного энергетического смысла (изменения внутренней энергии, диссипации и т. д.). Именно поэтому, как уже упоминалось в разделе 1, и не является парадоксальным, что при наличии поглощения выражение  $\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \frac{E_0 E_0}{16\pi}$  может быть отрицательным.

При отсутствии же поглощения можно феноменологически найти выражение для средней плотности внутренней энергии квазимонохроматического поля в среде просто потому, что кроме  $(\partial/\partial t)\bar{W}$  в левой части теоремы Пойнтинга (Д.9) нет никаких других членов. Не приходится, конечно, удивляться и тому факту, что использование определенной модели позволяет найти выражения для плотности энергии и диссипации, т. е. получить более детальную картину течения процессов в среде. С другой стороны, конкретизация модели очевидным образом связана с дополнительными предположениями, выходящими за рамки макроскопической электродинамики. Последнее проявляется, в частности, в том, что при одних и тех же  $\varepsilon(\omega)$  и  $\sigma(\omega) \neq 0$  системы могут иметь совершенно различную энергию в зависимости от характера и механизма диссипации\*. В случае плазмы использованная модель, характеризующая уравнением (14), пригодна для нахождения  $\varepsilon$  и  $\sigma$  (при  $\psi = \text{const}$ ), а также определения температуры плазмы в стационарных условиях (см., например, [5,7]). Для рассмотрения же более общих случаев эта модель уже непригодна.

3. С целью пояснить и уточнить некоторые моменты, обсуждавшиеся выше, а также учитывая большой интерес к плазме, остановимся теперь на энергетических соотношениях при использовании кинетического уравнения\*\*.

Функция распределения электронов  $f(t, r, v)$  подчиняется уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{m} \left( E + \frac{1}{c} [vH] \right) \Delta_v f + S = 0, \quad (29)$$

где  $S$  — интеграл столкновений,  $\int f dv = N$  и опущен член  $v \nabla_r f$ , учет которого отвечал бы рассмотрению пространственной дисперсии (подробнее об используемых здесь и ниже формулах кинетической теории см. [5,7]). При неучете движения ионов, как мы и будем поступать в дальнейшем,

$$j_t = j + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(D-E)}{\partial t} = e \int v f dv. \quad (30)$$

Кинетическая энергия электронов и ее производная по времени равны соответственно

\* Сказанное находится в полном соответствии со следующим фактом, известным из теории электрических цепей и сообщенным автору Л. А. Вайнштейном. При одном и том же импедансе  $Z(\omega) = R + ix$  (здесь  $R \neq 0$ ) самоиндукция  $L$  и емкость  $C$  цепи, а значит и ее энергия, могут быть различными. В качестве примера приводится цепь (рис. 1), импеданс которой всегда равен  $Z = R$  при  $L = \chi R$ ,  $C = \chi/R$ ,  $R = \sqrt{L/C}$  и любом  $\chi$ . Отметим также, что все изложенное в применении к уравнению (14), очевидно, автоматически переносится на  $LCR$ -контур.

\*\* Для описания газовой плазмы, содержащей электроны, ионы и нейтральные частицы (молекулы), метод кинетического уравнения Больцмана применим в весьма широких пределах (см. [5,8]).

$$K_t = \int \frac{mv^2}{2} f dv, \quad \frac{\partial K_t}{\partial t} = \int \frac{mv^2}{2} \frac{\partial f}{\partial t} dv. \quad (31)$$

Заметим далее, что путем интегрирования по частям легко убедиться в справедливости соотношения:

$$\int \frac{ev^2}{2} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right) \nabla_{\mathbf{v}} f dv = -e \int \mathbf{v} \mathbf{E} f dv = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{j} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2}{8\pi} \right) \quad (32)$$

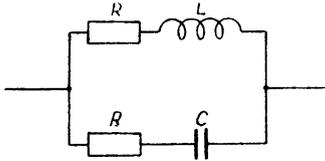


Рис. 1

(см. (30); при интегрировании членов типа  $\int \operatorname{div}_{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v}) dv$  учтено, что соответствующие функции  $\mathbf{F}(\mathbf{v})$  достаточно быстро убывают при  $v \rightarrow \infty$ ). Умножая уравнение (29) на  $mv^2/2$  и интегрируя по скоростям, в силу (31) и (32) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ K_t + \frac{E^2}{8\pi} \right\} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \mathbf{E} - \int \frac{mv^2}{2} S dv. \quad (33)$$

В комбинации с теоремой Пойнтинга (2) отсюда следует уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + K_t \right) = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}] - \int \frac{mv^2}{2} S dv. \quad (34)$$

Получающееся выражение для закона сохранения энергии имеет очевидный смысл. Поэтому, если не касаться формы последнего члена, то можно сразу же написать аналогичное уравнение и для любого газа, заменяя  $K_t$  на сумму кинетической и внутренней энергии частиц.

Последний член в (34) представляет собой энергию, передаваемую электронами тяжелым частицам (ионам и молекулам с массой  $M \gg m$ ). Этот процесс является медленным, и при упругих соударениях его скорость пропорциональна отношению  $m/M$ . В известных условиях передачи энергии тяжелым частицам на определенное время можно вообще пренебречь. Это, однако, ни в какой мере не означает возможности полностью пренебречь соударениями и тем самым положить проводимость  $\sigma$  равной нулю. Дело, как известно, в том, что процесс передачи электроном его импульса является быстрым (не содержит отношения  $m/M$ ), а проводимость определяется именно эффективным числом соударений для передачи импульса.

В применении к весьма широкому кругу проблем электронную функцию распределения можно представить в виде

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(t, \mathbf{r}, v) + \frac{f_1(t, \mathbf{r}, v)\mathbf{v}}{v}, \quad (35)$$

причем кинетическое уравнение сводится к системе (члены с пространственными производными опущены):

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E} f_1) + S_0 = 0; \quad (36)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{e}{mc} [\mathbf{H}f_1] + S_1 = 0. \quad (36a)$$

Здесь  $\mathbf{S} = v(\mathbf{v})\mathbf{f}_1$  и, грубо говоря,  $S_0 \sim (m/M)v(f_0 - f_{00})$ ; при этом  $f_{00}$  — равновесная (максвелловская) функция распределения и  $v$  — число

соударений, приводящих к заметному изменению импульса (именно эта величина, когда она не зависит от скорости, фигурирует в формулах (5)).

Из (36), а в качественном отношении из самой постановки задачи ясно, что при отсутствии соударений кинетическая энергия в переменном поле с постоянной амплитудой не нарастает. При учете же соударений и равно нулю  $S_0$  функция  $f_0$  и кинетическая энергия  $K$ , содержат члены, которые нарастают во времени. Такой нагрев плазмы полем лимитируется либо в силу передачи энергии тяжелым частицам (при  $S_0 \neq 0$ ), либо в результате процессов, которые в (36), (36а) не учитываются (теплопроводность, излучение и т. п.).

Рассмотрим теперь изотропную плазму (внешнее магнитное поле  $H^{(0)} = 0$ ) в линейном приближении. Тогда в уравнении (36а) функцию  $f_0$  можно считать невозмущенной функцией  $f_{00} = f_0(t = -\infty)$  (в равновесном состоянии, разумеется,  $f_{00}$  есть максвелловская функция), а также положить  $H=0$ . В результате

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f_{00}(v)}{\partial v} + \nu(v)f_1 = 0; \quad (37)$$

$$f_1 = -e^{-\nu t} \frac{\partial f_{00}}{\partial v} \int_{-\infty}^t \frac{e}{m} E(t') e^{\nu t'} dt'.$$

Будем теперь считать поле квазимонохроматическим (см. (15)), причем полагаем  $E_0(t = -\infty) = 0$ . Подставляя (15) и (37) в уравнение (36) и производя сразу усреднение по высокой частоте, получим:

$$\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial t} - \frac{e^2}{3m^2\nu^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{\nu^2}{4} \frac{\partial f_{00}}{\partial v} \int_{-\infty}^t [E_0^*(t)E_0(t')] e^{i(\omega_0 - \nu)(t'-t)} + \text{к. с.} \right\} dt' + \bar{S}_0 = 0. \quad (38)$$

Вводя переменную  $\tau = t - t'$ , как и в (28), учтем, что медленность изменения функции  $E_0(t') = E_0(t - \tau)$  дает возможность в (38) ограничиться рассмотрением малых значений  $\tau$ , т. е. положить  $E_0(t - \tau) = E_0(t) - (\partial E_0(t)/\partial t)\tau$ . Поступая таким образом, получим:

$$\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial t} - \frac{e^2}{6m^2\nu^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{\nu^2 (\partial f_{00}/\partial v) \nu(v)}{\omega^2 + \nu^2(v)} \right\} E_0 E_0^* - \frac{e^2}{12m^2\nu^2} \frac{\partial}{\partial v} \times$$

$$\times \left\{ \nu^2 \frac{\partial f_{00}}{\partial v} \frac{(\omega_0^2 - \nu^2) \partial/\partial t (E_0 E_0^*) - 2i\omega_0 \nu \left( \frac{\partial E_0}{\partial t} E_0^* - E_0 \frac{\partial E_0^*}{\partial t} \right)}{(\omega_0^2 + \nu^2)^2} \right\} + \bar{S}_0 = 0.$$

Отсюда и из (31) следует, что

$$\frac{\partial \bar{K}_t}{\partial t} = \int \frac{m\nu^2 \partial f}{2 \partial t} dv = \int \frac{m\nu^2}{2} \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial t} dv = \frac{e^2 (\omega_0^2 - \nu^2) N}{4m(\omega_0^2 + \nu^2)^2} \frac{\partial}{\partial t} (E_0 E_0^*) +$$

$$+ \frac{e^2 N \nu}{2m(\omega_0^2 + \nu^2)} E_0 E_0^* + \frac{ie^2 N \omega_0 \nu}{2m(\omega_0^2 + \nu^2)^2} \left( \frac{\partial E_0}{\partial t} E_0^* - E_0 \frac{\partial E_0^*}{\partial t} \right) - \int \frac{m\nu^2}{2} S_0 dv,$$

где при интегрировании по скоростям положено  $\nu(v) = \nu = \text{const}$  и учтено условие нормировки  $\int f dv = 4\pi \int f_{00} \nu^2 dv = N$ .

Из (40) и (34) получаем формулу (25). Этого и следовало ожидать, поскольку при  $v(v) = v = \text{const}$  кинетическая теория приводит к тем же выражениям (5) для  $\varepsilon$  и  $\sigma$ , как и „элементарная теория“, базирующаяся на уравнении (14).

Если сопоставить выражение (40) с (26), легко видеть, что

$$\frac{\partial \bar{K}_i}{\partial t} = \frac{\partial N \bar{K}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega_0^2 + v^2)} \frac{E_0 E_0^*}{16\pi} \right\} \quad (41)$$

только при условии

$$mNv\bar{u}^2 = \int \frac{mv^2}{2} \bar{S}_0 dv. \quad (42)$$

Другими словами, изменение полной кинетической энергии электронов  $\bar{K}_i$  равно изменению кинетической энергии  $NK$ , связанной с упорядоченной скоростью  $u$ , лишь при вполне определенном характере теплоотвода. Именно, условие (42) означает, что работа силы трения (после усреднения по высокой частоте) в точности равна энергии, передаваемой электронами тяжелым частицам. Конечно, такое требование полностью отвечает механическому смыслу уравнения (14), в которое введена сила трения. Но в реальной плазме, если не говорить о стационарном случае  $E_0 = \text{const}$ , соотношение (42), вообще говоря, не имеет места.

Характерное время передачи электронами своей энергии тяжелым частицам в случае упругих ударов равно  $\tau_E = 1/\delta v = \tau/(2m/M)$  ( $v = 1/\tau$  — число соударений в формулах (5) и др.). До тех пор, пока  $\tau_E \gtrsim T$  ( $T$  — характерное время изменения амплитуды  $E_0(t)$ ), о точном соблюдении соотношения (42) не может быть и речи. Если же  $\tau_E \ll T$ , то равенство (42) возможно, но и в этом случае нужно провести специальное исследование (как ясно из (26), выражение для  $mNv\bar{u}^2$  при необходимом в данном случае учете членов с производными по времени является относительно сложным; поэтому условия соблюдения равенства (42) не очевидны). Этот вопрос подробнее нами не рассматривался, но общая ситуация от возможного ответа в этом пункте не зависит. Если кинетическое уравнение решено, то в использовании закона сохранения энергии нет необходимости, а его выполнение автоматически гарантировано. Поступить же наоборот и без детального анализа характера отвода энергии от электронов найти их энергию  $\bar{K}_i$  в заданном квазимонохроматическом поле, очевидно, нельзя. Иными словами, выражение (17) для плотности энергии  $\bar{W}'_E$  является частным выражением, справедливым лишь при особых условиях.

В этой связи остановимся в заключение на вопросе о вычислении „энергетической скорости“ квазимонохроматического сигнала в поглощающей среде, которая полагается равной  $[\bar{v}^2]$

$$v_{\text{эл}} = \bar{S}_p / \bar{W}, \quad (43)$$

где  $\bar{S}_p$  — среднее значение потока энергии  $S_p = (c/4\pi)[EH]$  в плоской волне и  $\bar{W}$  — средняя плотность энергии поля в среде.

Используя для  $\bar{W}'_E = \bar{W} - (\bar{H}^2/8\pi)$  выражение (17), из (43) получаем следующий результат:

$$v_{\text{эл}} = \frac{2c \operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon'}}{|\varepsilon' - \varepsilon + 2|} = \frac{cn}{1 + \kappa^2}, \quad (44)$$

где  $\varepsilon' = \varepsilon - i(4\pi\sigma/\omega) = (n - i\kappa)^2$ ,  $n$  и  $\kappa$  — показатели преломления и поглощения.

Не ясно, однако, почему в (43) нужно использовать именно выражение (17), носящее весьма частный характер (см. выше). С другой стороны, некоторым основанием для выбора энергии  $W'_E$  является предположение, что именно это выражение минимально [3].

Полное решение вопроса о скорости сигнала, по нашему мнению, может быть найдено только на пути анализа распространения сигнала в среде (в данном случае в плазме с поглощением) путем исследования соответствующего интеграла Фурье. При этом подынтегральное выражение в интеграле, о котором идет речь (см., например, [3]), в случае однородной и изотропной среды полностью определяется функциями  $\varepsilon(\omega)$  и  $\nu(\omega)$ . Поэтому, в принципе, всегда можно выяснить (независимо от каких-либо энергетических соображений), имеет ли смысл говорить о некоторой определенной скорости сигнала в данной среде при наличии существенного поглощения\*. В условиях, когда такое понятие о скорости введено, с помощью соотношения (43) (в данной постановке вопроса речь идет, собственно, не о соотношении, а просто об определении) можно найти некоторую „энергию“  $\overline{W}_{эн} = v_{эн} / \overline{S}_p$ . Таким образом, предложенное в [3,4] выражение для  $v_{эн}$ , которое для плазмы имеет вид (44), будет справедливым при условии, что  $\overline{W}_{эн} = \overline{W}'_E + (\overline{H}^2 / 8\pi)$  (см. выше). В настоящее же время вопрос о величине скорости сигналов в поглощающей среде (в частности, в плазме с  $\nu \neq 0$ ) остается недостаточно ясным.

## ДОПОЛНЕНИЕ

### Форма теоремы Пойнтинга в случае квазимонохроматического поля в произвольной покоящейся линейной среде

Рассмотрим квазимонохроматические вещественные поля

$$E(t) = \frac{1}{2} (E_0(t)e^{i\omega_0 t} + E_0^*(t)e^{-i\omega_0 t}) = \int_0^{\infty} \{ \mathbf{g}(\omega)e^{i\omega t} + \mathbf{g}^*(\omega)e^{-i\omega t} \} d\omega ; \quad (Д.1)$$

$$H(t) = \frac{1}{2} (H_0(t)e^{i\omega_0 t} + H_0^*(t)e^{-i\omega_0 t}) = \int_0^{\infty} \{ \mathbf{g}_1(\omega)e^{i\omega t} + \mathbf{g}_1^*(\omega)e^{-i\omega t} \} d\omega ,$$

где  $E(t)$  и  $H(t)$  — медленно меняющиеся функции времени (характерная частота изменения  $E_0$  и  $H_0$  мала по сравнению с „высокой частотой“  $\omega_0$ ). Возможная зависимость  $E$  и  $H$  от координат роли не играет, так как ниже все рассмотрение ведется для каждой данной точки прост-

\* Если показатель поглощения  $(2\nu/c)$  не зависит от частоты, то скорость сигнала при любом поглощении равна групповой скорости  $v_{гр} = c/(d(\omega n)/d\omega)$  (подробнее см [5]). Такой случай является, однако, совершенно исключительным, как правило, сигнал при распространении в среде с сильным поглощением будет существенно искажаться. В таких условиях необходимо уточнить, что понимается под скоростью сигнала и, а priori неясно, можно ли разумным образом ввести это понятие. В [3,4] речь идет об энергетическом центре тяжести сигнала.

ранства. Тогда для линейной покоящейся среды без пространственной дисперсии\* при постоянных  $E_0$  и  $H_0$

$$D_i = \frac{1}{2} \{ \varepsilon_{ik}(\omega_0) E_{0,k} e^{i\omega_0 t} + \varepsilon_{ik}^*(\omega_0) E_{0,k}^* e^{-i\omega_0 t} \};$$

$$j_i = \frac{1}{2} \{ \chi_{ik}(\omega_0) E_{0,k} e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} \}; \quad \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{1,ik} - i\varepsilon_{2,ik} \equiv \varepsilon_{ik} - i \frac{4\pi\sigma_{ik}}{\omega}; \quad (Д.2)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial B_1}{\partial t} + 4\pi B_2; \quad B_{1,i} = \frac{1}{2} \{ \mu_{ik}(\omega_0) H_{0,k} e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} \};$$

$$B_{2,i} = \frac{1}{2} \{ \lambda_{ik}(\omega_0) H_{0,k} e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} \}; \quad \mu'_{ik} = \mu_{1,ik} - i\mu_{2,ik} \equiv \mu_{ik} - i \frac{4\pi\lambda_{ik}}{\omega}.$$

Здесь  $D$ ,  $j$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ —вещественные поля (при вещественных  $E$  и  $H$ ). Именно из этого требования вещественности следуют уже использованные в (Д. 2) условия

$$\varepsilon_{ik}(-\omega) = \varepsilon_{ik}(\omega), \quad \sigma_{ik}(-\omega) = \sigma_{ik}(\omega), \quad \mu_{1,2,ik}(-\omega) = \mu'_{1,2,ik}(\omega). \quad (Д.3)$$

В гиротропной (магнитоактивной) среде\*\*  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}^*$ ,  $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}^*$  и аналогично для  $\mu_{1,2,ik}$ . В негиротропной, но анизотропной среде  $\varepsilon_{ik}$ ,  $\sigma_{ik}$ ,  $\mu_{1,2,ik}$ —вещественные величины, причем  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$  и т. д. Наконец, в изотропной среде  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon\delta_{ik}$  и т. д.

Ниже, чтобы не выписывать ряда индексов, проведем вычисления для изотропной среды с  $\mu' = 1$ . Общее же выражение будет выписано в самом конце.

В изотропной среде (к. с. — комплексно сопряженное выражение; учтено соотношение (Д.3) при вещественных  $\varepsilon$  и  $\sigma$ ):

$$D(t) = \int_0^\infty \varepsilon(\omega) \{ \mathbf{g}(\omega) e^{i\omega t} + \mathbf{g}^*(\omega) e^{-i\omega t} \} d\omega; \quad j(t) = \int_0^\infty \sigma(\omega) \{ \mathbf{g}(\omega) e^{i\omega t} + \mathbf{g}^*(\omega) e^{-i\omega t} \} d\omega;$$

$$\frac{1}{4\pi} E \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \{ \mathbf{g}(\omega) \mathbf{g}(\omega') i\omega \varepsilon(\omega) e^{i(\omega + \omega')t} +$$

$$+ \mathbf{g}(\omega) \mathbf{g}^*(\omega') i\omega \varepsilon(\omega) e^{i(\omega - \omega')t} + \text{к. с.} \} d\omega d\omega';$$

$$jE = \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma(\omega) \{ \mathbf{g}(\omega) \mathbf{g}(\omega') e^{i(\omega + \omega')t} + \mathbf{g}(\omega) \mathbf{g}^*(\omega') e^{i(\omega - \omega')t} + \text{к. с.} \} d\omega d\omega'.$$

\* Наличие пространственной дисперсии означает, что  $D$  и  $B$  в данной точке зависят от  $E$  и  $H$  не только в той же точке, но и в некоторой ее окрестности (см., например, [5,8]). При этом для однородной среды всегда [8], а для кристаллов—лишь при некоторых условиях [9] учет пространственной дисперсии эквивалентен использованию тензоров  $\varepsilon'_{ik}(\omega, \mathbf{k})$  и  $\mu'_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ , где  $\mathbf{k}$ —волновой вектор (все величины  $E$ ,  $D$  и т. д. считаются пропорциональными  $e^{i(\omega t - \mathbf{k}r)}$ , при наличии пространственной дисперсии тензора  $\varepsilon'_{ik}$  и  $\mu'_{ik}$  независимы [8,9]). При использовании в (Д.2) тензоров  $\varepsilon'_{ik}(\omega, \mathbf{k})$  и  $\mu'_{ik}(\omega, \mathbf{k})$  получающиеся ниже результаты непосредственно относятся только к полям, зависящим от координат по закону типа  $e^{-i\mathbf{k}r}$ . Легко провести также все расчеты для полей типа  $E(t, r) = \frac{1}{2} (E_0(t, r) e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 r)} + E_0^*(t, r) e^{-i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 r)})$ , где  $E_0$ —медленно изменяется во времени и в пространстве.

\*\* Разделение  $\varepsilon_{ik}$  на  $\varepsilon_{ik}$  и  $\sigma_{ik}$  в гиротропной среде производится из требования, чтобы тензор  $\varepsilon_{ik}$  не вносил вклада в поглощение. Отсюда как раз и следует условие  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}^*$ . Далее, поглощение пропорционально  $(\sigma_{ik}^* + \sigma_{ki})$ , т. е. антиэрмитова часть  $\sigma_{ik}$  не вносит вклада в поглощение и может быть отнесена к  $\varepsilon_{ik}$ .

Усредним теперь эти выражения по высокой частоте, т. е. за время, большое по сравнению с  $2\pi/\omega_0$ , но малое по сравнению с характерным временем изменения амплитуды  $E_0(t)$ . Это усреднение эквивалентно отбрасыванию членов с  $e^{-i(\omega+\omega')t}$  по сравнению с членами, содержащими  $e^{-i(\omega-\omega')t}$ . Проводя такое усреднение (оно обозначается чертой)\*, учтем также, что для квазиомохроматического поля функция  $\mathbf{g}(\omega)$  имеет острый максимум вблизи частоты  $\omega_0$ . Поэтому в первом приближении в (Д.4) можно положить  $\omega\varepsilon(\omega) = \omega_0\varepsilon(\omega_0) + \{\varepsilon(\omega_0) + (d\varepsilon/d\omega)_0\}\Omega$  и  $\sigma = \sigma(\omega_0) + (d\sigma/d\omega)_0\Omega$ , где  $\omega = \omega_0 + \Omega$ . В результате

$$\frac{1}{4\pi} \overline{\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\omega\varepsilon}{d\omega} \right)_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ i\Omega \mathbf{g}(\omega_0 + \Omega) \mathbf{g}^*(\omega_0 + \Omega') e^{i(\Omega - \Omega')t} + \text{к. с.} \} d\Omega d\Omega'; \quad (\text{Д.5})$$

$$\overline{\mathbf{J} \mathbf{E}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sigma(\omega_0) + \left( \frac{d\sigma}{d\omega} \right)_0 \Omega \right) \{ \mathbf{g}(\omega_0 + \Omega) \mathbf{g}^*(\omega_0 + \Omega') e^{i(\Omega - \Omega')t} + \text{к. с.} \} d\Omega d\Omega',$$

где нижний предел  $-\infty$  заменен на  $-\infty$  и учтено, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ i\mathbf{g}(\omega_0 + \Omega) \mathbf{g}^*(\omega_0 + \Omega') e^{i(\Omega - \Omega')t} + \text{к. с.} \} d\Omega d\Omega' = 0. \quad (\text{Д.6})$$

Из (Д.1) получаем:

$$\overline{E^2} = \frac{E_0(t) E_0^*(t)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \mathbf{g}(\omega_0 + \Omega) \mathbf{g}^*(\omega_0 + \Omega') e^{i(\Omega - \Omega')t} + \text{к. с.} \} d\Omega d\Omega';$$

$$\frac{d\overline{E^2}}{dt} = \frac{d\overline{E^2}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E_0(t) E_0^*(t)}{2} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ i(\Omega - \Omega') \mathbf{g}(\omega_0 + \Omega) \mathbf{g}^*(\omega_0 + \Omega') e^{i(\Omega - \Omega')t} + \text{к. с.} \} d\Omega d\Omega' = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ i\Omega \mathbf{g}(\omega_0 + \Omega) \mathbf{g}^*(\omega_0 + \Omega') e^{i(\Omega - \Omega')t} + \text{к. с.} \} d\Omega d\Omega'; \quad (\text{Д.7})$$

$$+ \text{к. с.} \} d\Omega d\Omega' = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ i\Omega \mathbf{g}(\omega_0 + \Omega) \mathbf{g}^*(\omega_0 + \Omega') e^{i(\Omega - \Omega')t} + \text{к. с.} \} d\Omega d\Omega';$$

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} E_0^* - \frac{\partial E_0^*}{\partial t} E_0 = 4i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega \mathbf{g}(\omega_0 + \Omega) \mathbf{g}^*(\omega_0 + \Omega') e^{i(\Omega - \Omega')t} + \text{к. с.} \} d\Omega d\Omega',$$

так как

$$E_0 e^{i\omega_0 t} = 2 \int_0^{\infty} \mathbf{g}(\omega) e^{i\omega t} d\omega;$$

$$\frac{\partial (E_0 e^{i\omega_0 t})}{\partial t} E_0^* e^{-i\omega_0 t} = i\omega_0 E_0 E_0^* + \frac{\partial E_0}{\partial t} E_0^* = i\omega_0 E_0 E_0^* +$$

$$+ 4i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega \mathbf{g}(\omega_0 + \Omega) \mathbf{g}^*(\omega_0 + \Omega') e^{i(\Omega - \Omega')t} d\Omega d\Omega'.$$

\* Формально проводимое усреднение для некоторой функции  $f(t)$  типа (Д.1) означает следующее ( $T$  — характерное время изменения амплитуды):

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t + \tau) d\tau, \quad (\tau_2 > t > \tau_1, \quad T \gg \tau_1 \sim \tau_2 \gg 2\pi/\omega_0).$$

Очевидно, что  $\overline{\partial f / \partial t} = \partial \overline{f} / \partial t$ .

Из (Д.5) и (Д.7) ясно, что для квазимонохроматического поля

$$\frac{1}{4\pi} \overline{E \frac{\partial D}{\partial t}} = \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \frac{\partial E_0 E_0^*}{\partial t}; \quad \overline{J E} = \frac{\sigma}{2} E_0 E_0^* - \frac{i}{4} \frac{d\sigma}{d\omega} \left( \frac{\partial E_0}{\partial t} E_0^* - E_0 \frac{\partial E_0^*}{\partial t} \right), \quad (\text{Д.8})$$

где производные по  $\omega$  берутся для частоты  $\omega_0$ .

Усредненное уравнение (2) принимает теперь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{d(\omega\varepsilon)/d\omega E_0 E_0^* + H_0 H_0^*}{16\pi} \right\} + \frac{\sigma}{2} E_0 E_0^* - \frac{i}{4} \frac{d\sigma}{d\omega} \left( \frac{\partial E_0}{\partial t} E_0^* - E_0 \frac{\partial E_0^*}{\partial t} \right) = \\ = - \frac{c}{16\pi} \operatorname{div} \{ [E_0 H_0^*] + [E_0^* H_0] \}. \end{aligned} \quad (\text{Д.9})$$

Если не говорить о члене с  $d\sigma/d\omega$ , иногда играющем малую роль\*, уравнение (Д.9), по существу, совпадает с общепринятым.

Заметим, что в статье [6] уравнение типа (2) ошибочно формулируется для полного поля  $E(t)$ . Этот неправильный вывод получен потому, что функции  $g(\omega)$  и  $g(-\omega)$  считаются в [6] имеющими острый максимум только при  $\omega = \omega_0$ . В отношении  $g(\omega)$  это верно, но  $g(-\omega)$  имеет максимум при  $\omega = -\omega_0$ , что и приводит к сохранению в выражении  $(1/4\pi)E(\partial D/\partial t)$  высокочастотных членов, исчезающих при усреднении†.

Выпишем теперь усредненное по высокой частоте уравнение (2) для весьма общего случая (Д.2)\*\*:

$$\begin{aligned} \frac{1}{32\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{d[\omega(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ki})]}{d\omega} E_{0i} E_{0k} + \frac{d[\omega(\mu_{ik} + \mu_{ki})]}{d\omega} H_{0i} H_{0k}^* \right\} + \\ + \frac{(\sigma_{ik} + \sigma_{ki})}{4} E_{0i} E_{0k} + \frac{(\lambda_{ik} + \lambda_{ki})}{4} H_{0i} H_{0k} - \frac{i}{4} \left\{ \frac{d\sigma_{ik}}{d\omega} \frac{\partial E_{0i}}{\partial t} E_{0k} - \frac{d\sigma_{ki}}{d\omega} \frac{\partial E_{0i}}{\partial t} E_{0k} \right\} - \\ - \frac{i}{4} \left\{ \frac{d\lambda_{ik}}{d\omega} \frac{\partial H_{0i}}{\partial t} H_{0k}^* - \frac{d\lambda_{ki}}{d\omega} \frac{\partial H_{0i}}{\partial t} H_{0k} \right\} = - \frac{c}{16\pi} \operatorname{div} \{ [E_0^* H_0] + [E_0 H_0^*] \}. \end{aligned} \quad (\text{Д.10})$$

В силу эрмитивности всех тензоров здесь можно, конечно, заметить  $\varepsilon_{ik}^* + \varepsilon_{ki}$  на  $2\varepsilon_{ki}$  (или, поменяв индексы, на  $2\varepsilon_{ik}$ ) и аналогично для других тензоров.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957
- 2 Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург и Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, М., 1953
- 3 Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 27, 2506 (1957)
- 4 Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957
- 5 В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960
- 6 F. Vogpnis, Zs. f Physik, 159, 1 (1960).
- 7 В. Л. Гинзбург и А. В. Гуревич, УФН, 70, 201 (1960).

\* Тем не менее, опускать этот член нет оснований. За это замечание, а также обсуждение вопроса в целом автор признателен В. П. Силину.

\*\* Для рассматриваемого случая в (2), конечно, вместо  $(1,8\pi) \partial H^2 / \partial t$  фигурирует  $(1,4\pi) H(\partial B / \partial t)$ .

- 8 А А Рухадзе и В П Силин, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-  
подобных сред, Атомиздат, М, 1961
- 9 В Л Гинзбург, А А Рухадзе, В П Силин, Физика твердого тела (в  
печати)

Физический институт АН СССР и  
Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
21 октября 1960 г

**ON THE ENERGY CONSERVATION LAW AND THE EXPRESSION FOR  
ENERGY DENSITY IN THE ELECTRODYNAMICS OF AN ABSORBING AND  
DISPERSIVE MEDIUM**

*V L Ginzburg*

The energy conservation law in electrodynamics is discussed as well as the expression for energy density in an absorbing and dispersive medium. The results of phenomenological description are compared with that obtained for plasma, using both kinetic equation, and the motion equations for a mechanical model with friction losses. The propagation velocity of signals in an absorbing medium is briefly described.

---

## О СПЛОШНОМ СПЕКТРЕ ТОКА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПЕРЕПОЛЯРИЗАЦИИ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОВ

*И. А. Андропова*

Приводятся результаты экспериментального исследования сплошного спектра тока, возникающего при периодической переполаризации сегнетоэлектриков. Экспериментальные результаты сравниваются с расчетом. Это сравнение дает возможность сделать некоторые выводы относительно процессов переполаризации в сегнетоэлектриках.

Как отмечалось в [1], при периодической переполаризации сегнетоэлектрика спектр тока, протекающего через сегнетоэлектрик, кроме дискретных линий содержит сплошную часть (шум). Наличие сплошного спектра обусловлено нестрогой повторяемостью процесса переполаризации.

Аналогичное явление было ранее обнаружено в ферромагнетиках. Шумам в ферромагнетиках, возникающим при циклическом перемагничивании, посвящено много как экспериментальных, так и теоретических работ (см. [2,3] и др.).

В настоящей статье излагаются результаты экспериментального исследования шумов циклической переполаризации сегнетоэлектриков. Экспериментальные результаты сравниваются с расчетом, полученным для определенной модели процесса переполаризации. Аналогичные расчеты использовались при исследовании шумов циклического перемагничивания ферромагнетиков [2,3].

### 1 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЛОШНОГО СПЕКТРА СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОВ

Схема и методика измерения сплошного спектра кратко описаны в [1]. К сегнетоэлектрическому конденсатору прикладывалось переменное синусоидальное напряжение различных частот. Исследовалось напряжение, пропорциональное току, протекающему через сегнетоэлектрик; это напряжение снималось с малого сопротивления (4–100 ом), включенного последовательно с сегнетоэлектриком. Из всего спектра тока мы исследовали только шумовую часть, т. е. спектральную плотность на частотах, расположенных между гармониками частоты переполаризации, появляющимися в токе из-за нелинейности образцов. Гармоники и спектр в непосредственной близости от гармоник (в полосе порядка  $\pm 250$  гц) не измерялись.

Будем в дальнейшем называть шумовым спектром или просто спектром тока сегнетоэлектриков зависимость спектральной плотности флуктуаций тока  $G$  от частоты наблюдения  $f$ . Частота прикладываемого поля  $F$  (частота переполаризации) в наших опытах лежала в диапазоне 3–20 кгц. Величина  $f$  определялась настройкой перестраиваемого анализатора (с шириной полосы 25 гц) и охватывала диапазон  $10 \div 300$  кгц.

Точность измерения спектральной плотности составляла около  $20 \div 25\%$ . Для лучшей воспроизводимости результатов температурные измерения спектра шума каждый раз начинались с температур  $t > \theta$

( $\Theta$ —температура Кюри); затем производилось медленное понижение температуры со скоростью, примерно равной  $1^\circ$  за 3 мин.

Спектры тока исследовались для следующих сегнетоэлектрических материалов:

*керамика*

- 1)  $\text{BaTiO}_3$  (толщина  $d = 1$  мм, площадь  $s = 12,6$  мм<sup>2</sup>, температура Кюри\*  $\Theta = 120^\circ\text{C}$ );
- 2) ВК-1 ( $d = 1$  мм,  $s = 12,6$  мм<sup>2</sup>,  $\Theta = 80^\circ\text{C}$ );
- 3)  $\text{BaTiO}_3 + 13\% \text{ZrO}_2$  ( $d = 0,7$  мм,  $s = 19,6$  мм<sup>2</sup>,  $\Theta = 55^\circ\text{C}$ );

*монокристаллы*

- 1)  $\text{BaTiO}_3$  ( $d = 0,3$  мм,  $s = 3$  мм<sup>2</sup>,  $\Theta = 118^\circ\text{C}$ );
- 2) ТГС -триглицинсульфат ( $d = 1$  мм;  $s = 15$  мм<sup>2</sup>;  $\Theta = 47^\circ\text{C}$ ).

*Общий вид спектра сегнетоэлектриков.* Спектры всех исследованных керамических сегнетоэлектриков имеют одинаковый общий вид. Примером может служить спектр, изображенный на рис. 1а для материала ВК-1. Из рисунка видно, что спектр имеет падающий участок в сторону малых значений  $f$ , который естественно экстраполируется к нулю; затем при более высоких частотах имеется плоский участок, который на некоторых экспериментальных кривых переходит в падающий участок в сторону высоких частот  $f$ . На некоторых графиках падающего участка нет, так как он находится на тех частотах, проводят измерения на которых не позволяла аппаратура.

Общий вид спектра керамических сегнетоэлектриков аналогичен спектру шумов поликристаллических ферромагнетиков. В качестве характерных параметров для описания спектра удобно принять  $f_1$ —ча-

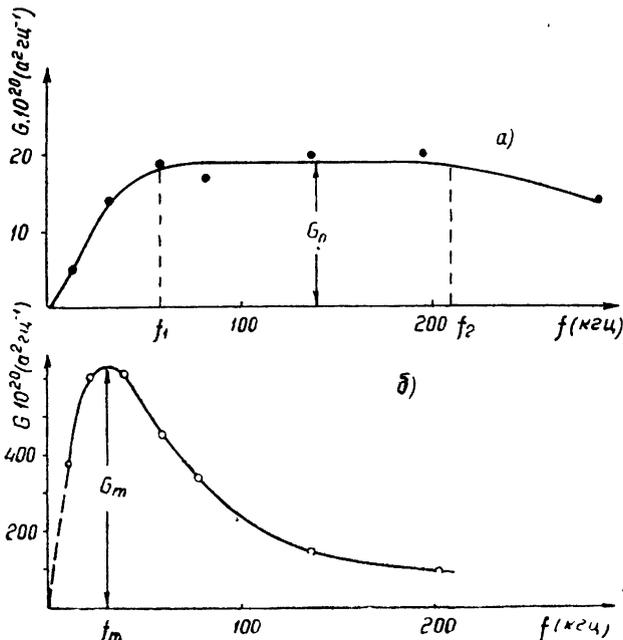


Рис 1 Спектр шума сегнетоэлектриков

а) ВК-1 (керамика),  $E_{\sim} = 1$  кв см<sup>-1</sup>,  $F = 3$  кГц,  $t = 55^\circ$ ,

б) ТГС (монокристалл),  $E_{\sim} = 0,8$  кв см<sup>-1</sup>,  $F = 4$  кГц,  $t = 28^\circ$

\* Температура Кюри определялась по максимуму диэлектрической постоянной в слабых полях.

стоту, начиная с которой, спектр падает в сторону низких частот,  $G_0$ —спектральную плотность мощности шума в интервале, где  $G(f) \approx \text{const}$ , и  $f_2$  — частота, начиная с которой, спектр падает в сторону высоких частот. Частоты  $f_1$  и  $f_2$  определяются приближенно, так как у кривых нет резкого излома.

Спектр шума сегнетоэлектрических монокристаллов отличается по общему виду от спектра керамических материалов. В спектре монокристаллов (рис. 1б) есть падающий участок и в сторону высоких, и в сторону низких частот (который тоже экстраполируется к нулю при  $f = 0$ ), но этот спектр не имеет выраженного плоского участка. В качестве характерных параметров спектра монокристаллов удобно принять частоту  $f_m$ , определяющую положение максимума спектра, и величину максимальной спектральной плотности  $G_m$ .

В результате исследования зависимости спектра сегнетоэлектриков от различных факторов (от амплитуды и частоты прикладываемого поля, а также от температуры) было найдено, что эти факторы меняют не общий вид спектра, а лишь значения параметров  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $G_0$ ,  $f_m$  и  $G_m$ .

*Зависимость спектра шума от температуры и от амплитуды прикладываемого поля.* Изменение спектров с температурой для различных сегнетоэлектриков можно видеть на рис. 2. Из рисунков видно, что с ростом температуры  $f_1$  и  $f_m$  увеличиваются, а  $G_0$  и  $G_m$  сначала растут, а затем падают. В точке Кюри никаких шумовых особенностей не наблюдается. Температура, при которой имеет место максимум шума (максимум  $G_0$  и  $G_m$ ), совпадает с температурой, при которой наступает максимум тока, связанного с ориентационной поляризацией  $J_0^*$  (рис. 3).

На рис. 3б приведена зависимость  $G_0$  и полного тока  $J$  от температуры при нагревании и охлаждении. Из рисунка видно, что циклы нагревания и охлаждения не совпадают как по шуму, так и по току. Таким образом, здесь наряду с известным температурным гистерезисом тока имеет место гистерезис шума.

Амплитуда поля также меняет параметры спектра (см. рис. 2а и рис. 4). С ростом амплитуды увеличиваются значения  $f_1$ ,  $f_m$ ,  $G_0$ ,  $G_m$  и величина полного тока переполаризации.

*Зависимость спектра шума от частоты прикладываемого напряжения.* Остановимся более подробно на зависимости спектра от частоты прикладываемого напряжения. Можно показать, что если среднее значение заряда на обкладках сегнетоконденсатора, а также его отклонения от среднего, зависят только от величины поля и не зависят от скорости изменения поля, то  $\sqrt{G(f)}/F$  является функцией только отношения  $f/F$ . Кроме того, отношение всех гармоник тока и среднего тока к частоте переполаризации не зависит от частоты. Это утверждение было обосновано теоретически [3] и обнаружено экспериментально в ферритах.

Однако проведенные как с керамикой, так и с монокристаллами измерения показали, что такое соотношение для спектра шума сегнетоэлектриков не выполняется. Действительно, из рис. 5, на котором приведены зависимости  $\sqrt{G(f)}/F$  от  $f/F$ , следует, что кривые для разных значений  $F$  не совпадают, тогда как для ферритов экспериментальные точки для разных  $F$  ложатся на одну кривую.

Это обстоятельство говорит о том, что переполаризация сегнетоэлектриков определяется не только величиной поля, но и скоростью его изменений. Последнее хорошо известно для монокристаллов, коэр-

\* Полный ток  $J$ , протекающий через сегнетоэлектрик [4], складывается из двух частей: из тока  $J_n$ , связанного с индуцированной поляризацией, и из тока  $J_0$ , связанного с ориентационной поляризацией (последняя обусловлена переориентацией доменов).

цитивная сила в которых зависит от частоты переполяризации. Однако по среднему току (рис. 6) зависимость переполяризации от скорости изменения поля менее заметна, чем для шума, особенно в случае керамических сегнетоэлектриков, в которых отношение среднего тока к частоте мало меняется с ростом  $F$ .

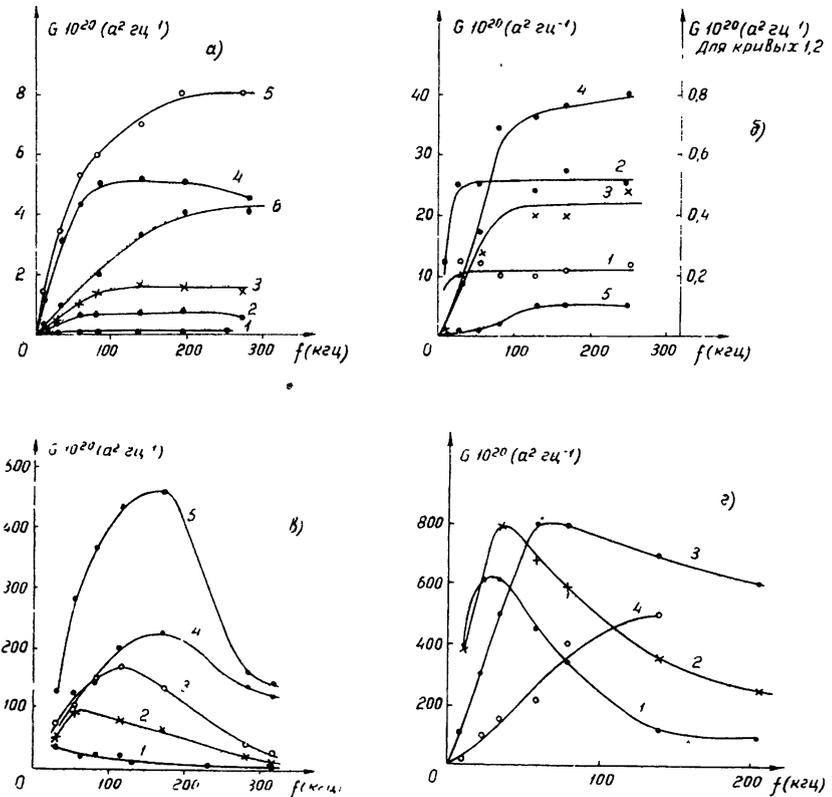


Рис. 2. Спектр шума для различных температур:

- а) ВК-1 (керамика),  $F=3$  кГц (кривая 1.— $E_{\sim}=1$  кв.см $^{-1}$ ,  $t=50^{\circ}$ , 2.— $E_{\sim}=1$  кв.см $^{-1}$ ,  $t=60^{\circ}$ ; 3.— $E_{\sim}=1$  кв.см $^{-1}$ ,  $t=70^{\circ}$ , 4.— $E_{\sim}=1,4$  кв.см $^{-1}$ ,  $t=50^{\circ}$ ; 5.— $E_{\sim}=1,4$  кв.см $^{-1}$ ,  $t=60^{\circ}$ ; 6.— $E_{\sim}=1,4$  кв.см $^{-1}$ ,  $t=70^{\circ}$ С),
- б) Ва Ti O $_3$  (керамика),  $F=4$  кГц,  $E_{\sim}=1$  кв.см $^{-1}$  (кривая 1.— $t=85^{\circ}$ , 2.— $t=90^{\circ}$ , 3.— $t=105^{\circ}$ ; 4.— $t=112^{\circ}$ , 5.— $t=117^{\circ}$ С),
- в) ВаTiO $_3$  (монокристалл),  $F=4$  кГц;  $E_{\sim}=1,8$  кв.см $^{-1}$  (кривая 1.— $t=22^{\circ}$ , 2.— $t=40^{\circ}$ , 3.— $t=70^{\circ}$ , 4.— $t=112,5^{\circ}$ , 5.— $t=108$  С),
- г) ТГС (монокристалл),  $F=1$  кГц,  $E_{\sim}=0,8$  кв.см $^{-1}$  (кривая 1.— $t=28^{\circ}$ , 2.— $t=35^{\circ}$ ; 3.— $t=43^{\circ}$ ; 4.— $t=45^{\circ}$ С)

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

При обсуждении спектров магнитных шумов в [2] был использован расчет шумового спектра для простой модели процесса перемагничивания. Мы воспользуемся этим расчетом для обсуждения результатов измерения шумов в сегнетоэлектриках.

**Описание модели.** а) Образец состоит из  $N$  одинаковых по объему доменов. Форма импульса тока  $i(t)$ , возникающего при переполяризации отдельного домена, одинакова для всех доменов. Тогда

$$S(f) = \int_0^{\infty} i(t) e^{-2\pi f t} dt \text{ есть спектр отдельного импульса, } S(0) = \int_0^{\infty} i(t) dt =$$

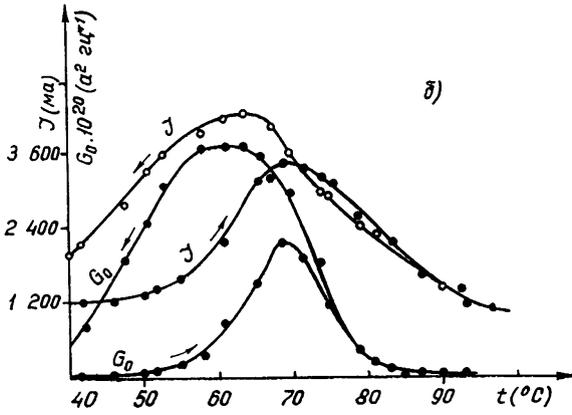
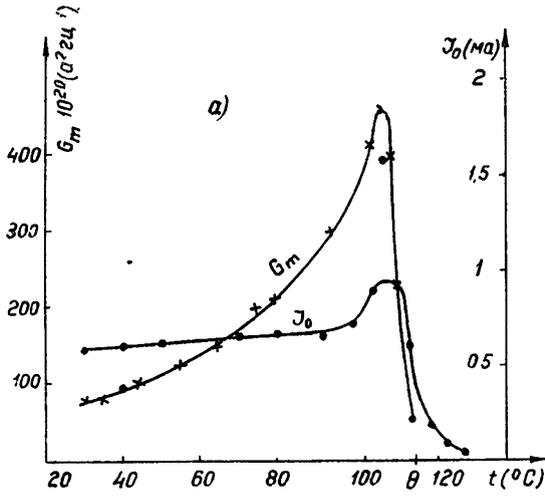


Рис. 3. Зависимость максимального значения шума и среднего тока от температуры:

- а) ВаТiО<sub>3</sub> (монокристалл),  $F = 4$  кГц,  $E_{\sim} = 1,8$  кв.см<sup>-1</sup>;  
 б) ВК-1 (керамика),  $F = 3$  кГц,  $E_{\sim} = 1,4$  кв.см<sup>-1</sup>.

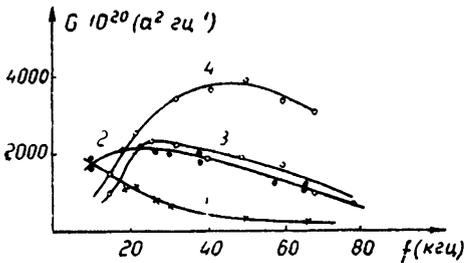


Рис. 4. Спектр шума монокристаллов ТГС для различных амплитуд прикладываемого поля:

- (кривая 1. —  $E_{\sim} = 0,6$  кв.см<sup>-1</sup>,  $F = 4$  кГц;  
 2. —  $E_{\sim} = 0,85$  кв.см<sup>-1</sup>,  $F = 4$  кГц, 3. —  $E_{\sim} = 0,6$  кв.см<sup>-1</sup>,  $F = 9$  кГц;  
 4. —  $E_{\sim} = 0,85$  кв.см<sup>-1</sup>,  $F = 9$  кГц).

$= q$  — заряд, протекающий во внешней цепи от переполяризации отдельного домена, а  $\tau$  — длительность импульса.

б) Шумы вызваны нестройгой повторяемостью от периода к периоду моментов переполяризации отдельных доменов. Средние значения моментов переполяризации для различных доменов различны.

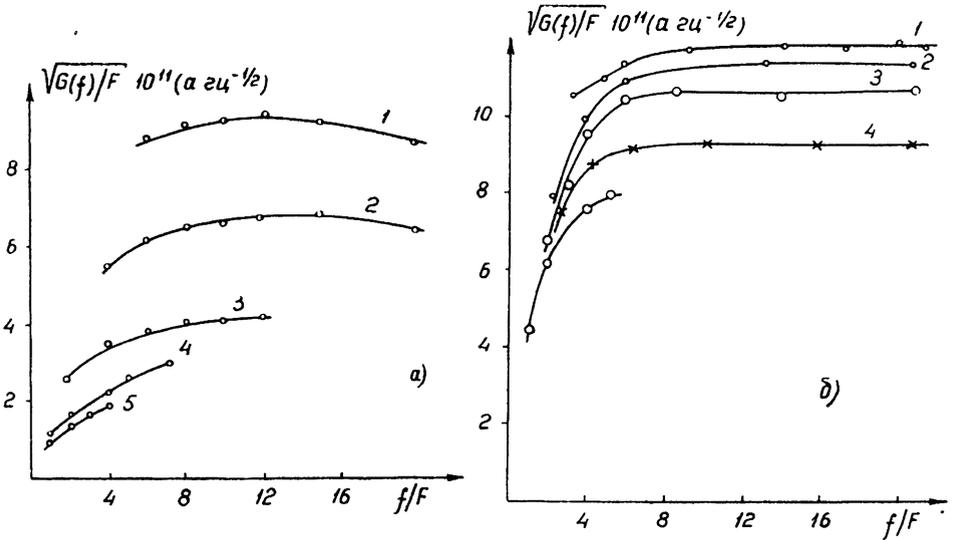


Рис. 5. Зависимость  $\sqrt{G(f)/F}$  от отношения  $f/F$  при разных частотах переполяризации  $F$   
 а)  $\text{BaTiO}_3$  (монокристалл),  $E_{\sim} = 1 \text{ кВ см}^{-1}$  (кривая 1 —  $F = 2 \text{ кГц}$ ; 2 —  $F = 3 \text{ кГц}$ ; 3 —  $F = 6 \text{ кГц}$ ; 4 —  $F = 12 \text{ кГц}$ ,  
 5. —  $F = 18 \text{ кГц}$ );  
 б)  $\text{BaTiO}_3 + 13\% \text{ ZrO}_2$  (керамика),  $E_{\sim} = 1,3 \text{ кВ см}^{-1}$  (кривая 1 —  $F = 3 \text{ кГц}$ ; 2 —  $F = 4 \text{ кГц}$ ; 3 —  $F = 7 \text{ кГц}$ ,  
 4 —  $F = 10 \text{ кГц}$ , 5 —  $F = 15 \text{ кГц}$ )

в) Флюктуации моментов переполяризации разных доменов независимы; независимы также флюктуации моментов переполяризации в разных периодах.

Проведенный в [5,6] расчет спектральной плотности мощности шума для такой модели приводит к следующему выражению:

$$G(f) = NFS(f) \cdot S(f) \{ 1 - [\overline{\cos(2\pi f \varepsilon)}]^2 \}; \quad (1)$$

черта в (1) означает усреднение по всем возможным значениям  $\varepsilon$  — случайной величины отклонения момента переполяризации отдельной области от среднего. Среднее значение модуля тока для такой модели равно

$$J = 2NF |S(0)| = 2NFq. \quad (2)$$

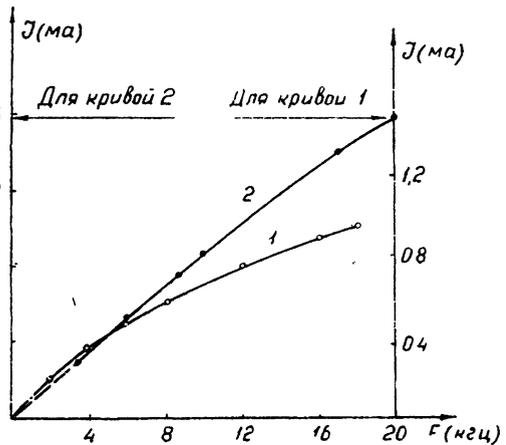


Рис. 6. Зависимость тока переполяризации  $J$  от частоты  $F$  (кривая 1. —  $\text{BaTiO}_3$  — монокристалл,  $E_{\sim} = 1 \text{ кВ см}^{-1}$ ; кривая 2 —  $\text{BaTiO}_3 + 13\% \text{ ZrO}_2$  — керамика.  $E_{\sim} = 1,3 \text{ кВ см}^{-1}$ ).

Как видно из (1), спектр шума записывается через произведение двух функций от частоты  $f$ . Первая функция представляет квадрат модуля разложения в спектр импульса от отдельного домена. Примерный вид этой функции изображен на рис. 7а. Спектр импульса начинает падать на частотах порядка  $1/\tau$ . Примерный вид второй функции изображен на рис. 7б. Эта функция обращается в 0 при  $f=0$  и с ростом частоты стремится к единице. Характер приближения к единице зависит от закона распределения случайной величины  $\varepsilon$ . Частота, при которой функция становится практически постоянной— порядка  $1/\sqrt{\varepsilon^2}$ .

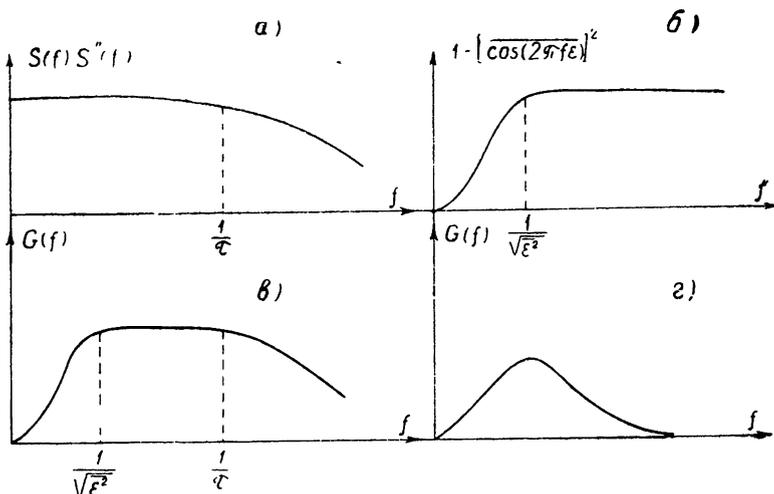


Рис. 7. Примерный вид спектра  $G(f)$ , рассчитанного для модели сегнетоэлектрика.

Примерный вид спектра шума, рассчитанного для данной модели в случае  $\sqrt{\varepsilon^2} \gg \tau$ , представлен на рис. 7в. Из рисунка видно, что  $G(f) \rightarrow 0$  при  $f \rightarrow 0$  и  $f \rightarrow \infty$ . Последнее обстоятельство следует из самых общих соображений относительно процессов переполаризации и не зависит от выбора модели\*.

На плоском участке, где  $S(f) S^*(f)$  еще мало отличается от  $S(0) S^*(0)$ , а разность  $(1 - \cos 2\pi f \varepsilon)^2$  уже близка к единице, величина шума приближенно равна  $G_0 = NFS(0) S^*(0)$ .

Для случая  $\sqrt{\varepsilon^2} \ll \tau$  спектр отличается от предыдущего случая отсутствием плоского участка. В этом случае максимальное значение шума  $G_m \ll NFS(0) S^*(0)$ . Если  $\sqrt{\varepsilon^2}$  — порядка  $\tau$ , спектр шума имеет вид, представленный на рис. 7г; в спектре также нет плоского участка, но величина  $G_m$  близка к  $NFS(0) S^*(0)$ .

Рассмотренная модель включает в себя модель, принятую Мерцем [7–9] для объяснения процессов импульсной переполаризации сегнетоэлектрических монокристаллов. В последней модели предполагается, что поляризация образцов начинается с зарождения отдельных доменов, которое происходит в определенных местах на поверхности кристалла, связанных, по-видимому, с несовершенствами решетки. Все домены равноправны, т. е. вероятность зарождения при данном поле одинакова для всех зародышей. Мерц приводит конкретный вид ве-

\* Это доказывается в [3] на примере шумов в ферромагнетиках

роятности зарождения:  $W = g e^{-\sigma E}$ , где  $g$  и  $\sigma$  — параметры, зависящие от температуры, размеров и материала образца,  $E$  — приложенное поле. Если сказанное действительно имеет место, то это значит, что образец не имеет коэрцитивного поля, т. е. может переполяризоваться при сколь угодно слабом поле; однако при малом поле процесс будет длиться долго, так как вероятность зарождения в слабом поле мала. Мерц определяет „время зарождения“  $t_n$  как время, необходимое для образования практически всех зародышей, а „время движения доменной стенки“  $t_d$  как время, необходимое для переполяризации отдельного домена. В наших обозначениях  $t_n$  соответствует  $\sqrt{\varepsilon^2}$ , а время  $t_d$  соответствует  $\tau$ . Рассмотренная в настоящей статье модель, в отличие от модели Мерца, является более общей, так как она не предполагает обязательную равноправность всех доменов и допускает возможность того, что различные домены имеют различные средние поля, при которых наступает переполяризация; равноправность доменов является частным случаем, когда средние поля зарождения всех доменов равны.

*Сравнение эксперимента и расчета для керамических сегнетоэлектриков.* Спектр, полученный экспериментально для сегнетоэлектрической керамики, имеет такой же вид, как и спектр для описанной модели в случае  $\sqrt{\varepsilon^2} \gg \tau$ . Сопоставляя экспериментальный спектр (рис. 1а) и теоретический (рис. 7в), получим приближенные равенства:

$$f_1 \approx 1/\sqrt{\varepsilon^2}, f_2 \approx 1/\tau, G_0 = NF |S(0)|^2, J_0 = 2NF |S(0)|. \quad (3)$$

Из этих формул можно определить  $N$  и  $q = |S(0)|$ .

Нет оснований ожидать полного соответствия нашей модели и действительных процессов в сегнетоэлектриках. Хорошо известно, например, что не все домены в образце одинаковы, как это предполагалось выше. Поэтому можно надеяться получить лишь средние по всем доменам значения величин  $q$ ,  $\tau$ ,  $\sqrt{\varepsilon^2}$ .

Вычисленные для исследованных керамических образцов зависимости величин  $N$  и  $q$  от различных факторов приведены на графиках рис. 8, 9, 10. Рассмотрение этих графиков дает возможность сделать некоторые выводы о деталях процесса переполяризации,

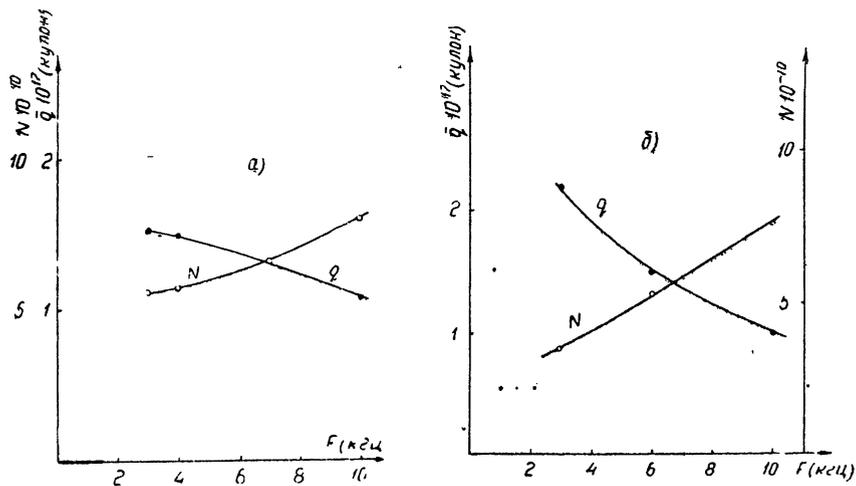


Рис. 8. Зависимость  $N$  и  $q$  от частоты переполяризации  $F$  ( $t \approx 23^\circ\text{C}$ ):

а)  $\text{BaTiO}_3$ ; 13%  $\text{ZrO}_2$  (керамика),  $E_c = 1,3$  кВ см $^{-1}$ , б) ВК-1 (керамика),  $E_c = 1,2$  кВ см $^{-1}$ .

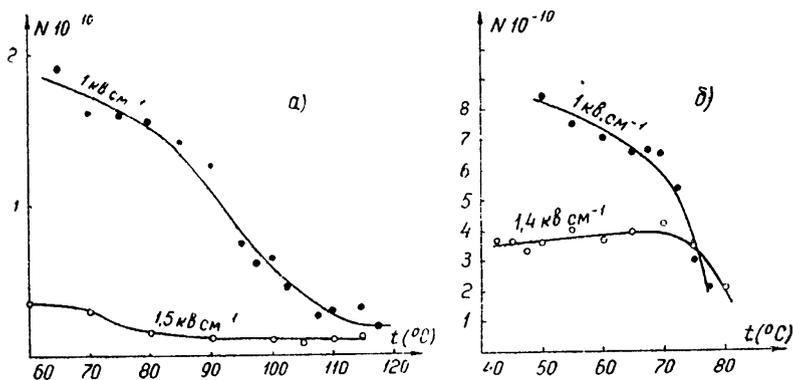


Рис. 9. Зависимость  $N$  от температуры  $t$   
 а)  $\text{BaTiO}_3$  (керамика),  $F = 4$  кГц, б) ВК-1 (керамика),  $F = 3$  кГц

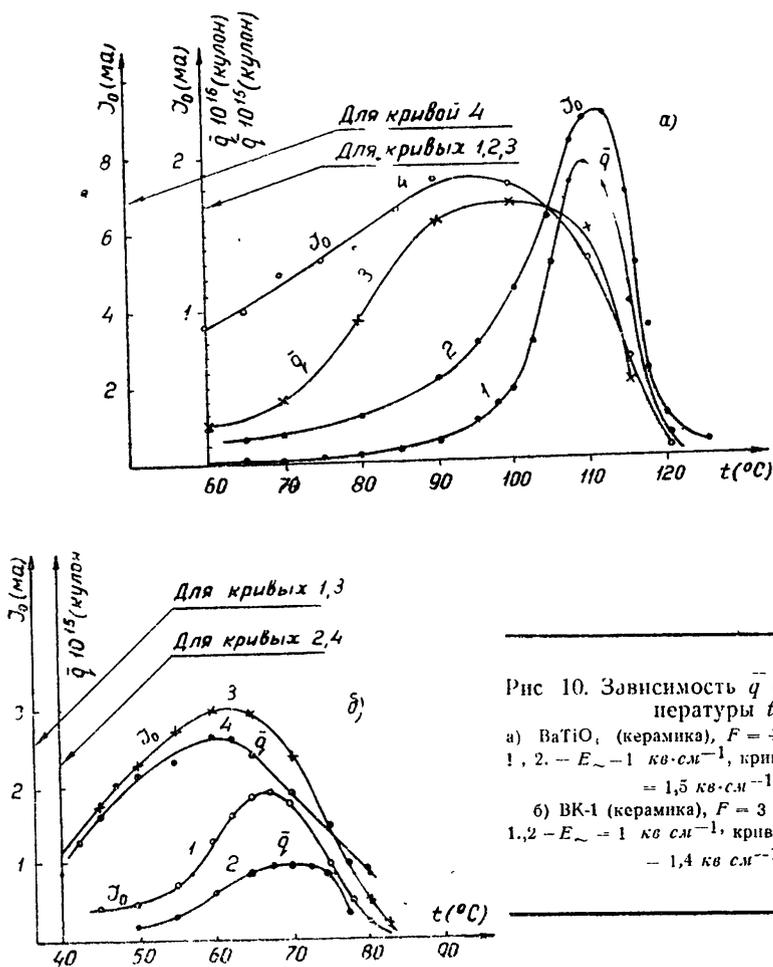


Рис. 10. Зависимость  $\bar{q}$  и  $J_0$  от температуры  $t$

а)  $\text{BaTiO}_3$  (керамика),  $F = 4$  кГц (кривые 1, 2. —  $E_{\sim} = 1$  кВ·см $^{-1}$ , кривые 3, 4. —  $E_{\sim} = 1,5$  кВ·см $^{-1}$ ),  
 б) ВК-1 (керамика),  $F = 3$  кГц (кривые 1, 2. —  $E_{\sim} = 1$  кВ·см $^{-1}$ , кривые 3, 4. —  $E_{\sim} = 1,4$  кВ·см $^{-1}$ ).

а) При увеличении частоты переполяризации  $F$ , т. е. при увеличении скорости изменения поля  $N$  растет,  $q$  уменьшается (рис. 8), а произведение  $F\sqrt{\varepsilon^2}$  остается неизменным (рис. 5)<sup>2</sup>. Последнее означает, что временной разброс моментов зарождения  $\sqrt{\varepsilon^2}$  занимает одинаковую долю периода (при комнатной температуре  $\sqrt{\varepsilon^2}$  составляет  $0,2/F$ ) независимо от частоты переполяризации, т. е. что процессы зарождения определяются полем.

Размельчение структуры сегнетокерамики (рост  $N$  и падение  $q$  с ростом  $F$ ) можно понимать следующим образом. Пусть для некоторой частоты  $F$  переполяризация рассматриваемого домена, растущего от одного зародыша, заканчивается при определенном поле  $E$ . По мере увеличения частоты рост домена не успевает следовать за полем так, чтобы полностью переполяризоваться к моменту, когда поле достигнет прежнего значения  $E$ . Может случиться, что оставшаяся часть домена будет переполяризована от другого зародыша, возникающего при полях, больших  $E$ . Это и приведет к росту  $N$  и падению  $q$ . Для ферритов расчет, аналогичный рассмотренному, позволяет установить, что  $N$ ,  $m$  (аналог  $q$ ) и  $F\sqrt{\varepsilon^2}$  не меняются при изменении частоты  $F$  (в пределах  $1 \div 60$  кГц).

б) Увеличение амплитуды прикладываемого поля увеличивает общий переполяризующийся объем, что видно по соответствующему росту тока. Однако рост общего объема, принимающего участие в процессе переполяризации, сопровождается падением  $N$  и ростом  $q$  (рис. 9, 10). С увеличением амплитуды  $\sqrt{\varepsilon^2}$  составляет меньшую долю периода. Изменение  $N$  и  $q$  с ростом амплитуды поля можно представлять себе таким образом: домены, независимо переполяризующиеся при малых полях, объединяются между собой областями, ранее не принимавшими участие в процессе переполяризации.

в) Изменение величин  $N$  и  $q$  при понижении температуры от температуры Кюри до комнатной можно видеть на тех же графиках рис. 8, 9. Из рисунков видно, что при понижении температуры число доменов растет, а средний заряд домена (см. рис. 10) сначала растет, затем падает. Максимум  $q$  наступает при тех же температурах, что и максимум тока  $J_0$ .

Зная  $q$  и спонтанную поляризацию  $P_s$ , можно определить объем домена  $v$  по известной формуле  $q = 2P_s v/l$  ( $l$  — толщина сегнетоконденсатора). Было найдено, что объем домена, как и полный объем, принимающий участие в процессе переполяризации, при понижении температуры падает от значения  $\sim 10^{-11}$  см<sup>3</sup> до значения  $\sim 10^{-13}$  см<sup>3</sup>. Уменьшение полного переполяризующегося объема при понижении температуры известно в литературе [4] и объясняется тем, что структура сегнетоэлектрика с понижением температуры становится более жесткой и переполяризация образца до насыщения возможна лишь при достаточно больших амплитудах. В наших опытах амплитуда поля была недостаточна для переполяризации образца с насыщением во всем интервале температур. Таким образом, наличие максимума функции  $q(t)$ , совпадающего с максимумом  $J_0(t)$ , связано с тем, что с понижением температуры  $q$  сначала увеличивается за счет роста спонтанной поляризации, а затем падает за счет уменьшения переполяризующегося объема. При понижении температуры кроме рассмотренных величин меняются и флуктуации моментов переполяризации  $\sqrt{\varepsilon^2}$ , что видно из графиков рис. 2 по смещению  $f_1$  в сторону низких частот

<sup>2</sup> Из рисунка видно, что отношение  $f_1/F$  примерно постоянно для разных  $F$ .

при понижении температуры. Поскольку  $f_1 \approx 1/\sqrt{\varepsilon^2}$ , величина  $V\sqrt{\varepsilon^2}$  растет при понижении температуры.

*Сравнение эксперимента и расчета для монокристаллов.* Если предположить, что рассмотренная модель справедлива и для монокристаллов, то надо принять (по виду спектра шума), что имеет место или случай  $V\sqrt{\varepsilon^2} \approx \tau$ ,  $G_m \approx NF|S(0)|^2$  (рис. 7г), или случай  $V\sqrt{\varepsilon^2} \ll \tau$ ,  $G_m \ll NF|S(0)|^2$ . В первом случае можно оценить  $q$  и, следовательно, найти объем домена. Объем домена  $v$  при комнатной температуре для монокристаллов  $\text{BaTiO}_3$  оказывается порядка  $0,5 \cdot 10^{-13} \text{ см}^3$  и для ТГС—порядка  $6 \cdot 10^{-11} \text{ см}^3$ , что примерно в 100 раз меньше объема области Баркгаузена ( $10^{11} \text{ см}^3$  и  $10^7 \text{ см}^3$  соответственно для  $\text{BaTiO}_3$  и для ТГС; см. ниже)\*.

По последним представлениям [10], скачок Баркгаузена для сегнетоэлектрических монокристаллов представляет собою начальное быстрое движение домена и по объему занимает небольшую (примерно, одну сотую) часть домена. Поскольку оценки объема домена по шумам приводят к значениям, которые меньше величины объема области Баркгаузена, и, тем самым, заведомо меньше, чем объем домена, становится ясным, что случай  $V\sqrt{\varepsilon^2} \sim \tau$  и  $G_m \approx NF|S(0)|^2$  не выполняется. Тогда остается предположить, что для монокристаллов выполняются неравенства  $V\sqrt{\varepsilon^2} \ll \tau$  и  $G_m \ll NF|S(0)|^2$ . Это может быть только при условии, если временной разброс моментов переполаризации много меньше, чем длительность импульса от отдельного домена. Поскольку ни  $V\sqrt{\varepsilon^2}$ , ни  $\tau$  нам не известны, то произвести оценки числа доменов и их размеров по спектру шума в монокристаллах нельзя. Имеющиеся в литературе сведения о соотношении временного разброса моментов переполаризации монокристаллов  $V\sqrt{\varepsilon^2}$  и длительности импульса  $\tau$  от отдельного домена несколько противоречивы. С одной стороны, известно, что во многих сегнетоэлектриках движение границ между доменами в периодическом поле наблюдается с помощью стробоскопического освещения [7, 11]. Применение самой методики стробоскопического освещения возможно только при хорошей воспроизводимости движения доменов, т. е. при условии, что  $V\sqrt{\varepsilon^2} \ll \tau$ . Для наблюдения доменов в ТГС применялась методика фигур травления. Для ТГС в [12] наблюдалась хорошая воспроизводимость фигур травления при повторной поляризации образца. С другой стороны, Мерц принимает другую картину процессов переполаризации, в которой все домены равноправны и зарождение случайно.

Вернемся к обсуждению полученных результатов. Поля, при которых производились измерения шумовых спектров, относятся к области  $E < \sigma$ , в которой, согласно Мерцу, время зарождения  $t_n$  больше, чем время роста  $t_d$  (т. е.  $V\sqrt{\varepsilon^2} > \tau$ ). Поэтому мы должны были ожидать в спектре шума наличия плоского участка и правильной оценки по шумам объема домена, чего мы не получили. Оказалось, что шумовой спектр у монокристаллов соответствует обратному случаю  $V\sqrt{\varepsilon^2} \ll \tau$ , который свидетельствует в пользу хорошей повторяемости процессов переполаризации при синусоидальном поле.

После того, как было выяснено такое несоответствие с гипотезой

\* Объем области Баркгаузена определялся нами по скачкам Баркгаузена для исследованных монокристаллов  $\text{BaTiO}_3$  и ТГС. Для монокристаллов  $\text{BaTiO}_3$  полученные данные не расходятся с имеющимися в литературе. Насколько нам известно, для ТГС данных по скачкам Баркгаузена в литературе нет.

Мерца, были поставлены два дополнительных опыта для изучения некоторых свойств образцов, на которых исследовался спектр шума.

*Дополнительные опыты.* Первый опыт был поставлен для того, чтобы определить, имеют ли исследованные кристаллы коэрцитивное поле при поляризации постоянным полем. Этот опыт состоял в следующем. Монокристалл поляризовался практически до насыщения постоянным полем  $E_1$  одного направления, затем прикладывалось поле противоположного направления  $E_2$ . Баллистическим прибором измерялся заряд, протекающий во внешней цепи при быстром переключении поля от  $E_2$  к прежнему значению  $E_1$ , в зависимости от величины и времени приложения поля  $E_2$ . Для исследованных монокристаллов  $\text{BaTiO}_3$  поляризация образца полем  $E_2$  не зависела от времени\* приложения поля. Однако в монокристаллах ТГС поляризация сильно зависела от времени приложения поля (изменение времени приложения поля от 5 сек до 300 сек меняло поляризацию в 10 раз). Таким образом, исследованные монокристаллы  $\text{BaTiO}_3$  имеют коэрцитивное поле при наложении постоянного поля, а монокристаллы ТГС, по-видимому, не имеют коэрцитивного поля. Таким образом, монокристаллы  $\text{BaTiO}_3$  заведомо не укладываются в схему Мерца.

Второй опыт был поставлен для более наглядного обнаружения неповторяемости процессов переполяризации на низкой частоте. (С нашими образцами мы не имели возможности провести стробоскопические наблюдения, которые могли бы дать ответ на вопрос о повторяемости процесса переполяризации.) Опыт состоял в следующем: напряжение низкой частоты 20–100 гц подводилось к монокристаллу. Исследовалось напряжение, пропорциональное току переполяризации. Чтобы обнаружить достаточно быстрые детали процесса переполяризации, напряжение предварительно подавалось на фильтр низких частот для подавления большого уровня низкочастотных гармоник, а затем усиливалось широкополосным усилителем (30–300 кгц). С выхода усилителя протектированное напряжение подавалось на пластины осциллографа. Чтобы сопоставлять наблюдаемые процессы с фазой поля, прикладываемого к образцу, на те же пластины подводилось также напряжение питающей частоты и на экране осциллографа наблюдалась временная развертка этих двух процессов. Полученные на осциллографе изображения фотографировались.

На рис. 11 приведена одна из таких фотографий. Выбросы соответствуют быстрым скачкам переполяризации отдельных областей (это могут быть скачки Баркгаузена). Из фотографии видно, что переполяризация, по крайней мере, некоторых крупных доменов в монокристаллах  $\text{BaTiO}_3$  хорошо повторяется. Для монокристаллов ТГС нет резко выраженных выбросов, картина складывается из большого числа пе-

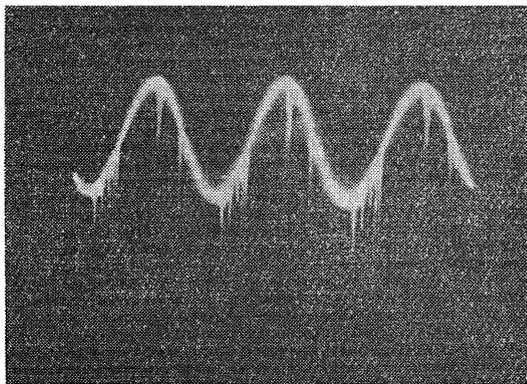


Рис 11.

\* Время приложения было больше 3 сек, но не превышало 6 часов

рекрывающихся и слегка флюктуирующих скачков. Количественные измерения этих флюктуаций не проводились.

Таким образом, из всего сказанного относительно монокристаллов можно сделать вывод, что хотя некоторая неповторяемость процессов переполаризации имеет место (о чем говорит наличие шума при синусоидальной периодической переполаризации), но неповторяемость значительно меньше, чем по представлениям Мерца, как для монокристаллов  $\text{BaTiO}_3$ , так и для монокристаллов ТГС.

Из содержания настоящей статьи можно заключить следующее.

1. Спектр шума при периодической переполаризации сегнетоэлектриков аналогичен спектру шума ферромагнетиков.

2. Оценки, проведенные по шумам, для объема домена в керамических сегнетоэлектриках дают значение  $10^{-13} \div 10^{-11} \text{ см}^3$ .

3. Из рассмотрения шумовых спектров сегнетоэлектриков ясно, что поляризация  $P$  в сегнетоэлектриках зависит как от поля, так и от скорости изменения поля.

4. Спектр шума сегнетоэлектрических монокристаллов несколько отличен от спектра шума керамических сегнетоэлектриков. Измерения, проведенные с монокристаллами, не подтверждают представлений Мерца о процессах переполаризации в монокристаллах.

5. Спектры шума как керамики, так и монокристаллов сильно зависят от температуры, хотя в точке Кюри никаких выделенных особенностей шума не наблюдается.

6. Интересная для приложений величина отношения корня из максимума спектральной плотности тока к полному току  $\sqrt{G_m}/J$  меняется с температурой в несколько раз. Это отношение сначала растет с ростом температуры, затем падает, достигая в максимуме значения порядка  $5 \cdot 10^{-7} \text{ гц}^{-1/2}$  для  $\text{BaTiO}_3$  при  $E \sim 1,5 \text{ кв.см}^{-1}$  и порядка  $10^{-7} \text{ гц}^{-1/2}$  для ВК-1 при  $E \sim 1,4 \text{ кв.см}^{-1}$ .

В заключение считаю своим долгом принести глубокую благодарность К. А. Горониной за ценные советы и неоднократные обсуждения результатов, а также И. Л. Берштейну за замечания при просмотре рукописи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Андропова, ДАН СССР, **119**, 68 (1958).
2. А. А. Грачев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, 2, 71 (1958).
3. К. А. Горонина, А. А. Грачев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 581 (1959).
4. В. А. Боков, ЖТФ, **26**, 1902 (1956).
5. Г. С. Горелик, Изв. АН СССР, сер. физ., **14**, 174 (1950).
6. С. И. Боровицкий, Диссертация, Горьк. ун-т, 1949; ДАН СССР, **74**, 233 (1950)
7. W. J. Merz, Phys. Rev., **95**, 690 (1954)
8. W. J. Merz, J. Appl. Phys., **27**, 938 (1956).
9. E. Fatuzzo, W. J. Merz, Phys. Rev., **116**, 61 (1959)
10. A. G. Chynoweth, Phys. Rev., **110**, 1316 (1958).
11. И. С. Желудев и Р. Я. Ситько, Изв. АН СССР, сер. физ., **21**, 286 (1957).
12. A. G. Chynoweth, J. Appl. Phys., **30**, 1000 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
23 июля 1960 г.

График этого отношения не приводится, так как его ход только вблизи точки Кюри (там, где существенную роль в полном токе  $J$  начинает играть ток  $J_n$ , связанный с индуцированной поляризацией) отличается от хода величины  $1/\sqrt{NF}$ . Указанные порядки величин рассчитываются по графику  $N(t)$  (рис. 9) для значений температуры  $t$ , соответствующих максимуму  $J_0$  (рис. 10).

---

**ON THE CONTINUOUS SPECTRUM OF CURRENT UPON PERIODIC  
REVERSAL OF FERROELECTRIC POLARIZATION**

*I. A. Andronova*

The results are given of an experimental investigation of the continuous spectrum of current arising in periodic reversal of polarization of ferroelectrics. Experimental results are compared with the calculations. Some conclusions can be drawn from the comparison concerning reversal of polarization processes in ferroelectrics

---

## О КОРРЕЛЯЦИИ ФЛЮКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ЧАСТОТЫ ГЕНЕРАТОРОВ

А. Н. Малахов, В. Н. Никонов

Получены выражения функций корреляции амплитудных и частотных флюктуаций для автогенераторов, описываемых дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка. Найдены условия существования корреляции между флюктуациями амплитуды и частоты.

1. Рассмотрим колебание генератора  $x(t)$ , амплитуда и частота которого флюктуируют:

$$x(t) = A_0[1 + \alpha(t)] \cos \left[ \omega_0 t + \int^t \nu(\xi) d\xi \right]. \quad (1)$$

Здесь предполагается, что  $\sigma(t)$  и  $\nu(t)$  -- относительные флюктуации амплитуды и флюктуации частоты, представляющие собой случайные стационарные процессы, связанные также стационарно, причем

$$|\sigma| \ll 1, \quad |\nu| \ll \omega_0, \quad \bar{\alpha} = \bar{\nu} = 0$$

(черта сверху означает статистическое усреднение).

Для определения известными методами спектральной плотности мощности колебаний (формы спектральной линии)  $W_x(\omega)$  необходимо знать функцию корреляции  $\Phi_x(\tau)$ , которая, в свою очередь, зависит от функций корреляций амплитудных флюктуаций  $\Phi_\alpha(\tau)$ , частотных флюктуаций  $\Phi_\nu(\tau)$  и взаимной функции корреляции  $\Phi_{\alpha\nu}(\tau)$ <sup>\*</sup>.

Для ряда конкретных генераторов в литературе [1] уже рассматривались функции корреляции амплитуды и фазы колебаний  $\Phi_\alpha(\tau)$  и  $\Phi_\nu(\tau)$ , где  $\psi(t) = \int_0^t \nu(\xi) d\xi$ . Целью настоящей работы является нахождение  $\Phi_\alpha(\tau)$ ,  $\Phi_\nu(\tau)$  и  $\Phi_{\alpha\nu}(\tau)$  для довольно широкого класса автогенераторов.

2. Пусть  $x(t)$  подчиняется следующему дифференциальному уравнению  $n$ -го порядка, описывающему автоколебательную систему (автогенератор), на которую воздействует шум  $E(t)$  (см. [2]):

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k x}{dt^k} = F \left( x, \dots, \frac{dx}{dt}, \dots \right) + E(t). \quad (2)$$

Приближенное решение этого уравнения представляет собой колебания, близкие к синусоидальным, и дается выражением (1).

Как показано в работе [2], флюктуации  $\nu(t)$  и  $\alpha(t)$  подчиняются следующим уравнениям:

$$\dot{\nu} + p\nu = (-a \dot{E} + a_\perp \dot{E}_\perp + b_\perp E_\perp + b_\parallel E_\parallel) / \delta A_0; \quad (3)$$

\* Функции корреляции мы здесь определяем как  $\Phi_{yz}(\tau) = \overline{y(t)z(t+\tau)}$ ,  $\Phi_{yz} = \overline{y(t)z(t+\tau)}$  и т. д., где двойная черта сверху означает временное усреднение.

$$\dot{\sigma} + p\alpha = (a_{\parallel} E_{\perp} + a_{\perp} E_{\parallel}) / \delta A_0, \quad (4)$$

где

$$p = \gamma/\delta; \quad \gamma = b_{\parallel} a_{\perp} - a_{\parallel} b_{\perp}; \quad \delta = a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2;$$

$$a_{\parallel} = 2a_2\omega_0 - 4a_4\omega_0^3 + 6a_6\omega_0^5 - 8a_8\omega_0^7 + \dots;$$

$$a_{\perp} = a_1 - 3a_3\omega_0^2 + 5a_5\omega_0^4 - 7a_7\omega_0^6 + \dots;$$

$$b_{\parallel} = -A_0 \left[ \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\Psi(\omega, A)}{A} \right) \right]_{\omega, A_0}; \quad b_{\perp} = -A_0 \left[ \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\Phi(\omega, A)}{A} \right) \right]_{\omega, A_0}.$$

Функции  $\Psi(\omega, A)$  и  $\Phi(\omega, A)$  определяются разложением функции  $F\left(x, \dots, \frac{dx}{dt}, \dots\right)$  в ряд Фурье при подстановке  $x = A \cos(\omega t)$ :

$$F[A \cos(\omega t); -\omega A \sin(\omega t); \dots] = \Psi(\omega, A) \cos(\omega t) + \Phi(\omega, A) \sin(\omega t) + \dots$$

+ высшие гармоники.

Уравнение (3) может быть преобразовано к другому виду, более удобному для дальнейшего анализа:

$$\dot{\nu} = p_1 \alpha + (a_{\parallel} E_{\perp} - a_{\perp} E_{\parallel}) / \delta A_0, \quad (5)$$

где  $p_1 = (a_{\parallel} b_{\perp} + a_{\perp} b_{\parallel}) / \delta$ .

Функции  $E_{\parallel}(t)$  и  $E_{\perp}(t)$  являются медленными по сравнению с  $\cos(\omega t)$  и определяются представлением шума  $E(t)$  (вернее, части шума, спектральная плотность мощности которого  $W_F(\omega)$  сосредоточена около  $\omega_0$  и имеет ширину  $\Delta\omega_0 \ll \omega_0$ ; см. рис. 1) в виде:

$$E(t) = E_{\parallel}(t) \cos(\omega_0 t) - E_{\perp}(t) \sin(\omega_0 t). \quad (6)$$

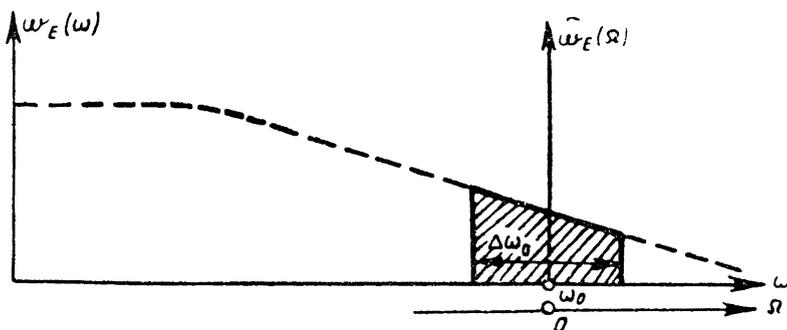


Рис. 1.

Представление (6), вообще говоря, не является однозначным определением  $E_{\parallel}(t)$  и  $E_{\perp}(t)$ . Требуемая однозначность достигается добавлением условия медленности  $E_{\parallel}(t)$  и  $E_{\perp}(t)$ . В самом деле, в силу этой медленности

$$(1/\omega_0) \dot{E}(t) = -E_{\parallel}(t) \sin(\omega_0 t) - E_{\perp}(t) \cos(\omega_0 t). \quad (7)$$

Разрешая (6) и (7) по отношению к  $E_{\parallel}$  и  $E_{\perp}$ , получаем их однозначные значения:

$$E_{\parallel}(t) = E(t) \cos(\omega_0 t) - (1/\omega_0) \dot{E}(t) \sin(\omega_0 t); \quad (8)$$

$$E_{\perp}(t) = -E(t) \sin(\omega_0 t) - (1/\omega_0) \dot{E}(t) \cos(\omega_0 t).$$

На основании (8) можно найти функции корреляции  $\Phi_{\parallel}(\tau) = \overline{E_{\parallel}(t)E_{\parallel}(t+\tau)}$ ,  $\Phi_{\perp}(\tau) = \overline{E_{\perp}(t)E_{\perp}(t+\tau)}$ ,  $\Phi_{\perp\parallel}(\tau) = \overline{E_{\parallel}(t)E_{\perp}(t+\tau)} = -\Phi_{\parallel\perp}(\tau) = -\overline{E_{\perp}(t)E_{\parallel}(t+\tau)}$ , выразив их через  $\Phi_E(\tau)$ . С другой стороны, как известно,

$$\Phi_E(\tau) = \int_0^{\infty} W_E(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (9)$$

Вводя спектральную плотность  $\tilde{W}_E(\Omega)$  с аргументом  $\Omega$ , отсчитываемым от  $\omega_0$  ( $\omega = \omega_0 + \Omega$ , см. рис. 1), можно (9) представить в виде:

$$\Phi_E(\tau) = \int_0^{\infty} \tilde{W}_E(\omega - \omega_0) \cos(\omega\tau) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}_E(\Omega) \cos[(\omega_0 + \Omega)\tau] d\Omega$$

или, учитывая, что  $\tilde{W}_E(\Omega)$  отлично от нуля только в районе  $|\Omega - \Delta\omega_0/2| \leq \Delta\omega_0/2$  ( $\Delta\omega_0 \ll \omega_0$ ), в виде:

$$\Phi_E(\tau) = A^0(\tau) \cos(\omega_0\tau) - A^1(\tau) \sin(\omega_0\tau). \quad (10)$$

Здесь  $A^0(\tau)$  и  $A^1(\tau)$  — медленные по сравнению с  $\cos(\omega_0\tau)$  функции, равные\*

$$\begin{aligned} A^0(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{W}_E(\Omega) \cos(\Omega\tau) d\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{W}_E^0(\Omega) \cos(\Omega\tau) d\Omega; \\ A^1(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{W}_E(\Omega) \sin(\Omega\tau) d\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{W}_E^1(\Omega) \sin(\Omega\tau) d\Omega. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11)

$$\tilde{W}_E(\Omega) = \tilde{W}_E^0(\Omega) + \tilde{W}_E^1(\Omega).$$

Очевидно, что справедливы следующие обратные соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_E^0(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A^0(\tau) \cos(\Omega\tau) d\tau; \\ \tilde{W}_E^1(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A^1(\tau) \sin(\Omega\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

В общем случае  $A^1(\tau) \neq 0$ , так как  $W_F(\omega)$  может быть несимметрична относительно  $\omega_0$  ( $\tilde{W}_E^1(\Omega) \neq 0$ ).

Используя (10), можно, согласно изложенному выше, выразить  $\Phi_{\parallel}(\tau)$ ,  $\Phi_{\perp}(\tau)$  и  $\Phi_{\perp\parallel}(\tau)$  через  $A^0(\tau)$  и  $A^1(\tau)$ . В самом деле, умножая  $E_{\parallel}(t)$ , заданное выражением (8), на  $E_{\parallel}(t+\tau)$  и усредняя результат по времени, получим:

$$\Phi_{\parallel}(\tau) = \frac{1}{2} [\Phi_E - \omega_0^{-2} \ddot{\Phi}_E] \cos(\omega_0\tau) - \omega_0^{-1} \dot{\Phi}_E \sin(\omega_0\tau).$$

Дифференцируя (10) и учитывая медленность  $A^0(\tau)$  и  $A^1(\tau)$ , будем иметь:

\* В дальнейшем  $y^0(t)$  и  $y^1(t)$  будут означать соответственно четную и нечетную части функции  $y(t) = y^0(t) + y^1(t)$ .

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_E(\tau) &= -\omega_0 A^0(\tau) \sin(\omega_0 \tau) - \omega_0 A^1(\tau) \cos(\omega_0 \tau); \\ \ddot{\Phi}_E(\tau) &= -\omega_0^2 \Phi_E(\tau).\end{aligned}$$

Подставляя это в выражение для  $\Phi(\tau)$  и приводя подобные члены, получим окончательно:

$$\Phi_{\parallel}(\tau) = A^0(\tau).$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\Phi_{\perp}(\tau) = \Phi_{\perp}(\tau) = A^0(\tau), \quad \Phi_{\perp\perp}(\tau) = -\Phi_{\perp}(\tau) = A^1(\tau). \quad (13)$$

Тем самым получены все необходимые данные о  $E_{\parallel}$  и  $E_{\perp}$ .

3. Найдем теперь  $\Phi_x(\tau)$ . Решая уравнение (4) относительно  $x(t)$ , получим (рассматривая только вынужденное решение):

$$x(t) = \int_0^{\infty} f(t - \xi) e^{-p\xi} d\xi, \quad (14)$$

где  $f(t) = (a_{\perp} E_{\perp} + a_{\parallel} E_{\parallel}) / \delta A_0$ . Записывая (14) для  $x(t + \tau)$ , перемножая и усредняя, получим:

$$\Phi_x(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Phi_f(\tau + \xi - \eta) e^{-p(\xi + \eta)} d\xi d\eta, \quad (15)$$

где  $\Phi_f(\tau)$  — функция корреляции  $f(t)$ . С помощью (13) можно найти, что

$$\Phi_f(\tau) = A^0(\tau) \delta A_0^2. \quad (16)$$

Совершая преобразование переменных в (15) и учитывая (16), получим:

$$\Phi_x(\tau) = \frac{1}{p \delta A_0^2} \int_0^{\infty} \frac{A^0(\tau + y) + A^0(\tau - y)}{2} e^{-py} dy. \quad (17)$$

Заметим, что, если искать выражение для спектральной плотности относительных флуктуаций амплитуды  $W_x(\Omega)$ , на основании (11) и (17) можно получить:

$$W_x(\Omega) = 2 \widetilde{W}_E^0(\Omega) \delta A_0^2 (p^2 + \Omega^2). \quad (18)$$

Из формулы (18) легко сделать известный вывод [1,4,5] о том, что из всего спектра  $W_E(\omega)$  эффективно воздействует на автоколебательную систему (с точки зрения амплитудных флуктуаций) лишь часть спектра около  $\omega_0$  с полосой порядка или меньше  $p$ .

Рассмотрим функцию  $\Phi_y(\tau)$ . Записывая (5) для момента  $t + \tau$ , перемножая и усредняя, получим:

$$\Phi_y(\tau) = p_1^2 \Phi_y(\tau) + \Phi_y(\tau) + p_1 [\Phi_{y\tau}(\tau) + \Phi_{y\tau}(-\tau)],$$

где

$$\varphi(t) = [a_{\perp} E_{\perp}(t) - a_{\parallel} E_{\parallel}(t)] / \delta A_0, \quad \Phi_{\alpha\varphi} = \overline{\alpha(t) \varphi(t + \tau)}.$$

Используя (13) и (14), можно найти, что

\* В работе [8] приводится другой вывод этих соотношений, основанный на введении вспомогательной функции  $U(t)$ , сопряженной (6).

$$\begin{aligned}\Phi_{\varphi}(\tau) &= A^0(\tau)/\delta A_0^2; \\ \Phi_{\alpha\varphi}(\tau) &= \frac{1}{\delta A_0^2} \int_0^{\infty} A^1(\tau + y) e^{-py} dy.\end{aligned}\quad (19)$$

Отсюда окончательно имеем:

$$\begin{aligned}\Phi_{\nu}(\tau) &= \frac{A^0(\tau)}{\delta A_0^2} + \frac{p_1^2}{\delta A_0^2 p} \int_0^{\infty} \frac{A^0(\tau + y) + A^0(\tau - y)}{2} e^{-py} dy + \\ &+ \frac{2p_1}{\delta A_0^2} \int_0^{\infty} \frac{A^1(\tau + y) - A^1(\tau - y)}{2} e^{-py} dy.\end{aligned}\quad (20)$$

Совершая фурье-преобразование (20) с учетом (11), получим спектральную плотность флуктуаций частоты

$$W_{\nu}(\Omega) = 2 \frac{(\delta\Omega^2 + \varepsilon) \tilde{W}_E^0(\Omega) + 2\delta p_1 \Omega \tilde{W}_E^1(\Omega)}{\delta^2 A_0^2 (\Omega^2 + p^2)}, \quad (21)$$

где  $\varepsilon = b_{\parallel}^2 + b_{\perp}^2$ . Формулы (18) и (21) для частного случая  $\tilde{W}_E^1(\Omega) \equiv 0$  совпадают с полученными в [2] несколько иным путем\*. Для частного случая  $p_1 = 0$  из (20) и (21) следует:

$$\Phi_{\nu}(\tau) = A^0(\tau)/\delta A_0^2; \quad W_{\nu}(\Omega) = 2 \tilde{W}_E^0(\Omega)/\delta A_0^2.$$

Найдем теперь смешанную функцию корреляции  $\Phi_{\alpha\nu}(\tau)$ . Для этого помножим  $\sigma(t)$  на  $\nu(t + \tau)$ , заданное уравнением (5), и усредним. В результате будем иметь:

$$\Phi_{\alpha\nu}(\tau) = p_1 \Phi_{\nu}(\tau) + \Phi_{\alpha\varphi}(\tau).$$

Используя (17) и (19), получим:

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha\nu}(\tau) &= \frac{1}{\delta A_0^2} \left\{ \frac{p_1}{p} \int_0^{\infty} \frac{A^0(\tau + y) + A^0(\tau - y)}{2} e^{-py} dy + \right. \\ &\left. + \int_0^{\infty} A^1(\tau + y) e^{-py} dy \right\}.\end{aligned}\quad (22)$$

Функция  $\Phi_{\alpha\nu}$  в общем случае имеет и четную, и нечетную части:  $\Phi_{\alpha\nu} = \Phi_{\alpha\nu}^0(\tau) + \Phi_{\alpha\nu}^1(\tau)$ . Поэтому имеет смысл ввести следующие смешанные спектральные плотности:

$$\begin{aligned}W_{\alpha\nu}^0(\Omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\alpha\nu}^0(\tau) \cos(\Omega\tau) d\tau; \\ W_{\alpha\nu}^1(\Omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\alpha\nu}^1(\tau) \sin(\Omega\tau) d\tau.\end{aligned}\quad (23)$$

\* Учет несимметричности спектра  $\tilde{W}_E$  при расчете флуктуаций частоты систем второго порядка был проведен ранее Троицким [5].

Совершая фурье-преобразование (22), можно с помощью (23) получить:

$$\begin{aligned} W_{\omega}^0(\Omega) &= 2 [p_1 \tilde{W}_E^0(\Omega) + \Omega \tilde{W}_E^1(\Omega)] / \delta A_0^2 (p^2 + \Omega^2); \\ W_{\omega}^1(\Omega) &= 2p \tilde{W}_E^1(\Omega) / \delta A_0^2 (p^2 + \Omega^2). \end{aligned} \quad (24)$$

Эти спектральные плотности приобретают особый интерес при измерении частотных флуктуаций с помощью контура или линии задержки [6,7].

4. Перейдем к рассмотрению конкретных примеров.

*Первый пример.* Пусть спектр воздействующего на генератор шума представляет собой постоянную величину  $W_E(\omega) = W_0$  в интересующем нас интервале  $[\omega_0 - \Delta\omega_0/2, \omega_0 + \Delta\omega_0/2]$ , причем  $p \ll \Delta\omega_0 \ll \omega_0$ .

В этом случае  $\tilde{W}_E(\Omega) = W_0$  и на основании (11), где, очевидно,  $\tilde{W}_E^0(\Omega) = W_0$ ;  $\tilde{W}_E^1(\Omega) = 0$ , получаем:

$$A''(\tau) = 2\pi W_0 \delta(\tau); \quad A^1(\tau) = 0.$$

Здесь  $\delta(\tau)$  - дельта-функция. Вычисление выражений (17), (20) и (22) приводит к соотношениям:

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma}(\tau) &= \frac{\pi W_0}{p \delta A_0^2} e^{-p|\tau|}; \\ \Phi_{\omega}(\tau) &= \frac{2\pi W_0}{\delta A_0^2} \left[ \delta(\tau) + \frac{p^2}{2p} e^{-p|\tau|} \right]; \\ \Phi_{\omega\omega}(\tau) &= \frac{\pi W_0 p_1}{p \delta A_0^2} e^{-p|\tau|}. \end{aligned} \quad (25)$$

Отсюда видно, что взаимная корреляция между амплитудными и частотными флуктуациями существует, когда  $p_1 = \frac{a_{\parallel} b_{\parallel} + a_{\perp} b_{\perp}}{a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2} \neq 0$ .

В изохронных генераторах  $b_{\parallel} = 0$ ,  $b_{\perp} \neq 0$ , в неизохронных  $b_{\parallel} \neq 0$ ,  $b_{\perp} \neq 0$ . Кроме того, в LC-генераторах  $a_{\perp} = 0$ ,  $a_{\parallel} \neq 0$ , а в трехзвенном RC-генераторе  $a_{\parallel} \neq 0$ ,  $a_{\perp} \neq 0$  (см. [2]). Тем самым, при  $\tilde{W}_E(\Omega) = W_0$  корреляция  $\Phi_{\omega\omega}(\tau)$  существует вообще у всех неизохронных генераторов, а также у некоторых изохронных (трехзвенный RC-генератор).

*Второй пример.* В первом примере мы полагали (как и в работах [1,2]), что  $\tilde{W}_E^1(\Omega) = 0$ . Однако не представляет труда убедиться (см. ниже), что, по-видимому, во всех конкретных схемах генераторов  $\tilde{W}_E^1(\Omega) \neq 0$ , т. е., другими словами, спектр  $W_E(\omega)$  вблизи  $\omega = \omega_0$  имеет не равную нулю производную. Величина и знак этой производной определяется конкретной схемой генератора. Ограничиваясь для простоты лишь первой производной, примем, что для  $\Omega \in [-\Delta\omega_0/2, \Delta\omega_0/2]$

(где  $p \ll \Delta\omega_0 \ll \omega_0$ )  $\tilde{W}_E^0(\Omega) = W_0$ ,  $\tilde{W}_E^1(\Omega) = K_0 \Omega$  (именно этот случай с  $K_0 < 0$  изображен на рис. 1).

\* Этот случай для некоторых автоколебательных систем рассматривался в [1] и для более общих систем в [2].

В этом случае на основании (11) имеем:

$$A^0(\tau) = 2\pi W_0 \delta(\tau); \quad A^1(\tau) = -2\pi K_0 d\delta(\tau)/d\tau.$$

Отсюда, используя (17), видим, что  $\Phi_v(\tau)$  — такая же, как и в первом примере:

$$\Phi_v(\tau) = \frac{\pi W_0}{p \delta A_0^2} e^{-p|\tau|},$$

в то время как  $\Phi_{xy}(\tau)$  и  $\Phi_{xy}(\tau)$  имеют другой вид:

$$\Phi_{xy}(\tau) = \frac{2\pi}{\delta A_0^2} \left\{ W_0 \delta(\tau) + \left( \frac{p_1}{2p} W_0 + p p_1 K_0 \right) e^{-p|\tau|} \right\}; \quad (26)$$

$$\Phi_{xy}(\tau) = \frac{2\pi}{\delta A_0^2} L e^{-p|\tau|}; \quad L = \begin{cases} p_1 W_0 / 2p & (\tau > 0) \\ p_1 W_0 / 2p - p K_0 & (\tau < 0) \end{cases}. \quad (27)$$

Учитывая, что  $\Phi_{xy}(\tau) = \Phi_{xy}^0(\tau) + \Phi_{xy}^1(\tau)$ , получим:

$$\Phi_{xy}^0(\tau) = \frac{2\pi}{\delta A_0^2} \left( \frac{p_1}{2p} W_0 - \frac{p}{2} K_0 \right) e^{-p|\tau|}; \quad (28)$$

$$\Phi_{xy}^1(\tau) = \frac{2\pi}{\delta A_0^2} \frac{p K_0}{2} \operatorname{sgn} \tau e^{-p|\tau|}.$$

Из формул (26) и (27) следует, что существование спектра  $\tilde{W}_E^1(\Omega)$  сказывается на виде  $\Phi_v(\tau)$  и, следовательно, на форме спектра  $W_v(\Omega)$  только в случае  $p_1 \neq 0$ , а на виде  $\Phi_{xy}(\tau)$  — в любом случае.

Так, например, даже в изохронных LC-генераторах существует корреляция между флуктуациями амплитуды и частоты колебания, обусловленная несимметричностью  $\tilde{W}_E(\Omega)$ . В самом деле, рассмотрим LC-генератор с контуром в цепи анода. Как известно [2], для него  $\delta = 4\omega_0^2$ ,  $p > 0$ ,  $p_1 = 0$  и

$$W_E(\omega) = \omega_0^4 M^2 [\omega^2 2eI_0 + \omega^3 C^2 4kTr],$$

где  $\omega_0^{-2} E(t)$  — напряжение на сетке лампы,  $M$  — взаимная индукция,  $e$  — заряд электрона,  $I_0$  — постоянный ток через лампу,  $C$  — емкость контура,  $k$  — постоянная Больцмана,  $r$  — активное сопротивление контура, имеющее абсолютную температуру  $T$ . Легко видеть, что

$$K_0 = \left[ \frac{d}{d\omega} W_E(\omega) \right]_{\omega=\omega_0} = 4\omega_0^4 M^2 [\omega_0 e I_0 + \omega_0^3 C^2 4kTr] > 0.$$

Таким образом, действительно  $\Phi_{xy}(\tau) \neq 0$ . Аналогичное положение имеет место для LC-генератора с контуром в цепи сетки и, тем более, для RC-генераторов.

*Третий пример.* Рассмотрим теперь случай, когда на рассматриваемый автогенератор действует шум, спектр которого, будучи расположен около  $\omega_0$ , имеет ширину, сравнимую с  $p$  или меньше  $p$ . Подобный случай может иметь место при существовании в автогенераторе сравнительно медленных флуктуаций параметров (наличием дополнительных шумов, обладающих широким спектром, в данном примере пренебрежем) [3]. Для простоты примем также, что  $\tilde{W}_E^1(\Omega) \equiv 0$ , и будем считать, что четная часть спектра имеет резонансную форму:

$$\tilde{W}_E^0(\Omega) = \frac{q^2 W_0}{q^2 + \Omega^2}, \quad (29)$$

где  $q$  — ширина спектра. На основании (11) нетрудно найти:

$$A^0(\tau) = \pi q W_0 e^{-q|\tau|}, \quad A^1(\tau) \equiv 0, \quad (30)$$

откуда с помощью (17), (20) и (22) получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_x(\tau) &= \frac{\pi q W_0}{p \delta A_0^2} \frac{p e^{-q|\tau|} - q e^{-p|\tau|}}{p^2 - q^2}; \\ \Phi_y(\tau) &= \frac{\pi q W_0}{\delta A_0^2} \left[ e^{-q|\tau|} + \frac{p_1^2}{p} \frac{p e^{-q|\tau|} - q e^{-p|\tau|}}{p^2 - q^2} \right]; \\ \Phi_{xy}(\tau) &= p_1 \Phi_x(\tau). \end{aligned} \quad (31)$$

Анализ (31) показывает следующее. Если положить  $q \gg p$ , то, как нетрудно видеть, (31) переходит в (25) (за исключением первого слагаемого в формулах для  $\Phi_x(\tau)$ , для которого требуется условие  $q \rightarrow \infty$ ). Последнее позволяло нам для  $\Delta\omega_0 \gg p$  аппроксимировать в предыдущих примерах  $A^0(\tau)$  дельта-функцией (т. е. полагать  $q = \infty$ ). Если теперь взять обратный случай  $q \ll p$ , то функции корреляции флуктуаций амплитуды и частоты примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_x(\tau) &= \frac{A^0(0)}{p^2 \delta A_0^2} e^{-q|\tau|}; \\ \Phi_y(\tau) &= \frac{A^0(0)}{\delta A_0^2} \left[ 1 + \frac{p_1^2}{p^2} \right] e^{-q|\tau|}; \\ \Phi_{xy}(\tau) &= p_1 \Phi_x(\tau), \end{aligned} \quad (32)$$

где  $A^0(0) = \pi q W_0$  — полная энергия шума, сосредоточенная вблизи  $\omega_0$ .

Эти выражения свидетельствуют о том, что если ширина спектра шума, воздействующего на автоколебательную систему, много меньше прочности предельного цикла  $p$ , то функция корреляции и спектры флуктуаций амплитуды и частоты колебания пропорциональны таковым для воздействующего шума. Другими словами, в случае  $q \ll p$  подобный узкий спектр приводит к квазистатистической модуляции. Если вместе с тем  $E(t)$  связана с флуктуациями параметров, то неравенство  $q \ll p$ , очевидно, свидетельствует о квазистатистическом характере флуктуаций параметров.

Рассматривая, наконец, случай  $q = p$ , из (31) получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_x(\tau) &= \frac{\pi W_0}{\delta A_0^2} \frac{1 + p|\tau|}{2p} e^{-p|\tau|}; \\ \Phi_y(\tau) &= \frac{\pi W_0}{\delta A_0^2} \left[ p + \frac{p_1^2}{2p} (1 + p|\tau|) \right] e^{-p|\tau|}; \\ \Phi_{xy}(\tau) &= p_1 \Phi_x(\tau). \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, для существования взаимной корреляции между амплитудными и частотными флуктуациями генератора необходимо и достаточно выполнение хотя бы одного из следующих условий: 1) одновременно  $b_1 \neq 0$  и  $b \neq 0$ , что имеет место, если автогенера-

тор является неизохронным; 2) одновременно  $a_{11} \neq 0$  и  $a_{12} \neq 0$ , что имеет место, если в левой части уравнения автогенератора (2) имеются как четные, так и нечетные производные; 3) спектр воздействующего шума вблизи  $\omega_0$  несимметричен относительно  $\omega_0$ .

По-видимому, во всех реальных генераторах, по крайней мере, третье условие выполняется всегда. Следовательно, всегда имеется корреляция между флюктуациями частоты и амплитуды, которую следует учитывать при вычислении формы спектральной линии  $W_x(\omega)$  колебания генератора.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 С М Рытов, ЖЭТФ, 29, 304, 315 (1955)
- 2 А Н Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 2, 79 (1958)
- 3 А Н Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 241 (1960)
- 4 Л. И. Гудзенко, Радиотехника и электроника, 1, 1240 (1956).
5. В С Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 21 (1958)
6. Г. С. Горелки, Г. А. Елкин, Радиотехника и электроника, 2, 8 (1957).
7. И. Л. Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., 14 (1950).
8. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. Свв. радио, М., 1957.

Научно-исследовательский радиотехнический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
28 февраля 1960 г.

#### ON THE CORRELATION OF AMPLITUDE AND FREQUENCY FLUCTUATIONS OF OSCILLATORS

*A. N. Malakhov, V. N. Nikonov*

The authors have obtained the expressions of the correlation functions of amplitude and frequency fluctuations for autooscillators, governed by a  $n$ -order differential equation. The conditions are stated when there exists the correlation between amplitude and frequency fluctuations.

**К ИССЛЕДОВАНИЮ СВЕРХРЕГЕНЕРАТИВНОГО РЕЖИМА  
ОДНОКОНТУРНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УСИЛИТЕЛЕЙ**

*Е. М. Гершензон, Т. Ф. Любимова, Н. Г. Птицына, Г. И. Рожкова,  
В. С. Эткин*

Обобщенным методом Ван-дер-Поля найдены частотные характеристики сверхрегенеративного одноконтурного параметрического усилителя. Полученные материалы находятся в качественном согласии с экспериментом

1. В последнее время неоднократно сообщалось о применении в параметрических усилителях сверхрегенеративного режима. Этот режим осуществляется путем дополнительной низкочастотной модуляции переменной емкости в параметрическом усилителе (модуляции генератора накачки или модуляции емкости полупроводникового диода низкочастотным напряжением [1, 2]).

Если сверхрегенеративный режим в параметрическом усилителе осуществляется с помощью медленной модуляции мощности накачки, то колебания в последовательном LCR-контуре усилителя могут быть описаны уравнением:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C_0} \{1 + m [1 + h \cos(\omega_m t)] \sin(\omega_n t)\} = E_0 \cos(\omega_c t - \psi), \quad (1)$$

где  $\omega_c$  — частота сигнала,  $\omega_n$  — частота накачки,  $\omega_m$  — частота суперизации,  $m$  — средняя глубина модуляции нелинейной емкости,  $h$  — глубина „суперизации“ (модуляции накачки). Приведем уравнение (1) к безразмерному виду:

$$\ddot{y} + 2\Theta y + (1 + 2\xi_0) y + m y [1 + h \cos(\Omega\tau)] \sin(2\tau) = \lambda \cos[(1 + \xi)\tau - \psi], \quad (2)$$

где

$$y = q/C_0 u_0; \quad \lambda = E_0/u_0; \quad 2\Theta = R/\omega_0 L; \quad 2\omega_0/\omega_n = 1 + \xi_0;$$

$$2\omega_c/\omega_n = 1 + \xi; \quad 2\omega_m/\omega_n = \Omega; \quad \tau = \omega_n t/2; \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}.$$

Для упрощения выкладок в дальнейшем положим  $\xi_0 = 0$ .

Как и в случае простого параметрического усилителя [3], решение ищем методом Ван-дер-Поля в виде:

$$y = a \sin \tau + b \cos \tau,$$

где  $a$  и  $b$  — медленно меняющиеся функции времени. Для  $a$  и  $b$ , аналогично случаю простого параметрического усилителя [3], получаем систему укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda \cos(\xi\tau - \psi) - \left(2\Theta + \frac{m}{2}\right)a - \frac{mh}{2} a \cos(\Omega\tau); \\ -2\dot{b} &= -\lambda \sin(\xi\tau - \psi) + \left(2\Theta - \frac{m}{2}\right)b - \frac{mh}{2} b \cos(\Omega\tau), \end{aligned} \quad (3)$$

которые отличаются от уравнений, полученных в [3], наличием последних членов, появившихся из-за суперизации. Решение укороченных уравнений удобно искать в следующем виде:

$$a = \sum_N \{ A_{1N} \sin [(\xi + N\Omega)\tau - \psi] + A_{2N} \cos [(\xi + N\Omega)\tau - \psi] \}; \quad (4)$$

$$b = \sum_N \{ B_{1N} \sin [(\xi + N\Omega)\tau - \psi] + B_{2N} \cos [(\xi + N\Omega)\tau - \psi] \} \quad (N \geq 0),$$

где  $A_{1N}$ ,  $A_{2N}$ ,  $B_{1N}$ ,  $B_{2N}$  — постоянные коэффициенты.

Подставив (4) в (3), получаем следующую бесконечную систему алгебраических уравнений для определения этих коэффициентов:

$$\begin{aligned} -\left(2\theta - \frac{m}{2}\right) B_{1N} + 2(\xi + N\Omega) B_{2N} + \frac{mh}{4} (B_{1(N-1)} + B_{1(N+1)}) &= -\lambda \delta_{0N}; \\ -2(\xi + N\Omega) B_{1N} - \left(2\theta - \frac{m}{2}\right) B_{2N} + \frac{mh}{4} (B_{2(N-1)} + B_{2(N+1)}) &= 0; \\ 2(\xi + N\Omega) A_{1N} + \left(2\theta + \frac{m}{2}\right) A_{2N} + \frac{mh}{4} (A_{2(N-1)} + A_{2(N+1)}) &= \lambda \delta_{0N}; \\ \left(2\theta + \frac{m}{2}\right) A_{1N} - 2(\xi + N\Omega) A_{2N} + \frac{mh}{4} (A_{1(N-1)} + A_{1(N+1)}) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\delta_{0N}$  — символ Кронекера.

Если принять, что амплитуды составляющих спектра, достаточно далеких от собственной частоты контура, настолько малы, что ими можно пренебречь, т. е. считать, что  $A_{1N} = A_{2N} = B_{1N} = B_{2N} = 0$  для всех  $N$ , больших некоторого числа  $K$ , то система уравнений станет конечной и весьма простой. В самом деле, так как в последнее уравнение будут входить теперь только коэффициенты номера  $K$  и  $K-1$ , то  $A_{1K}$ ,  $A_{2K}$  и  $B_{1K}$ ,  $B_{2K}$  можно выразить через  $A_{1(K-1)}$ ,  $A_{2(K-1)}$ ,  $B_{1(K-1)}$ ,  $B_{2(K-1)}$  и подставить их значения в предыдущие уравнения, которые, в свою очередь, будут содержать тогда только коэффициенты номера  $K-1$  и  $K-2$  и т. д. Все уравнения, входящие в систему (5), имеют одинаковую структуру; поэтому уравнения для коэффициентов любого номера  $N \neq 0$  после указанных подстановок можно привести к единому виду:

$$\begin{aligned} -\left(2\theta - \frac{m}{2}\right) a_N B_{1N} + 2\xi_N B_{2N} + \frac{mh}{4} B_{1(N-1)} &= 0; \\ -2\xi_N B_{1N} - \left(2\theta - \frac{m}{2}\right) a_N B_{2N} + \frac{mh}{4} B_{2(N-1)} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

(аналогично для  $A_{1N}$ ,  $A_{2N}$ ). Здесь величины  $a_N$  и  $\xi_N$  вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_N &= 1 - \left(\frac{mh}{4}\right)^2 a_{N-1} \frac{1}{P_{N-1}}; \\ \xi_N &= (\xi + N\Omega) + \left(\frac{mh}{4}\right)^2 \xi_{N-1} \frac{1}{P_{N-1}}, \end{aligned} \quad (7)$$

причем

$$P_N = \left(2\theta - \frac{m}{2}\right)^2 a_N^2 + 4\xi_N^2 \quad (0 < N \leq K);$$

$$P_{K+1} = 1, \quad a_K = 1, \quad a_{K+1} = 0, \quad \xi_{K+1} = 0.$$

Для определения коэффициентов  $B_{10}$ ,  $B_{20}$  получим систему:

$$\begin{aligned} B_{10} \left(2\theta - \frac{m}{2}\right) \left[1 - \left(\frac{mh}{4}\right)^2 \left(\frac{a_1}{P_1} + \frac{\hat{a}_1}{\hat{P}_1}\right)\right] - \\ - 2\xi B_{20} \left[1 + \left(\frac{mh}{4}\right)^2 \left(\frac{\xi_1}{P_1 \xi} + \frac{\hat{\xi}_1}{\hat{P}_1 \hat{\xi}}\right)\right] = \nu; \\ 2\xi B_{10} \left[1 + \left(\frac{mh}{4}\right)^2 \left(\frac{\xi_1}{P_1 \xi} + \frac{\hat{\xi}_1}{\hat{P}_1 \hat{\xi}}\right)\right] + \\ + B_{20} \left(2\theta - \frac{m}{2}\right) \left[1 - \left(\frac{mh}{4}\right)^2 \left(\frac{a_1}{P_1} + \frac{\hat{a}_1}{\hat{P}_1}\right)\right] = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{\xi}_1$ ,  $\hat{P}_1$  вычисляются по формулам, аналогичным (7);

$$\hat{\xi}_N = (\xi - N\Omega) + \left(\frac{mh}{4}\right)^2 \frac{\hat{\xi}_{N+1}}{\hat{P}_{N+1}}.$$

Общий вид решения при учете (4) показывает, что спектр на выходе усилителя состоит из двух семейств комбинационных частот—сигнальных  $(1 + \xi \pm N\Omega)$  и зеркальных  $(1 - \xi \pm N\Omega)$ . При этом выражения для интенсивности колебаний могут быть записаны в следующем виде: на частоте  $1 + \xi + N\Omega$

$$\frac{1}{2} [(A_{2N} + B_{1N})^2 + (B_{2N} - A_{1N})^2];$$

на частоте  $1 + \xi - N\Omega$

$$\frac{1}{2} [(\hat{A}_{2N} + \hat{B}_{1N})^2 + (\hat{B}_{2N} - \hat{A}_{1N})^2];$$

на частоте  $1 - \xi - N\Omega$

$$\frac{1}{2} [(A_{1N} + B_{2N})^2 + (A_{2N} - B_{1N})^2];$$

на частоте  $1 - \xi + N\Omega$

$$\frac{1}{2} [(\hat{A}_{1N} + \hat{B}_{2N})^2 + (\hat{A}_{2N} - \hat{B}_{1N})^2].$$

При большой начальной регенерации, когда  $\left(2\theta - \frac{m}{2}\right) \ll \left(2\theta + \frac{m}{2}\right)$  и  $A_{1N}$ ,  $A_{2N} \ll B_{1N}$ ,  $B_{2N}$ , интенсивности сигнальной и разностной компонент, а также интенсивности симметричных относительно половины частоты накачки членов их семейств одинаковы и равны

$$C_N^2 = \frac{1}{2} (B_{1N}^2 + B_{2N}^2)$$

для колебаний на частотах  $1 + \xi + N\Omega$ ,  $1 - \xi - N\Omega$  и

$$\widehat{C}_N^2 = \frac{1}{2} (\widehat{B}_{1N}^2 + \widehat{B}_{2N}^2)$$

для колебаний на частотах  $1 + \xi - N\Omega$ ,  $1 - \xi + N\Omega$ .

Из (8) получаем выражение для интенсивности колебаний на сигнальной и разностной частотах:

$$C_0^2 = \frac{1}{2} (B_{10}^2 + B_{20}^2) = \quad (9)$$

$$k^2 2$$

$$(2\theta - m/2)^2 [1 - (mh/4)^2 (a_1/P_1 + \widehat{a}_1/\widehat{P}_1)]^2 + 4\xi^2 [1 + (mh/4)^2 (\xi_1/P_1 \xi + \widehat{\xi}_1/\widehat{P}_1 \widehat{\xi})]^2$$

Интенсивность всех остальных компонент можно вычислить из (9), учитывая, что

$$C_N^2 = \frac{(mh/4)^2}{P_N} C_{N-1}^2. \quad (9a)$$

Это соотношение легко получить, возводя в квадрат и складывая уравнения (6).

Анализ выражений (9) и (9a) показывает, что 1) полоса усиления по сигнальной частоте в сверхрегенеративном режиме больше, чем в регенеративном при одном и том же максимальном коэффициенте усиления; 2) при  $\omega_c = \omega_n/2 \pm N\omega_m$  ( $\xi = \pm N\Omega$ ) интенсивность колебаний на частоте сигнала и на всех компонентах достигает максимума, причем наиболее ярко этот максимум выражен у компоненты  $\omega_c \mp N\omega_m$ , частота которой совпадает с  $\omega_n/2$ .

Возрастание интенсивности колебаний выражается в появлении дополнительных пиков на резонансной кривой. Ширина полосы всех пиков одинакова и примерно равна ширине полосы первоначального регенерированного контура. Так как в сверхрегенеративном усилителе под воздействием сигнала возникают колебания со сложным спектром, можно рассматривать два типа его частотных характеристик:

I. за отклик системы принимается суммарная интенсивность возбужденных колебаний; частотную характеристику, соответствующую этому случаю, можно наблюдать, если поставить после усилителя видеодетектор (система сверхрегенератор—видеодетектор);

II. за отклик системы принимается интенсивность колебаний на частоте входного сигнала или интенсивность одной из компонент спектра; подобную характеристику можно наблюдать, если поставить после усилителя фильтр или супергетеродинный приемник с узкой полосой УПЧ:  $2\pi\Delta f_{\text{пч}} \ll \omega_m$  (система сверхрегенератор—фильтр).

На рис. 1, 2 представлены семейства частотных характеристик I и II типа в различных случаях. Из рисунков следует, что интенсивность вторичных максимумов на частотной характеристике системы сверхрегенератор—фильтр спадает быстрее, чем в системе сверхрегенератор—видеодетектор.

Большое значение имеют фазовые характеристики усилителя. На рис. 3, 4 приведены графики изменения фазы сигнала при прохождении через сверхрегенеративный параметрический усилитель. В отличие от обычного регенеративного контура фаза меняется несколько

раз. С другой стороны, при  $\Omega > 2\Theta - m/2 = 2n\Theta$  и расстройке, меньшей, чем частота суперизации, фаза меняется примерно так же, как и в регенерированном контуре.

Таким образом, при использовании суперизации можно значительно выиграть в усилении без ухудшения как полосы пропускания, так и фазовой характеристики усилителя.

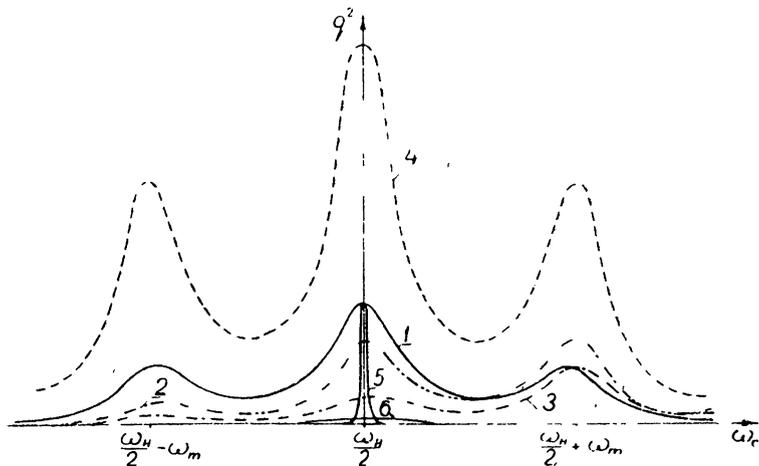


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики сверхрегенератора для частоты суперизации, в несколько раз большей полосы исходного регенерированного контура ( $\Theta = 0,021$ ,  $m = 0,08$ ,  $n = 0,047$ ,  $\Omega = 6 \cdot 10^{-1}$ ,  $h = 100\%$ ):

1 — зависимость интенсивности сигнальной компоненты от ее частоты, 2 — зависимость интенсивности компоненты  $\omega_c - 2\omega_m$  от частоты сигнала, 3 — зависимость интенсивности компоненты  $\omega_c + 2\omega_m$  от частоты сигнала, 4 — суммарная интенсивность колебаний сигнального семейства; 5 — резонансная кривая для сигнальной компоненты регенеративного контура, имеющего максимальный коэффициент усиления, одинаковый с коэффициентом усиления сигнальной компоненты в сверхрегенеративном режиме, 6 — резонансная кривая исходного регенерированного контура до суперизации

В случае  $\xi = 0$  (как и при  $h = 0$ ) имеет место синхронный режим. При этом в зависимости от разности фаз между накачкой и сигналом  $\psi$  будут одновременно и одинаково меняться по закону  $C_N^2 = C_{N0}^2 \times \times [1 - \cos(2\psi)]$  все компоненты возбужденных колебаний.

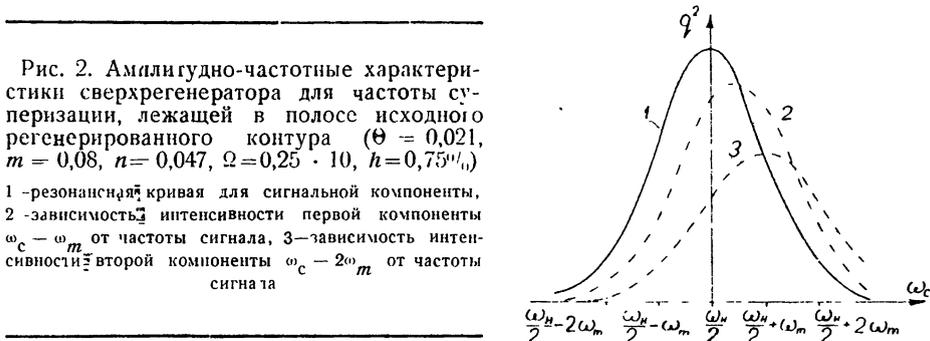


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики сверхрегенератора для частоты суперизации, лежащей в полосе исходного регенерированного контура ( $\Theta = 0,021$ ,  $m = 0,08$ ,  $n = 0,047$ ,  $\Omega = 0,25 \cdot 10$ ,  $h = 0,75\%$ ):

1 — резонансная кривая для сигнальной компоненты, 2 — зависимость интенсивности первой компоненты  $\omega_c - \omega_m$  от частоты сигнала, 3 — зависимость интенсивности второй компоненты  $\omega_c + 2\omega_m$  от частоты сигнала

В случае, когда  $\xi = N\Omega$ , синхронный режим осуществляется только для компонент с  $N \geq \xi/\Omega$ , начиная с  $1 - \xi + N\Omega$  и  $1 + \xi - N\Omega$  (т. е. с  $(\omega_p + N\omega_m)$  и  $(\omega_c - N\omega_m)$ ). Для остальных частот имеет место обычный (бигармонический) режим.

Экспериментальное исследование частотных характеристик сверхрегенеративных параметрических усилителей производилось в диапазоне низких частот (1,3 мГц) и в диапазоне СВЧ. Блок-схема экспе-

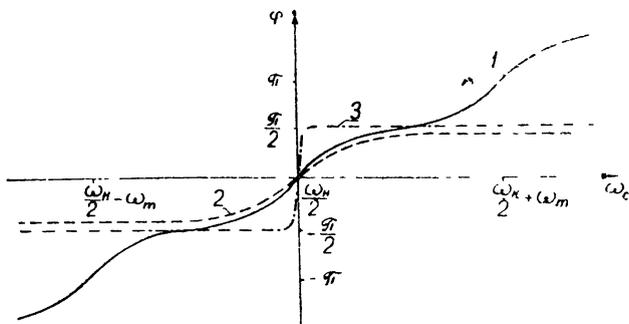


Рис. 3. Фазочастотные характеристики сверхрегенератора для случая рис. 1.

1—изменение фазы сигнала при прохождении через сверхрегенератор в зависимости от частоты сигнала; 2—фазовая характеристика исходного регенерированного контура; 3—фазовая характеристика регенеративного усилителя, имеющего такой же максимальный коэффициент усиления для сигнальной компоненты, как и сверхрегенератор

риментальной установки для исследования параметрического сверхрегенеративного усилителя на частоте  $\sim 1,3$  мГц приведена на рис. 5.

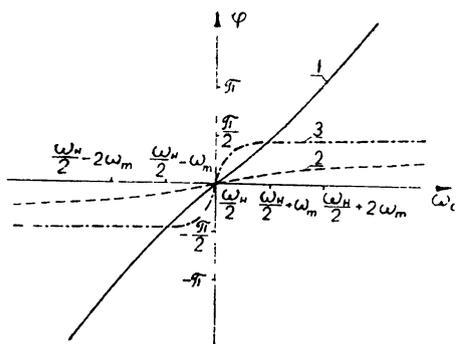


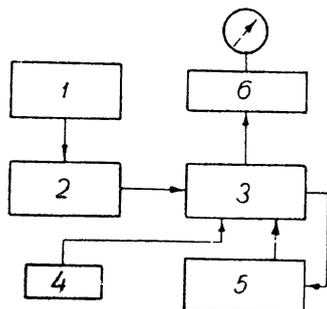
Рис. 4. То же для случая рис. 2.

В диапазоне СВЧ исследование проводилось на параметрических усилителях, описанных в [1]. Суперизация осуществлялась путем подачи низкочастотного модулирующего напряжения непосредственно на нелинейную емкость (полупроводниковый диод) усилителя.

Спектры сигнала на выходе усилителя СВЧ исследовались с помощью анализатора спектра. Изучение частотных спектров подтвердило наличие двух спектральных семейств и показало, что при изменении частоты сигнала, в соответствии с положениями общей теории, развитой Гореликом (см. [4, 6]), наблюдается периодическое одновременное изменение (с частотой су-

Рис. 5. Блок-схема экспериментальной установки для исследования сверхрегенеративного параметрического усилителя на частоте 1,3 мГц

1—источник напряжения суперизации, 2—генератор накачки, 3—параметрический усилитель; 4—генератор стандартных сигналов, 5—свип-генератор, 6—супергетеродинный приемник.



перизации  $\omega_m$ ) амплитуд всех компонент на выходе при сохранении неизменным соотношения между ними. Исследование частотных характеристик усилителей подтвердило возможность получения гребенчатой частотной характеристики во всех диапазонах.

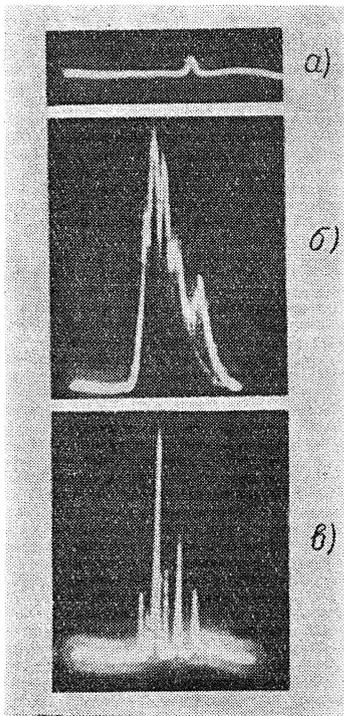


Рис. 6 Осциллограммы частотных характеристик системы сверхрегенератор—видеодетектор на СВЧ:

а)  $m \approx m_{\text{макс}}$ ,  $h = 0$ , б)  $m \sim m_{\text{макс}}$ ,  $h \sim h_{\text{макс}}$ ,  $\omega_m < \omega_0 n/Q$ , в)  $m \sim m_{\text{макс}}$ ,  $h \sim h_{\text{макс}}$ ,  $\omega_m \sim \omega_0 n/Q$

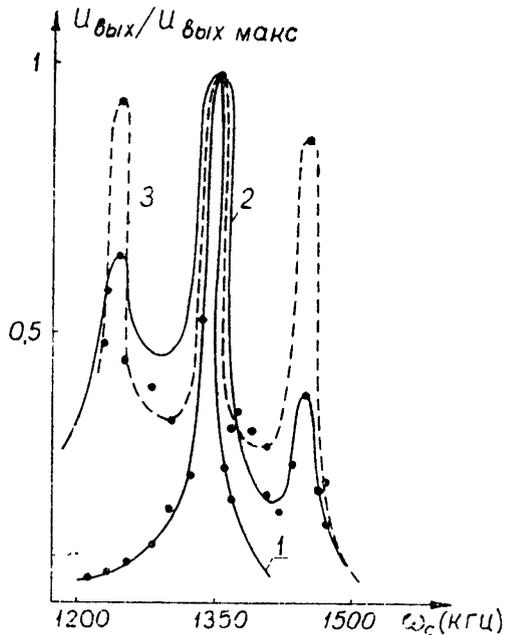


Рис. 7. Частотные характеристики усилителя в диапазоне 1,3 мГц в системах сверхрегенератор—видеодетектор и сверхрегенератор—фильтр:

1 —  $h = 0$ , 2—в режиме сверхрегенератор—фильтр, 3—в режиме сверхрегенератор—видеодетектор

На рис. 6 приведены осциллограммы частотных характеристик параметрического сверхрегенеративного усилителя, снятые с помощью свип-генератора. На рис. 7 приведены частотные характеристики усилителя в диапазоне 1,3 мГц в системах сверхрегенератор—видеодетектор и сверхрегенератор—фильтр.

Из частотных характеристик на рис. 6, 7 видно, что в том случае, когда частота суперизации  $\omega_m$  больше полосы пропускания регенеративного усилителя, наблюдается четко выраженная гребенчатая частотная характеристика. Резонансные максимумы имеют место при  $\omega_c = \omega_0 \pm N\omega_m$ . Если же частота суперизации меньше полосы регенеративного усилителя, то гребенчатая характеристика сглаживается и имеет место значительное расширение резонансной кривой.

Биения, которые наблюдаются в максимумах и минимумах частотных характеристик, полученных с помощью свип-генератора, связаны с наличием многих спектральных компонент на выходе усилителя.

Из рис. 7 видно, что в системе сверхрегенератор—фильтр высота резонансных максимумов на частотной характеристике меньше, чем

в случае системы сверхрегенератор—видеодетектор, что соответствует результатам теоретического расчета (см. рис. 1).

В заключение выражаем признательность Ю. Е. Дьякову за обсуждение вопросов, связанных с проведенной работой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. H. Heffner, G. Wade, M. Jung'er, Proc. IRE, **47**, 1971 (1959).
2. B. Bossard, Proc. IRE, **47**, 1970 (1959).
3. Е. М. Гершензон, Н. Г. Пгицына, Г. И. Рожкова, В. С. Эткип, Радио-электронная промышленность, **17**, 3 (1959).
4. Г. С. Горелик, Г. Гинц, Техника радио и слабого тока, **12**, 645 (1932)
5. Г. С. Горелик, ЖТФ, **3**, 110 (1933)
6. Г. С. Горелик, ЖТФ, **4**, 1783 (1934), **5**, 195 (1935), **5**, 395 (1935)

Московский педагогический институт  
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию  
7 июля 1960 г.

#### CONTRIBUTION TO THE STUDY OF THE SUPERREGENERATIVE REGIME OF ONE-CIRCUIT PARAMETRIC AMPLIFIERS

*E. M. Gershensohn, T. F. Lioubimova, N. G. Ptitsina, G. I. Rozhkova, V. S. Etkin*

The frequency characteristics of a superregenerative one-circuit parametric Amplifiers are obtained by the Van-der-Pol generalized method. The results are in qualitative agreement with those obtained by experiment.

## РАСШИРЕНИЕ ПОЛОСЫ ПРОПУСКАНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УСИЛИТЕЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

*Е. М. Гершензон, Ю. Е. Дьяков, Н. В. Соина, Л. А. Смирнова, В. С. Эткин*

Проведен расчет коэффициента усиления и полосы пропускания параметрического усилителя в виде двух связанных контуров, имеющего переменную емкость в одном из контуров. Полученные результаты согласуются с данными экспериментального исследования.

Существенным недостатком резонаторных параметрических усилителей СВЧ является сравнительно узкая полоса пропускания [1-5]. Однако, как отмечено в [6], этот недостаток не является принципиальным. Можно обеспечить расширение полосы усиления, если применить связанные резонансные системы. Рассмотрим возможность расширения полосы пропускания в системе двух связанных контуров с переменной емкостью в одном контуре (рис. 1). Расчет проводится методом периодического коэффициента передачи [7]. Для простоты будем считать контуры одинаковыми и настроенными на одну частоту  $\omega_0$ , причем частота изменения емкости  $\omega_H = 2\omega_0$ .

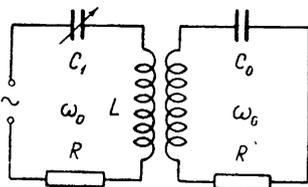


Рис. 1.

Запишем дифференциальные уравнения вынужденных колебаний в системе (рис. 1):

$$L \frac{d^2 q_1}{dt^2} + R \frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{C_1} + M \frac{d^2 q_2}{dt^2} = A(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}); \tag{1}$$

$$L \frac{d^2 q_2}{dt^2} + R \frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{C_0} + M \frac{d^2 q_1}{dt^2} = 0$$

(здесь  $C_1^{-1} = C_0^{-1} [1 + m \cos \omega_H t]$ ). В общепринятых обозначениях эти уравнения примут вид:

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + 2h \frac{dq_1}{dt} + q_1 \omega_0^2 [1 + m \cos \omega_H t] + \gamma \frac{d^2 q_2}{dt^2} = e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}; \tag{2}$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + 2h \frac{dq_2}{dt} + q_2 \omega_0^2 + \gamma \frac{d^2 q_1}{dt^2} = 0,$$

где  $\gamma = M/L$  — коэффициент связи,  $2h = R/L$ ,  $\omega_0^2 = 1/LC_0$ .

Для сокращения записи положено  $A/L = 1$ .

Решение ищем в виде:

$$q_1 = k'(\omega, t) e^{j\omega t} + k'^*(\omega, t) e^{-j\omega t};$$

$$q_2 = k''(\omega, t) e^{j\omega t} + k''^*(\omega, t) e^{-j\omega t},$$

где  $k'(\omega, t)$  и  $k''(\omega, t)$  — коэффициенты передачи в первый и второй контур соответственно. При достаточно больших добротностях контуров можно записать аналогично [7]:

$$\begin{aligned} k'(\omega, t) &= k'_0(\omega) + k'_{-1}(\omega) e^{-j\omega_n t}; \\ k''(\omega, t) &= k''_0(\omega) + k''_{-1}(\omega) e^{-j\omega_n t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим для  $k'_0(\omega)$  (усиление без преобразования частоты) следующее выражение:

$$\begin{aligned} k'_0 &= \frac{4}{\omega_0^2} (\alpha_1 - j\beta_1) [(\sigma_2 + j\beta_2)^2 - \gamma^2(1 - \alpha_2)^2] |4|(\alpha_1 + j\beta_1)^2 - \gamma^2(1 - \sigma_1)^2| \times \\ &\times [(\alpha_2 + j\beta_2)^2 - \gamma^2(1 - \alpha_2)^2] - m^2(\alpha_1 + j\beta_1)(\alpha_2 + j\beta_2) |^{-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 1 - \omega^2/\omega_0^2; \quad \alpha_2 = 1 - (\omega - \omega_n)^2/\omega_0^2; \\ \beta_1 &= \omega/Q\omega_0; \quad \beta_2 = (\omega - \omega_n)/Q\omega_0, \end{aligned}$$

$Q$  — добротность нерегенерированного контура.

Возбуждению усилителя соответствует обращение в нуль знаменателя (4). Тогда для определения частот генерации и  $m_{кр}$ , соответствующего возбуждению усилителя, получим следующую систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} 4[(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - \gamma^2(1 - \sigma_1)^2] |(\alpha_2^2 - \beta_2^2) - \gamma^2(1 - \alpha_2)^2| - 16\alpha_1\sigma_1\beta_1\beta_2 - \\ - m_{кр}^2(\sigma_1\sigma_2 - \beta_1\beta_2) = 0; \\ 8\alpha_1\beta_1 |(\alpha_2^2 - \beta_2^2) - \gamma^2(1 - \sigma_2)^2| + 8\alpha_2\beta_2 |(\sigma_1^2 - \beta_1^2) - \gamma^2(1 - \sigma_1)^2| - \\ - m_{кр}^2(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для решения системы удобно выразить  $\beta_1, \beta_2, \sigma_2$  через расстройку  $\sigma_1$ . Решение системы (5) существенно зависит от степени связи.

1) Если связь меньше или равна критической ( $\mu = \eta Q \leq 1$ ), то корни уравнений при этом

$$\sigma_1 = 0; \quad m_{кр} = \frac{2}{Q} (1 + \mu^2),$$

т. е. усилитель возбуждается только на частоте  $\omega_n/2$ , и критическая глубина модуляции возрастает по сравнению с одиночным контуром в  $(1 + \mu^2)$  раз.

2) Если связь больше критической ( $\mu = \eta Q > 1$ ), то корни уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_1' = 0; \quad \sigma_1'' = \pm \sqrt{\mu^2 - 1}/Q; \\ m_{кр}(\sigma_1') = \frac{2}{Q} (1 + \mu^2); \quad m_{кр}(\alpha_1'') = \frac{4}{Q}, \end{aligned}$$

т. е. при связи, большей критической, усилитель возбуждается на трех частотах:  $\omega_1 = \omega_n/2, \omega_2, \omega_3$ , соответствующих расстройкам  $\alpha_1'' = \pm \sqrt{\mu^2 - 1}/Q$  ( $\omega_2$  и  $\omega_3$  близки к частотам нормальных колебаний системы).

Для целей расширения полосы интерес представляет только случай  $z \ll 1$ , так как при связи, большей критической, частотные характеристики имеют ярко выраженную двугорбую форму с глубоким провалом и не может быть речи о единой полосе пропускания в общепринятом смысле.

Вычислим коэффициент усиления и полосу пропускания усилителя. В том случае, когда усилитель со связанными контурами включается в схему приемника через циркулятор, коэффициент усиления по мощности можно выразить через коэффициент передачи следующим образом (см. [5,6]):

$$k = 4Z^2\omega^2Q^2E^{-2} = 4Z^2\omega^2L^2|k_0'|^2, \quad (7)$$

где  $Z$  - волновое сопротивление питающей усилитель линии,  $E$  - ЭДС эквивалентного генератора.

Используя (4) и (7) для коэффициента усиления при большой регенерации, можно получить:

$$k = \frac{Q^2}{Q_{\text{внеш}}^2 n^2} \frac{1}{(1+z^2)^2}, \quad (8)$$

где

$$Q_{\text{внеш}} = 1/Z\omega_0 C_0; \quad n = 1 - m^2/m_{\text{кр}}^2.$$

Для относительной полосы пропускания при  $n \ll 1$  получаем:

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{n}{Q} \frac{1+z^2}{1-z^2}. \quad (9)$$

Произведение корня из коэффициента усиления на относительную полосу равно

$$\frac{\Delta f}{f} \sqrt{k} = \frac{1}{Q_{\text{внеш}}} \frac{1}{1-z^2}. \quad (10)$$

Видно, что при  $z < 1$  уменьшение коэффициента усиления сопровождается расширением полосы, причем в результате произведение  $(\Delta f/f) \sqrt{k}$  растет и может значительно превысить эту величину для одноконтурного усилителя, равную  $1/Q_{\text{внеш}}$ .

Максимальное значение  $(\Delta f/f) \sqrt{k}$  определяется из возможного значения  $m_{\text{макс}}$  и условия большого усиления (вблизи порога самовозбуждения)

$$\frac{m_{\text{кр}}}{2} = \frac{1}{Q} (1+z^2).$$

Проведя вычисления, получим следующее выражение:

$$\left( \sqrt{k} \frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{макс}} = \frac{m_{\text{макс}}}{2(1-z^2)}. \quad (11)$$

Мы видим, что, применив связанные контуры, можно получить увеличение максимально возможной для данного диода величины  $\sqrt{k} \Delta f/f$ .

Шум-фактор такого усилителя рассмотрен в [8].

Найдя аргумент коэффициента передачи (4), получим выражение для фазового сдвига, вносимого в сигнал при большой регенерации:

$$\text{tg } \varphi \approx -\frac{\alpha_1 Q}{n} \frac{1-z^2}{1+z^2}. \quad (12)$$

Из (9) видно, что за счет расширения полосы уменьшаются фазовые искажения, вносимые в процессе регенеративного усиления. На рис. 2 приведены расчетные частотные характеристики (зависимости  $|k'_0|^2 \omega_0^4$  от  $\alpha_1$ ). Кривые рис. 2а построены при фиксированной связи ( $\varkappa = 0,9$ ) и разных степенях регенерации  $n$ , а кривые рис. 2б (построен-

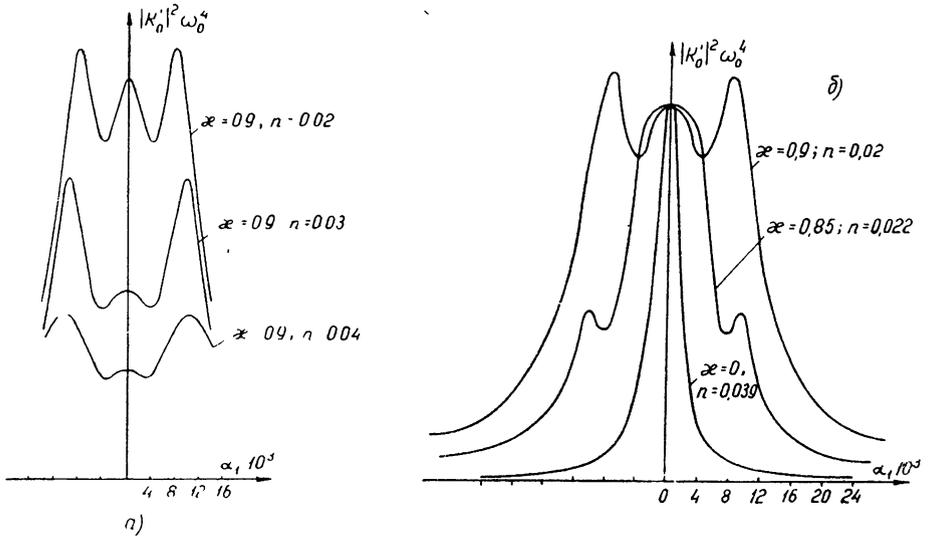


Рис. 2.

ные в относительном масштабе) соответствуют трем различным значениям связи; здесь степени регенерации выбраны такие, чтобы коэффициенты передачи при  $\gamma_1 = 0$  во всех трех случаях были примерно одинаковы.

Резонансные кривые показывают, что при заданном коэффициенте усиления может быть получено значительное расширение полосы пропускания путем подбора связи и уровня накачки (т. е. величины  $\varkappa$  и  $n$ ).

Полученные выше теоретические результаты были качественно проверены экспериментально при помощи модели на частоте  $\sim 4,5$  мгц и на одноконтурных усилителях СВЧ, описанных в [3].

Экспериментальное исследование подтвердило, что при связи, большей критической, самовозбуждение наступает сначала на боковых частотах, а при дальнейшем увеличении  $m$  — на  $\omega_n/2$ . На рис. 3 приведены частотные характеристики усилителя на 4,5 мгц, снятые при фиксированном уровне накачки и различных коэффициентах связи. Видно, что с изменением связи меняется относительная высота центрального и боковых максимумов. Асимметрия экспериментальных резонансных кривых связана с использованием контуров разной добротности. Понижать добротность балластного контура введением в него дополнительного сопротивления нецелесообразно, так как это приводит к увеличению потерь в системе и, следовательно, к увеличению мощности накачки и ухудшению шум-фактора.

На указанной модели было получено за счет связи со вторым контуром расширение полосы пропускания примерно в три раза. Если ширина полосы для одноконтурного случая составляла 50 кгц при усилении  $\approx 20$  дб, то при связи со вторым контуром (при увеличении уровня накачки) была получена полоса пропускания  $\approx 150$  кгц. Таким образом,  $\sqrt{k} \Delta f/f$  возросло с 1/9 до 1/3.

Применение связанных цепей приводит также к расширению полосы в усилителях СВЧ. Например, в одноконтурном усилителе СВЧ [5,7], имеющем при  $k \approx 20$  дБ полосу  $\approx 15$  МГц, удается с помощью полосовой системы расширить полосу до  $45 \div 50$  МГц при сохранении того же коэффициента усиления.

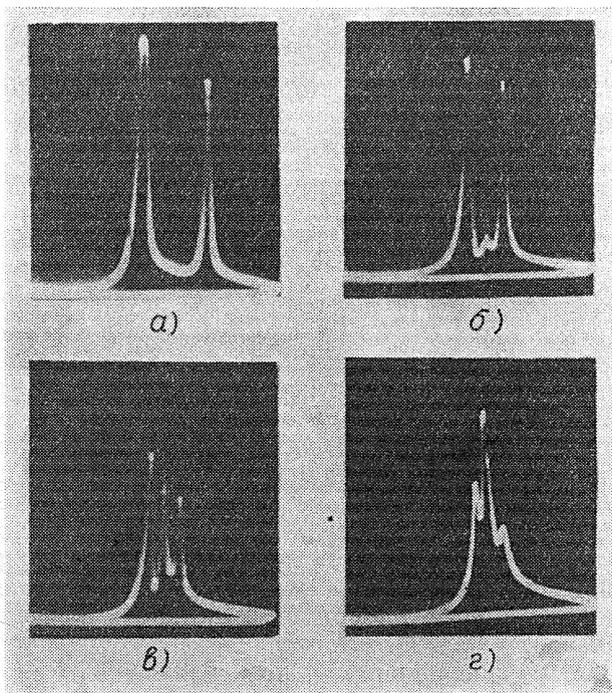


Рис 3.

## ЛИТЕРАТУРА

1. H. Heffner, G. Wadс, J. Appl. Phys, **29**, 1262 (1958).
2. H. Heffner, K. Kotzebue, Proc. IRE, **46**, 1301 (1958)
3. G. F. Herrmann, M. Uenohara, A. Uhlig, Proc. IRE, **46**, 1301 (1958)
4. Е. М. Гершензон, В. С. Эткин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 835 (1959).
5. Е. М. Гершензон, Н. Г. Птицына, Г. И. Рожкова, В. С. Эткин, Радио-электронная промышленность, **17**, 3 (1959).
6. Е. М. Гершензон, К. А. Меркурьев, Н. В. Соина, В. С. Эткин, Изв. высш. уч. зав.—Раднотехника (в печати)
7. Ю. Е. Дьяков, Раднотехника и электроника, **5**, 1189 (1960)
8. Ю. Е. Дьяков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 182 (1961).

Московский педагогический институт  
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию  
7 июля 1960 г.

**THE EXPANSION OF THE TRANSMISSION BAND OF PARAMETRIC  
AMPLIFIERS WITH THE HELP OF COUPLED CIRCUITS**

*E. M. Gershensohn, U. E. Dyakov, N. V. Soyна, L. A. Smirnova, V. S. Etkin*

The amplification coefficient are calculated as well as bandwidth of a parametric amplifier represented as two coupled circuits with variable capacitance in one of them. The results obtained agree with the experimental data.

## ДВУХРЯДНАЯ ЛЕСТНИЧНАЯ ЗАМЕДЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА

Ю. Г. Альшулер, А. С. Татаренко и В. И. Скородумов

Приводятся результаты теоретического исследования двухрядной лестничной замедляющей системы. Получены дисперсионные уравнения и выражения для сопротивлений связи для системы, помещенной в волновод с выступами и впадинами. Исследовано влияние различных геометрических размеров системы на ее дисперсионные характеристики и сопротивление связи.

Создание широкополосных генераторов и усилителей сверхвысоких частот в значительной мере связано с разработкой замедляющих систем, пригодных для практического использования в этом диапазоне. Как известно, в миллиметровом диапазоне размеры замедляющих устройств становятся весьма малыми, что ограничивает возможности получения достаточной высокочастотной мощности. Замедляющие системы лестничного типа обладают наибольшими размерами по сравнению с другими типами систем и поэтому находят применение в диапазоне миллиметровых волн [1]. Повышение мощности генераторов и усилителей можно осуществить, применяя различные модификации многорядных лестничных замедляющих систем. Подобные системы с наклонными и изогнутыми проводниками были исследованы в работе [2].

Ниже приводятся результаты исследования сдвоенной лестничной системы с прямыми проводниками, помещенной в волновод с выступами и впадинами. Рассмотренная система может найти применение в сверхвысокочастотных генераторах и усилителях.

### 1. ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Общий вид замедляющих систем в волноводе с выступами и в волноводе с впадинами показан на рис. 1а и рис. 1б соответственно. На рис. 2 показаны сечения этих замедляющих систем плоскостью  $xOy$ . Там же указаны основные обозначения геометрических размеров замедляющих систем.

Разбивая систему на три области (рис. 2) и предполагая, что в каждой области вдоль проводников распространяется  $TEM$ -волна, запишем следующие выражения для потенциала и тока на проводниках в каждой области [3-5]:

$${}^{в,н}V_n^i(y) = [{}^{в,н}A_i \cos(ky) + {}^{в,н}B_i \sin(ky)] e^{-jn\theta}; \quad (1)$$

$${}^{в,н}J_n^i(y) = j {}^{в,н}Y_i(\theta) [{}^{в,н}B_i \cos(ky) - {}^{в,н}A_i \sin(ky)] e^{-jn\theta}, \quad (2)$$

где  $i = 1, 2, 3$  — номер области на рис. 2,  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$  — постоянная распространения в  $y$ -направлении,  $A_i$ ,  $B_i$  — неизвестные амплитудные коэффициенты,  $\theta$  — фазовый угол между соседними проводниками в  $z$ -направлении,  $Y_i(\theta)$  — волновая проводимость для  $i$ -ой области. Индексы „в“ и „н“ характеризуют верхний и нижний ряд проводников. В дальнейших выкладках во всех случаях, когда выражения для верхней и нижней „лестницы“ совпадают, индексы „в“ и „н“ будем опускать.

Коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$  определяются из граничных условий для потенциалов и токов на концах проводников в каждой области:

$$V_n^1(0) = 0; \quad V_n^1(h_1) = V_n^2(h_1);$$

$$V_n^3(h_1 + 2h_2 + h_3) = 0; \quad J_n^1(h_1) = J_n^2(h_2); \quad (3)$$

$$V_n^2(h_1 + 2h_2) = V_n^3(h_1 + 2h_2); \quad J_n^1(h_1 + 2h_2) = J_n^3(h_1 + 2h_2).$$

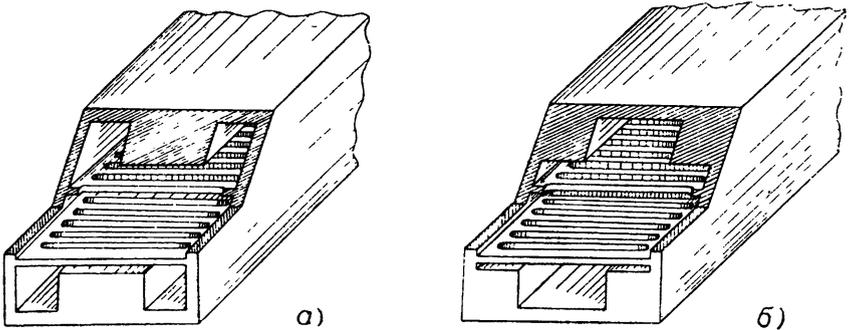


Рис. 1.

Подставляя граничные условия (3) в выражения для потенциалов и токов (1), (2), получим следующие выражения для дисперсионных характеристик:

$$Y_1(\theta) \cdot Y_2(\theta) = \operatorname{tg}(kh_1) \operatorname{tg}(kh_2); \quad (4)$$

$$Y_1(\theta) / Y_2(\theta) = -\operatorname{tg}(kh_1) / \operatorname{tg}(kh_2). \quad (5)$$

Уравнение (4) является дисперсионным для симметричной и уравнение (5) — для антисимметричной мод.

## 2 КОМПОНЕНТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Для определения компонент электромагнитного поля разбиваем систему на 5 областей (рис. 3). Для  $TEM$ -волн электрический вектор определяется из выражения  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V(x, y, z)$ , а компоненты магнитного поля выражаются через электрические известные соотношениями:  $H_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_z$ ;  $H_y = 0$ ;  $H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_x$ .

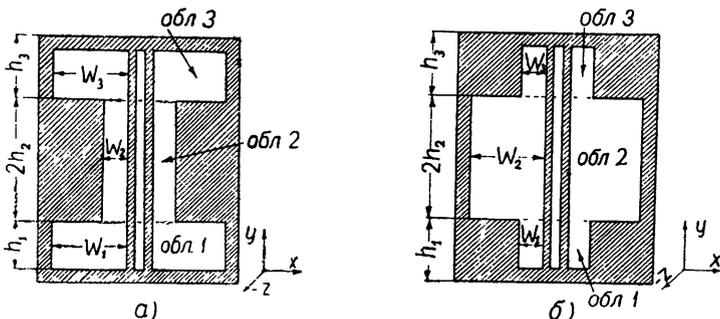


Рис. 2.

Области I и II. Поля в областях I и II предполагаются однородными:

$$E_{x, I, II}^i = 0; \quad E_{z, I, II}^i \approx 2j \frac{{}^{u, II} V_0^i}{q} e^{jky} e^{-jn\theta} e^{-j\theta/2} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (6)$$

где

$${}^{u, II} V_0^i = \begin{cases} j {}^{u, II} B_1 / 2 \sin(kh_1) & (i = 1); \\ {}^{u, II} B_1 e^{jk(h_1 + h_2)} / 2 \cos(kh_2) & (i = 2); \\ -j {}^{u, II} B_1 e^{jk2(h_1 + h_2)} / 2 \sin(kh_1) & (i = 3). \end{cases} \quad (7)$$

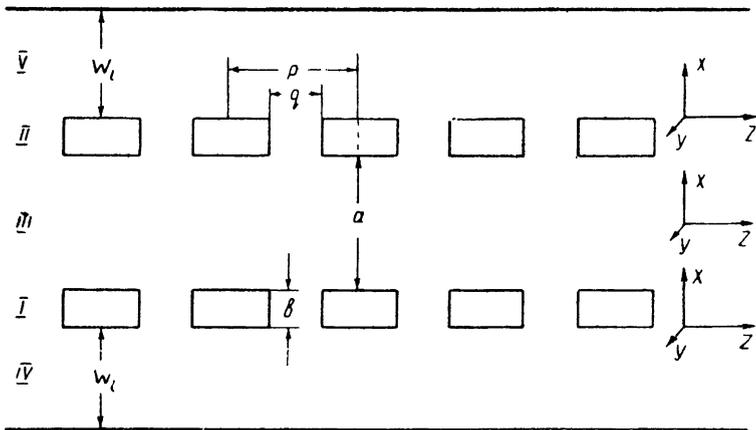


Рис. 3.

Область III:

$$E_{z, III}^i = \frac{2j \sin(\theta/2)}{p} e^{-jky} {}^{u, II} V_0^i \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \frac{\sin(\beta_s q/2)}{\beta_s q/2} \frac{1}{\text{sh}(\beta_s a)} \times \\ \times \left\{ \text{sh} \left[ \beta_s \left( x + \frac{a}{2} \right) \right] - \frac{{}^{u, II} V_0^i}{{}^{u, I} V_0^i} \text{sh} \left[ \beta_s \left( x - \frac{a}{2} \right) \right] \right\} e^{-j\beta_s z}; \quad (8)$$

$$E_{x, III}^i = -\frac{2 \sin(\theta/2)}{p} e^{-jky} {}^{u, II} V_0^i \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \frac{\sin(\beta_s q/2)}{\beta_s q/2} \frac{1}{\text{sh}(\beta_s a)} \times \\ \times \left\{ \text{sh} \left[ \beta_s \left( x + \frac{a}{2} \right) \right] - \frac{{}^{u, II} V_0^i}{{}^{u, I} V_0^i} \text{sh} \left[ \beta_s \left( x - \frac{a}{2} \right) \right] \right\} e^{-j\beta_s z}, \quad (9)$$

где  $\beta_s = \omega/v_{\Phi_s} = (\theta + 2\pi s)/p$  — постоянная распространения в  $z$ -направлении ( $s = 0; \pm 1; \pm 2; \pm \dots$ ).

Область IV:

$$E_{x, IV}^i = -2 \frac{\sin(\theta/2)}{p} e^{-ky} {}^{u, II} V_0^i \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} (-1)^s \frac{\sin(\beta_s q/2)}{\beta_s q/2} \times \\ \times \frac{\text{ch}[\beta_s(x + W_i)]}{\text{sh}(\beta_s W_i)} e^{-j\beta_s z}; \quad (10)$$

$$E_{z,IV}^i = 2j \frac{\sin(\Theta/2)}{p} e^{-jky} {}^nV_0^i \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s \frac{\sin(\beta_s q/2)}{\beta_s q/2} \times \frac{\text{sh}[\beta_s(x + W_i)]}{\text{sh}(\beta_s W_i)} e^{-j\beta_s z} \quad (11)$$

Область V. Поле в области V имеет такой же вид, как и в области IV, если заменить  ${}^nV_0^i$  на  ${}^nV_0^i$  и  $x$  на  $-x$ .

### 3. ВОЛНОВЫЕ ПРОВОДИМОСТИ

Для волны, распространяющейся в  $+y$ -направлении, волновая проводимость определяется соотношением

$$Y_n(\Theta) = J_n'(-jky) / V_n^i(-jky). \quad (12)$$

Ток  $J_n^i$  определяется из выражения:

$$J_n^i = \oint (HdS).$$

Подставляя под интеграл соответствующие компоненты магнитного поля, получим [5]:

$${}^nY_n(\Theta) = {}^nY_n(\Theta) = 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sin(\Theta/2) \left\{ 2 \frac{b}{q} \sin(\Theta/2) + \frac{p-q}{p} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s \frac{\sin(\beta_s q/2)}{\beta_s q/2} \frac{\sin[\beta_s(p-q)/2]}{\beta_s(p-q)/2} \left[ \text{cth}(\beta_s W_i) + \frac{\text{th}(\beta_s a/2)}{\text{cth}(\beta_s a/2)} \right] \right\}, \quad (13)$$

где  $\text{th}(\beta_s a/2)$  соответствует синфазной моде,  $\text{cth}(\beta_s a/2)$  -- противофазной. Подставляя (13) в (4) и (5), получим расчетные формулы для дисперсионных характеристик симметричной (4) и антисимметричной (5) мод.

### 4. СОПРОТИВЛЕНИЕ СВЯЗИ

Как известно, сопротивление связи можно найти из соотношения

$$R_s = \frac{\overline{E_{z,III}^* E_{z,III}^{*xy}}}{2\beta_s^2 v_g W}, \quad (14)$$

где  $v_g$  -- групповая скорость,  $W$  -- плотность энергии на единицу длины замедляющей системы.

Областью взаимодействия является область III. Как видно из выражения (14), сопротивление связи вычисляется для пучка конечной толщины, т. е. усреднение поля проводится также по оси  $x$ .

а) *Симметричная мода.* Учитывая три области и два ряда проводников, выражение для плотности энергии можно получить в виде:

$$W = \frac{1}{cp} {}^nB_1^2 \left[ \frac{h_1 Y_1(\Theta)}{\sin^2(kh_1)} + \frac{h_2 Y_2(\Theta)}{\cos^2(kh_2)} \right]. \quad (15)$$

Проводя усреднение поля  $E_{z,III}$  по  $x$  и по  $y$  и подставляя полученное соотношение в выражение (14), можно получить следующую расчетную формулу для сопротивления связи симметричной моды:

$$R_s = \frac{c}{v_g p \beta_s^2 (h_1 + h_2)} \left[ \frac{\sin(\Theta/2)}{\text{sh}(\beta_s a)} \frac{\sin(\beta_s q/2)}{\beta_s q/2} \right]^2 \left[ \frac{2kh_1 - \sin(2kh_1)}{4k \sin^2(kh_1)} + \frac{2kh_2 + \sin(2kh_2)}{4k \cos^2(kh_2)} \right] \left[ \frac{h_1 Y_1(\Theta)}{\sin^2(kh_1)} + \frac{h_2 Y_2(\Theta)}{\cos^2(kh_2)} \right]^{-1} J, \quad (16)$$

где

$$J = \left[ \frac{\text{sh}(2\beta_s a)}{2\beta_s a} - 1 \right] \pm \left[ \text{ch}(\beta_s a) - \frac{\text{sh}(\beta_s a)}{\beta_s a} \right]; \quad (17)$$

знак „+“ соответствует синфазной моде, знак „-“ противофазной.

б) *Антисимметричная мода*. Аналогичным образом можно получить формулу для сопротивления связи для антисимметричной моды:

$$R_s = \frac{c}{v_g p \beta_s^2 (h_1 + h_2)} \left[ \frac{\sin(\Theta/2)}{\text{sh}(\beta_s a)} \frac{\sin(\beta_s q/2)}{\beta_s q/2} \right]^2 \left[ \frac{2kh_1 - \sin(2kh_1)}{4k \sin^2(kh_1)} + \frac{2kh_2 + \sin(2kh_2)}{4k \cos^2(kh_2)} \right] \left[ \frac{h_1 Y_1(\Theta)}{\sin^2(kh_1)} + \frac{h_2 Y_2(\Theta)}{\sin^2(kh_2)} \right]^{-1} J. \quad (18)$$

## 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАЗМЕРОВ СИСТЕМЫ НА ЕЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И СОПРОТИВЛЕНИЕ СВЯЗИ

а) *Система в волноводе с выступами*. На рис. 4 изображены дисперсионные кривые для синфазной симметричной и синфазной антисимметричной мод (для нулевой и минус первой пространственной гармоник). Параметром является расстояние до потолка  $W_1$  ( $p = 1,5$  мм,  $b = W_2 = q = 0,5$  мм). Для симметричной моды  $h_1 = h_2 = 2,5$  мм, для антисимметричной моды кривые построены при  $h_1 = 2$  мм и  $h_2 = 3$  мм. Как следует из графиков рис. 4, полоса пропускания увеличивается с увеличением расстояния  $W_1$  как для симметричной, так и для антисимметричной моды.

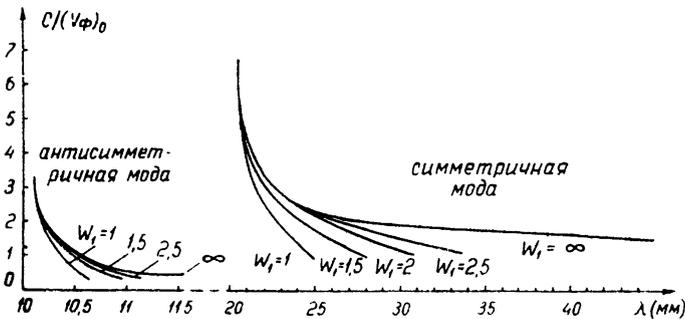


Рис. 4а

На рисунках не приводятся кривые противофазной моды. Как будет показано ниже, сопротивление связи для противофазной моды значительно меньше, чем для синфазной; поэтому в двухрядных замедляющих системах противофазную моду можно не рассматривать. Из рис. 4 следует, что антисимметричная мода лежит в области более коротких волн, и для ее возбуждения требуются более высокие потенциалы, чем для симметричной моды.

На рис. 5 приведены зависимости  $\frac{c}{V_\Phi}$  нулевой и минус первой гармоник от величины отношения  $h_1/h_2$  ( $p = 1,5$  мм,  $b = W_2 = q = 0,5$  мм,  $W_1 = 2$  мм): Полоса пропускания симметричной моды при  $h_1 = h_2 =$

максимальная, антисимметричная мода при этом исчезает. При  $h_1 > h_2$  нулевая гармоника антисимметричной моды становится обратной и имеет аномальную дисперсию, при  $h_1 < h_2$  гармоника прямая с нормальной дисперсией.

Рис. 6 показывает изменение зависимости сопротивления связи  $R_0(\lambda)$  для симметричной синфазной моды от изменения расстояния

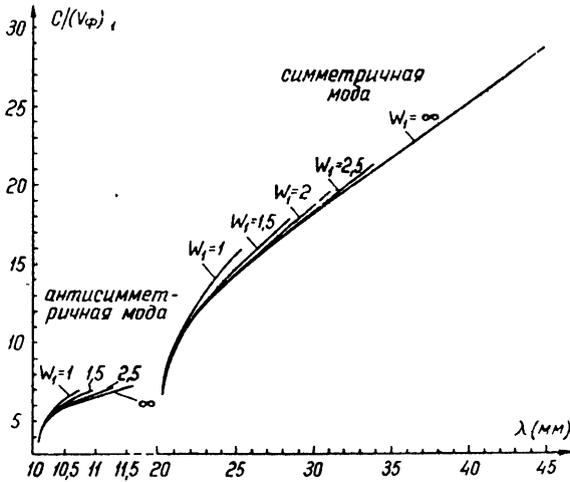


Рис. 46.

$W_1$  ( $h_1 = h_2 = 2,5$  мм,  $p = 1,5$  мм,  $b = W_2 = q = 0,5$  мм). Кривые построены по формуле (17). Как видно из рис. 6, с увеличением расстояния  $W_1$  сопротивление связи уменьшается. Для сравнения на этом же рисунке пунктирной линией нанесена кривая сопротивления связи симметричной противофазной моды, которая имеет значительно меньшую величину по сравнению с синфазной модой,

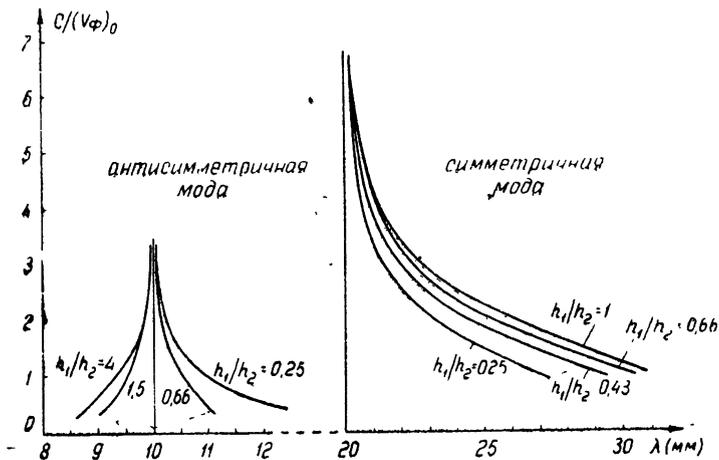


Рис. 5а.

Зависимость кривой  $R_0(\lambda)$  от отношения  $h_1/h_2$  для нулевой гармоники симметричной синфазной моды приведена на рис. 7 ( $W_1 = 2$  мм,  $p = 1,5$  мм,  $b = W_2 = q = 0,5$  мм). Пунктирная кривая на этом рисунке

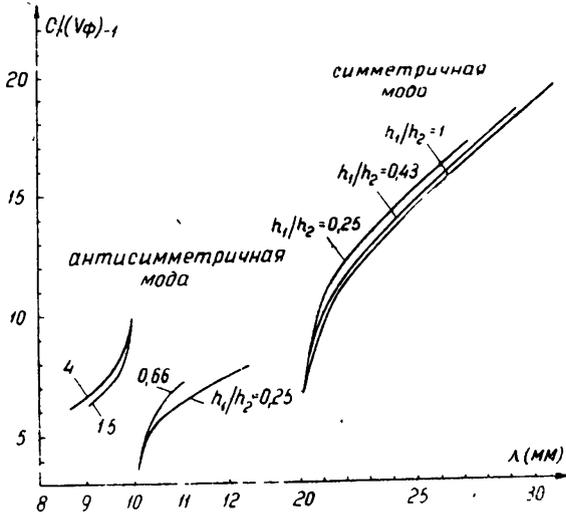


Рис. 56.

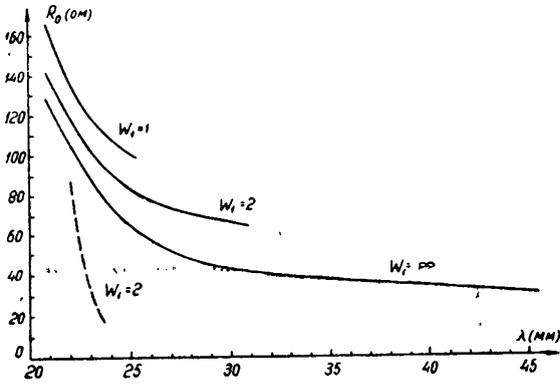


Рис. 6.

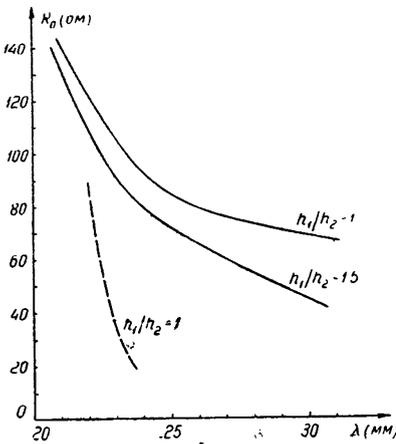


Рис. 7.

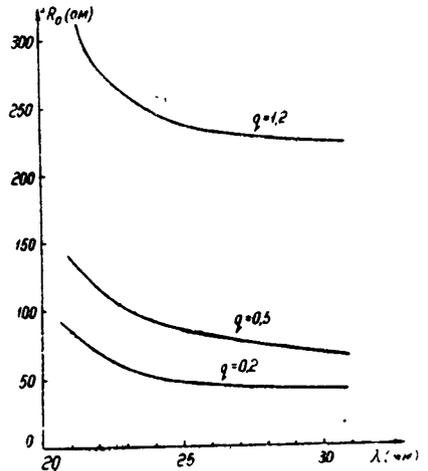


Рис. 8.

соответствует противофазной моде. С увеличением отношения  $h_1/h_2$  сопротивление связи уменьшается.

На рис. 8 иллюстрируется зависимость сопротивления связи симметричной синфазной моды  $R_0(\lambda)$  от зазора  $q$  между проводниками ( $b = W_1 = 0,5$  мм,  $W_2 = 2$  мм,  $p = 1,5$  мм,  $h_1 = h_2 = 2,5$  мм). Как

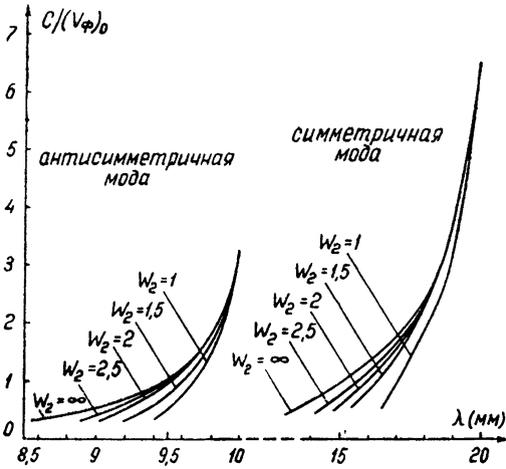


Рис. 9а.

показали проведенные исследования, сопротивление связи сильно зависит от расстояния между проводниками  $q$ , в то время как дисперсионные кривые от этого размера зависят очень слабо.

б) Система в волноводе с впадинами. На рис. 9 приведены дисперсионные кривые для симметричной и антисимметричной синфазной мод (для нулевой и минус первой пространственной гармоник). Параметром является расстояние  $W_2$  ( $p = 1,5$  мм,  $b = W_1 = q = 0,5$  мм).

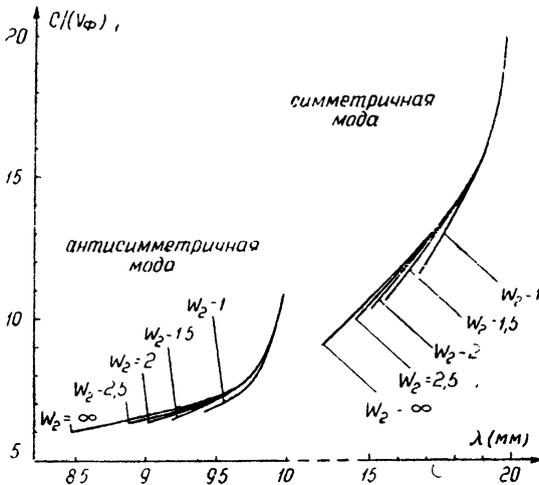


Рис. 9б.

(Для симметричной моды  $h_1 = h_2 = 2,5$  мм; кривые антисимметричной моды построены при  $h_1 = 2$  мм и  $h_2 = 3$  мм.) Зависимость от расстояния до потолка  $W_2$  в этом случае такая же, как и в случае системы,

помещенной в волновод с выступами. Для системы в волноводе с впадинами нулевая гармоника оказывается обратной.

В работе не проводятся кривые зависимости дисперсии от изменения отношения  $h_1/h_2$ , поскольку имеют такой же характер, как и в случае системы, помещенной в волновод с выступами.

На рис. 10 показана зависимость сопротивления связи нулевой гармоники симметричной синфазной моды  $R_0(\lambda)$  от изменения расстоя-

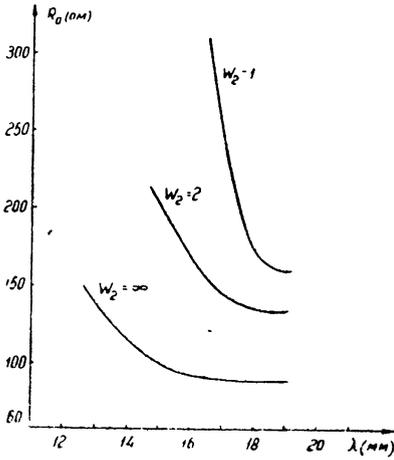


Рис. 10.

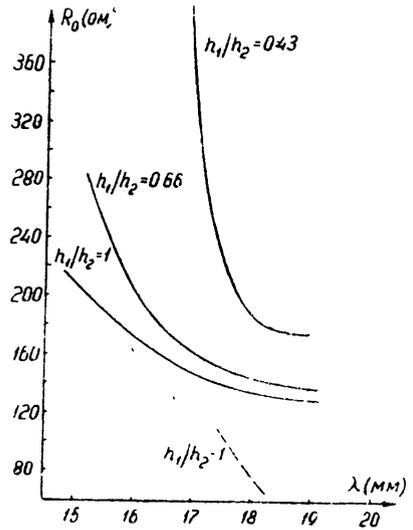


Рис. 11.

ния  $W_2$  ( $p = 1,5$  мм,  $b = W_1 = q = 0,5$  мм,  $h_1 = h_2 = 2,5$  мм). Из сравнения рис. 6 и рис. 10 следует, что сопротивление связи для системы в волноводе с впадинами больше, чем для системы в волноводе с выступами.

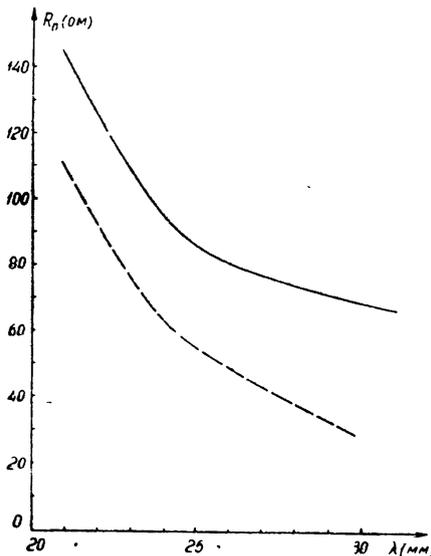


Рис. 12:

Зависимость сопротивления связи от  $h_1/h_2$  такая же (рис. 11), как и для системы с выступами (рис. 7). Пунктирная кривая на рис. 11 соответствует симметричной противофазной моде. Для сравнения на рис. 12 приведены кривые  $R_0(\lambda)$  для симметричной синфазной моды двухрядной лестничной системы, помещенной в волновод с выступами, для однорядной лестницы с теми же геометрическими размерами ( $p = 1,5$  мм,  $b = W_2 = q = 0,5$  мм,  $W_1 = 2$  мм,  $h_1 = h_2 = 2,5$  мм). Как видно из рис. 12, сопротивление связи однорядной лестницы (пунктирная кривая) меньше, чем для двухрядной при синфазном возбуждении.

Проведенное исследование двоянной лестничной замедляющей системы показывает, что система обладает достаточной полосой пропускания, позволяет увеличить пространство взаимодействия электронного потока с высокочастотным полем и может оказаться перспективной для использования в СВЧ диапазоне.

Сопротивление связи подобных систем при синфазном их возбуждении больше, чем для однорядной лестничной замедляющей системы.

Путем подбора отдельных размеров системы ( $h_1 = h_2$ ) можно получить наиболее широкую полосу пропускания для симметричной моды и подавить антисимметричную моду.

Система, помещенная в волновод с впадиной, обладает обратной нулевой гармоникой, что является особенно важным при конструировании ламп обратной волны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А Карр, Proc. IRE, **45**, 496 (1957).
2. E. A. Ash, Proc. IEE, **105**, 737 (1958).
3. R. C. Fletcher, Proc. IRE, **40**, 951 (1952).
4. Р А Силли, Электроника, **2**, 3 (1958).
5. Ю Г. Альтшулер и А С Татаренко, Вопросы радиоэлектроники, **3**, 25 (1960)

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию  
16 июня 1960 г.

#### TWO-ROW LADDER DELAY SYSTEM

*U. G. Altschuler, A. S. Tatarenko and V. I. Skorodumov*

The results are given of the theoretical investigation of a two-row ladder delay system. Dispersion equations and expressions have been obtained for the coupling impedance for a system placed in a waveguide with projections and troughs. A study has been made of the influence of various geometrical dimensions of the system on its dispersion characteristics and coupling impedance.

**ОБ ОДНОЙ РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЕ РЕГУЛИРОВАНИЯ НЕУСТОЙЧИВОГО ОБЪЕКТА**

С. Д. Киняпин

Методом точечных преобразований исследуется динамика релейной системы третьего порядка с неустойчивым объектом. Рассматривается рождение предельного цикла из состояния равновесия релейной системы и слияние предельного цикла с интегральной поверхностью.

В настоящей работе рассматривается релейная система с неустойчивым объектом, структурная схема которой приведена на рис. 1. Система описывается тремя дифференциальными уравнениями первого порядка, которые после линейной замены переменных ( $u=z$ ;  $v=(2h + \tau)x + y$ ;  $\psi = x + \alpha y$ ) могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{T} [u + f(\psi)]; \quad \dot{v} = u + \psi; \\ \dot{\psi} &= \tau u + v - 2h\psi, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$f(\psi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi > 0 \text{ или если } \psi = 0 \text{ и } \dot{\psi} > 0 \\ -1 < f(\psi) < 1, & \text{если } \psi = 0 \\ -1, & \text{если } \psi < 0 \text{ или если } \psi = 0 \text{ и } \dot{\psi} < 0 \end{cases}$$

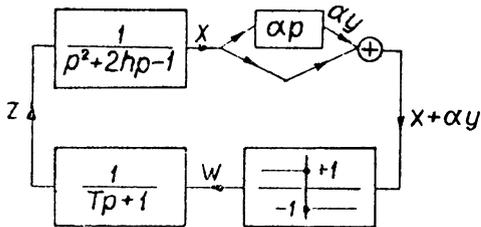


Рис. 1

при дополнительном условии — непрерывности функций  $u(t)$ ,  $v(t)$  и  $\psi(t)$  в точке разрыва функции  $f(\psi)$ . Релейные системы третьего порядка с устойчивыми и нейтральными объектами исследовались в ряде работ [1-6]. Релейные же системы с неустойчивым объектом, насколько известно автору, остались не рассмотренными. Для значений параметра  $T = 0$  и  $T = \infty$  система (1) сводится

к задаче с одной степенью свободы. Случай  $T = 0$  рассмотрен автором ранее [7]; случай  $T = \infty$  приводит к линейной системе регулирования.

Исследование системы (1) проводится методом точечных преобразований части плоскости переключений в себя. При этом выясняется геометрическая картина точечного преобразования, показывается существование симметричного периодического режима, доказываются его единственность и, кроме того, рассматривается рождение предельного цикла из состояния равновесия релейной системы и слияние предельного цикла с интегральной поверхностью особой точки.

# 1. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО И СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К ТОЧЕЧНОМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ

Трехмерное фазовое пространство переменных  $u$ ,  $v$ ,  $\psi$  системы дифференциальных уравнений (1) состоит из двух полупространств  $\psi > 0$  ( $G^+$ ) и  $\psi < 0$  ( $G^-$ ), примыкающих друг к другу по граничной плоскости переключений  $\psi = 0$ . Поведение фазовых траекторий в полупространствах  $G^+$  и  $G^-$  определяется соответственно решениями следующих систем дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{u} = -\frac{1}{T} [u + 1], \\ v = u + \psi, \\ \dot{\psi} = \sigma u + v - 2h\psi, \end{cases} \quad (1') \quad \begin{cases} u = -\frac{1}{T} [u - 1], \\ v = u + \psi, \\ \dot{\psi} = \sigma u + v - 2h\psi. \end{cases} \quad (1'')$$

На поверхности переключений  $\psi = 0$  фазовые траектории этих двух систем склеиваются по непрерывности. Поскольку как система (1), так и ее фазовое пространство симметричны относительно начала координат, то можно ограничиться рассмотрением только одного какого-либо фазового полупространства ( $G^+$ ).

Картина разбиения фазового полупространства  $G^+$  на области с качественно одинаковым поведением фазовых траекторий системы дифференциальных уравнений (1'') определяется следующими особыми элементами:

1) тремя интегральными плоскостями:

$$\begin{aligned} u &= -1; \\ \frac{T(a+\alpha)u}{1+Tb} + av + \psi - \frac{a(a+\alpha)}{1+Tb} &= 0 \quad (\Pi); \\ \frac{T(b-\alpha)u}{1-Ta} + bv - \psi + \frac{b(b-\alpha)}{1-Ta} &= 0 \quad (A), \end{aligned}$$

где

$$a = \sqrt{1+h^2} + h, \quad ab = 1, \quad a - b = 2h;$$

2) двумя особыми точками в конечной части фазового пространства:

а) особой точкой  $c_0$  ( $u = -1$ ,  $\psi = 1$ ,  $v = 2h + \alpha$ ) типа седла так, что интегральной поверхностью особой точки, в которой все траектории стремятся к  $c_0$ , является плоскость ( $\Pi$ ), а две особые траектории („сепаратрисы“), выходящие из  $c_0$ , совпадают с прямой ( $A$ )  $u = -1$ ;

\* Перенеся начало координат в особую точку  $c_0$  и исключив одну из координат системы (1), скажем  $\tilde{v}$ , согласно уравнению плоскости  $\Pi$ , получим систему уравнений относительно оставшихся координат  $\tilde{u}$  и  $\tilde{\psi}$  в виде:

$$\tilde{\dot{u}} = -\frac{1}{T} \tilde{u}; \quad \tilde{\dot{\psi}} = -\frac{T-\sigma}{1+Tb} \tilde{u} - a\tilde{\psi}.$$

Корни характеристического уравнения этой системы дифференциального уравнения равны соответственно  $\lambda_1 = -\frac{1}{T} < 0$  и  $\lambda_2 = -a < 0$ , и, следовательно, особая

точка  $\tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{\psi} = 0$  в плоскости ( $\Pi$ ) является особой точкой типа устойчивого узла. Аналогично показывается, что особые точки в плоскостях ( $A$ ), ( $u = -1$ ) являются особыми точками типа седла.

б) состоянием равновесия  $O$  ( $u = v = \psi = 0$ ) в условиях переключения, исследование которого проводится ниже;

3) тремя особыми точками в бесконечности: устойчивым узлом (у.у.), неустойчивым узлом (н.у.) и седлом (с.) [8].

На рис. 2 для случая  $0 < \alpha < T < b$  дан вид фазового полупространства  $G^+$ , отображенного во внутренность полусферы.

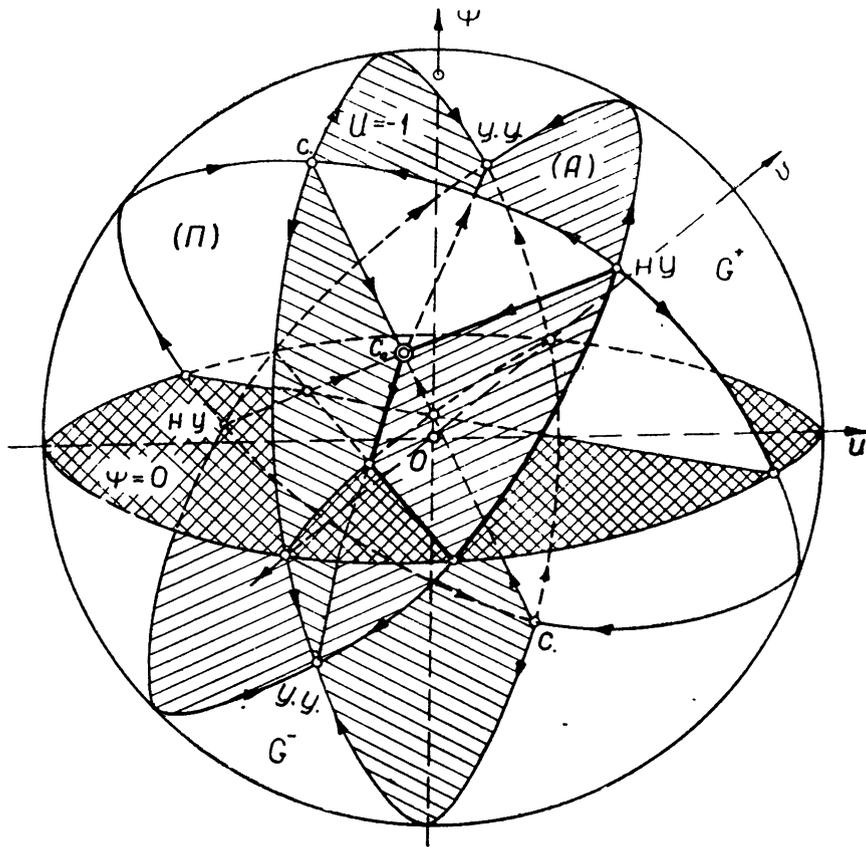


Рис. 2.

Согласно третьему уравнению системы дифференциальных уравнений (1), плоскость переключений  $\psi = 0$  прямой  $\alpha u + v = 0$  делится на две полуплоскости: на полуплоскость  $\sigma u + v > 0$ ,  $\psi = 0$  ( $s^+$ ) и на полуплоскость  $\alpha u + v < 0$ ,  $\psi = 0$  ( $s^-$ ) так, что полуплоскость  $s^-$  прошивается фазовыми траекториями, идущими из полупространства  $G^-$  в  $G^+$ , а полуплоскость  $s^+$  прошивается фазовыми траекториями, идущими в обратном направлении. Фазовые траектории, входящие через  $s^+$  в  $G^+$ , интегральной плоскостью  $(\Pi)$  рассекаются на два типа траекторий: на траектории, уходящие в бесконечность, и на траектории, которые через конечное время снова приходят на плоскость переключений  $\psi = 0$  и допускают сведение задачи к точечному преобразованию плоскости переключений  $\psi = 0$  в себя (последняя часть области обозначена через  $\omega$ , (см. рис. 3).

Действительно, изображающая точка, выходящая в момент  $t = t_0 = 0$  из точки  $M_0(u_0, v_0, 0) \in \omega$ , будет двигаться в фазовом полупространстве  $G^+$  по траектории.

$$\begin{aligned} u(t) &= (1 + \sigma) Ce^{-t/T} - 1; \\ v(t) &= Ae^{-at} + Be^{bt} - \sigma T Ce^{-t/T} + \delta; \\ \psi(t) &= -aAe^{-at} + bBe^{bt} - Ce^{-t/T} + 1, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a+b} \left\{ \frac{T\sigma b - 1}{1+\sigma} u_0 + bv_0 - \psi_0 + \frac{T\sigma b - 1}{1+\sigma} + (1 - \delta b) \right\}; \\ B &= \frac{1}{a+b} \left\{ \frac{T\sigma a + 1}{1+\sigma} u_0 + av_0 + \psi_0 + \frac{T\sigma a + 1}{1+\sigma} - (1 + \delta a) \right\}; \\ C &= \frac{u_0 + 1}{1 + \sigma}; \quad \delta = 2h + \alpha; \quad \sigma = \frac{1 - T(2h + \alpha)}{T(a - T)}; \quad \psi_0 = 0, \end{aligned}$$

являющейся решением системы (1''), до тех пор, пока снова не придет на плоскость переключений  $\psi=0$  в точку  $M_1(u_1, v_1, 0)$  (рис. 3). Подставляя значения  $A, B, C$  в (2), получим формулы точечного преобразования области  $w$  в  $s^- (T^-)$  в виде:

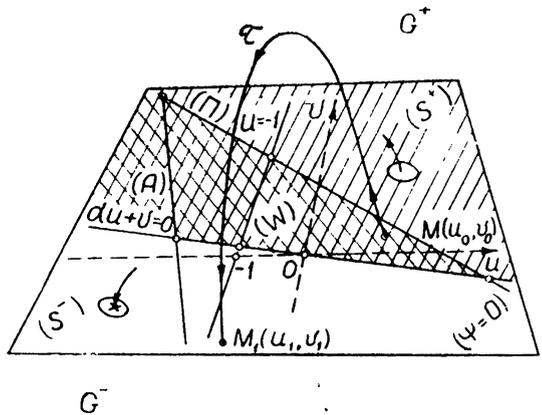


Рис. 3:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 e^{-T} + e^{-T} - 1; \\ v_1 &= \frac{u_0}{a+b} \left\{ \frac{T(b-\sigma)}{1-Ta} e^{-aT} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{T(a+\sigma)}{1+Tb} e^{bT} - \frac{T[1-T(a-b+\sigma)]}{(1+Tb)(1-Ta)} \frac{a+b}{1} e^{-T} \right\} + \\ &\quad + \frac{v_0}{a+b} [be^{-aT} + ae^{bT}] + \frac{b(b-\sigma)}{(a+b)(1-Ta)} e^{-aT} - \\ &\quad - \frac{a(a+\sigma)}{(a+b)(1+Tb)} e^{bT} - \frac{T[1-T(a-b+\sigma)]}{(1+Tb)(1-Ta)} e^{-T+a-b+\sigma}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\tau$  находится как наименьший положительный корень уравнения

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{u_0}{a+b} \left\{ -\frac{Ta(b-a)}{1-Ta} e^{-a\tau} + \frac{Tb(a+\sigma)}{1+Tb} e^{b\tau} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{T(a+b)(T-\sigma)}{(1+Tb)(1-Ta)} e^{-T} \right\} + \frac{v_0}{a+b} (e^{b\tau} - e^{-a\tau}) + \\ &\quad + \frac{1}{a+b} \left\{ -\frac{b-a}{1-Ta} e^{-a\tau} - \frac{a+\sigma}{1+Tb} e^{b\tau} + \frac{T(a+b)(T-a)}{(1+Tb)(1-Ta)} e^{-T+a+b} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись симметрией задачи относительно начала координат и заменив в точечном преобразовании  $u_1$  на  $-u_1, v_1$  на  $-v_1,$

получим точечное преобразование  $T$  точек плоскости переключений  $s^+$  в себя. Выбрав далее за второй параметр  $\xi = v_0$  (наряду с временем переключения  $\tau$ ), после несложных преобразований запишем формулы точечного преобразования  $T$  в параметрической форме в виде:

$$v_0 = \xi; \quad u_0 = -\frac{\xi(e^{b\tau} - e^{-a\tau}) + N}{\Delta}; \quad (4)$$

$$u_1 = \frac{\xi(e^{b\tau} - e^{-a\tau}) - [(b - \alpha)e^{-a\tau} + (a + \alpha)e^{b\tau} - (a + b)]}{\Delta e^{\tau/T}} + 1;$$

$$v_1 = (\xi F + \Phi)/\Delta,$$

где

$$\Delta = -\frac{Ta(b - \alpha)}{1 - Ta} e^{-a\tau} + \frac{Tb(a + \alpha)}{1 + Tb} e^{b\tau} + \frac{T(a + b)(T - \sigma)}{(1 + Tb)(1 - Ta)} e^{-\tau/T};$$

$$N = -\frac{b - \alpha}{1 - Ta} e^{-a\tau} - \frac{a + \alpha}{1 + Tb} e^{b\tau} + \frac{T(T - \alpha)(a + b)}{(1 + Tb)(1 - Ta)} e^{-\tau/T} + a + b;$$

$$F = \frac{T(a + b)(T - \alpha)}{(1 + Tb)(1 - Ta)} e^{\tau(b - a)} + \frac{Tb(a + \sigma)}{1 + Tb} e^{-\tau(a + 1/T)} -$$

$$-\frac{Ta(b - \alpha)}{1 - Ta} e^{\tau(b - 1/T)};$$

$$\Phi = (a + \sigma)(b - \sigma) \left\{ \frac{Ta}{1 - Ta} [e^{-a\tau} + e^{\tau(b - 1/T)}] + \right.$$

$$\left. + \frac{Tb}{1 + Tb} [e^{b\tau} + e^{-\tau(a + 1/T)}] - \frac{T(a + b)}{(1 + Tb)(1 - Ta)} [e^{-\tau/T} + e^{\tau(b - a)}] \right\}.$$

## 2 ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ $T$

1. Исследование точечного преобразования  $T$  начнем с выяснения геометрической картины преобразования области  $s^+$  в себя. Для этого воспользуемся той особенностью точечного преобразования  $T$ , что при каждом фиксированном  $\tau$  точечное преобразование линейно, и поэтому, согласно (4), каждому лучу  $L_0(\tau)$ :

$$u_0 = k_0 v_0 + l_0 = \frac{e^{b\tau} - e^{-a\tau}}{\Delta} v_0 - \frac{N}{\Delta}, \quad (5)$$

несущему на себе точки с „временем перехода“  $\tau$ , ставится в соответствие луч  $L_1(\tau)$ :

$$u_1 = k_1 v_1 + l_1 = \frac{e^{b\tau} - e^{-a\tau}}{F e^{\tau/T}} v_1 - \frac{\Phi(e^{b\tau} - e^{-a\tau})}{F \Delta e^{\tau/T}} -$$

$$-\frac{(b - \sigma)e^{-a\tau} + (a + \alpha)e^{b\tau} - (a + b)}{\Delta e^{\tau/T}} + 1, \quad (6)$$

несущий на себе точки с тем же „временем перехода“. В силу сказанного при изменении параметра  $\tau$  от нуля до бесконечности луч  $L_0(\tau)$  при своем перемещении заполняет без самопересечений, „выметает“ область, подлежащую преобразованию  $\omega$ , а луч  $L_1(\tau)$  соответственно „выметает“ без самопересечений область, в которую переходит  $\omega$  после применения точечного преобразования  $T$  (рис. 5).

Действительный характер „выметания“ этих областей находится, исходя из следующих соображений:

а) Пусть  $\psi = 0$ ,  $au + v = 0$ . Из системы дифференциальных уравнений (1) имеем, что  $\dot{\psi} = 0$ ,  $\ddot{\psi} = T^{-1} [u(T - \alpha) - \alpha]$ ; следовательно,  $\dot{\psi}$  больше нуля, если  $u(T - \alpha) > \alpha$ , и  $\dot{\psi} < 0$ , если  $u(T - \alpha) < \alpha$ . В точке  $u = \alpha(T - \alpha)^{-1}$  производные  $\dot{\psi} = 0$ ,  $\ddot{\psi} = 0$ ,  $\ddot{\psi} = -1/T < 0$ . В соответствии с этим на рис. 4

для случая  $0 < \alpha < T < b$  показано поведение фазовых траекторий вблизи прямой  $au + v = 0$ ,  $\psi = 0$ . Часть прямой  $au + v = 0$ ,  $\psi = 0$  с абсциссами  $u \leq \alpha(T - \alpha)^{-1}$  переходит в себя; отрезок же прямой  $au + v = 0$ ,  $\psi = 0$ , заключенный между абсциссой  $u = \alpha(T - \alpha)^{-1}$  и прямой (II), переходит в кривую  $\Gamma$ , которая находится как решение системы (3) при начальных условиях  $\psi_0 = 0$ ,  $au_0 + v_0 = 0$  и может быть записана в параметрической форме в следующем виде:

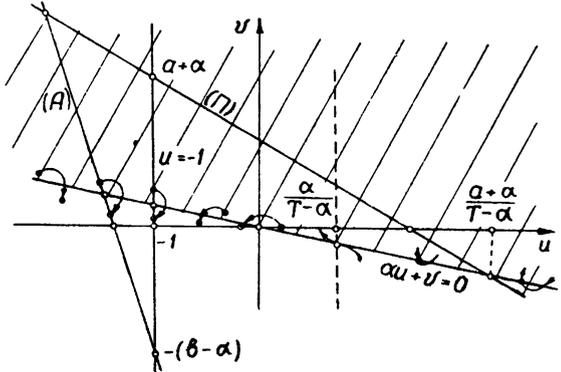


Рис. 4.

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{1}{\square} \left\{ (1 + Tb) (1 - Ta) [be^{-a\tau} + ae^{b\tau} - (a + b)] e^{-\tau/T} \right\} + 1; \\
 v &= -\frac{1}{\square} \left\{ (a + b) (T - \alpha) e^{\tau(b - \alpha)} - (a + \sigma) (1 + Tb) (T - \sigma) e^{-a\tau} - \right. \\
 &\quad - (b - \alpha) (1 - Ta) (T - \alpha) e^{b\tau} + T(a + b)(a + \alpha)(b - \alpha) e^{-\tau/T} - \\
 &\quad \left. - Tb^2(a + \sigma)(1 - Ta) e^{-(a+1)\tau} - Ta^2(b - \alpha)(1 + Tb) e^{\tau(b-1)/T} \right\},
 \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\square = (T - \alpha) [- (1 + Tb) e^{-a\tau} + (1 - Ta) e^{b\tau} + T(a + b) e^{-\tau/T}]$$

(в этих формулах, как и раньше, чтобы рассматривать преобразования области в себя,  $u$  и  $v$  заменены на  $-u$  и  $-v$ ).

Непосредственной проверкой показывается, что кривая  $\Gamma$  является огибающей семейства прямых (6), именно:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial u} \right|_{\Gamma} = 1/k_1. \tag{8}$$

б) Знаки производных

$$\partial k_0 / \partial \tau, -\partial k_1 / \partial \tau, \partial u_0 / \partial \tau, \partial u_1 / \partial \tau$$

( $u_0$ , соответственно  $u_1$ , — абсцисса точки пересечения прямой (5), соответственно прямой (6), с прямой  $au + v = 0$ ,  $\psi = 0$ ) не зависят от  $\tau$  и совпадают со знаком разности  $(T - \alpha)$  (см. дополнение).

в) Предельные положения лучей  $L_0(\tau)$  и соответственно  $L_1(\tau)$  при  $\tau = 0$  и  $\tau = \infty$  следующие: луч  $L_0(0)$  лежит на прямой  $au + v = 0$ ,  $\psi = 0$  и совпадает с ее неподвижной по отношению к точечному преобразованию  $T$  частью (на рис. 5 эта часть прямой помечена крестц-

ками). Луч  $L_0(\infty)$  лежит на части прямой  $(\Pi)^*$ , расположенной в  $s^+$ . Соответственно луч  $L_1(0)$  лежит на прямой  $\alpha u + v = 0$  симметрично лучу  $L_0(0)$ . Луч  $L_1(\infty)$  лежит на одной из двух следующих прямых:

$$v + \frac{T\alpha(b-\alpha)}{1-T\alpha} u - \frac{b-\alpha}{1-T\alpha} = 0 \quad (b < T);$$

$$u = 1 \quad (b > T)$$

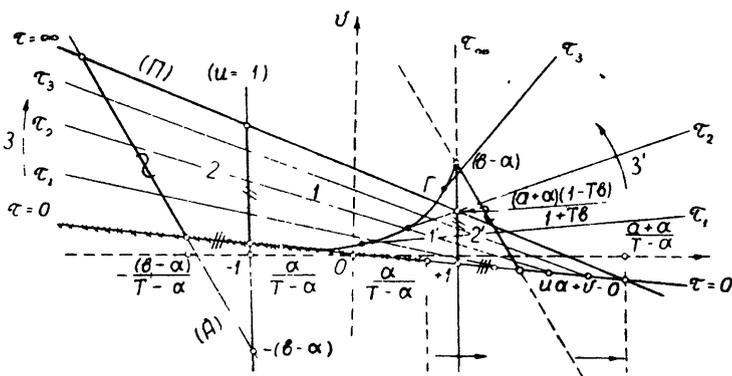


Рис. 5.

и совпадает с той частью касательной к кривой  $\Gamma$  в точке  $M(1, b-\alpha)$ , которая начинается в точке  $M(1, b-\alpha)$  и целиком расположена в  $s^+$ .

Согласно изложенному выше, на рис. 5 для случая  $0 < \alpha < T < b$  приведена геометрическая картина преобразования  $T$ . Область  $w$  прямыми  $u = -1$ ,  $(A)$ ,  $(\Pi)$  и  $\alpha u + v = 0$  разбивается на три области 1, 2, 3, которые преобразуются соответственно в  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ . Границы, лежащие на прямых  $u = -1$  и  $(A)$ , переходят в границы, лежащие на симметричных по отношению к началу координат прямых  $u = 1$  и  $(A')$ . Граница, соответствующая прямой  $\alpha u + v = 0$ , преобразуется в две границы: часть прямой  $\alpha u + v = 0$ , заштрихованная крестиками, переходит в  $L_1(0)$ , оставшаяся же часть переходит в криволинейную границу  $\Gamma$ . Попутно заметим, что якобиан точечного преобразования на прямой  $\alpha u + v = 0$  обращается в нуль. Наконец, граница, соответствующая прямой  $(\Pi)$ , не преобразуется ни в какую границу (см. сноску на стр. 136), но поскольку «сепаратриса», выходящая из  $c_0$ , пересекает плоскость переключений  $\psi = 0$  в точке  $M(-1, -(b-\alpha))$ , то можно доопределить точечное преобразование  $T$  так, что любой конечный отрезок этой границы переходит в точку  $M(1, b-\alpha)$ , а вся граница переходит в  $L_1(\infty)$ .

Преобразованная область  $T(w)$  прямой  $(\Pi)$  делится на две части, только в одной из которых определено точечное преобразование  $T$  (в области, лежащей вне  $w$ , все траектории уходят в бесконечность). Поэтому после второго шага точечного преобразования  $T$  область, ограниченная прямыми  $\alpha u + v = 0$ ,  $(\Pi)$ , кривой  $\Gamma$  или кривой  $\Gamma$  и  $L_1(\infty)$ , переходит в клинообразную область, ограниченную отрезком прямой  $\alpha u + v = 0$  с абсциссами  $-\left|\frac{\alpha}{T-\alpha}\right| \leq u \leq \left|\frac{\alpha}{T-\alpha}\right|$  («основание»  $d$ ) и кривыми  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$  («сторонами»), пересекающимися в точке  $M(1, b-\alpha)$ .

\* Здесь и в дальнейшем прямые, получающиеся от пересечения плоскостей  $(\Pi)$ ,  $(A)$ ,  $(u = -1)$  и т. д. с плоскостью  $\psi = 0$ , обозначены теми же буквами, что и плоскости, т. е. прямая  $(\Pi)$ , прямая  $(A)$  и т. д.

При следующих шагах точечного преобразования „основание“  $d$  клинообразной области переходит в себя так, что каждая точка „основания“ переходит в симметричную ей точку по отношению к началу координат, а „стороны“ попеременно сдвигаются внутрь клинообразной области.

Фиксируем свое внимание на каком-либо произвольно выбранном луче  $L_0(\tau)$ , пересекающем клинообразную область. При многократном преобразовании  $T$  стороны клинообразной области вырезают на  $L_0(\tau)$  сжимающийся отрезок. Для бесконечной последовательности точек концов этого отрезка\* существует альтернатива: либо эти последовательности точек стремятся к одной и той же предельной точке, либо к разным предельным точкам. Последняя возможность приводит к противоречию, поскольку тогда должна существовать клинообразная область, границы которой составлены из трех инвариантных кривых  $\Gamma_{1,\infty}$ ,  $\Gamma_{2,\infty}$  и  $d$ , а точки пересечения кривых  $\Gamma_{1,\infty}$ ,  $\Gamma_{2,\infty}$  с  $d$  не являются неподвижными точками точечного преобразования  $T$ .

Таким образом, при бесконечной итерации точечного преобразования  $T$  точки области  $w$  либо уходят из области определения точечного преобразования  $T$ , либо стремятся к состоянию равновесия, либо стремятся к инвариантной кривой, и преобразование области в область фактически сводится к преобразованию инвариантной кривой в себя. Из характера перемещения лучей  $L_0(\tau)$  (каждый из которых несет только одну точку непрерывной инвариантной кривой) следует монотонность рассматриваемого точечного преобразования инвариантной кривой в себя и, вообще говоря, невозможность сложных, многократных периодических движений в системе (1).

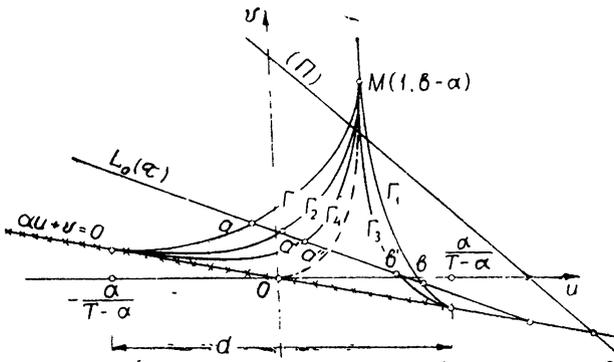


Рис. 6а.

На рис. 6 приведены две геометрические картины преобразования  $s^+$  при многократном применении точечного преобразования  $T$  для двух соотношений параметров:

$$(b - \alpha) < \frac{(1 - Ta)(a + \alpha)}{1 + Tb} \quad (9)$$

(рис. 6а),

$$(b - \alpha) > \frac{(1 - Ta)(a + \alpha)}{1 + Tb} \quad (9a)$$

\* Если ни на одном луче  $L_0(\tau)$  нет бесконечной последовательности указанных точек, то при бесконечной итерации  $T$  все точки стремятся к состоянию равновесия в условиях переклечения.

(рис. 6б). Условие (9) означает, что точка  $M(1, b - \alpha)$  лежит внутри  $\omega$  (заметим, что преобразование любой из областей  $\omega$  в себя возможно только в том случае, если выполнено неравенство (9)). В пространстве параметров  $T, \sigma, h$  неравенству (9) соответствует область, ограниченная поверхностью  $Q$ , уравнение которой можно записать в виде:

$$\sigma = Tb \frac{a + b}{2} - \frac{a - b}{2}. \quad (10)$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

2. Известно, что простейшим симметричным режимам релейной системы соответствуют однократные неподвижные точки точечного преоб-

разования  $T$ . Координаты неподвижных точек, согласно (3), могут быть записаны в виде:

$$u_0 = \frac{1 - e^{-\tau/T}}{1 + e^{-\tau/T}}; \quad (11)$$

$$v_0 = - \frac{x(\tau)}{(1 + e^{-\tau/T}) [a(1 + e^{b\tau}) + b(1 + e^{-a\tau})]},$$

где

$$x(\tau) = (a + b) \delta (1 + e^{-\tau/T}) + \frac{(b - a)(T + b)}{1 - Ta} e^{-a\tau} + \frac{(a + \alpha)(T - \alpha)}{1 + Tb} e^{b\tau} - \frac{2T(a + b)[1 - T(a - b + \alpha)]}{(1 + Tb)(1 - Ta)} e^{-\tau/T} + b(b - \alpha) e^{-\tau(a + 1/T)} - a(a + \alpha) e^{-\tau(b - 1/T)}.$$

При этом полупериод  $\tau$  простейшего периодического режима находится как положительный корень следующего уравнения периодов:

$$I(\tau) - II(\tau) = 0, \quad (12)$$

где

$$I(\tau) = (1 + e^{-\tau/T}) \frac{e^{-\tau b} - e^{-\tau a}}{1 + e^{-b\tau}} + ne^{-\tau/T} [e^{\tau/T(1-Ta)} - 1];$$

$$II(\tau) = m(1 + e^{-a\tau}) \frac{1 - e^{-\tau/T(1+Tb)}}{1 + e^{-b\tau}};$$

$$m = \frac{(a - b)(1 + Tb) - 2(T - \alpha)}{(a + b)(1 + Tb)}; \quad n = \frac{(a - b)(1 - Ta) - 2(T - \alpha)}{(a + b)(1 - Ta)}.$$

Устойчивость неподвижных точек (11), как обычно, устанавливается в зависимости от расположения корней характеристического уравнения

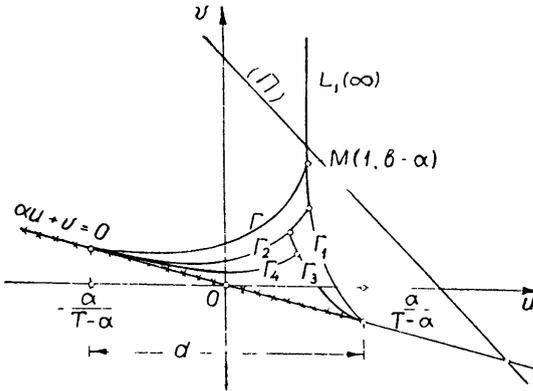


Рис. 6б.

$$z^2 \tilde{A} e^{z(b-a-1T)} + \tilde{B}z - \tilde{A} = 0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A} = & -(1-ax)(1+Tb)e^{-a\tau} + (1+bx)(1-Ta)e^{b\tau} + (a+b)(T-a)e^{-\tau/T} + \\ & + (1-ax)(1+Tb)e^{z(b-1T)} - (1+bx)(1-Ta)e^{-z(a+1/T)} - \\ & - (a+b)(T-a)e^{z(b-a)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B} = & (a+b)(T-a)e^{z(b-a)} - (1-ax)(1+Tb)e^{z(b-1/T)} + \\ & + (1+bx)(1-Ta)e^{-z(a+1/T)} - (a+b)(T-a)e^{z(2b-1T)} + \\ & + (1-ax)(1+Tb)e^{z(2b-a)} - (1+bx)(1-Ta)e^{z(b-2a)} + \\ & + (1-ax)(1+Tb)e^{-z(a+2T)} - (1+bx)(1-Ta)e^{z(b-2T)} - \\ & - (a+b)(T-a)e^{-z(2a+1/T)} - (1-ax)(1+Tb)e^{z(b-2a-1/T)} + \\ & + (1+bx)(1-Ta)e^{z(2b-a-1/T)} + (a+b)(T-a)e^{z(b-a-2/T)}, \end{aligned}$$

по отношению к единичному кругу. Именно, неподвижная точка точечного преобразования  $T$  устойчива, если все корни характеристического уравнения (13) по модулю больше единицы. Границы простейшего периодического режима в пространстве параметров  $T, \alpha, h$  наряду с поверхностями разрыва точечного преобразования  $T$  состоят из поверхностей  $N_{+1}, N_{-1}, N_{\varphi}$ , которые получаются из характеристического уравнения  $\chi(z) = 0$  (13) при  $z = 1, z = -1$  и  $z = e^{i\varphi}$ . После несложных преобразований уравнения поверхностей  $N_{+1}, N_{-1}, N_{\varphi}$  записываются соответственно в виде:

$$\begin{aligned} \chi(1) = & (a+b)(T-a)[e^{(a/T)(T-b)} - 1](1+e^{b\tau})^2(1-e^{-z(a+1/T)} - \\ & - (a+\alpha)(T-b)(e^{z(a+b)} - 1)(1+e^{-z/T})^2(1-e^{z(b-a)}) = 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \chi(-1) = & (a+b)(T-a)[e^{(a/T)(T-b)} - 1](e^{2b} - 1)(1+e^{-z(a+1/T)}) + \\ & + (a+\alpha)(T-b)(e^{z(a+b)} - 1)(1-e^{-2z/T})(1+e^{z(b-a)}) = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \chi(\varphi) = & (a+b)(T-a)[e^{(a/T)(T-b)} - 1](1+e^{b\tau}) - \\ & - (a+\alpha)(T-b)(e^{z(a+b)} - 1)(1+e^{-z/T}) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

Легко видеть, что поверхности  $N_{-1}$  и  $N_{\varphi}$  могут быть расположены только в той области пространства параметров  $T, \alpha, h$ , где

$$(T-a)(a+\alpha) > 0, \quad (17)$$

а поверхность  $N_{+1}$  (15) — вне этой области.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ( $u = v = \phi = 0$ ) В УСЛОВИЯХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

Исследование устойчивости состояния равновесия  $u = v = \phi = 0$  в условиях переключения фактически сводится к проверке выполнения необходимых и достаточных условий устойчивости состояния равновесия релейной системы [9-12].

Замечая, что разность между степенью знаменателя и числителя коэффициента передачи

$$K(p) = - \frac{\alpha p + 1}{(Tp + 1)(p^2 + 2hp - 1)}$$

системы (1) равно двум, состояние равновесия  $u = v = \psi = 0$  в условиях переключения будет устойчиво, если

$$\sigma (a - b + 1/T) > 1. \quad (18)$$

Неравенству (18) в пространстве параметров  $T, \alpha, h$  соответствует область, ограниченная поверхностью  $P$ , уравнение которой может быть записано в виде:

$$\alpha = \frac{T}{1 + T(a - b)}. \quad (19)$$

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ $T$ В СЛУЧАЕ, КОГДА ПАРАМЕТРЫ СИСТЕМЫ ПРИНАДЛЕЖАТ ОКРЕСТНОСТИ ПОВЕРХНОСТИ $P$ . РОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ИЗ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Сделав естественное предположение [11], что  $\tau$  мало, и разлагая левую часть уравнения (12) в ряд по  $\tau$ , получим следующее выражение уравнения (12) для нахождения периодов:

$$\begin{aligned} \frac{\tau^3}{3T^2} [T - \alpha(1 + T(a - b))] + \frac{\tau^4}{6T^3} [1 + T(a - b)] \{ \alpha [1 - T(a - b)] - T \} + \\ + \frac{2\tau^5}{5! T^4} \{ 3 [1 + T(a - b) + T^2 + T^2(a - b)^2] [T - \alpha \{1 - T(a - b)\}] + \\ + 2T\alpha(a - b)(T - a)(T + b) \} + \dots = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

в котором многоточие означает члены более высокого порядка малости относительно  $\tau$ . Сокращая уравнение (20) на общий множитель  $\tau^3/3T^2$  и вводя обозначения

$$\begin{aligned} T - \alpha [1 + T(a - b)] = \varepsilon; \quad \tau/2T = \tau'; \\ A = 3 [1 + T(a - b) + T^2 + T^2(a - b)^2] \end{aligned}$$

так, что на поверхности  $P$   $\varepsilon = 0$ , перепишем уравнение (20) в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon - \tau' [1 + T(a - b)] \varepsilon + \frac{\tau'^2}{5} [A\varepsilon + 2T\sigma(a - b)(T + b) \times \\ \times (T - a)] + \dots = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Согласно (21),

$$\begin{aligned} \tau'_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{5\varepsilon [1 + T(a - b)]}{A\varepsilon + 2T\sigma(a - b)(T + b)(T - a)} \pm \right. \\ \left. \sqrt{\frac{25\varepsilon^2 [1 + T(a - b)]^2}{[A\varepsilon + 2T\sigma(a - b)(T + b)(T - a)]^2} - \frac{20\varepsilon}{A\varepsilon + 2T\sigma(a - b)(T + b)(T - a)}} \right\} \\ = \frac{5 [1 + T(a - b)] \varepsilon \pm \sqrt{5B\varepsilon [\sigma - T \{1 + T(a - b)D\}^{-1}]} }{2 [A\varepsilon + 2T\sigma(a - b)(T + b)(T - \sigma)]}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} B = 7 + 17T(a - b) + 17T^2(a - b)^2 + 12T^2 + 4T^3(a - b) + \\ + 7T^3(a - b)^2 > 0; \end{aligned}$$

$$D = \frac{d + 8 |1 + T(a - b)|}{d + 8T^2} = \begin{cases} > 1 & (T < a), \\ < 1 & (T > a), \end{cases}$$

$$d = 7 + 4T^2 + 2T(a - b) + 7T^2(a - b)^2 > 0.$$

Уравнение (22) имеет единственное положительное решение только в том случае, если подкоренное выражение больше нуля, поскольку величина  $\tau$  порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ . В зависимости от величины  $D$  возможны два случая, представленных на рис. 7. При  $D > 1$  ( $T < a$ ) решение существует только для  $\varepsilon > 0$  ( $\alpha \in \{\varepsilon = 0\}$  равны  $T [1 + T(a - b)]^{-1}$  и, следовательно,  $\alpha - T [1 + T(a - b) D]^{-1} > 0$ ); при  $D < 1$  ( $T > a$ ) решение есть только для  $\varepsilon < 0$ .

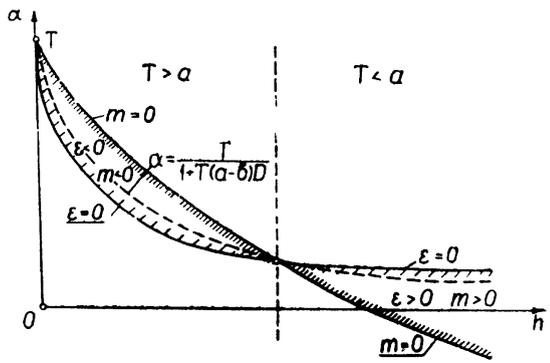


Рис. 7.

Штриховкой выделены области вблизи поверхности  $\varepsilon=0$ , в которых происходит рождение однократного предельного цикла. Устойчивость предельного цикла устанавливается исследованием корней характеристического уравнения (13), коэффициенты которого раскладываются в ряды по  $\tau$  до пятого порядка малости (напомним, что  $\varepsilon$  имеет второй порядок малости). При этом характеристическое уравнение (13) принимает вид:

$$z^2 + \left[ \sigma + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^3}{3!} + \frac{2\tau'v^2\varepsilon}{T^2} - \frac{\tau'^3}{3T^2} (a - b) (a - T) (T + b) + \dots \right] z - \left( 1 + \sigma + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^3}{3!} + \dots \right) = 0 \quad (23)$$

и его корни равны

$$z_{1,2} = -\Omega \pm \sqrt{(1 + \Omega)^2 + \tau' \left[ \frac{\tau'^2}{3T^2} (a - b) (a - T) (b + T) - \frac{2v^2\varepsilon}{T^2} \right]}, \quad (24)$$

где

$$\Omega = \frac{1}{2} \left[ \sigma + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^3}{3!} + \frac{2\tau'v^2\varepsilon}{T^2} - \frac{\tau'^3}{3T^2} (a - b) (a - T) (T + b) \right];$$

$$v = 1 + T(a - b); \quad \sigma = \tau'v/T.$$

В случае  $T < a$  ( $\varepsilon > 0$ ) предельный цикл устойчив, поскольку, согласно (22),

$$\frac{\tau'^2}{3T^2} (a - b) (a - T) (b + T) - \frac{2v^2\varepsilon}{T^2} = \frac{4v^2}{3T^2} \varepsilon > 0$$

и, следовательно, в соответствии с (24) оба корня характеристического уравнения (23) по модулю больше единицы. В случае  $T > a$  ( $\varepsilon < 0$ ) один из корней характеристического уравнения (23) по модулю меньше единицы  $|z_1| < 1$  и, следовательно, предельный цикл неустойчив.

Проведенное выше исследование в окрестности бифуркационной границы  $P$ , на которой меняется устойчивость состояния равновесия релейной системы в условиях переключения, приводит к следующим выводам: в случае  $T < a$  при таком изменении параметров системы, что бифуркационная поверхность  $P$  ( $\varepsilon = 0$ ) пересекается из области  $\varepsilon < 0$  в область  $\varepsilon > 0$ , устойчивое состояние равновесия  $u = v = \psi = 0$  в условиях переключения меняет свою устойчивость и становится неустойчивым. Одновременно с изменением устойчивости состояния равновесия происходит рождение устойчивого предельного цикла. Состояние равновесия как бы передает свою устойчивость родившемуся предельному циклу. В случае  $T > a$  при изменении параметров, при котором мы переходим из области  $\varepsilon > 0$  в область  $\varepsilon < 0$ , на бифуркационной поверхности  $P$  ( $\varepsilon = 0$ ) неустойчивое состояние равновесия  $u = v = \psi = 0$  в условиях переключения меняет свою устойчивость и становится устойчивым. В момент изменения устойчивости состояния равновесия рождается неустойчивый предельный цикл. Состояние равновесия как бы отдает свою неустойчивость родившемуся предельному циклу.

##### 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ $T$ В СЛУЧАЕ, КОГДА ПАРАМЕТРЫ СИСТЕМЫ ПРИНАДЛЕЖАТ ОКРЕСТНОСТИ ПОВЕРХНОСТИ $Q$

Предполагая, что  $\tau \rightarrow \infty$ , и введя замену  $e^{-\tau/T} = t$ , перепишем уравнение периодов (12) в виде:

$$\begin{aligned} & -m + t^{Tb} - (m - n + 1)t^{Ta} + nt^{T(a+b)} - nt + \\ & + t^{1+Tb}(1 + m - n) - t^{1+Ta} + mt^{1+Ta-Tb} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Соотношение (25) можно рассматривать как уравнение, уже разложенное по малому параметру  $t$ . Поэтому в случае  $T < a$ ,  $Tb < 1$ ,  $t \approx m^{1/Tb} + \dots$  и, следовательно, в окрестности поверхности  $Q$  ( $m = 0$ ) существует единственное положительное решение уравнения (25) только в той области пространства параметров  $T, \alpha, h$ , в котором  $m > 0$  (рис. 7). В случае  $T > a$  (в отличие от предыдущего)  $Tb > 1$  и в первом приближении  $t = -m/n + \dots$ . Поскольку  $m$  можно записать в виде  $m = \nu/(a+b)(1+Tb)$  и соответственно  $-2(T-a) = \nu - (a-b) \times (1+Tb)$ , то

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= \frac{\nu(1-Ta)}{(1+Tb)[(a-b)(1-Ta) - (a-b)(1+Tb) + \nu]} = \\ &= \frac{\nu(Ta-1)}{(1+Tb)[T(a^2-b^2) - \nu]}. \end{aligned}$$

Следовательно, в случае  $T > a$  существует единственное положительное решение уравнения (25) только в той области пространства параметров  $T, \alpha, h$  (в окрестности поверхности  $Q$  ( $m=0$ )), в которой  $m < 0$  ( $\nu < 0$ ) (см. рис. 7).

Устойчивость найденных неподвижных точек можно установить из сказанного ранее, учитывая единственность однократной точки\*. В самом деле, во всей области пространства параметров  $T, \alpha, h$ , заключенной между двумя бифуркационными поверхностями  $P$  и  $Q$ , согласно (17), не может быть расположена граничная поверхность  $N_{-1}$ . Отсюда следует, что устойчивость неподвижной точки не может измениться во всей этой области. При доказательстве единственности пока-

\* Доказательство единственности опубликовано в этом выпуске журнала в статье «О зависимости от параметров динамики одной релейной системы с неустойчивым объектом».

зывается, что в рассматриваемой области не могут быть расположены и поверхности  $N_{+1}$  и  $N_0$ . Поэтому неподвижная точка не может исчезнуть и разделиться на другие неподвижные точки. Следовательно, зная устойчивость неподвижной точки в окрестности  $P$  при малых  $\tau$ , мы можем судить об устойчивости во всей рассматриваемой области и, в частности, у другой границы  $Q$ , хотя  $\tau$  и растет до бесконечности по мере того, как неподвижная точка приближается к поверхности  $Q$ . В фазовом пространстве в последнем случае предельный цикл приближается к интегральной поверхности  $(\Pi)$ , сливается с ней и затем исчезает.

### ДОПОЛНЕНИЕ

1. Пусть  $T < b$ . Тогда  $\partial k_0 / \partial \tau$  можно записать в виде:

$$\frac{\partial k_0}{\partial \tau} = - \frac{T(a+b)(T-\alpha)e^{-(a+x)}}{(1+Tb)(1-Ta)\Delta^2} \Phi(x),$$

где

$$\Phi(x) = -N(e^x - 1) + Mx;$$

$$N = (a+b)e^{\tau b}; \quad M = (e^{-b} - e^{-a\tau})/\tau;$$

$$1/T = a + \nu; \quad x = \tau\nu > 0.$$

Из соотношений

$$a) N\tau = \tau(a+b)e^{\tau b} \Big|_{\tau=0} = 0; \quad M\tau = e^{-b} - e^{-a\tau} \Big|_{\tau=0} = 0;$$

$$б) (N\tau)' = be^{\tau b} + ae^{\tau b} + (a+b)b\tau e^{\tau b} \geq (M\tau)' = be^{\tau b} + ae^{-a\tau}$$

следует неравенство  $N \geq M$ , которое влечет за собой неравенство  $\Phi(x) < 0$ . Отсюда ясно, что знак  $\partial k_0 / \partial \tau$  совпадает со знаком разности  $(T - \alpha)$ .

2 Разрешая систему

$$\tau u_0 + v_0 = 0;$$

$$u_0 = v_0 k_0 + l_0$$

относительно  $u_0$  и дифференцируя затем  $u_0$  по  $\tau$ , получим, что

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau} = \frac{b(a+b)(1+Tb)(1-Ta)^2(1-e^{-\tau/T})(e^{b\tau}-1)}{(T-\alpha)\Delta'^2} \times$$

$$\times \left[ \frac{e^{b\tau} - e^{-a\tau}}{e^{b\tau} - 1} - \frac{a+b}{b} \frac{f(x+\varepsilon)}{f(x)} \right],$$

где

$$f(x) = x(e^x - 1)^{-1}; \quad x = \tau\nu > 0; \quad \varepsilon = a\tau > 0.$$

Поскольку

$$\left[ \frac{f(x+\varepsilon)}{f(x)} \right]'_x = \frac{x(x+\varepsilon)}{(e^x-1)(e^{x+\varepsilon}-1)} [\varphi(x) - \varphi(x+\varepsilon)] < 0,$$

что следует из соотношений

$$\varphi(x) \Big|_{x=0} = \frac{1+e^x(x-1)}{x(e^x-1)} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}; \quad \varphi'(x) = \frac{e^x[e^x + e^{-x} - (2+x^2)]}{x^2(e^x-1)^2} > 0,$$

то можно написать, что

$$\frac{e^{-b} - e^{-a}}{e^{b\tau} - 1} - \frac{a+b}{b} \frac{f(x+\varepsilon)}{f(x)} > \frac{e^{-b} - e^{-a}}{e^{b\tau} - 1} - \frac{a+b}{b} \frac{f(x+\varepsilon)}{f(x)} \Big|_{x=0} =$$

$$= \frac{e^{b\tau} - e^{-a}}{e^{b\tau} - 1} - \frac{a+b}{b} \frac{a\tau}{e^{a\tau} - 1} = \frac{W(\tau)}{(e^{b\tau} - 1)(e^{a\tau} - 1)},$$

где

$$W(\tau) = e^{-a(b-\tau)} + e^{-a\tau} - \frac{a+b}{b^2} \tau - \left[ 1 + e^{b\tau} \left( 1 + \frac{a+b}{b^2} \tau \right) \right].$$

Учитывая соотношения

$$W(\tau) \Big|_{\tau=0} = 0; \quad e^{-b\tau} W'(\tau) \Big|_{\tau=0} = 0;$$

$$(e^{-b\tau} W'(\tau))' = \frac{a+b}{b} (1 - e^{-\tau(a+b)}) (e^{a\tau} - 1) > 0,$$

получим, что

$$\left[ \frac{e^{b\tau} - e^{-a}}{e^{b\tau} - 1} - \frac{a+b}{b} \frac{f(x+\varepsilon)}{f(x)} \right] > 0,$$

и, следовательно, знак  $du_0/d\tau$  совпадает со знаком разности  $(T - \sigma)$ .

Эти результаты имеют место и в случае  $T \geq b$ . Аналогичная зависимость от знака разности  $(T - \alpha)$  получается для знаков производных  $-\partial k_1/\partial \tau$ ,  $du_1/d\tau$ , и, следовательно, знаки выражений  $\partial k_0/\partial \tau$ ,  $-\partial k_1/\partial \tau$ ,  $du_0/d\tau$ ,  $du_1/d\tau$  совпадают со знаком разности  $(T - \alpha)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
- 2 А. А. Андронов, Н. Н. Баутин, ДАН СССР, 43, 197 (1944).
- 3 А. А. Андронов, Н. Н. Баутин, Изв. АН СССР, ОТН, 3, 3 (1955).
- 4 А. А. Андронов, А. Г. Майер, ДАН СССР, 47, 345 (1945).
- 5 А. А. Андронов, А. Г. Майер, Автоматика и телемеханика, 8, 314 (1947).
- 6 А. А. Андронов, А. Г. Майер, Автоматика и телемеханика, 14, 505 (1953).
- 7 С. Д. Киняпин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 88 (1958).
- 8 Р. М. Минц, Сб. памяти А. А. Андропова, изд. АН СССР, М., 1955.
- 9 Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, М., 1955.
- 10 В. Г. Болтянский и Л. С. Понтрягин, Труды III Всесоюзного математического съезда, 1, изд. АН СССР, М., 1956.
- 11 С. Д. Киняпин, Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, 20, 1153 (1959).
- 12 М. В. Мееров, Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности, Физматгиз, М., 1959.
- 13 Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, 14, 556 (1953).
- 14 Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 41 (1958).
- 15 Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 2, 95 (1958).
- 16 Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 5—6, 146 (1958).

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
9 июля 1960 г.

#### ON A RELAY CONTROL SYSTEM FOR AN UNSTABLE OBJECT

S. D. Kinyarin

An investigation of the dynamics of a relay system of the third order with an unstable object, is carried by the point transformation method. The author has examined the formation of a limiting cycle from the equilibrium state of the relay system and the merging of the limiting cycle with the integral surface.

## О ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИКИ ОДНОЙ РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ С НЕУСТОЙЧИВЫМ ОБЪЕКТОМ

С. Д. Киняпин

Методом точечных преобразований исследуется динамика релейной системы третьего порядка с неустойчивым объектом. Дается разбиение пространства параметров на области с качественно одинаковыми картинками разбиения фазового пространства и указываются области притяжения устойчивого предельного цикла и состояния равновесия

В настоящей статье методом точечных преобразований исследуется зависимость от параметров динамики релейной системы с неустойчивым объектом:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{T} [u + f(\psi)]; & \dot{v} &= u + \psi; \\ \dot{\psi} &= \alpha u + v - 2h\psi, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$f(\psi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi > 0 \text{ или если } \psi = 0 \text{ и } \dot{\psi} > 0 \\ -1 < f(\psi) \leq 1, & \text{если } \dot{\psi} = 0 \\ -1, & \text{если } \psi < 0 \text{ или если } \psi = 0 \text{ и } \dot{\psi} < 0 \end{cases}$$

Рассматривается поведение фазовых траекторий в окрестности бесконечно удаленной точки фазового пространства и определяются четыре области пространства параметров  $T, \alpha, h$  системы (1) с качественно одинаковыми картинками разбиения фазового пространства; в фазовом пространстве указываются также области притяжения устойчивого предельного цикла и состояния равновесия релейной системы в условиях переключения. Статья является продолжением работы [1], в которой показано, что исследование системы (1) сводится к исследованию точечного преобразования  $T$ :

$$\begin{aligned} v_0 &= \xi; \\ u_0 &= -\frac{\xi(e^{bT} - e^{-aT}) + N}{\Delta}; \\ u_1 &= \frac{\xi(e^{bT} - e^{-aT}) - [(b - \alpha)e^{-aT} + (a + \alpha)e^{bT} - (a + b)]}{\Delta e^{\alpha T}} + 1; \\ v_1 &= \frac{\xi F + \Phi}{\Delta}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\Delta = -\frac{T\alpha(b - \alpha)}{1 - T\alpha} e^{-aT} + \frac{Tb(a + \alpha)}{1 + Tb} e^{bT} + \frac{T(a + b)(T - \alpha)}{(1 + Tb)(1 - T\alpha)} e^{-\alpha T};$$

$$N = -\frac{b-a}{1-Ta} e^{-a\tau} - \frac{a+\alpha}{1+Tb} e^{b\tau} + \frac{T(a+b)(T-\alpha)}{(1+Tb)(1-Ta)} e^{-\tau/T} + a+b;$$

$$F = \frac{T(a+b)(T-\alpha)}{(1+Tb)(1-Ta)} e^{-\tau(b-a)} + \frac{Tb(a+\alpha)}{1+Tb} e^{-\tau(a+1/T)} - \frac{T\alpha(b-\alpha)}{1-Ta} e^{-\tau(b-1/T)};$$

$$\Phi = (a+\alpha)(b-\alpha) \left\{ \frac{T\alpha}{1-Ta} [e^{-a\tau} + e^{\tau(b-1/T)}] + \frac{Tb}{1+Tb} [e^{b\tau} + e^{-\tau(a+1/T)}] - \frac{T(a+b)}{(1+Tb)(1-Ta)} [e^{-\tau/T} + e^{-\tau(b-a)}] \right\};$$

$$a = \sqrt{1+h^2} + h; \quad ab=1; \quad a-b=2h.$$

### 1 ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ $T$ БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННЫХ ТОЧЕК ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

После замены  $v = 1/s$ ,  $u = \varphi/s$  напомним точечное преобразование  $T$  в виде:

$$s_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{z} = \tilde{w};$$

$$\varphi_0 = \frac{u_0}{v_0} = -\frac{(e^{b\tau} - e^{-a\tau}) + \tilde{w}N}{\Delta};$$

$$s_1 = \frac{1}{v_1} = -\frac{\tilde{w}\Delta}{F + \tilde{w}\Phi};$$

$$\varphi_1 = \frac{u_1}{v_1} = \frac{(e^{b\tau} - e^{-a\tau})e^{-\tau/T} + \tilde{w}\Psi}{F + \tilde{w}\Phi}.$$

Неподвижные точки точечного преобразования  $T$  бесконечно удаленных точек фазового пространства определяются из условий: 1)  $\tilde{w} = 0$  и, следовательно,  $s_0 = s_1 = 0$ ; 2)  $\varphi_0 = \varphi_1$ . Нетрудно видеть, что 1) и 2) сводятся к одному условию  $\Delta + Fe^{-\tau/T} = 0^*$ , которое записывается в виде:

$$\frac{(a+\alpha)(T-\alpha)}{(1+Tb)(1-Ta)} [e^{-\tau/T} + e^{-\tau(b-a+1/T)} - (e^{b\tau} - e^{-a\tau})] = 0. \quad (4)$$

В частном случае  $T < b$ ,  $T \neq \alpha$  ( $1/T = a + \nu$ ,  $\nu > 0$ ), поскольку

$$e^{-\tau/T} + e^{-\tau(b-a+1/T)} \Big|_{\tau=0} = (e^{b\tau} + e^{-a\tau}) \Big|_{\tau=0};$$

$$\{e^{-\tau/T} + e^{-\tau(b-a+1/T)}\}'_{\tau=0} = be^{b\tau} e^{-\nu\tau} - ae^{-a\tau} e^{-\nu\tau} +$$

$$+ \nu[e^{-\tau(b+\nu)} - e^{-\tau(a+\nu)}] \geq (e^{b\tau} + e^{-a\tau})'_{\tau=0} = be^{b\tau} - ae^{-a\tau}$$

(знак равенства имеет место для  $\tau = 0$ ), условие (4) выполняется только для  $\tau = 0$ . Полученный результат имеет место и в случае  $T \geq b$ .

\* К этому условию сводится существование неподвижных точек точечного преобразования  $T$  и при замене  $u=1/s'$ ,  $v=\varphi'/v'$

Следовательно, существует единственная неподвижная точка точечного преобразования  $T$  бесконечно удаленных точек фазового пространства с координатами  $s_0^* = 0$ ,  $\varphi_0^* = -\alpha$ , расположенная на прямой  $\alpha u + v = 0$ .

Для исследования неподвижной точки  $s_0^* = 0$ ,  $\varphi_0^* = -\sigma$  воспользуемся обобщением второго метода Ляпунова на точечные преобразования, данные в работе [2]. Разлагая в ряды по малым параметрам  $\omega$  и  $\tau$  правые части точечного преобразования (3), получим следующие формулы рассматриваемого точечного преобразования:

$$\begin{aligned} s_0 &= \tilde{\omega}; \\ s_1 &= -\tilde{\omega} \left( 1 + \frac{\tau}{\alpha} + \dots \right); \\ \varphi_0 &= \left( -\frac{1}{\alpha} \right) = \tau(a - b\tau - \tilde{\omega}c + \dots); \\ \varphi_1 &= \left( -\frac{1}{\alpha} \right) = -\tau(a + b\tau + \tilde{\omega}c + \dots), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$a = \frac{T - \sigma}{2T\sigma^2}, \quad b = \frac{(T - \alpha)(3 - h\alpha)}{12T\sigma^3}, \quad c = \frac{1}{2T}$$

и где многоточие означает члены более высокого порядка малости.

Рассмотрим квадратичную форму

$$I = \frac{\alpha}{2} s^2 + \sigma(3 - h\alpha) \varphi^2$$

В силу точечного преобразования (5)

$$\begin{aligned} I_1 - I_0 &= \frac{\alpha}{2} (s_1^2 - s_0^2) + \sigma(3 - h\alpha) (\varphi_1^2 - \varphi_0^2) = \\ &= \tau \left[ \tilde{\omega}^2 + \frac{(T - \alpha)^2 (3 - h\alpha)^2}{6T^2 \sigma^4} \tau^2 \right] + \dots \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Следовательно, неподвижная точка  $s_0^* = 0$ ,  $\varphi_0^* = -\alpha$  точечного преобразования  $T$  устойчива, если  $\alpha < 0$ , и неустойчива, если  $\sigma > 0$ . В случае  $\alpha = 0$  аналогичное исследование приводит к неустойчивости.

Уместно заметить, что если  $\dot{\psi} = 0$ ,  $\alpha u + v = 0$ , то решение системы (1) таково, что

1)  $\dot{\psi} = 0$  и, следовательно, изображающая точка все время остается в плоскости переключений и

2) изображающая точка двигается по прямой  $\alpha u + v = 0$  по закону  $u = u_0 e^{-t/\alpha}$  до тех пор, пока  $|f(\psi)| \leq 1$ .

## 2 РАЗБИЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ

В работе [1] были получены бифуркационные поверхности  $P$  и  $Q$ , которые разбивают пространство параметров  $T$ ,  $\alpha$ ,  $h$  на области с качественно одинаковыми картинами разбиения фазового пространства системы (1) (с точностью до многократных периодических режимов). Здесь осталось лишь дать общий вид разбиения пространства параметров  $T$ ,  $\alpha$ ,  $h$  (который для положительных  $T$  и  $h$  представлен на рис. 1) и сделать некоторые дополнительные замечания.

Все пространство параметров  $T, \alpha, h$  бифуркационными поверхностями  $P$  и  $Q$  разбивается только на четыре области I, II, III, IV. Более того, на основании доказательства единственности периодического движения (см. дополнение), а также результатов работы [3], в которой получено разбиение плоскости параметров  $T=0, \sigma, h$  на области с качественно одинаковыми картинками разбиения фазовой плоскости, можно заключить, что возможное разнообразие движений системы в этих областях невелико: в области I все траектории уходят в бес-

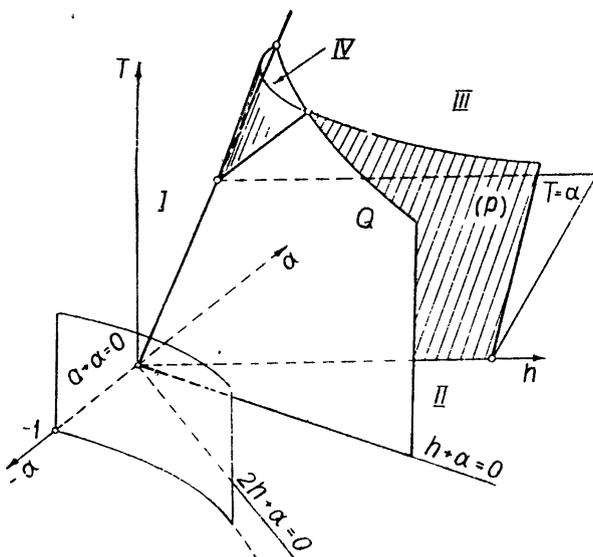


Рис. 1.

конечность; во II области часть траекторий уходит в бесконечность, оставшаяся часть стремится к единственному устойчивому предельному циклу; в III области наряду с траекториями, уходящими в бесконечность, часть из них стремится к устойчивому состоянию равновесия в условиях переключения; IV область отличается от области III наличием неустойчивого предельного цикла.

Области притяжения в фазовом пространстве устойчивого состояния равновесия в условиях переключения, когда параметры системы принадлежат области III, и устойчивого предельного цикла (рис. 2а\*) ограничены интегральной плоскостью (II) и поверхностями, состоящими, во-первых, из множества траекторий, которые, начинаясь на кривой  $\gamma$  в плоскости переключений  $\psi=0$ , идут в  $G^-$ , затем возвращаются на плоскость переключений  $\psi=0$  и образуют часть прямой  $P'$ , и, во-вторых, из множества траекторий, приходящих из бесконечности и образующих кривую  $\gamma'$  и другую часть  $P'$ . Уравнение кривой  $\gamma$  легко находится, если применить точечное преобразование  $T^{-1}$  к отрезку прямой (II). Для этого достаточно, воспользовавшись уравнением (II), из двух последних уравнений (2) выразить параметр  $\xi$  через  $z$  и подставить его в два первые уравнения (2).

Область притяжения устойчивого состояния равновесия в условиях переключения, когда параметры системы принадлежат области IV пространства параметров  $T, \alpha, h$ , в основном ограничена сепаратрисой

\* На пунктирные кривые рис 2, обозначенные буквой R, траектории приходят из бесконечности.

поверхностью, проходящей через неустойчивый предельный цикл (рис. 2б); а также поверхностью, состоящей из множества траекторий, приходящих из бесконечности на  $\gamma'$ . Заметим, что запас устойчивости состояния равновесия в последнем случае „меньше“, чем в предыдущем.

В заключение пользуюсь случаем выразить сердечную благодарность моему научному руководителю Ю. И. Неймарку. Считаю необходимым также отметить большую работу, проделанную Н. М. Станкевичем при проведении расчетов граничных поверхностей  $N_{+1}$  и  $N_0$  на дискретной машине ГИФТИ.

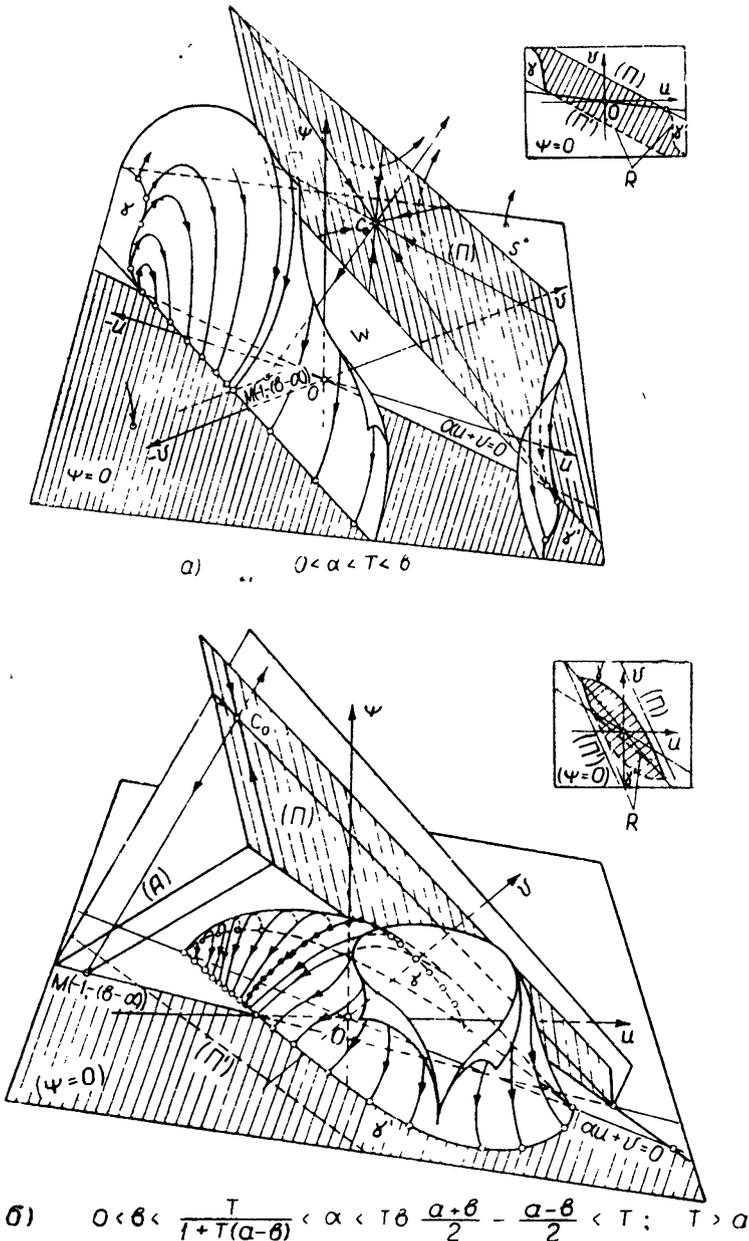


Рис. 2.

## ДОПОЛНЕНИЕ

1. Согласно работе [1],  $\tau$  является корнем уравнения, которое можно записать в виде  $I(\tau) = II(\tau)$ . При больших  $\tau$   $I(\tau) \rightarrow 0$ ,  $II(\tau) \rightarrow m$ . При малых  $\tau$

$$I(\tau) = \tau \left\{ 2 \left[ (a-b) + n \left( \frac{1}{T} - a \right) \right] - \tau \left( a + b + \frac{1}{T} \right) \times \right. \\ \times \left[ (a-b) + n \left( \frac{1}{T} - a \right) \right] + \tau^2 \left\{ (a-b) \left[ \frac{a^2 + 1 + b^2}{3} + \frac{a+b}{2T} + \frac{1}{2T^2} \right] + \right. \\ \left. \left. + n \left( \frac{1}{T} - a \right) \left[ \frac{1}{3} \left( a^2 + \frac{1}{T} + \frac{1}{T^2} \right) + \frac{b}{2} \left( a + \frac{1}{T} \right) + \frac{b^2}{2} \right] \right\} + \dots \right\}; \\ II(\tau) = \tau m \frac{1 + Tb}{T} \left\{ 2 - \tau \left( a + b + \frac{1}{T} \right) + \tau^2 \left[ \frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} \left( \frac{1}{T} + b \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{T} + b \right)^2 + \dots \right] \right\}$$

(где многоточия означают члены более высокого порядка малости). Отсюда

$$II(\tau) - I(\tau) = \quad (Д.1)$$

$$= \frac{\tau^3}{3T^2} \left\{ \sigma [1 + T(a-b)] - T \right\} + \dots$$

На рис. 3 даны графики  $I(\tau)$  и  $II(\tau)$  для случая  $m > 0$ ,  $II(\tau) - I(\tau) > 0$ . Аналогичные графики получаются и в остальных случаях. Напомним, что условие  $m > 0$  или  $\sigma > Tb(a + b)/2 - (a-b)/2$  соответствует случаю, когда область переходит

в область, и  $II(\tau) - I(\tau) > 0$  или  $\sigma > T/[1 + T(a-b)]$  соответствует случаю, когда состояние равновесия в условиях переключения устойчиво.

2. Пусть кривые  $I(\tau)$  и  $II(\tau)$  имеют точки касания; тогда

$$I(\tau) = II(\tau); \quad I'(\tau) = II'(\tau). \quad (Д.2)$$

Учитывая, что не может быть касания при больших  $\tau$ , и вводя замену переменных  $e^{-\tau T} = t$ , перепишем систему (Д.2) либо в виде:

$$t^{Tb} - t^{Ta} + t^{1+\tau Tb} - t^{1+Ta} + n \left| t^{Ta} - t + t^{T(a+b)} - t^{1+Tb} \right| - \\ - m [1 - t^{1+\tau Tb} + t^{Ta} - t^{1+Ta+Tb}] = 0; \quad (Д.3)$$

$$m(1 + Ta + Tb) t^{1+Ta+Tb} + nT(a+b) t^{T(a+b)} - (1 + Ta) t^{1+Ta} + \\ + (1 + Tb)(1 + m - n) t^{1+\tau Tb} - Ta(1 + m - n) t^{Ta} - nt + Tb t^{Tb} = 0,$$

либо в виде\*:

\* Второе уравнение (Д.3) равно  $t\varphi'(t)$ , где через  $\varphi(t)$  обозначено первое уравнение (Д.3), при  $t \neq 0$  равенство  $t\varphi'(t) = 0$  эквивалентно  $\varphi'(t) = 0$ .

$$t^{Ta} [mt^{1+Tb} + nt^{Tb} - t - d] + [dt^{1+Tb} - nt + t^{Tb} - m] = 0;$$

$$t^{Ta} [T(a+b)mt^{1+Tb} + (Ta + Tb - 1)nt^{Tb} - Tat + (1 - Ta)d] + (Д.3а)$$

$$+ [Tb dt^{1+Tb} + (Tb - 1)t^{Tb} + m] = 0,$$

где  $d = 1 + m - n$ . Если систему (Д.3а) рассматривать как систему с двумя неизвестными  $x, y$ , имеющую нетривиальные решения  $x = t^{Ta}$  и  $y = 1$ , то определитель этой системы должен тождественно равняться нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} mt^{1-Tb} + nt^{Tb} - t - d; & dt^{1+Tb} - nt + t^{Tb} - m \\ T(a+b)mt^{1+Tb} + n[Ta + Tb - 1]t^{Tb} - & Tb dt^{1+Tb} + \\ - Tat + (1 - Ta)d; & + (Tb - 1)t^{Tb} + m \end{vmatrix} = 0$$

или

$$t^{2Tb} (a_1 t^2 + a_2 t + a_3) + t^{Tb} [-a_3 t^2 + a_4 t - a_5] +$$

$$+ a_1 + a_2 t + a_5 t^2 = 0, \quad (Д.4)$$

где

$$a_2 = a_3 = Ta(m + dn) + m - dn = Ta(mn + d) + Tb(mn - d);$$

$$a_4 = -2(a_1 + a_3) = -T(a+b)[m^2 + n^2 + 1 + d^2] + 2Tb(1 + d^2) +$$

$$+ 2(m - n)(1 - n) = -2Ta(md + n);$$

$$a_5 = Tan.$$

Согласно (Д.4),

$$t^{Tb} = \frac{a_2 t^2 + a_2 + 2(a_1 + a_3)t \pm \sqrt{D}}{2[a_1 t^2 + a_2 t + a_5]}, \quad (Д.5)$$

где

$$D = (t^2 - 1)^2 T^2 (mn - d) \{ (a + b)^2 (mn - d) + 4d \} =$$

$$= \frac{(t^2 - 1)^2 16T^2 (a + \alpha) (b - \alpha) (T - \alpha) [(a - b) - (T - \alpha)]}{(a + b)^2 (1 + Tb)^2 (1 - Ta)^2}.$$

Разлагая числитель и знаменатель (Д.5) на множители и сокращая одинаковые выражения, перепишем (Д.5) в виде:

$$t^{Tb} = \frac{t + n'}{n't + 1}, \quad (Д.6)$$

где

$$n' = - \frac{\pm 2b \sqrt{(a+\alpha)(b-\alpha)(T-\alpha)[(a-b)-(T-\alpha)] + 2b(a+\alpha)(b-\alpha) - (a+b)f}}{(1 + Tb)g};$$

$$g = (a - b)(1 - Ta) - 2(T - \alpha); \quad f = (1 + Tb)(1 - Ta) + 2T(T - \alpha).$$

Аналогично выделяя в системе (Д.3) члены с  $t^{Tb}$ , получим уравнение для  $t^{Ta}$ :

$$t^{Ta} = \frac{t + n}{nt + 1}, \quad (Д.7)$$

где

$$n = \dots \left\{ \pm 2a \sqrt{(a + \alpha)(b - \sigma)(T - \alpha) [a - b - (T - \alpha)]} - \right. \\ \left. - 2a(a + \alpha)(b - \sigma) + (a + b)fg \right\} \frac{(1 - Ta)}{fg}.$$

(Можно показать, что равенства (Д.6), (Д.7) являются также достаточными условиями касания кривых I( $\tau$ ) и II( $\tau$ ).)

3. Исследуем уравнения

$$t^{1+n}(nt + 1) = t + n. \quad (\text{Д.8})$$

а) При  $|n| > 1$  (рис. 4а, б) решение существует только для  $t=1$  ( $\tau=0$ ).

б) При  $0 < n < 1$  для  $Ta \geq 1$  существует решение только тогда, когда  $t=1$  ( $\tau=0$ ). Случай  $Ta < 1$  ( $T < b$ ) рассмотрим подробнее.

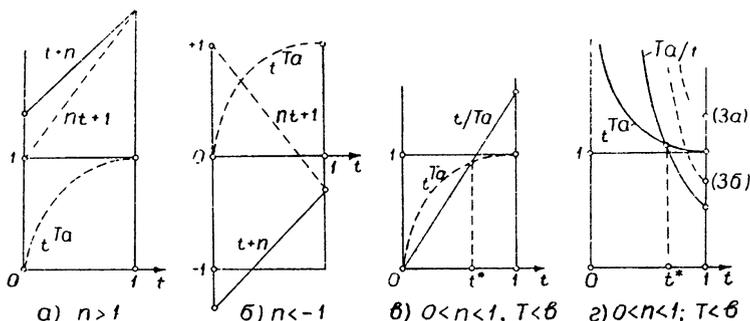


Рис. 4.

Запишем производные левой и правой части (Д.8)  $t^{1+n}[n(1 + Ta) + Ta/t]$  и  $1$  в виде  $n(1 + Ta) + Ta/t$  и  $(t^{1+n})^{-1}$  и построим их, воспользовавшись вспомогательными графиками  $t/Ta$  и  $t^{1+n}$  (рис. 4в, г). На рис. 4г изображены два случая в зависимости от величины  $n(1 + Ta) + Ta$ : при  $n(1 + Ta) + Ta > 1$  решение существует только для  $t=1$  ( $\tau=0$ ), а при  $n(1 + Ta) + Ta < 1$ , кроме решения при  $t=1$  ( $\tau=0$ ), имеется еще одно решение при  $0 < t < 1$  ( $\tau \neq 0$ ).

Случай в)  $0 > n > -1$  рассматривается аналогично и приводит к выводу, что решение с  $\tau \neq 0$  существует, если выполнены неравенства  $T > b$ ,  $0 > n > (1 - Ta)/(1 + Ta)$ . Согласно вышеизложенному, для уравнения (Д.7) существует решение с  $\tau \neq 0$ , если

$$T < b; \quad 0 < n < (1 - Ta)/(1 + Ta) \quad (\text{Д.9})$$

или

$$T > b; \quad (1 - Ta)/(1 + Ta) < n < 0. \quad (\text{Д.9а})$$

Аналогично для уравнения (Д.6) существует решение с  $\tau \neq 0$  только в том случае, если выполнены неравенства

$$T < a; \quad 0 < n' < (1 - Tb)/(1 + Tb) \quad (\text{Д.10})$$

или

$$T > a; \quad (1 - Tb)/(1 + Tb) < n' < 1. \quad (\text{Д.10а})$$

Поскольку  $Ta > Tb$ , а  $0 < t \leq 1$  и  $|n| < 1$ ,  $|n'| < 1$ , то должно выполняться еще одно неравенство

$$t^{1n} = \frac{t+n}{nt+1} < \frac{t+n'}{n't+1} = t^{1b} \quad (Д.11)$$

или

$$n' - n > 0.$$

В соответствии с (Д.9), (Д.10), (Д.11) возможны следующие случаи:

- А)  $T < b$ ;  $0 < n < (1-Ta)/(1+Ta)$ ;  $0 < n' < (1-Tb)/(1+Tb)$ ;  $n' > n$ ;
- Б)  $T > a$ ;  $(1-Ta)/(1+Ta) < n < 0$ ;  $(1-Tb)/(1+Tb) < n' < 0$ ;  $n' > n$ ;
- В)  $b < T < a$ ;  $(1-Ta)/(1+Ta) < n < 0$ ;  $0 < n' < (1-Tb)/(1+Tb)$ .

*Исследование случая А.* Обозначая  $\{(a+\sigma)(b-\sigma)(T-\sigma)[a-b-(T-\alpha)]\}^{1/2}$  через  $\pm D$  и заменяя  $T$  на  $(b-\varepsilon)$ , где  $0 < \varepsilon < b$ , перепишем второе и третье условие А) в виде:

$$0 < - \frac{\pm D - (a+\sigma)(b-\sigma) + \frac{b(a+b)}{2} f}{fg} < \frac{1}{2a(1+Ta)}; \quad (Д.12)$$

$$0 < - \frac{\pm D + (a+\sigma)(b-\sigma) - \frac{a(a+b)}{2} f}{g} < \frac{a-T}{2}. \quad (Д.13)$$

Условия

$$D^2 > \left\{ (a+\sigma)(b-\sigma) - \frac{b(a+b)}{2} \right\}^2;$$

$$D^2 > \left\{ (a+\sigma)(b-\sigma) - \frac{a(a+b)}{2} \right\}^2$$

совпадают и имеют вид:

$$(a+\sigma)(b-\sigma)f > \frac{(a+b)^2}{4} f^2. \quad (Д.14)$$

В зависимости от знака  $f$  неравенство (Д.14) разбивается на два

$$(a+\sigma)(b-\sigma) \left( \frac{a+b}{2} \right)^{-2} > f > 0; \quad (Д.14а)$$

$$(a+\sigma)(b-\sigma) \left( \frac{a+b}{2} \right)^{-2} < f < 0. \quad (Д.14б)$$

Графики функций  $(a+\sigma)(b-\sigma) \left[ \frac{a+b}{2} \right]^{-2}$  и  $f$  приведены на рис. 5, где значения  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_f$  равны соответственно

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} [b-a + a(a+b)(b-\varepsilon)] = b - \frac{a\varepsilon(a+b)}{2};$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} [b-a + b(a+b)(b-\varepsilon)]; \quad \alpha_f = \frac{2b^2 + \varepsilon(a-3b) + \varepsilon^2}{2(b-\varepsilon)}.$$

1. Пусть

$$(a + \alpha)(b - \sigma) \left( \frac{a+b}{2} \right)^{-2} > f > 0.$$

Знаки числителей неравенств (Д.12) и (Д.13) определяются знаком  $D$ . Поскольку из неравенства (Д.13) следует, что  $-\frac{D}{g} > 0$ , из неравенства (Д.12) следует, что  $f > 0$  и  $\alpha_2 < \sigma < \alpha_1$  (см. рис. 5). Для этого диапазона  $\alpha$  подкоренное выражение  $D$  больше нуля, а  $g < 0$ ; выбирая верхний знак у  $D$ , перепишем неравенство (Д.13) в виде:

$$D < \frac{a - b + \varepsilon}{2} (g) - \left[ (a + \sigma)(b - \sigma) - \frac{a(a+b)}{2} f \right] = \\ = (b - \alpha) [a - \alpha - \varepsilon a^2]. \quad (\text{Д.13a})$$

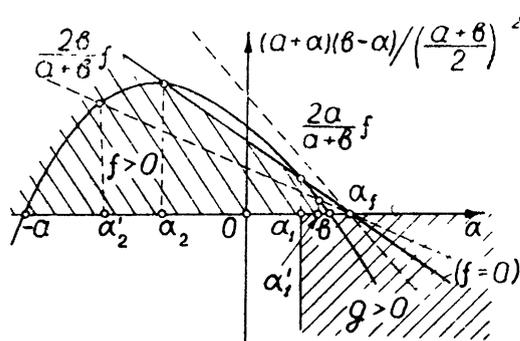


Рис. 5.

Однако  $(b - \alpha)[a - \sigma - \varepsilon a^2] > 0$ , так как  $(b - \alpha) > 0$  и  $|a - \sigma - \varepsilon a^2|_{\alpha=\alpha_1} = (a - b) \left[ 1 - \frac{\varepsilon a}{2} \right] > 0$ .

Поэтому, возводя в квадрат обе части неравенства (Д.13) и затем перенося все вправо, имеем:

$$2[2a - b - \varepsilon a(a - b)] \times \\ \times (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_T) > 0, \quad (\text{Д.13б})$$

где

$$\alpha_T = (b - \varepsilon) [1 + (a - b) \times \\ \times (b - \varepsilon)]^{-1}.$$

Сравнение величин  $\alpha_T$  и  $\alpha_1$  приводит к следующему:

$$\alpha_1 > \alpha_T, \text{ если } 0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon} = b^2/(a + b);$$

$$\alpha_1 < \alpha_T, \text{ если } \bar{\varepsilon} < \varepsilon < b.$$

На рис. 6 а,б представлены эти два случая (крестиками отмечены отрезки оси  $\alpha$ , где выполнено неравенство (Д.13а)). Поступая, как и выше, преобразуем неравенство (Д.12) к виду:

$$4a(b - \varepsilon) [1 + (a - b)(b - \varepsilon)] \alpha^3 - 2\sigma^2 \{ (b - \varepsilon) [\varepsilon^2(a^4 + a^2 - 2) - \\ - \varepsilon(10a - 6b) + 10 - 4b^2] + a^3\varepsilon^2 \} - \sigma \{ \varepsilon^4(1 - a^4) + \\ + \varepsilon^3 [-a^7 + 7a^3 - 6b + 8a] + \varepsilon^2 [2a^4 - 7a^2 + 13b^2 - 32] + \\ + \varepsilon [-12b^3 + 40b] + 4b^4 - 16b^2 \} + a(b - \varepsilon) \{ -4b(b - \varepsilon)^2 + \\ + \varepsilon^2 a^2(a - b) - \varepsilon^2 a(a + b)(b - \varepsilon) \} = 4a(b - \varepsilon) [1 + (a - b)(b - \varepsilon)] \times \\ \times (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_T)(\alpha - \alpha_f) < 0. \quad (\text{Д.12a})$$

Как и ранее, выделяются два случая, которые приведены на рис. 6 а,б.

Рассмотрим оставшееся неравенство  $n' > n$  или

$$D \left\{ f - a^2(1 + Tb)(1 - Ta) \right\} > a^2(1 + Tb)(1 - Ta) \left[ - (a + \sigma)(b - \alpha) + \right. \\ \left. + \frac{b(a+b)}{2} f \right] - f \left[ (a + \alpha)(b - \alpha) - \frac{a(a+b)}{2} f \right] = [\alpha - (b - \varepsilon)] W_2, \quad (\text{Д.15})$$

где

$$\Psi_2 = -2(b - \varepsilon) \tau^2 + \alpha [\varepsilon^2(1 - a^2) + \varepsilon(a^2 - 5b) + 4b^2] + \varepsilon^2(a^2 - b) + \varepsilon(a^2 - a^2 + 3b^2 - 1) - 2b^2$$

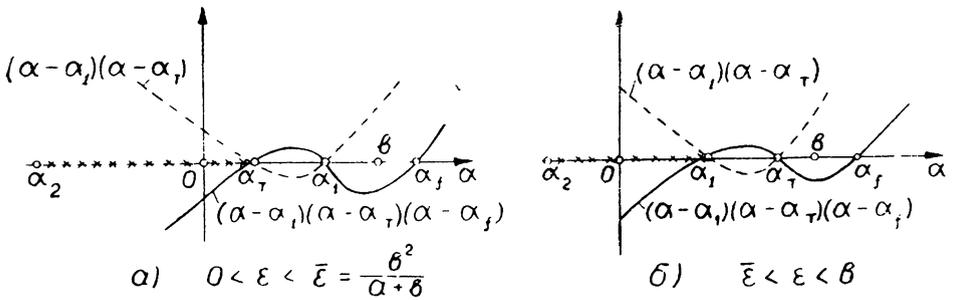


Рис. 6

В соответствии с неравенствами

а)  $f - a^2(1 + Tb)(1 - Ta) \Big|_{\alpha = \alpha_2} < 0;$

б)  $f - a^2(1 + Tb)(1 - Ta) \Big|_{\alpha = \alpha_1} = \begin{cases} > 0 & (0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon} = b^2/(a + b)); \\ < 0 & (\bar{\varepsilon} < \varepsilon < b) \end{cases};$

в)  $\Psi_2 \Big|_{\alpha = \alpha_1} < 0;$

г)  $\Psi_2 \Big|_{\alpha = \alpha_2} = \begin{cases} < 0 & (0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}); \\ > 0 & (\bar{\varepsilon} < \varepsilon < b); \end{cases};$

д)  $\Psi_2 \Big|_{\alpha = \alpha} = \begin{cases} > 0 & (0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}); \\ < 0 & (\bar{\varepsilon} < \varepsilon < b); \end{cases}$

( $\bar{\alpha}$  — корень уравнения  $f - a^2(1 + Tb)(1 - Ta) = 0$ );

е) дискриминант уравнения  $\Psi_2 = 0$  по  $\alpha$ :

$$\varepsilon a^2(a + b) \{ \varepsilon(a + b)(2b - \varepsilon)^2 + (a - b)[2\varepsilon^2(a - b) + 8(b - \varepsilon) + \varepsilon(a^2 + 3b^2)] \} > 0;$$

ж)  $\Psi_2 \Big|_{\alpha = b} > 0;$

з)  $\alpha_T = \begin{cases} < \bar{\alpha} & (0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon} < \bar{\varepsilon}); \\ > \bar{\alpha} & (\bar{\varepsilon} < \varepsilon < b); \end{cases};$

и)  $\Psi_2 \Big|_{\alpha = \alpha_T} = (a - b) \{ [ -(2b^3 - 2b^5) + \varepsilon(4a^4 - 2a^2 - 2 + 3b^2 - 5b^4) + \varepsilon^2(5a^3 + a - b + 4b^3) - \varepsilon^3b^2 ] (b - \varepsilon) + \varepsilon^3a^5 + \varepsilon^4a^4 \}$

могут представиться четыре случая, показанных на рис. 7 а, б, в, г. Возводя в квадрат обе части неравенства (Д.15) и перенося все члены влево, имеем:

$$\begin{aligned}
 & -8\alpha^4(b-\varepsilon)[1+a^2\varepsilon(a-b)] + 4\alpha^3\{\varepsilon^3(a^5+2a^3-2\varepsilon-b) + \\
 & + \varepsilon^2(3a^4-11a^2+12+3b^2) + \varepsilon(-3a^3+10a-8b-3b^3) + \\
 & + (-1+8b^2+b^4) + 4\alpha^2\{\varepsilon^4(a^5+a^3-a-b) + \varepsilon^3(2a^6-7a^2+8+6b^2) + \\
 & + \varepsilon^2(a^5-12a^3+21a-25b-12b^3) + \varepsilon(-a^4+9a^2-18+30b^2+10b^4) + \\
 & + 3b-12b^3-3b^5\} + \alpha\{\varepsilon^5a^2(a+b)^2(a-b) + \varepsilon^4(6a^6-7a^2+10+11b^5) + \\
 & + \varepsilon^3(5a^7-13a^5-20a^3+28a-11b-39b^3) + \varepsilon^2(-11a^4+60a^2-66) + \\
 & + 88b^2+61b^4\} + \varepsilon(8a^7-36+56b-88b^3-44b^5) - 12b^2+32b^4+12b^6 + \\
 & + \varepsilon^5a^2(a+b)^2|1+(a-b)^2| + \varepsilon^4(2a^7-4a^5-6a^3+a-6b-7b^3) + \\
 & + \varepsilon^3(a^8-5a^6+3a^4+16a^2-7+17b^2+19b^4) + \varepsilon^2(7a^4-24a+18b \\
 & -28b^3-25b^5) + \varepsilon(-4a^2+12-16b^2+24b^4+16b^6) + 4b^5(a^2-2-b^2) = \\
 & = -8(b-\varepsilon)[1+\varepsilon a^2(a-b)](\alpha-\sigma_1)(\alpha-\sigma_2)(\alpha-\sigma_3)(\alpha-\alpha_3) \leq 0,
 \end{aligned}
 \tag{Д.15а}$$

где

$$\alpha_3 = \frac{\varepsilon(-a^4+a^2-1)+b}{1+\varepsilon a^2(a-b)}$$

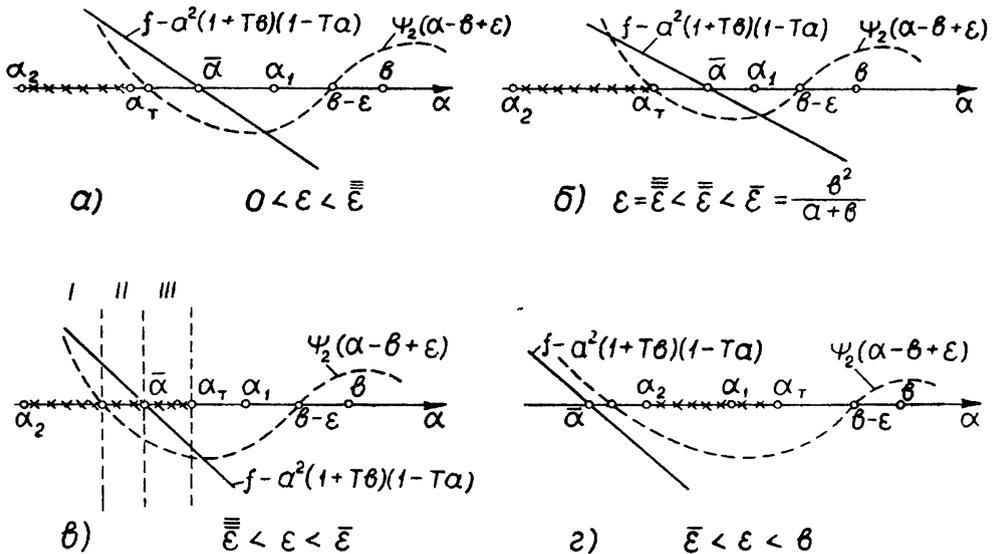


Рис. 7.

и знак неравенства выбирается так, чтобы перед возведением в квадрат обе части неравенства (Д.15) были больше нуля (верхний знак неравенства соответствует случаю, когда обе части неравенства (Д.15) положительны).

Учитывая, что

$$\kappa) \bar{\alpha} = \begin{cases} > \alpha_3 & (0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}) \\ < \alpha_3 & (\bar{\varepsilon} < \varepsilon < b) \end{cases};$$

$$\text{л) } \alpha_T = \begin{cases} < \alpha_3 & (0 < \varepsilon < \varepsilon^* = b - a/\sqrt{1+a^4} < \bar{\varepsilon}); \\ > \alpha_3 & (\varepsilon^* < \varepsilon < b) \end{cases};$$

$$\text{м) } \Psi_2|_{\sigma=\alpha_3} = \begin{cases} > 0 & (0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon} = b^2/(a+b), \\ < 0 & (\bar{\varepsilon} < \varepsilon < b) \end{cases},$$

рассмотрим три случая.

1)  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ . При этом  $\sigma_T < \alpha_3 < \bar{\alpha}$  (рис. 8а). Здесь могут представиться только две возможности: либо на всем интервале  $(\sigma_2, \sigma_3)$ , либо только на части  $(\sigma_2, \sigma_3)$  левая и правая части неравенства (Д.15) больше нуля. В обоих случаях неравенство (Д.15) выполняется на всем интервале (в случае, когда на части  $(\alpha_2, \alpha_3)$  правые и левые части неравенства (Д.15) имеют разные знаки, (Д.15) выполняется автоматически).

2)  $\varepsilon^* < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ ,  $\alpha_3 < \alpha_T < \alpha_1$  (рис. 8б). Весь отрезок  $(\alpha_2, \alpha_T)$  разбивается на три области, в каждой из которых неравенство (Д.15) выполняется.

3)  $\bar{\varepsilon} < \varepsilon < b$  (рис. 8в). Неравенство (Д.15) выполняется на участке  $\alpha_2 < \alpha < \alpha_1$ .

2. Пусть

$$f > 0, \quad f > (a + \alpha)(b - \alpha) \left( \frac{a + b}{2} \right)^{-2}.$$

Знаки неравенств (Д.12), (Д.13) определяются знаками выражений

$$(a + \alpha)(b - \alpha) - \frac{a(a + b)}{2} f, \quad (a + \alpha)(b - \alpha) - \frac{b(a + b)}{2} f$$

или

$$(a + \alpha)(b - \alpha) \left( \frac{a + b}{2} \right)^{-2} - \frac{2a}{a + b} f, \quad (a + \alpha)(b - \alpha) \left( \frac{a + b}{2} \right)^{-2} - \frac{2b}{a + b} f,$$

графики которых представлены на рис. 5. Поскольку дискриминант квадратного уравнения переменной  $\alpha$

$$(a + \alpha)(b - \alpha) - \frac{a(a + b)}{2} f = 0$$

меньше нуля, то

$$(a + \alpha)(b - \alpha) - \frac{a(a + b)}{2} f < 0,$$

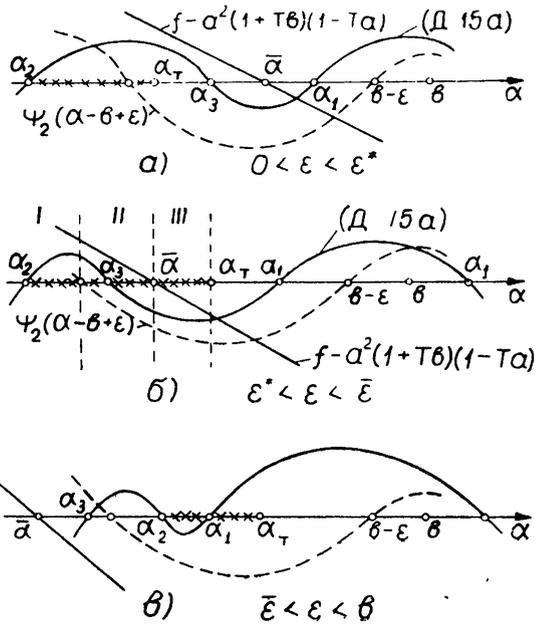


Рис. 8.

и из неравенства (Д.13) ясно, что  $g > 0$  и  $\sigma > \alpha_1$ . Поэтому из неравенства (Д.12) следует:

$$(a + \alpha)(b - \sigma) - \frac{b(a + b)}{2} f < 0,$$

т. е.  $\alpha \in [\alpha'_2, \alpha'_1]$ . Замечая, кроме того, что подкоренное выражение  $D$  меньше нуля, если  $\alpha \in [b - \varepsilon, \alpha'_1]$ , и что  $b - \varepsilon < \alpha'_1$ , приходим к выводу, что неравенства (Д.12) и (Д.13) могут быть выполнены лишь для  $\alpha \in [\sigma_1, b - \varepsilon]$ . Неравенство (Д.13) при этом принимает следующий вид:

$$D > (b - \sigma) |a - \alpha - \varepsilon a^2|.$$

Выбирая верхний знак и поступая как при рассмотрении случая 1, приходим к неравенству, обратному (Д.13), которое выполняется только в случае  $\varepsilon < \varepsilon < b$  для  $\sigma_1 < \alpha < \sigma_T$ . Аналогично рассматривая как выполнение неравенств (Д.12) и  $n' > n$  второго случая, так и оставшиеся случаи Б и В, приходим к окончательному выводу, что касания кривых I( $\tau$ ) и II( $\tau$ ) возможны, может быть, только в области пространства параметров  $T, \tau, h$ , заключенной между двумя бифуркационными поверхностями  $P$  и  $Q$ ; на первой из них меняется устойчивость состояния равновесия в условиях переключения, а на второй меняется характер преобразования области в область.

Проведенные расчеты кривых  $N_{\tau+1}$  и  $N_\sigma$  на дискретной машине ГИФТИ в рассматриваемой области пространства параметров  $T, \alpha, h$ : 1) для  $0,5 \leq \tau \leq 2$  с шагом  $\Delta\tau = 0,5$  и  $2 \leq \tau \leq 10$  с шагом  $\Delta\tau = 1,0$ ; 2) для  $0,125 \leq T \leq 1$  с шагом  $\Delta T = 0,125$  и для  $T = 1,5, 3, 4, 5, 10, 25, 50, 100$ ; 3) для  $0,125 \leq h \leq 10$  с шагом  $\Delta h = 0,125$  при  $h \leq 1$  и  $\Delta h = 1$  при  $h > 1$  показали, что с точностью не менее, чем  $2^{-2}$ , кривых  $N_{\tau+1}$  и  $N_\sigma$  в этих областях нет.

В областях II и IV не может быть и кривой  $N_{-1}$ , поскольку не выполнено условие (17) [1]. На основании вышеизложенного приходим к выводу, что в исследованной области пространства параметров  $T, \alpha, h$  с указанной точностью не может быть бифуркаций ненулевых неподвижных точек точечного преобразования  $T$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 С. Д. Киняпин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 135 (1961).
- 2 Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 41 (1958); 1, 2, 95 (1958); 1, 5—6, 146 (1958)
- 3 С. Д. Киняпин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 88 (1958).

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
9 июля 1960 г.

#### ON THE DEPENDENCE UPON PARAMETERS OF THE DYNAMICS OF A RELAY CONTROL SYSTEM WITH AN UNSTABLE ELEMENT

S. D. Kinyapin

An investigation of the dynamics of a third order relay system with an unstable element is carried out by the point transformation method. The parameters space is divided into domain according to qualitatively identical trajectory pictures in the phase space. The domains of attraction of the stable limiting cycle as well as of the state of equilibrium have been stated

## ПРИБОР ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ И ДИАГНОСТИКИ НАРУШЕНИЙ РИТМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СЕРДЦА

М. Л. Цетлин, Ю. С. Горохов, А. П. Матусова, В. А. Мельникова,  
Т. М. Таранович, В. М. Шабашов

Описывается принцип действия прибора для автоматической регистрации и диагностики нарушений ритмической деятельности сердца. Прибор представляет собой логическое устройство, включающее в себя элементы электронных цифровых машин. Исходными данными для прибора являются длины интервалов времени между *R*-зубцами электрокардиограммы. Длительность этих интервалов сравнивается со средней за *t* секунд (нормальной) длительностью. В результате сравнения каждому интервалу присписывается одна из трех букв: «К» (короткий), «Д» (длинный), «Н» (нормальный), которые затем объединяются в «слова» «Слова», соответствующие тем или иным нарушениям ритмики, объединяются в «диагнозы», которые автоматически регистрируются прибором. Обнаруженные нарушения в ритмической деятельности сердца могут служить целям диагностики и изучения влияния на организм больного различных химических и физических факторов.

Анализ состояния ритмической деятельности сердца играет большую роль в клинической медицине. Правильное осуществление основной насосной функции сердца возможно только при сохранении правильного ритма его работы. Здоровое сердце сокращается через приблизительно равные промежутки времени. Это осуществляется благодаря наличию системы возбуждения, дающей распространяющиеся по всем отделам сердца импульсы, которые обуславливают правильную последовательность работы отделов сердца (предсердий, желудочков).

Наиболее полные данные о ритмической деятельности сердца получены с помощью прибора, регистрирующего изменение биопотенциалов сердца в виде электрокардиограммы.

Нормальная электрокардиограмма (рис. 1) отражает развитие потенциала в предсердиях (зубец *P*), характеризует его задержку в предсердно-желудочковом узле (интервал *PQ*), деполяризацию желудочков (*QRS*-комплекс), затем реполяризацию желудочков (*ST*-комплекс). Электрокардиограмма позволяет установить характер нарушения ритмической деятельности сердца и место его возникновения. Различают появление внеочередных сокращений — экстрасистолия (рис. 2а), нарушение распространения импульсов — блокада сердца (рис. 2б), полное нарушение ритма предсердий — мерцательная аритмия и многое другое. При нарушениях нормальной работы сердца на электрокардиограмме меняются интервалы между комплексами, а также между отдельными частями комплексов, и форма зубцов.

Вместе с тем, нарушение ритма сердца (аритмия) нередко возникает внезапно и бывает кратковременным. В этом случае больной мо-

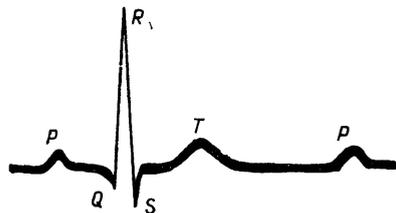


Рис. 1. Схема нормальной электрокардиограммы.

жет не ощутить нарушений ритма, и если при этом врач не установит их, то принятие своевременных лечебных мер окажется невозможным. Для выявления всех нарушений сердечного ритма необходима непрерывная длительная регистрация работы сердца. Естественно, что врач, подсчитывая пульс, фактически учитывает ритм в течение коротких, произвольно взятых интервалов времени, и на основании таких наблю-

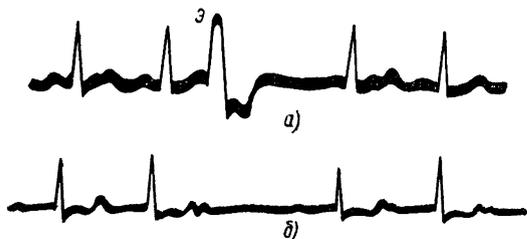


Рис. 2. а) Желудочковая экстрасистола; б) частичная атриоventрикулярная блокада

дений. Иногда без достаточных оснований, устанавливает характер нарушений ритма сердца. Длительная непрерывная запись электрокардиограммы требует высоких материальных затрат и весьма сложна для последующей обработки. В связи с этим возникает проблема создания прибора, позволяющего производить длительные непрерывные наблюдения за работой сердца и обеспечивающего обработку результатов наблюдений. Ниже приводится описание принципа работы и устройства прибора, отвечающего таким требованиям.

Принцип работы прибора состоит в следующем. Последовательно и непрерывно во времени просматриваются интервалы между соседними *R*-зубцами электрокардиограммы. Каждый из этих интервалов сравнивается с так называемым нормальным интервалом. Нормальным интервалом для данного больного в данный момент времени является интервал, полученный усреднением интервалов между *R*-зубцами электрокардиограммы за большое время (порядка 1÷2 минут). Величина нормального интервала, естественно, меняется с медленными изменениями ритма при смене нагрузки на сердце (сон, принятие пищи и другое) и не меняется при резких и кратковременных (меньших времени усреднения) нарушениях нормального ритма сердца.

При нормальной работе сердца отклонения рассматриваемых промежутков от среднего составляют не более 20% величины последнего. Эти небольшие отклонения от нормы могут быть обусловлены различными факторами (например, влиянием фаз дыхания) и представляют собой нормальное явление у большинства людей. Отклонения от нормы, превышающие 25%, считаются существенными и регистрируются прибором как ненормальные.

Если сравниваемый промежуток короче нормального на величину, превышающую 25% длительности последнего, то он обозначается буквой „К“ (короткий). Если отклонение измеряемого интервала от нормы менее 25%, он обозначается буквой „Н“ (нормальный). И, наконец, в том случае, когда измеряемый интервал длиннее нормального на величину, превышающую 25%, он обозначается буквой „Д“ (длинный).

Далее из букв составляются „слова“, по характеру и частоте появления которых врач может точно определить вид аритмии. Принципиально количество букв в „слове“ ничем не ограничено, но большинство известных видов аритмии можно, по-видимому, установить, рассматривая 2÷3 интервала. Поэтому, а также из соображений компактности прибора, количество букв в „слове“ выбрано равным трем.

„Слова“, соответствующие одним и тем же видам аритмии, объединяются в „диагнозы“, которые автоматически регистрируются прибором.

Возможны всего 27 различных „слов“ из букв К, Н, Д, которые были объединены в „диагнозы“ следующим образом:

- |         |   |
|---------|---|
| 1. ННН  | — нормальный режим;   |
| 2. ННК  | } — экстрасистолы без компенсаторной паузы<br>(без удлинения следующего интервала); |
| 3. НКН  |   |
| 4. КНН  |   |
| 5. ДДД  | } — блокады сердца;   |
| 6. ДДН  |   |
| 7. НДД  |   |
| 8. ДНН  |   |
| 9. ННД  |   |
| 10. НДН |   |
| 11. ДНД | } — парные экстрасистолы;   |
| 12. НКК |   |
| 13. ККН |   |
| 14. КНК |   |
| 15. НКД | } — экстрасистолы с компенсаторной паузой;  |
| 16. НДК |   |
| 17. КДН |   |
| 18. КДК |   |
| 19. ДНК |   |
| 20. ДКН |   |
| 21. ККД | } — парные экстрасистолы с компенсаторной паузой;                                   |
| 22. ДКК |   |
| 23. КНД |   |
| 24. КДД | } — экстрасистолы, после которых появляются блоки;                                  |
| 25. ДКД |   |
| 26. ДДК |   |
| 27. ККК | — пароксизмальная тахикардия  |

Увеличение числа выходов может увеличить точность диагноза. Заметим, однако, что и тогда прибор не сможет регистрировать всех возможных нарушений ритма (например, периоды Венкебаха—Самойлова). В этих случаях диагноз, тем не менее, может быть поставлен путем анализа ряда последовательно повторяющихся частых слов-диагнозов.

Прибор состоит из следующих основных узлов: а) датчика биопотенциалов сердечной мышцы, б) усилителя, в) формирователя, г) триггерного кольца, д) пульсотакметра, е) двух генераторов опорных импульсов с электронной регулировкой длительности последних, ж) запоминающего устройства, з) дешифратора, и) регистрирующего устройства.

Блок-схема прибора приведена на рис. 3.

Датчиками биопотенциалов служат два посеребренных латунных электрода, накладываемых по методам, принятым в электрокардиографии [1-3]. Для более устойчивой работы прибора на пациента накладывается еще один такой же заземляющий электрод. Сигналы с датчиков поступают на вход усилителя. Конструкция усилителя [5] биопотенциалов обеспечивает надежную работу прибора в обычных клинических условиях без экранировки больного. Усилитель хорошо

выделяет  $R$ -зубец электрокардиограммы и имеет малую чувствительность к другим фазам электрокардиографического цикла. Для устранения помех с частотой силовой сети два первые его каскада собраны по дифференциальной схеме. С этой же целью после второго каскада поставлен двойной  $T$ -образный фильтр, настроенный на частоту 50  $\text{гц}$

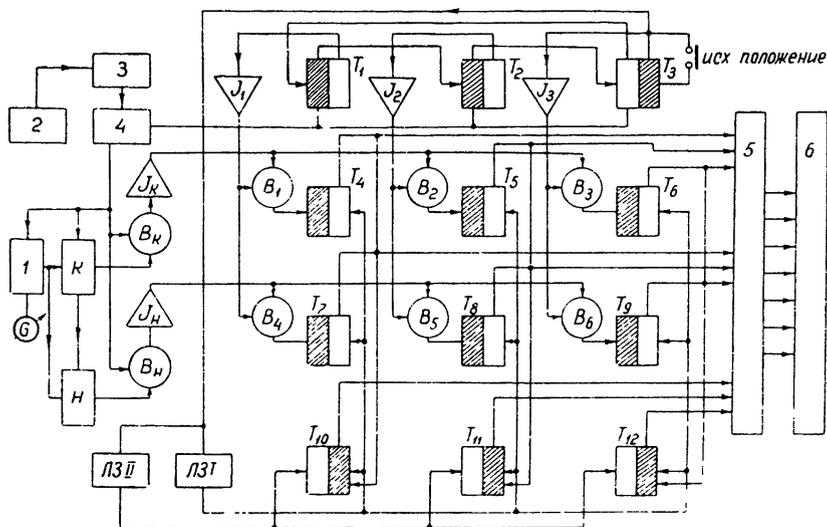


Рис. 3 Блок-схема прибора: 1—пульсоахметр, 2—датчик, 3—усилитель, 4—формирователь, 5—дешифратор, 6—регистрирующее устройство.

Для уменьшения влияния мускульных потенциалов и других фаз электрокардиографического цикла последний каскад усиления представляет собой избирательный усилитель, настроенный на основную частоту спектрального состава  $R$ -зубца (около 10  $\text{гц}$ ).

Выходные импульсы положительной полярности (рис. 4а) подаются на вход формирующего устройства [4.6.7]. Формирующим устройством является обычный ждущий мультивибратор с положительной сеткой и катодной связью, с анодов которого снимаются импульсы положительной (рис. 4б) и отрицательной (рис. 4в) полярности длительностью 150  $\text{мсек}$ . Импульсы отрицательной полярности, полученные при дифференцировании переднего фронта отрицательных сформированных импульсов, подаются на вход триггерного кольца (рис. 4г).

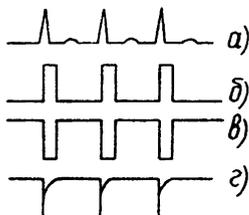


Рис. 4. а) Импульсы на выходе усилителя, б) импульсы положительной полярности с одного из анодов формирувателя; в) импульсы отрицательной полярности с другого анода формирувателя, г) импульсы, подаваемые на вход триггерного кольца.

Триггерное кольцо (пересчетная схема) [4] представляет собой цепочку триггеров  $T_1, T_2, T_3$ ; левый анод каждого триггера связан с управляющей сеткой левого триода следующей ячейки, а левый анод последней ячейки соединен с левой сеткой первой. В исходном положении левые триоды всех ячеек, за исключением последней, находятся в проводящем состоянии.

Положительные прямоугольные импульсы с формирователя поступают на пульсотаксометр [9], представляющий собой пассивную интегрирующую цепочку с постоянной времени около 1,5 мин. Выходное напряжение пульсотаксометра следит лишь за медленными изменениями частоты сердечных сокращений, не реагируя на кратковременные сбои в работе сердца. Гальванометр на выходе пульсотаксометра показывает среднее число сокращений в минуту. Выходное напряжение пульсотаксометра управляет работой двух ждущих мультивибраторов „К“ и „Н“ с электронной регулировкой длительности выходного импульса, выдающих опорные импульсы.

Схема такого мультивибратора [8] отличается от схемы обычного мультивибратора с катодной связью наличием катодного повторителя и управляющей лампы. Регулирующее напряжение, подаваемое на сетку управляющей лампы с пульсотаксометра, изменяет в широких пределах длительность выходного импульса.

Запуск мультивибратора „К“ осуществляется биполярными импульсами, полученными при дифференцировании положительных импульсов формирователя. Длительность выдаваемого им опорного импульса  $T_K$  меньше длительности нормального интервала  $T$  (среднего за 1,5 мин) на величину  $\delta + \tau$ , т. е.

$$T_K = T - (\delta + \tau),$$

где  $\delta$  составляет 25% от длительности нормального интервала, а  $\tau = 150$  мсек представляет собой временной интервал между биполярными управляющими импульсами. Очевидно, что  $T_K$  и  $\delta$  меняются при изменении выходного напряжения пульсотаксометра.

Фронтами опорного импульса  $T_K$  управляется ждущий мультивибратор „Н“. Длительность выдаваемого им опорного импульса  $T_H$  равна  $2\delta$  и составляет 50% длительности нормального интервала  $T$ , т. е.

$$T_H = 2\delta = 0,5 T.$$

Опорные импульсы  $T_K$  и  $T_H$  подаются соответственно на входы клапанов  $B_K$  и  $B_H$ . На вторые входы этих клапанов поступают биполярные управляющие импульсы. Если измеряемый промежуток времени короткий, то активизируется выход клапана  $B_K$ . При нормальном промежутке между  $R$ -зубцами электрокардиограммы (и, следовательно, между управляющими импульсами) активизируется выход клапана  $B_H$ . В случае длинного промежутка ни один из выходов не активизируется.

Для пояснения работы этой части схемы рассмотрим все три случая.

1. Измеряемый промежуток является коротким, т. е. его длительность меньше  $0,75 T$  (рис. 5).

Первым из биполярных импульсов (положительным) мультивибратор „К“ с небольшой задержкой (выполненной на  $RC$ -цепях) ставится в исходное положение независимо от того, в каком состоянии перед этим он находился. Через время  $\tau$  на его входе появляется отрицательный импульс, возбуждающий мультивибратор. При этом передним фронтом выдаваемого им опорного импульса „К“ мультивибратор „Н“ ставится в исходное положение (он возбужден, если предшествующий промежуток был нормальным или коротким).

На входе клапана  $B_K$  появляется высокий потенциал (вход активизирован), который держится время  $t_K$ . Если измеряемый промежуток короткий, то положительный управляющий импульс совпадает по времени с опорным импульсом  $T_K$  на входе клапана  $B_K$  и на его выходе появляется сигнал совпадения, означающий появление буквы „К“.

Затем мультивибратор „К“ ставится принудительно в исходное положение, а мультивибратор „Н“ на время  $\tau$  активизируется.

2. Измеряемый промежуток является нормальным (рис. 6).

Отрицательным управляющим импульсом мультивибратор „К“ активизируется и выдает импульс длительностью  $T_K$ , после чего самостоятельно возвращается в исходное положение, а мультивибратор „Н“ возбуждается (активизируется вход клапана  $B_H$ ). Если измеряемый промежуток отличается от нормального не более, чем на 25%, то следующий положительный импульс совпадает по времени с опорным импульсом  $T_H$  и на выходе клапана  $B_H$  появится сигнал совпадения, означающий появление буквы „Н“.

3. Наконец, рассмотрим работу схемы при появлении длинного промежутка, длительность которого больше величины  $T + \delta$  (рис. 7).

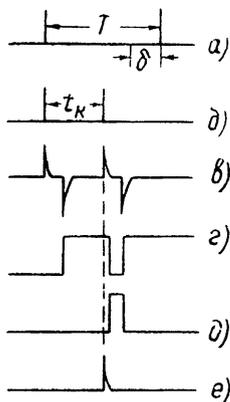


Рис. 5.

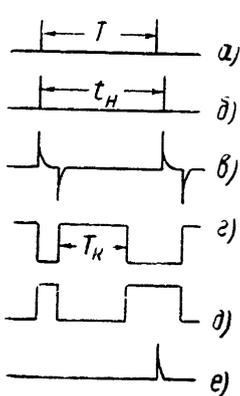


Рис. 6.

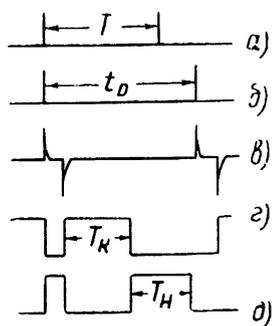


Рис. 7.

Рис. 5. а) Интервал нормальной длительности; б) короткий интервал; в) биполярные импульсы с формирователя, поступающие на вход ждущего мультивибратора „К“; г) напряжение на выходе ждущего мультивибратора „К“; д) напряжение на выходе ждущего мультивибратора „Н“; е) импульс на выходе клапана  $B_K$ .

Рис. 6. а, б) Интервалы нормальной длительности; в) биполярные импульсы с формирователя, поступающие на вход ждущего мультивибратора „К“; г) напряжение на выходе ждущего мультивибратора „К“; д) напряжение на выходе ждущего мультивибратора „Н“; е) импульс на выходе клапана  $B_H$ .

Рис. 7. а) Интервал нормальной длительности; б) длинный интервал; в) биполярные импульсы с формирователя, поступающие на вход ждущего мультивибратора „К“; д) напряжение на выходе ждущего мультивибратора „Н“.

В этом случае схема работает так же, как и в предыдущем случае, но мультивибратор „Н“ через время  $T_H$  возвращается самостоятельно в исходное положение. Положительный управляющий импульс не совпадает по времени с опорными импульсами  $T_K$  и  $T_H$  и на выходах клапанов  $B_K$  и  $B_H$  не появляется сигнала совпадения, что означает появление длинного промежутка.

Далее инвертированные и усиленные сигналы\* с клапанов  $B_K$  и  $B_H$  поступают соответственно на две тройки клапанов  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ . На другие входы клапанов подаются после инвертирования и усиления дифференцированные перепады напряжений с ячеек триггерного кольца. Сигналы с выходов клапанов подаются в запоминающее устройство.

Перед началом работы прибора кнопкой „исходное положение“ триггер  $T_3$  триггерного кольца ставится в положение „1“ (проводит

\* Усилители-инверторы на блок-схеме обозначены буквой  $J$

правый триод), триггеры  $T_1$  и  $T_2$  — в положение „0“ (проводит левый триод). При появлении первого импульса на входе триггерного кольца триггер  $T_3$  ставится в положение „0“, в это время триггер  $T_1$  ставится в положение „1“. При этом с ячейки  $T_3$  снимается импульс положительной полярности, который запускает два кипп-реле задержек ЛЗІ и ЛЗІІ, ставящих ячейки запоминающего устройства в исходное положение. Исходное положение ячеек памяти таково: ячейки  $T_1$ ,  $T_5$ ,  $T_6$ , предназначенные для хранения буквы „К“, и ячейки  $T_7$ ,  $T_8$ ,  $T_9$ , предназначенные для хранения буквы „Н“, находятся в положении „0“; ячейки  $T_{10}$ ,  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ , служащие для хранения буквы „Д“, находятся в положении „1“, т. е. в запоминающем устройстве принудительно записаны три буквы „Д“.

С приходом второго импульса  $T_1$  ставится в положение „0“, в результате чего вырабатывается отрицательный импульс, поступающий на клапаны  $B_1$  и  $B_4$ . В зависимости от длины измеряемого промежутка активизируется выход клапана  $B_1$  (короткий промежуток) или  $B_4$  (нормальный промежуток). Выходными импульсами клапанов  $B_1$  или  $B_4$  триггеры  $T_4$  или  $T_7$  ставятся в положение „1“ и хранят соответствующую букву „К“ или „Н“. При этом триггеры  $T_4$ ,  $T_7$  и  $T_{10}$  связаны между собой так, что при постановке триггеров  $T_4$  или  $T_7$  в положение „1“ ячейка  $T_{10}$  ставится в положение „0“, т. е. стирается записанная там буква „Д“. В случае длинного промежутка на выходах клапанов  $B_1$  и  $B_4$  нет сигналов совпадения и ячейка  $T_{10}$  продолжает хранить записанную в нее букву „Д“, что соответствует длительности измеряемого промежутка.

С приходом третьего импульса триггер  $T_2$  ставится в положение „0“, а триггер  $T_3$  — в положение „1“; при этом ячейки запоминающего устройства  $T_5$ ,  $T_8$ ,  $T_{11}$  запоминают букву, соответствующую длительности промежутка между вторым и третьим импульсами. При действии четвертого импульса триггер  $T_3$  ставится опять в положение „0“, выдавая на входы клапанов  $B_3$  и  $B_6$  импульс; триггеры  $T_6$ ,  $T_9$ ,  $T_{12}$  запоминают соответствующую букву.

Таким образом, сразу же после прихода четвертого импульса в памяти прибора образуется слово из трех букв. В этот же момент, как и при действии первого импульса, запускаются кипп-реле задержек ЛЗІ и ЛЗІІ. Задним фронтом импульса длительностью 50 мсек, снимаемого с ЛЗІ, все ячейки запоминающего устройства ставятся в положение „0“ (сброс). На входные шины дешифратора при этом поступают одновременно три импульса, соответствующие „слову“, находящемуся в запоминающем устройстве. Задним фронтом импульса длительностью 100 мсек (т. е. через 50 мсек после сброса), снимаемого с ЛЗІІ, ячейки  $T_{10}$ ,  $T_{11}$ ,  $T_{12}$  принудительно ставятся в положение „1“ — в запоминающее устройство заносится буква „Д“. Пятый импульс действует так же, как второй, шестой — как третий, и так далее.

В зависимости от того, на каких входных шинах дешифратора при действии сбросового импульса появились сигналы, активизируется тот или иной выход, соответствующий хранившемуся в памяти прибора „слову“. „Слова“, соответствующие определенному виду аритмии, объединяются в „диагнозы“, которые автоматически регистрируются прибором. В качестве регистрирующего устройства могут быть использованы электромеханические счетчики, записывающие приборы с лентопротяжным механизмом и т. д.

Описываемый прибор был изготовлен в черновом варианте и прошел лабораторные испытания, показав хорошие результаты.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Л. И. Фогельсон, Основы клинической электрокардиографии, М, 1957.
- 2 E. Lepeschkin, Das Elektrokardiogramm, Leipzig, 1959.
- 3 K. Zucherman, Grundriß und atlas der Elektrokardiografie. Leipzig, 1959.
- 4 А. М. Бонч-Бруевич, Применение электронных ламп в экспериментальной физике, Гостехиздат, М, 1956
5. Electronic Engeneering, **31**, 268 (1959).
- 6 Н. Т. Петрович и А. В. Козырев, Генерирование и преобразование электрических импульсов, изд Сов радио, М, 1954.
- 7 Л. А. Меерович, Л. Г. Зеличенко, Импульсная техника, изд Сов радио, М, 1954
- 8 А. Ф. Иванов, М. И. Цетлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 133 (1959).
- 9 Б. Л. Кривницкий, Импульсные схемы и устройства, изд. Сов радио, М, 1955

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
6 сентября 1960 г

### AN APPARATUS FOR REGISTERING AND DIAGNOSING DISORDERS OF THE RHYTHMIC FUNCTION OF THE HEART

*M. L. Zetlin, V. S. Gorokhov, A. P. Matusova, V. A. Melnikova,  
I. M. Tarantovitch, V. M. Shabashov*

A description is given of the operating principle of an apparatus for the automatic recording and diagnosis of disorders of the rhythmic function of the heart. The apparatus is a logical device utilizing electronic digital computers elements. The initial data for the apparatus are the lengths of the time intervals between the electrocardiogram peales ( $R$ ). The length of these intervals is compared with the mean (normal) length averaged over  $t$  seconds. As a result of the comparison, each interval is assigned by one of three letters: „S“ (short), „L“ (long), „N“ (normal) which are then assembled in „words“ The „words“ corresponding to this or that rhythmic disorder are combined in „diagnoses“ recorded automatically by the apparatus. The disorders of the rhythmic function of the heart thus detected may serve for the purposes of diagnosing and of studying the influence on the patient's organism of vorious chemical and physical factors.

## ПРОШИВКА КООРДИНАТНОЙ МАТРИЦЫ ЗАПОМИНАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА НА МАГНИТНЫХ СЕРДЕЧНИКАХ, РАБОТАЮЩЕЙ ПО ПРИНЦИПУ МНОГОКРАТНОГО СОВПАДЕНИЯ ТОКОВ

Ю. Л. Кетков

Описывается новая интерпретация прошивки координатной матрицы, состоящей из  $n \times n$  сердечников и работающей по принципу  $P$ -кратного ( $P > 2$ ) совпадения токов. Приводится способ построения такой прошивки для  $P = c + 1$ , где  $c$ —наименьший простой множитель числа  $n$ , отличный от 1.

Матрица, работающая по принципу  $P$ -кратного совпадения токов [1,2], прошивается  $P$  группами по  $n$  проводов в каждой группе, причем: 1) каждый провод прошивает  $n$  сердечников; 2) ни один сердечник не прошивается двумя проводами из одной и той же группы; 3) ни одна пара проводов разных групп не пересекается более, чем в одном сердечнике; 4) провода одной из групп прошивают матрицу по строкам, провода другой—по столбцам. В такой матрице ток в обмотках неопрасиваемых сердечников не превосходит  $I/P$  ( $I$ —ток, необходимый для перемагничивания одного сердечника). В случае  $P = n + 1$  влияние помехи в неопрасиваемых сердечниках может быть сведено к нулю [2] пропускаям во все невозбужденные провода противоположного тока  $-I/n(n + 1)$ .

Если отбросить две тривиальные группы проводов, прошивающих матрицу по строкам и столбцам, то отыскание оставшихся групп можно свести к следующей математической задаче. Сопоставим каждому сердечнику матрицы элемент  $a_{ij}$  определителя  $n$ -го порядка (рис. 1).

Каждому проводу, удовлетворяющему выше приведенным условиям, сопоставим член определителя, составленный из тех  $a_{ij}$ , которые соответствуют сердечникам, прошитым данным проводом. Эти  $a_{ij}$  на самом деле составляют член определителя, так как отброшенные две тривиальные группы проводов запрещают оставшимся проводам проходить через какую-либо пару сердечников, расположенных в одной строке или в одном столбце.

Таким образом, отыскание оставшихся  $P-2$  групп опрашивающих проводов эквивалентно задаче выбора  $n(P-2)$  членов определителя, выражения которых попарно содержат не более одного общего элемента  $a_{ij}$  (при этом следует рассматривать всевозможные пары членов определителя без учета их знаков). Назовем множество членов определителя, удовлетворяющих этому требованию, полным, если к нему нельзя присоединить ни одного члена определителя, не нарушив указанного требования. Число членов определителя, входящих в полное множество  $M$ , назовем размерностью полного множества  $\rho(M)$ . На примере  $n=4$  можно убедиться, что существуют полные множества различных размерностей:

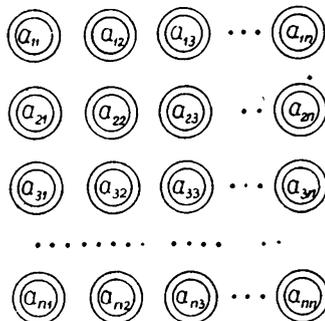


Рис. 1.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \\ a_{12}a_{23}a_{34}a_{11} \\ a_{13}a_{24}a_{31}a_{12} \\ a_{14}a_{21}a_{32}a_{13} \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} & a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} & a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} \\ a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} & a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} \\ a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} & a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} \\ a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} & a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} & a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что  $M$  и  $N$  являются полными множествами, но  $\rho(M)=4$ , а  $\rho(N)=12$ . Аналогичный пример находим мы и в случае  $n=6$ , когда существуют два различных полных множества с размерностями 6 и 10 соответственно.

Для получения минимальной помехи в неопрашиваемых сердечниках следует стремиться к тому, чтобы число групп опрашивающих проводов было наибольшим. Это означает, что при фиксированном  $n$  следует выбирать полное множество с максимальной размерностью.

При любом  $n$  легко построить множество членов определителя, выражения которых не содержат попарно общих элементов  $a_{ij}$ :

$$\begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn} \\ & a_{12}a_{23}a_{34} \dots a_{n1} \\ & a_{13}a_{24}a_{35} \dots a_{n2} \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & a_{1,j} a_{2, j \oplus 1} a_{3, j \oplus 2} \dots a_{n, j \oplus (n-1)} \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & a_{1n}a_{21}a_{32} \dots a_{n,n-1} \end{aligned}$$

Здесь знак  $\oplus$  означает, что суммирование индексов ведется по модулю  $n$ , но вместо 0 пишется  $n$ . Нетрудно проверить, что прошивка, соответствующая приведенному множеству, удовлетворяет условиям  $1 \div 4$ . Присоединение этой прошивки к группам проводов, опрашивающих матрицу по строкам и столбцам, позволяет получить в обмотках неопрашиваемых сердечников ток не более, чем  $I/3$ .

Можно показать, что максимальная размерность полного множества не превосходит  $n(n-1)$ . Действительно, число членов полного множества, содержащих элемент  $a_{1,j}$ , не превосходит  $n-1$ . В противном случае встретятся два таких члена, которые одновременно содержат элемент  $a_{1,j}$  и какой-либо элемент  $a_{2k}$ , что противоречит полноте множества.

Определим прошивку „веером“ как такую, в которой  $j$ -й провод  $k$ -й группы определяется выражением

$$a_{1,j}a_{2,j \oplus k} a_{3, j \oplus 2k} \dots a_{n, j \oplus (n-1)k} \quad (j=1,2, \dots, n; k=1,2, \dots, n-1). \tag{1}$$

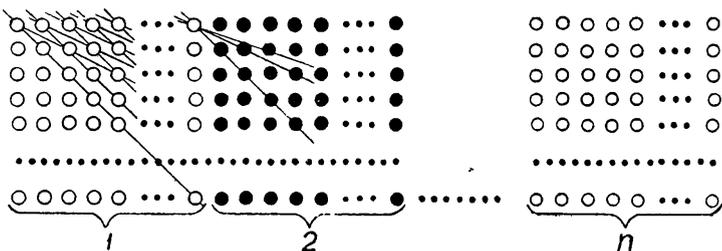


Рис. 2.

(смысл знака  $\oplus$  указан выше). Эта прошивка соответствует простому геометрическому построению. К исходному определителю надо приписать сбоку  $n-1$  таких же определителей и провести через элементы первой строки исходного определителя  $n-1$  группу параллельных прямых по  $n$  прямым в группе (рис. 2).

*Теорема.* Если  $n$  есть простое число, то выражения (1) составляют полное множество размерности  $n(n-1)$ .

*Доказательство.* Во-первых, убедимся в том, что выражения (1) при  $j=1, 2, \dots, n$ ,  $k=1, 2, \dots, n-1$  совпадают с выражениями для членов определителя (без учета их знаков). Для этого надо доказать, что в выражении (1) ни при каких  $j$  и  $k$  не может оказаться двух элементов из одного столбца. Другими словами, сравнение

$$\begin{aligned} j + mk &\equiv j + lk \pmod{n} \\ (0 \leq l < m \leq n-1) \end{aligned} \quad (2)$$

не должно иметь решений при  $j=1, 2, \dots, n$  и  $k=1, 2, \dots, n-1$ . Если бы это сравнение имело решение, то число  $(m-l)k$  должно было бы делиться на  $n$  без остатка, что невозможно в силу простоты  $n$ . Таким образом, выражение (1) определяет  $n(n-1)$  членов определителя.

Докажем теперь, что эти члены образуют полное множество. Для этого остается проверить выполнение условий 2) и 3). Другими словами, остается доказать, что сравнение

$$\begin{aligned} j_1 + mk &\equiv j_2 + mk \pmod{n} \\ (j_1 \neq j_2) \end{aligned} \quad (3)$$

и система сравнений

$$\begin{aligned} j_1 + mk_1 &\equiv j_2 + mk_2 \pmod{n}; \\ j_1 + lk_1 &\equiv j_2 + lk_2 \pmod{n} \\ (k_1 \neq k_2, \quad m \neq l) \end{aligned} \quad (4)$$

не имеют решений. Для сравнения (3) это очевидно, так как в противном случае число  $j_1 - j_2$  должно было бы делиться на  $n$  без остатка, что невозможно. Система (4) также не имеет решения, так как в противном случае мы бы получили, что числа  $j_1 - j_2 + m(k_1 - k_2)$  и  $j_1 - j_2 + l(k_1 - k_2)$  должны делиться на  $n$  без остатка. Но тогда должно было бы делиться на  $n$  без остатка и число  $(m-l)(k_1 - k_2)$ , что невозможно в силу простоты  $n$ .

Итак, множество выражений (1) образует полное множество размерности  $n(n-1)$ .

Присоединяя к прошивке „веером“ отброшенные тривиальные группы, мы получаем  $n+1$  группу опрашивающих проводов, удовлетворяющих условиям 1) ÷ 4).

Заметим, что прошивка „веером“ в случае составного  $n$  ( $n = cd$ ;  $c$  — наименьший простой множитель числа  $n$ , отличный от 1) удовлетворяет условиям 1) ÷ 4) лишь для  $k = 1, 2, \dots, c-1$ .

В получающихся для  $k \geq c$  группах опрашивающих проводов либо не выполняются условия 1) ÷ 4), либо каждый провод этих групп прошивает какую-либо пару сердечников, через которую уже проходит

провод одной из первых  $c-1$  групп. Доказательство этого факта может быть легко установлено рассмотрением соответствующих сравнений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. C. Minnick and R. I. Ashenbust, J Appl Phys., **26**, 575 (1955)
2. N. M. Blachman, Trans. IRE, EC-5, 1, 19 (1956).

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
27 мая 1960 г.

### BROACHING THE CROSSLAR MATRIX OF A MEMORY SYSTEM ON MAGNETIC CORES, WORKING ON THE PRINCIPLE OF A MULTIPLE COINCIDENCE OF CURRENTS

*U. L. Ketkov*

A description is made of a new interpretation of the broaching of a crosslar matrix, consisting of  $n \times n$  cores and functioning according to the principle of  $P$ -multiple ( $P > 2$ ) coincidence of currents. Method is given for building up such a broaching for  $P = c + 1$ , where  $c$  is the smallest possible simple multiplier of number  $n$ , differing from 1.

---

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

### МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ РАДИОВОЛН В ТРОПОСФЕРЕ ПОД БОЛЬШИМИ УГЛАМИ

В. А. Зиничев, Ю. А. Рыжов, О. И. Юдин

За последние годы накоплен большой экспериментальный материал и выполнен ряд теоретических исследований по дальнему распространению УКВ. Несмотря на это, полной ясности в данном вопросе нет. Существующие экспериментальные методы не дают возможности с достаточной точностью оценить роль тех или иных явлений в сверхдальнем тропосферном распространении УКВ. С этой точки зрения представляется весьма важной разработка новых физических методов изучения радиоволн в тропосфере [1].

В большинстве экспериментальных исследований сверхдальнего тропосферного распространения УКВ углы возвышения основных лепестков приемной и передающей антенн не превышали  $1^{\circ}$ – $2^{\circ}$ . При этом поле на большом расстоянии за линией радиогоризонта может быть обусловлено действием диффракции радиоволн на сферической поверхности Земли, волноводным распространением радиоволн, отражением от слоистых неоднородностей атмосферы, когерентным рассеянием и, наконец, рассеянием на статистических неоднородностях показателя преломления тропосферы. Анализ суммарного поля очень сложен, тем более, что в формировании поля участвует большой объем пространства.

В НИРФИ была проведена работа по выяснению роли рассеяния на турбулентных неоднородностях тропосферы в дальнем тропосферном распространении радиоволн. При этом исключалось действие других механизмов распространения. Идея метода\* заключается в постановке экспериментов по изучению рассеяния радиоволн под большими углами при использовании антенны с узкими диаграммами направленности ( $\sim 40'$ ). При больших углах рассеяния (от  $20^{\circ}$  до  $60^{\circ}$ ) расстояние между передатчиком и приемником должно быть сравнительно небольшим (для того, чтобы объем рассеяния не выходил за пределы тропосферы). В описываемых экспериментах это расстояние было равно 25 км. Диффракция и волноводное распространение в таком опыте практически совершенно исключены; появление отражающих слоев становится эпизодическим явлением. Следовательно, данный эксперимент позволяет оценить величину рассеяния на турбулентных неоднородностях коэффициента преломления атмосферы.

Основные трудности, возникающие при постановке эксперимента, состоят в том, что вместе с сигналом, обусловленным рассеянием радиоволн, в месте приема имеется значительно более сильный (на несколько порядков) сигнал за счет лепестков антенны и что рассеянный сигнал много меньше уровня собственных шумов аппаратуры. Поэтому наиболее целесообразным методом в таких условиях является комбинация импульсного метода зондирования и приема, позволяющая отделить рассеянный сигнал от всех прочих мешающих сигналов (приходящих с другим временем запаздывания), с радиометрическим принципом измерения слабых сигналов.

Эксперимент проводился на волне  $\lambda = 3$  см с параболическими антеннами диаметром около 4 м. В качестве передатчика использовался импульсный генератор со средней мощностью 300 вт. Эта система дополнялась специальным каналом связи на частоте  $\sim 70$  мГц, по которой передавались «опорные» импульсы, изучаемые синхронно и с некоторым упреждением относительно импульсов передатчика. Опорные импульсы позволяли синхронизовать импульсную работу передатчика и приемника.

Приемник высокой чувствительности, как указывалось выше, был создан путем сочетания принципа импульсно-когерентного приема с принципом модуляционного радиометра. Ферритовый модулятор, стоящий на входе приемника, осуществлял поочередное подключение к последнему антенны и черного тела с частотой 133 Гц. Шум-фактор приемника был равен 30 (без фильтра зеркального канала). Видеосигналы с выхода детектора подавались на стробирующее устройство, где в качестве стробимпульса использовался импульс от отдельного генератора, синхронизованного опорным

\* Использованная методика эксперимента была изложена в докладе М. М. Кобрина и О. И. Юдина «О возможностях исследования рассеяния радиоволн в тропосфере радиопрожекторным методом» в мае 1957 года на Научно-технической конференции Горьковского отделения общества радиотехники и электросвязи им. А. С. Попова.

сигналом. Строблирующее устройство являлось одновременно детектором, на выходе которого сигнал на частоте модуляции (133 гц) был пропорционален величине принимаемого сигнала. Последующая часть приемника, выделяющая этот сигнал из собственных шумов, ничем не отличалась от соответствующей части обычного радиометра. Постоянная времени выходного фильтра—около 1 минуты.

Как известно, применение стробирования улучшает отношение сигнал/шум в  $\sqrt{T/\tau_0}$  раз по сравнению с радиометром без стробирования, имеющем такие же параметры [1] ( $T$ —период следования импульсов,  $\tau_0$ —длительность импульса стробирования). Применение модуляции сигнала на входе, кроме основного своего назначения (исключения флюктуаций коэффициента усиления), удобно в том отношении, что множество вспомогательных импульсов в приемном устройстве не сказывается на выходном сигнале.

Эксперименты проводились в октябре 1959 г. в ясные безоблачные дни при углах рассеяния около  $30^\circ$ . Средняя величина рассеянной мощности на входе приемника ( $\sim 10^{-17}$  вт) соответствовала коэффициенту передачи  $p_r/p_t = 10^{-20}$ .

Величина принятого рассеянного сигнала ближе всего соответствует расчетам, основанным на теории локально-однородной турбулентности [2,3]. Если принять, что флюктуации коэффициента преломления в турбулентной атмосфере описываются в соответствующем интервале изменения аргумента  $r$  с помощью структурной функции  $D(r) = C_n^2 r^{2/3}$  [3], спектр которой имеет вид:  $\Phi_n(x) = 0,033 C_n^2 x^{-1/3}$  ( $1/L_0 < x < 1/l_0$ ) (где  $L_0, l_0$ —соответственно внешний и внутренний масштабы турбулентности), то измерение рассеянной мощности позволяет вычислить коэффициент  $C_n$  в выражении структурной функции. В наших экспериментах  $C_n \sim 10^{-9}$  см $^{-1/3}$ , что согласуется с данными, приведенными в литературе [3].

Ввиду малого количества проведенных экспериментов ничего нельзя сказать об угловой зависимости рассеяния, хотя описанным методом в условиях нашего эксперимента можно снять эту зависимость в диапазоне углов рассеяния от  $20^\circ$  до  $40^\circ$ . Представляется также весьма ценным провести указанный эксперимент на разных частотах при одном и том же рассеивающем объеме. Такой эксперимент, однако, сопряжен со значительными трудностями.

В заключение авторы выражают благодарность М. М. Кобрину за постановку задачи и ценные советы

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Отчет по теме «Эфир», НИРФИ, Горький, 1959.
2. R. A. Silverman, J. Appl. Phys., **27**, 690 (1956).
3. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
8 июля 1960 г.

#### ОТПАЯННЫЙ МОЛЕКУЛЯРНЫЙ ГЕНЕРАТОР С ГЕТТЕР-ИОННЫМ НАСОСОМ И ОХЛАЖДЕНИЕМ

А. Ф. Крупнов, А. И. Наумов, В. А. Скворцов

Разработан и испытан молекулярный генератор на пучке молекул аммиака, в котором поддержание рабочего вакуума осуществляется геттер-ионным насосом и охлаждением жидким азотом\*.

Система поддержания вакуума в молекулярном генераторе должна иметь различные скорости откачки по разным газам: по аммиаку  $\sim 10^3$  л сек $^{-1}$ ; по невымораживающимся примесям аммиака, газоотделению от стенок и т. д.  $\sim 1$  л сек $^{-1}$  (эта величина определяется чистой аммиака и вакуумными свойствами системы). В описываемом генераторе для первой цели используется вымораживание аммиака жидким азотом, а для второй—геттер-ионный насос.

\* После завершения работы авторам стали известны работы, посвященные этому же вопросу:

1. H. A w e n d e r, Electronische Rundschau, **12**, 458 (1959).
2. J. C. H e l m e r, E. B. J a c o b u s, P. A. S t u r r o c k, J. Appl. Phys., **31**, 458 (1960).

Схема установки приведена на рис. 1, где 1 — охлаждаемый жидким азотом сосуд Дьюара; 2 — патрубок к форвакуумному насосу; 3 — геттер-ионный насос; 4 — геттерный насос; 5 — вакуумная оболочка системы; 6 — многоканальный источник пучка, дающий пучок молекул шириной  $12^\circ$ , 7 — сортирующая система из тонких стержней длиной 100 мм; 8 — обычный инваровый резонатор длиной 100 мм.

Предварительно генератор откачивался форвакуумным насосом до давления  $10^{-2}$  мм рт. ст. и патрубок, соединяющий генератор с форвакуумным насосом, перекрывался. Доведение давления до рабочего ( $\sim 5 \cdot 10^{-6}$  мм рт. ст.) осуществлялось охлаждением, геттерным [1] и геттер-ионным насосами, а поддержание вакуума в процессе работы генератора — охлаждением и геттер-ионным насосом. Мощность, потребляемая геттерным насосом,  $\sim 100$  вт; геттер-ионным,  $\sim 140$  вт.

При испытании генератор непрерывно работал шесть суток. Давление в системе не менялось с течением времени и генератор не требовал никаких манипуляций для поддержания генерации, кроме периодического добавления жидкого азота. Было установлено, что система допускает повторные запуски. Для этого достаточно залить жидкий азот, включить геттерный, а затем геттер-ионный насосы. После этого давление восстанавливается и генератор работает нормально.

Время непрерывной работы генератора определяется меньшим из двух следующих сроков: 1) сроком службы геттер-ионного насоса, равным по оценкам, приведенным в литературе [2],  $\sim 1000$  часов, и 2) сроком обмерзания дьюара плохо проводящим тепло слоем аммиака, равным по минимальной оценке нескольким сотням часов. Применение геттер-ионного насоса со скоростью откачки  $\sim 700$  л·сек $^{-1}$  [2] позволяет создать отпаянный молекулярный генератор без вымораживания аммиака жидким азотом. Такой генератор, обладая большим сроком непрерывной работы ( $\sim 2$  месяца), может найти широкое применение на практике.

Авторы благодарят В. А. Флягина и А. А. Мельникова за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Мишкин, *Электроника*, 12, 62 (1958).
2. G. Kienel und A. Lorenz, *Vakuum-Technik*, 1, 1 (1960).
3. В. А. Скворцов, А. Ф. Крупнов, А. И. Наумов, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, 3, 1128 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
14 июля 1960 г.

*Примечание при корректуре.* О том, что скорость откачки  $700$  л сек $^{-1}$  является заведомо достаточной, свидетельствует работа [3].

## О СВОЙСТВАХ ДВУХКОНТУРНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА

С. А. Ахманов, А. К. Романюк, М. М. Струков

Предметом настоящей заметки является изложение некоторых результатов экспериментального исследования двухконтурных параметрических генераторов, могущих представить известный интерес с точки зрения проблемы диапазонной стабилизации частоты. Если параметрическое возбуждение одиночного колебательного контура (одноконтурный параметрический генератор) было детально исследовано в работах Мандельштама и Папалекси [1] и др., то параметрическое возбуждение многоконтурных систем до настоящего времени исследовано значительно меньше. Из работ в этом направлении следует упомянуть работу Лазарева [2], где теоретически и экспериментально исследовалось параметрическое возбуждение системы двух связанных контуров за счет периодического изменения емкости одного из них.

Двухконтурный параметрический генератор, исследованный в настоящей работе

представляет собой систему двух колебательных контуров, связанных периодически изменяющейся реактивностью (возбужденный двухконтурный параметрический усилитель [3]). Основное внимание нами было уделено факторам, обуславливающим стабильность генерируемых частот. Интерес к такому исследованию определялся следующими соображениями. В двухконтурном параметрическом генераторе возбуждаются колебания двух частот  $f_1$  и  $f_2$  ( $f_1 + f_2 = f_{\text{н}}$ , где  $f_{\text{н}}$ —частота накачки). Частоты  $f_1$  и  $f_2$  можно плавно перестраивать, изменяя парциальные частоты контуров  $f_{01}$  и  $f_{02}$ , таким образом, чтобы  $f_{01} + f_{02} \approx f_{\text{н}}$ . Иными словами, двухконтурный генератор является диапазоном при фиксированной частоте накачки. Последняя может быть сделана весьма стабильной<sup>\*</sup>, и, следовательно, если процесс преобразования частоты, имеющий место в двухконтурном генераторе, не сопровождается существенной потерей стабильности, такой генератор может быть использован в качестве стабильного диапазонного генератора. Интерес к подобным генераторам в радиотехнике общезвестен.

Двухконтурные параметрические генераторы были разработаны как в диапазоне СВЧ (частоты накачки были  $\sim 6000$  и  $9000$  мГц) и на частотах  $2-20$  мГц. В большинстве экспериментов в качестве управляемых реактивностей использовались полупроводниковые германиевые диоды с  $p-n$ -переходом, работавшие как в режиме принудительного смещения, так и автосмещения. При добротностях контуров  $\sim 50-80$  СВЧ-генераторы возбуждались при мощностях накачки  $\sim 10-20$  мвт, а генераторы длинноволнового диапазона—при напряжении накачки  $\sim 1,5-2$  в. Генерируемые мощности были на  $10-14$  дБ меньше мощности накачки. Стационарная амплитуда генераторов определялась в значительной мере силойной проводимостью диода. В ряде случаев был отмечен не только порог, но и „потолок“ по мощности накачки: в этом смысле явление параметрического возбуждения в системе с полупроводниковым диодом аналогично явлению резонанса  $n$ -го рода в ламповой схеме.

Измерения стабильности частоты были проведены с двухконтурным параметрическим генератором, питаемым кварцевым генератором накачки частоты  $f_{\text{н}} = 28$  мГц. Блок-схема измерительной установки приведена на рис. 1. В одной серии экспериментов частоты  $f_1$  и  $f_2$  перестраивались в пределах  $11-13$  мГц и  $17-15$  мГц соответственно; в другой серии  $f_1 \approx 5$  мГц и  $f_2 \approx 23$  мГц. Диапазоны перестройки определялись диапазоном перестройки использованных переменных конденсаторов.

Результаты экспериментального исследования зависимости генерируемых частот от изменения реактивных параметров контуров приведены на рис. 2. Здесь по оси абсцисс отложено относительное изменение  $\Delta C_1/C_1$  емкости  $C_1$  первого контура, а по оси ординат соответствующее относительное изменение  $\Delta C_2/C_2$  емкости  $C_2$  второго контура, которое необходимо произвести для поддержания постоянства частоты  $f_1$ . Видно, что знаки  $\Delta C_1$  и  $\Delta C_2$  совпадают; при  $Q_1 \approx Q_2$  отношение  $\Delta C_1/C_1 \approx \Delta C_2/C_2$  (1). В общем случае  $\Delta C_1/C_1 = K \Delta C_2/C_2$ , причем  $K$  существенно зависит от затухания в контурах; для графиков II, IV

$Q_1 > Q_2$ , для III  $Q_1 < Q_2$ . (Все это, разумеется, относится к малым изменениям емкостей  $C_1$  и  $C_2$ ; при достаточно больших изменениях колебания срываются.) Таким образом, в двухконтурном параметрическом генераторе односторонние уходы реактивных параметров компенсируются<sup>†</sup>. Поэтому влияние на генерируемые частоты флюктуаций внешних условий (температуры, влажности и т. п.), для которых флюктуации параметров контуров, находящихся в непосредственной близости друг от друга, можно считать полностью коррелированными, может быть значительно ослаблено. Из графиков видно, что если контуры сделаны из одинаковых материалов (коэффициенты нестабильности  $\delta C/C$  и  $\delta L/L$  близки), выбором затухания контуров можно добиться значительной компенсации односторонних уходов.

Указанное выше свойство двухконтурного генератора можно объяснить на основе анализа выражений для частот самовозбуждения  $f_1$  и  $f_2$  двухконтурного параметрического усилителя. Для случая  $f_{\text{н}} = f_{01} + f_{02}$

$$f_1 = -f_{01}, \quad f_2 = f_{02}$$

<sup>\*</sup> Стабилизация  $f_{\text{н}}$  упрощается потому, что параметрический генератор может возбуждаться при сравнительно малых мощностях накачки

<sup>†</sup> Сказанное относится, очевидно, не только к емкостям, но и к индуктивностям

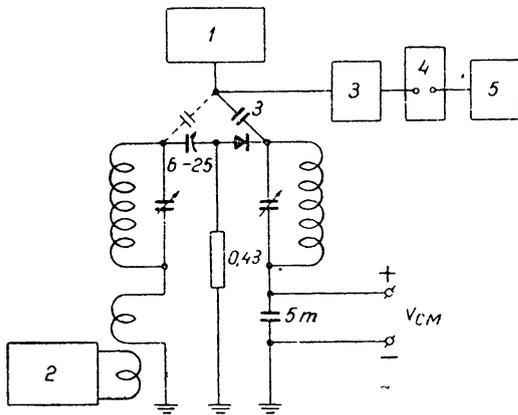


Рис. 1.

(см., например, [3]). Как можно показать, для  $f_n \neq f_{01} + f_{02}$  (что обычно имеет место)

$$f_n = f_{0n} + \frac{f_n - f_{01} - f_{02}}{h_1 + h_2} h_n \quad (n = 1, 2), \quad (1)$$

где  $h_n = R_n / 2L_n$  — декремент затухания  $n$ -го контура. Из (1) легко получить выражение для относительной нестабильности частоты, например,  $f_1$ , связанной с относительными флюктуациями парциальных частот  $x_n = - (1/2) (\delta C_n / C_n + \delta L_n / L_n)$ :

$$\frac{\delta f_1}{f_1} = \frac{1}{1 + h_1 / h_2} \left( \sigma_1 \quad \frac{Q_2}{Q_1} \quad \sigma_2 \right), \quad (2)$$

что, как видно, хорошо согласуется с результатами эксперимента.

Флюктуации реактивных параметров контуров не являются единственным источником флюктуаций генерируемых частот в параметрическом генераторе. Определенную роль могут играть флюктуации амплитуды накачки (через соответствующие нелинейные поправки к частоте) и флюктуации средней емкости полупроводникового диода, связанные с флюктуациями напряжения смещения и температуры.

Чувствительность частоты к амплитуде накачки определялась экспериментально. Было обнаружено, что чувствительность зависит от амплитуды накачки и от смещения, в режиме автосмещения удавалось получить весьма слабую зависимость генерируемых частот от напряжения накачки (не более 50–70  $\mu\text{В}$   $\text{В}^{-1}$ ).

Роль флюктуаций емкости диода может быть сделана достаточно малой, поскольку, как следует из [1], температурный коэффициент емкости  $p$  —  $n$ -перехода невелик, а батарея смещения может быть весьма стабильной.

Заметим, что в схему двухконтурного генератора может быть добавлен еще один контур, настроенный на частоту  $f_n + f_1$  или  $f_n + f_2$ . В этом случае генератор может генерировать колебания с частотой, превышающей частоту накачки; на это уже указывалось в литературе [5, 6]. В [6] цепочки таких генераторов предложено использовать для значительного преобразования частоты вверх. Описанные здесь эксперименты позволяют надеяться на получение хорошей стабильности частоты в таких генераторах. Возможны и другие модификации многоконтурных параметрических генераторов, представляющие интерес с точки зрения проблемы преобразования частоты.

В заключение следует отметить простоту и компактность двухконтурных параметрических генераторов. Отсутствие электронных ламп упрощает стабилизацию их параметров, в частности, температуры.

В связи с вышесказанным может оказаться целесообразным использование двухконтурных параметрических генераторов, питаемых стабильными генераторами накачки, в качестве диапазонных генераторов как в длинноволновом диапазоне, так и диапазоне СВЧ.

Авторы приносят благодарность Ю. Е. Дьякову, сообщившему вывод формулы (1) и высказавшему ряд ценных замечаний, С. Д. Гвоздеверу за внимание к работе, А. В. Краснову и В. М. Вальдлерову за предославление полупроводниковых диодов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, ЖТФ, **3**, 5 (1934).
- 2 В. А. Лазарев, ЖТФ, **10**, 918 (1940).
- 3 H. Heffner, G. Wade, J. Appl. Phys., **29**, 1321 (1958).
- 4 A. Uhlir, Proc. IRE, **46**, 1115 (1958).
- 5 Hsu—Hsiung, Multiple frequency parametric devices, NSIA - ARDC Conf. Electron, Washington, 1958, p. 81.
- 6 P. Fitzgerald, G. Wade, C. Crumly, IRE Trans. Electron Devices, **6**, 243 (1959)

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
9 июля 1960 г.

\* Очевидно, что теоретическая оценка уже не может быть сделана с помощью (1), для этого необходимо располагать нелинейной теорией генератора.

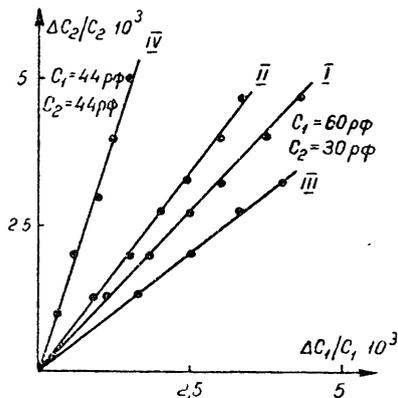


Рис. 2.

## ШУМ-ФАКТОР ДВУХКОНТУРНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ОДИН ИЗ КОНТУРОВ

Ю. Е. Дьяков

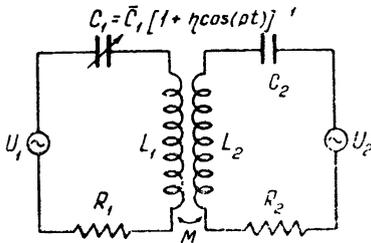


Рис. 1.

Ниже дается вывод формулы для шум-фактора двухконтурной системы, изображенной на рис. 1. Эта система отличается от обычного двухконтурного параметрического усилителя близостью собственных частот контуров, а также тем, что параметрическое воздействие производится на реактивный элемент (в данном случае—емкость) одного из контуров, а не на элемент связи.

Настоящая заметка является дополнением к статье [1], где проведено рассмотрение динамических характеристик системы (полосы, усиления и т. п.).

Пусть

$$m_n = M/L_n; \quad Q_n = \omega_n L_n / R_n; \quad \omega_n = 1/\sqrt{L_n C_n}; \quad h_n = R_n / 2L_n \quad (n = 1, 2),$$

где  $M$ —коэффициент взаимной индукции. Заряды  $q_{1,2}$  на емкостях  $C_{1,2}$  удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\ddot{q}_1 + \frac{m_1}{\omega_1^2} \ddot{q}_2 + \frac{q_1}{Q_1 \omega_1} + [1 + \eta \cos(pt)] q_1 = \frac{U_1}{L_1 \omega_1^2}; \quad (1)$$

$$\frac{q_2}{\omega_2^2} + \frac{m_2}{\omega_2^2} \ddot{q}_2 + \frac{\dot{q}_2}{Q_2 \omega_2} + q_2 = \frac{U_2}{L_2 \omega_2^2}.$$

Как следует из общей теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, решение уравнений (1) при  $U_1 \sim e^{j\omega t}$  и  $U_2 = 0$  имеет вид:

$$q_m(t) = e^{j\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{mn} e^{jpn t} \quad (m = 1, 2), \quad (2)$$

где  $k_{mn}$ —постоянные [2]. Если  $Q_{1,2} \gg 1$ ,  $0 < \omega \approx \omega_1 \approx \omega_2$  и  $p \approx 2\omega_1 \approx 2\omega_2$ , то в (2) достаточно учесть лишь гармоники, близкие по частоте к  $\omega_{1,2}$ , т. е. можно искать  $q_{1,2}$  в виде:

$$q_1 \approx e^{j\omega t} (k_{11} + k_{12} e^{-jpt}); \quad (3)$$

$$q_2 \approx e^{j\omega t} (k_{21} + k_{22} e^{-jpt}).$$

Аналогично, в случае  $U_1 = 0$  и  $U_2 \sim e^{j\omega t}$

$$q_1 \approx e^{j\omega t} (k'_{11} + k'_{12} e^{-jpt}); \quad (4)$$

$$q_2 \approx e^{j\omega t} (k'_{21} + k'_{22} e^{-jpt}).$$

Предположим, что выходом системы является процесс  $q_1$ , прошедший через узкополосный фильтр, настроенный на частоту  $\omega_c \approx \omega_{1,2}$ , причем зеркальная частота  $p - \omega_c$  фильтром не пропускается. Фильтр предполагается развязанным\* относительно системы; его полосу обозначим через  $B$ ; частотную функцию фильтра будем считать для простоты прямоугольной формы.

Ограничиваясь рассмотрением случая малой полосы  $B$ , предположим, что полоса пропускания параметрической системы превосходит  $B$ , и в пределах  $B$  можно пренебречь зависимостью коэффициентов  $k_{mn}$  и  $k'_{mn}$  в (3) и (4) от  $\omega$ .

Чтобы определить шум-фактор, рассмотрим усиление внешнего шума 1) при отсутствии внутренних шумов, когда среднее квадратичное значение шума на выходе фильтра равно  $\sigma_0^2$ , и 2) с учетом внутренних шумов контура; в этом случае суммарную интенсивность шума на выходе фильтра обозначим через  $\sigma^2$ . Тогда шум-фактор будет равен  $F = \sigma^2 / \sigma_0^2$

\* Под развязанностью понимается независимость процессов в контурах от каких-либо параметров фильтра, в частности, от его шумов

Спектры интенсивности внешнего шума и шумов первого и второго контуров обозначим соответственно через  $(\xi^2)_\omega$ ,  $(\xi_1^2)_\omega$  и  $(\xi_2^2)_\omega$ . При этом внутренние шумы будем считать  $\delta$ -коррелированными ( $(\xi_1^2)_\omega, (\xi_2^2)_\omega = \text{const}$ ), а спектр  $(\xi^2)_\omega$  — имеющим ту же форму, что и частотная функция выходного фильтра.

Как следует из (3) и (4), при выполнении перечисленных условий

$$\sigma_0^2 \sim |k_{11}|^2 (\xi^2)_\omega;$$

$$\sigma^2 \sim |k_{11}|^2 (\xi^2)_\omega + (|k_{11}|^2 + |k_{12}|^2) (\xi_1^2)_\omega + (|k'_{11}|^2 + |k'_{12}|^2) (\xi_2^2)_\omega,$$

так что

$$F = 1 + \frac{|k_{11}|^2 + |k_{12}|^2 (\xi_1^2)_\omega}{|k_{11}|^2 (\xi^2)_\omega} + \frac{|k'_{11}|^2 + |k'_{12}|^2 (\xi_2^2)_\omega}{|k_{11}|^2 (\xi^2)_\omega}$$

или, выражая спектры через температуры и шумовые сопротивления,

$$F = 1 + \frac{|k_{11}|^2 + |k_{12}|^2 \frac{T_1 R_{1ш}}{TR}}{|k_{11}|^2} + \frac{|k'_{11}|^2 + |k'_{12}|^2 \frac{T_2 R_{2ш}}{TR}}{|k_{11}|^2}. \quad (5)$$

Для определения постоянных  $k_{mn}$  и  $k'_{mn}$ , входящих в  $e^{j\omega t}$  (5), нужно решить уравнения (1). Подставив в (1)  $U_1 L^{-1} \omega_1^{-2} = e^{j\omega t}$ ,  $U_2 = 0$  и выражения (3) для  $q_1, q_2$  и приравнявая нулю коэффициенты при  $e^{j\omega t}$  и  $e^{j(\omega-p)t}$ , получим:

$$k_{11} z_{11} - m_{11} k_{21} + \frac{1}{2} \eta k_{12} = 1; \quad k_{21} z_{21} - m_{21} k_{11} = 0; \quad (6)$$

$$k_{12} z_{12} - m_{12} k_{22} + \frac{1}{2} \eta k_{11} = 0; \quad k_{22} z_{22} - m_{22} k_{12} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} z_{11} &= 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q_1 \omega_1}; & m_{11} &= m_1 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2; \\ z_{12} &= 1 - \left(\frac{\omega - p}{\omega_1}\right)^2 + j \frac{\omega - p}{Q_1 \omega_1}; & m_{12} &= m_1 \left(\frac{\omega - p}{\omega_1}\right)^2; \\ z_{21} &= 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q_2 \omega_2}; & m_{21} &= m_2 \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2; \\ z_{22} &= 1 - \left(\frac{\omega - p}{\omega_2}\right)^2 + j \frac{\omega - p}{Q_2 \omega_2}; & m_{22} &= m_2 \left(\frac{\omega - p}{\omega_2}\right)^2. \end{aligned}$$

Исключая из (6)  $k_{21}$  и  $k_{22}$ , найдем

$$(z_{11} - m_{11} m_{21} / z_{21}) k_{11} + \frac{\eta}{2} k_{12} = 1; \quad (7)$$

$$\frac{\eta}{2} k_{11} + (z_{12} - m_{12} m_{22} / z_{22}) k_{12} = 0,$$

откуда следует, что

$$k_{11} = \frac{z_{12} - m_{12} m_{22} / z_{22}}{\Delta}, \quad k_{12} = -\eta / 2\Delta, \quad (8)$$

где  $\Delta$  — детерминант системы уравнений (7)

Аналогичным образом можно получить:

$$k'_{11} = \frac{m_{11}}{z_{21}} k_{11}; \quad k'_{12} = \frac{m_{11}}{z_{21}} k_{12}. \quad (9)$$

Из (5), (8) и (9) следует, что

$$F = 1 + \left(1 + \left|\frac{k_{12}}{k_{11}}\right|^2\right) \left(\frac{T_1 R_{1ш}}{TR} + \left|\frac{m_{11}}{z_{21}}\right|^2 \frac{T_2 R_{2ш}}{TR}\right), \quad (10)$$

где

$$\left| \frac{m_{11}}{z_{21}} \right|^2 = \frac{m_1^2 (\omega/\omega_2)^4}{[1 - (\omega/\omega_2)^2]^2 + \omega_2 Q_2^2 \omega_2^2} \quad (11)$$

Поскольку система возбуждается на частоте  $p/2$  (см [1]), то в (11) можно положить  $\omega = \omega_c = p/2$ . Вводя расстройку

$$\nabla = \frac{p/2 - \omega_c}{h_2}$$

(обычно  $\nabla \sim 1$ ), получим

$$\left| \frac{m_{11}}{z_{21}} \right|^2 \approx \frac{m_1^2 Q_2^2}{1 + \nabla^2}$$

Величина  $|k_{12} k_{11}|^2$  в (10) равна отношению квадратов амплитуд, соответствующих частотам  $\omega_c - p$  и  $\omega_c$  в первом контуре. Вблизи порога параметрической генерации это отношение близко к единице [1]. Таким образом, в практически наиболее интересном случае большого усиления выражение (10) принимает следующий вид

$$F = 1 - 2 \left( \frac{T_1 R_{111}}{TR} + \frac{m_1^2 Q_2^2}{1 + \nabla^2} - \frac{T_2 R_{211}}{TR} \right) \quad (12)$$

Если рассмотреть случай, когда компоненты фурье-разложения внешней шумовой ЭДС имеют частоты, близкие не только к  $\omega_c$ , но и к  $(p - \omega_c)$ , то для шум-фактора получим то же выражение (12), но без коэффициента 2 перед скобками.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Гершензон, Ю. Е. Дьяков, Н. В. Сонна, Л. А. Смирнова, В. С. Эткин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 121 (1961)
2. Ю. Е. Дьяков, Радиотехника и электроника, 5, 7, 1189 (1960).

Поступила в редакцию  
24 июня 1960 г.

### ПРИБОР ДЛЯ ЗАПИСИ И ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ НЕПРЕРЫВНО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Н. С. Анишин

В приборе для записи и воспроизведения непрерывно изменяющихся напряжений используется принцип преобразования непрерывных величин в дискретные методом «квантования по времени» с запоминанием в двоичном коде не самой величины, а ее приращений. Эти приращения измерены через интервалы времени  $\Delta t$ , которые должны удовлетворять условию

$$\Delta t \ll \frac{\delta}{|dF/dt|_{\max}}, \quad (1)$$

где  $F(t)$  — запоминаемая функция, а  $\delta$  — шаг шкалы квантованных уровней (рис. 1)

Получение двоичного кода происходит так. Если в течение  $i$ -го интервала, т. е. в период времени от  $t_{i-1} = (i-1)\Delta t$  до  $t_i = i\Delta t$ , функция  $F(t)$ , возрастая, принимает значение, кратное  $\delta$ , или нуль, то  $i$ -ое кодовое число будет 01. В случае, если функция  $F(t)$ , убывая в том же самом интервале времени, принимает значение, кратное  $\delta$ , или нуль,  $i$ -ое кодовое число в этом случае будет равно 10. Если же ни один из этих случаев не происходит,  $i$ -ое число будет 11.

Очевидно, что за промежуток времени, отделяющий моменты появления очередных кодовых чисел 01 или 10, происходит постоянное (равное  $\delta$ ) положительное или отрицательное приращение функции  $F(t)$ . Величина этого приращения задается как допустимая погрешность запоминания.

Если записываемая функция имеет ненулевое начальное значение  $F(0)$ , то запись будет производиться с погрешностью в течение некоторого промежутка времени, который нетрудно найти в каждом конкретном случае. Для устранения этой погрешности необходимо начать преобразование на время  $F(0)\Delta t/\delta$  ранее начального момента времени.

Блок-схема прибора приведена на рис 2. Носителем записанной информации является кольцо магнитной ленты, наклеенное на боковую поверхность вращающегося диска. На ленте имеются 2 магнитных дорожки, на которых записываются двухрядные числа 01, 10, 11. Цифры старшего разряда лишутся на первой магнитной дорожке, а младшего — на второй. Заметим, что ленту в виде кольца можно использовать и без диска, перемещая ее лентопротяжным механизмом. Тогда кольцо может быть сменным, и длину его можно выбирать различной в зависимости от длительности записи.

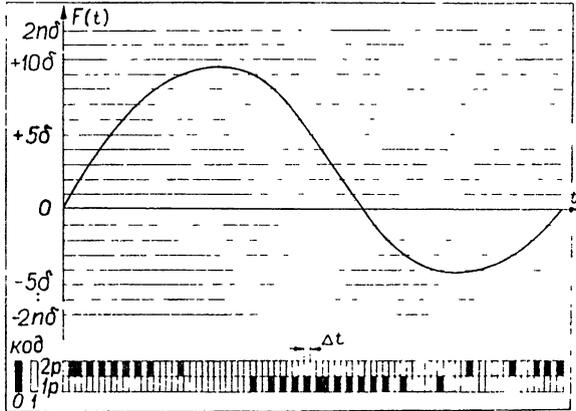


Рис 1 Способ представления непрерывных величин в дискретные.

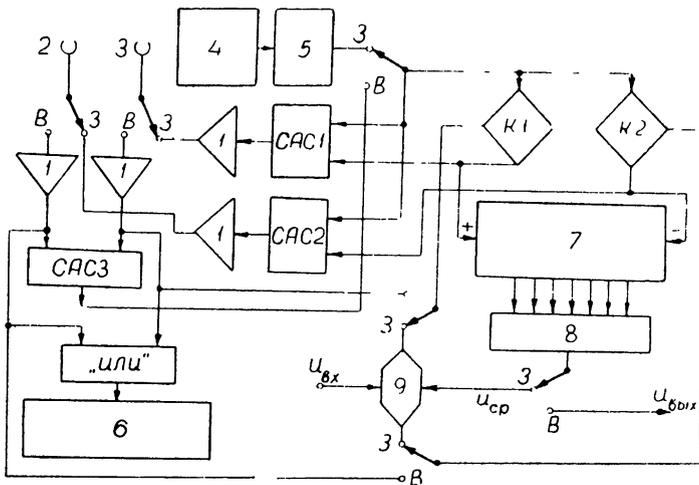


Рис. 2. Упрощенная блок-схема прибора:

1—усилитель, 2—первая магнитная головка, 3—вторая магнитная головка, 4—генератор стабильной частоты, 5—формирователь импульсов, 6—счетчик текущего времени, 7—реверсивный счетчик, 8—преобразователь, 9—схема сравнения

Регистрируемый сигнал подводится к клемме  $u_{вх}$ . При работе прибора в режиме «запись» 3 колебания от генератора стабильной частоты  $f = 1/\Delta t$  формируются в маркерные импульсы, которые поступают на клапаны  $K1$  и  $K2$ . Каждый из клапанов пропускает импульсы на вход сложения или вход вычитания реверсивного счетчика в те моменты, когда схема сравнения зафиксирует отклонение  $u_{ср}$  от  $u_{вх}$ . В соответствии со знаком этого отклонения (—или+) открывается клапан  $K1$  или  $K2$  и счетчик увеличивает или уменьшает свое показание до тех пор, пока это показание, преобразованное в непрерывную величину  $U_{сч}$ , не станет равным  $u_{вх}$  с точностью  $\delta$ . Одновременно с подачей на вход реверсивного счетчика эти импульсы сравниваются в схемах антисовпадения (САС1, САС2) с маркерными импульсами и в случае несовпадения по-

следние записываются на соответствующие дорожки, образуя коды приращений. Если приращения в данный интервал времени не происходят, то на первой и второй дорожках будет записано по одному импульсу (число 11).

Таким образом, происходит преобразование входного сигнала  $F(t)$  в совокупность кодовых чисел и запись последних на ленту.

При работе регистрирующего прибора в режиме «воспроизведение» (В) кодовые импульсы, считанные магнитными головками, попадают на клапаны  $K1$  и  $K2$ . Эти импульсы управляют клапанами так, что когда считывается число 01, импульс проходит через клапан  $K1$  и увеличивает показание счетчика на 1, а когда считывается число 10, импульс проходит через клапан  $K2$  и, попадая на вход вычитания, уменьшает показание счетчика на 1. Если считывается число 11, схема антисовпадения САСЗ не пропускает на входы счетчика ни одного из считанных импульсов; поэтому показание счетчика не изменяется. Связанный с реверсивным счетчиком преобразователь его показаний в непрерывно изменяющееся напряжение выдает напряжение, изображающее записанную функцию  $F(t)$  с погрешностью не более  $\delta$ . Импульсы, считанные с 1 и 2 дорожек, подаются через схему «ИЛИ» на вход счетчика текущего времени.

Показавший удовлетворительную работу прибор имеет еще дополнительные блоки (которые на рис. 2 не указаны), позволяющие воспроизводить записанный процесс тремя различными способами 1) перезапись на бумажную ленту электромагнитным самописцем; 2) просмотр записанных напряжений на котодном осциллографе; 3) снятие отсчетов записанного процесса в отдельных точках.

Тульский механический  
институт

Поступила в редакцию  
16 ноября 1959 г

## ХРОНИКА

## IV ВСЕСОЮЗНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ МИНИСТЕРСТВА ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР ПО РАДИОЭЛЕКТРОНИКЕ

С 24 по 29 октября 1960 г. в г. Харькове состоялась IV Всесоюзная конференция МВССО СССР по радиоэлектронике, которая привлекла внимание широкого круга специалистов. В работе конференции участвовало около 1000 делегатов из 35 городов Советского Союза. На конференцию было представлено свыше 230 докладов.

Конференция открылась вступительным словом зам. министра МВССО СССР тов. И. С. Дзюбко и докладами чл.-корр. АН УССР С. Я. Брауде «Радиоокеанографические исследования волнения моря» и чл.-корр. АН УССР Н. Д. Моргулис «Некоторые вопросы физики термозлектронного преобразования энергии». На заключительном пленарном заседании были заслушаны обзорные доклады В. Л. Германа «Некоторые вопросы электродинамики и термодинамики общей теории относительности при ускоренном движении макроскопических тел с релятивистскими скоростями» и Н. С. Зинченко «Методы экспериментального исследования электронных пучков».

В заключительном слове чл.-корр. АН УССР А. Я. Усыков подвел итоги работы конференции. Конференция приняла рекомендацию о созыве V Всесоюзной конференции МВССО по радиоэлектронике весной 1962 г. в г. Минск.

На конференции работали секции электродинамики СВЧ, электроники СВЧ, общей электроники, квантовой радиофизики, распространения радиоволн и радиоастрономии, общей радиотехники, полупроводников и их применения в радиотехнике, радиоизмерений.

### 1. Взаимодействие плазмы с электромагнитным полем (доклады на секциях электроники СВЧ, общей электроники и электродинамики СВЧ)

Предметом обсуждения на многих секциях были важнейшие проблемы современной радиоэлектроники. Так, на секции электродинамики СВЧ, электроники СВЧ и общей электроники было представлено большое количество докладов, посвященных исследованию различных процессов взаимодействия плазмы с электромагнитным полем. Теоретические и экспериментальные работы были посвящены рассмотрению ряда основных вопросов: нелинейных явлений при распространении электромагнитных волн в плазме, использованию различных эффектов в плазме для усиления и генерации электромагнитных волн, распространению электромагнитных волн в плазменных волноводах, возбуждению электромагнитных волн в плазме электронными и ионными пучками. Исследования, посвященные этим вопросам, уже давно ведутся в Советском Союзе. Работы, доложенные на конференции, свидетельствуют о значительном развитии этой тематики в высших учебных заведениях СССР.

В работе О. Г. Загороднова, Я. Б. Файнберга, Б. И. Иванова, В. С. Уса, Л. И. Болотина были экспериментально исследованы нелинейные искажения синусоидальных электромагнитных волн, распространяющихся в цилиндрическом плазменном волноводе. Авторы получили зависимости  $a_n/a_1$  ( $a_n$  — амплитуда  $n$ -ой гармоники) от расстояния, пройденного волной в плазме, от плотности плазмы и от амплитуды сигнала. Увеличение параметра нелинейности приводит к тому, что форма сигнала приближается к пилообразной. Дальнейшее увеличение ведет к еще более сильным искажениям, которые появляются, по-видимому, благодаря возникновению встречных движений электронов.

В докладе В. Е. Голанта и А. П. Жилинского были рассмотрены нелинейные эффекты, сопровождающие распространение волн через волноводы с плазмой. Экспериментальное исследование зависимости фазового сдвига волны в волноводе, заполненном плазмой, от амплитуды напряженности электрического поля проведено в трех- и десятисантиметровых диапазонах волны. Исследовалась плазма положительного столба газового разряда в аргоне и гелии для диапазона давлений 0,2 — 2 мм рт. ст. Экспериментальные результаты согласуются с результатами расчета, проведенного на основе теории положительного столба Шоттки.

В работе В. Д. Шапиро теоретически исследована устойчивость продольных нелинейных колебаний электронов плазмы по отношению к возмущениям, длина волны которых мала по сравнению с длиной волны стационарного потенциала. Показано, что в ряде случаев нелинейные продольные волны неустойчивы. Получен общий критерий

неустойчивости для таких волн, являющийся обобщением известного критерия Пенроза неустойчивости равновесного состояния плазмы.

Работы О. Г. Загороднова, Я. Б. Файнберга, А. М. Егорова, Л. И. Болотина, а также работы В. И. Курилко и В. И. Мирошниченко посвящены исследованию распространения электромагнитных волн в движущейся плазме, О. Г. Загороднов, Я. Б. Файнберг, А. М. Егоров, Л. И. Болотин для  $H_{011}$  волны в прямоугольном резонаторе с первоначальной длиной волны  $\lambda = 10,55$  см в результате «схлопывания» плазмы получили волны с  $\lambda < 4,6$  см.

В работе В. И. Курилко рассмотрен эффект Доплера при отражении электромагнитных волн от плазмы, движущейся в волноводе медленных волн, обладающем дисперсией. Показано, что в случае нормальной дисперсии существует максимальная частота отраженной волны и максимальный коэффициент умножения частоты. Показано, что плазменное полупространство достаточно высокой плотности, движущееся вдоль оси спирального и плазменного волноводов, полностью отражает падающую на него электромагнитную волну.

Доклад В. И. Курилко и В. И. Мирошниченко посвящен кинетическому рассмотрению вопроса об отражении электромагнитных волн от плазмы, движущейся вдоль постоянного и однородного магнитного поля в среде, где фазовая скорость волн замедлена.

В ряде докладов были изложены результаты исследований распространения электромагнитных волн в плазменных стержнях, находящихся в свободном пространстве, гладких или спиральных волноводах.

Детальный анализ распространения электромагнитных волн в плазменных волноводах дан в экспериментальных работах О. Г. Загороднова, А. М. Егорова, Л. И. Болотина, А. Ф. Кившика, С. С. Кривули и В. А. Мерзлякина (3 доклада). Используя различные методы исследования плазменных волноводов, авторы получили ряд интересных результатов для плазменного волновода в режиме стоячей волны при измерении шунтового сопротивления плазменного волновода, а также при исследовании дисперсионных свойств комбинированной замедляющей системы плазменный волновод-спираль. Необходимо отметить, что измерения производились как для изотропной, так и для анизотропной плазмы. Аналогичные измерения проведены также (для изотропной плазмы) в работе С. М. Левитского и Н. С. Баранчука.

В работе В. П. Шестопалова и И. П. Якименко подробно исследованы дисперсионные свойства системы спираль-плазма. Показано, что при уменьшении угла намотки спирали различие в замедлении прямых и обратных волн возрастает. Рассмотрено распространение несимметричных волн, выявлено влияние соударений в плазме на затухание волн и т. д.

Доклад Н. А. Кузьмина посвящен вариационному методу расчета волноводов, частично заполненных пиротропной средой.

Задача о распространении электромагнитных волн в волноводе, заполненном кусочно-однородной слабо релятивистской плазмой со стационарной неравновесной функцией распределения электронов по импульсам, при наличии постоянного магнитного поля, приложенного вдоль оси системы, рассмотрена в работе А. В. Гапонова и М. И. Петелина. Получено дисперсионное соотношение для электромагнитных волн, распространяющихся в системе. В случае малых концентраций плазмы найдены условия неустойчивости электромагнитных колебаний.

Доклад Я. М. Туровера посвящен обсуждению возможности описания плазменной замедляющей линии телеграфными уравнениями.

В работе В. Д. Ивановой и В. С. Михалевского экспериментально исследована возможность управления частотой генератора типа ЛБВ, помещенного внутри плазменной трубки с конечным отношением радиусов внешней и внутренней стенок, путем изменения собственной частоты плазмы.

Доклад Ю. Ф. Филиппова посвящен изучению магнитогидродинамических колебаний среды в резонаторах и волноводах.

В работе Ю. Н. Днестровской и Д. П. Костомарова рассматриваются электромагнитные волны в плазме, распространяющиеся поперек внешнего магнитного поля; исследуется поведение корней дисперсионного уравнения в окрестности циклотронных резонансов.

Несколько докладов были посвящены изучению взаимодействия плазмы с электронными и ионными пучками. М. С. Ковнер методом кинетического уравнения рассмотрел устойчивость потока заряженных частиц и плазмы по отношению к низкочастотным возмущениям. Поток частиц предполагался движущимся вдоль внешнего магнитного поля, поток и плазма считались неограниченными и вся система в целом — квазинейтральной. Найдены области неустойчивости и коэффициенты нарастания в различных случаях.

Доклад В. О. Рапопорта посвящен феноменологическому методу решения задачи о нарастании электромагнитных волн в потоке плазмы, движущемся в плазме при наличии магнитного поля. Найдены коэффициенты нарастания для черенковского

излучения. Приводятся также формулы для коэффициентов нарастания в различных предельных случаях.

В работе В. Д. Шапиро рассмотрено торможение электронного пучка в результате взаимодействия с коллективными колебаниями плазмы. Изменение функций распределения электронов и ионов плазмы со временем получено путем решения уравнения, аналогичного уравнению Фоккера—Планка, в котором, однако, учтены коллективные «соударения» в плазме.

В докладе М. А. Гинцбурга на основе кинетического уравнения произведен детальный анализ взаимодействия плазмы с ионными пучками. Рассмотрены возможные применения полученных результатов для объяснения микропульсаций земного магнитного поля, а также генерации магнитогиродинамических волн.

В двух докладах были обсуждены некоторые вопросы высокочастотного пробоя в разреженных газах. В работе С. Б. Моченева теоретически исследовано влияние неоднородности электромагнитного поля на характеристики пробоя. В докладе Г. Н. Застенкера, Г. С. Солнцева и Б. Н. Швилкина приведены результаты экспериментального исследования формирования разряда при частотах 3–20 мГц и давлениях 0,3–30 мм рт.ст.

И. А. Савченко и А. А. Зайцев рассказали о результатах экспериментального исследования электронных колебаний плазмы.

## 2. Секция электроники СВЧ

На заседаниях секции электроники СВЧ, кроме докладов по взаимодействию плазмы с электромагнитным полем, были заслушаны доклады, большинство которых посвящено теоретическому и экспериментальному исследованию электронных приборов СВЧ.

Работа секции открылась докладом В. С. Ганзбурга и В. Г. Кармазина, в котором был дан обзор состояния техники мощных усилительных клистронов. В пяти следующих докладах были изложены результаты исследования различных клистронов.

Доклад Я. Я. Акментыньша, И. М. Блейваса, С. Д. Зусмановского и И. Н. Кальвиной посвящен теоретическому исследованию взаимодействия сгруппированного электронного потока с СВЧ полем большой амплитуды с учетом пространственного заряда. В работе Б. Г. Гордеева введено понятие коэффициента качества отражательного клистрона, равное произведению диапазона электронной настройки на КПД. Рассмотрены условия получения максимальной величины коэффициента качества.

Д. М. Петров доложил об умножении частоты с помощью отражательного клистрона.

В докладе В. Ф. Москаленко и Д. М. Петрова рассмотрено влияние пространственного заряда и конечных размеров потока на каскадную группировку электронов и частотную зависимость усиления в многорезонаторных клистропах.

В работе Г. Ф. Михайлова, Д. М. Петрова и М. И. Соловьева выполнен теоретический анализ преобразования (умножения и деления) частоты при каскадной группировке электронов в различных случаях такого преобразования (с помощью двухрезонаторного пролетно-отражательного клистрона, пролетного трехрезонаторного клистрона с тремя заторами).

Весьма значительная часть докладов на секции электроники СВЧ была посвящена взаимодействию прямолинейных электронных потоков с электромагнитным полем и, в частности, исследованию ЛБВ, ЛОВ и ЗВЛ.

В докладе В. М. Лопухина и А. Ф. Терещенко формулируется теорема о квантовой мощности  $n$ -лучевого потока. Теорема применяется для исследования механизма нарастания потока мощности в двухлучевой лампе.

Нелинейной теории двухлучевой лампы посвящен доклад Н. А. Хижняка. Задача о распространении электромагнитных сигналов в системе, состоящей из двух бесконечных пучков, исследуется в переменных Лагранжа.

Линейная теория двухлучевых ЛОВ и ЛБВ изложена в докладе В. М. Лопухина, А. С. Рошаль и Г. А. Кузьминой.

Взаимодействие электронного пучка с полем спирали в области поглощающей вставки исследуется в работе Ю. Н. Пчельникова. Оценивается мощность, рассеиваемая в области вставки, что дает возможность определить КПД ЛБВ в зависимости от параметров и положения вставки. Аналогичный вопрос рассмотрен также в работе А. М. Каца в рамках нелинейной теории ЛБВ.

В докладе А. М. Каца, М. Б. Цейтлина и Ю. М. Надежкина приводится анализ уравнений для определения постоянной распространения в ЛБВ, полученных различными авторами, в связи с вопросом о характеристическом уравнении ЛБВ при конечных значениях параметра усиления.

Анализ работы ЛОВ «М» типа при больших сигналах проведен в работе М. Б. Цейтлина, а в докладе М. Б. Цейтлина и Е. М. Ильиной изложены результаты теоретического исследования ЛБВ с полным пучком.

В работе В. М. Лопухина и В. П. Мартынова проведен расчет электронно-лучевого усилителя обратной волны с накачкой, осуществляемой с помощью волны пространственного заряда, с удвоенной частотой сигнала. Вопросу о взаимодействии электронного пучка с замедленной электромагнитной волной в ЛОВ посвящен доклад Ю. В. Корниенко и Ю. А. Белова.

В работе В. А. Малышева и В. С. Михалевского на основе кинематических представлений отыскивается простой вид колебательной характеристики генератора на ЛБВ, у которого имеет место большое нарастание амплитуды волны на длине замедляющей системы.

В. А. Двинских доложил результаты измерений параметров ЛБВ в режиме самовозбуждения, а В. И. Канавец—результаты экспериментального исследования измерения амплитуды третьей гармоники тока в электронном пучке, движущемся в цилиндре дрейфа на выходе ЛБВ, в зависимости от расстояния вдоль пучка, потенциала цилиндра дрейфа и мощности высокочастотного сигнала, подаваемого на вход ЛБВ.

В. И. Новоселец в своей работе рассматривает колебания тока релаксационного типа, возникающие в длинных электронных пучках при наличии продольного фокусирующего магнитного поля. Эти колебания увеличивают на несколько порядков шумы ЛОВ типа «О».

В докладе С. А. Ахманова и В. Н. Ештокина изложены результаты экспериментального исследования флюктуаций амплитуды и фазы в СВЧ генераторе с распределенной нелинейностью (ЛБВ с внешней обратной связью).

Доклад П. В. Блюха и Э. А. Канера посвящен рассмотрению взаимодействия электронного пучка с электромагнитными волнами в неограниченном анизотропном диэлектрике. Исследована зависимость коэффициентов усиления и генерации от углов, характеризующих направления распространения волны и пучка в одноосном кристалле. Показано, что в зависимости от соотношения между различными параметрами пучка и диэлектрика неустойчивость может быть как абсолютной, так и конвективной.

В двух работах исследуется взаимодействие непрямолинейных электронных потоков с электромагнитным полем. В. К. Юлпатовым рассмотрена самосогласованная нелинейная задача о взаимодействии трохондального электронного пучка с полем бегущей волны и пучка, направляемого однородным магнитным полем, с полем резонатора. Энергетический обмен между спиральным пучком и полем  $H_{01}$ -волны постоянной амплитуды в круглом волноводе рассмотрен в работе И. А. Гилинского.

С. П. Капица, В. П. Быков и В. Н. Мелехин доложили о получении электронных ступок с помощью циклического ускорителя электронов—микротрона.

В двух докладах А. А. Тиктин изложил результаты исследований по тепловым явлениям в электронных приборах СВЧ.

В докладе А. Н. Букина и М. М. Филиппова рассматриваются вопросы взаимодействия электрического поля медленной волны и электронного пучка с целью получения изображения волны на экране электронно-лучевой трубки. Доклад Г. П. Прудковского посвящен описанию трактографа для высокочастотных систем.

### 3. Секция электродинамики СВЧ

На секции электродинамики СВЧ, кроме докладов, посвященных распространению электромагнитных волн в плазме, обсуждались вопросы электродинамики замедляющих систем, волноводов и резонаторов.

Е. Г. Соловьевым изложена теория распространения электромагнитных волн в замедляющей системе в виде косой «ребенки», помещенной на широкой стенке прямоугольного волновода. При решении использовалась неортогональная система координат.

В докладе В. П. Шестопалова и О. А. Третьякова с помощью вариационного метода исследованы дисперсионные свойства замедляющих систем для мощных ЛБВ, названных нарезным волноводом с узкими перемычками и ужесточенной двойной спиралью с обратной намоткой.

Известный из теории волноводов эквивалентный статический метод расчета неоднородностей обобщен И. Ш. Белугой на периодические структуры и, в частности, применен к расчету дисперсии и сопротивления связи резонаторных замедляющих систем.

И. М. Чиркиным была предпринята попытка дать более общее толкование понятия противофазных и синфазных волн, применимое к волнам, распространяющимся практически в любой волноводной системе, в том числе и не обладающей геометрической симметрией.

Расчету параметров многопроводных линий с круглыми проводниками были посвящены доклады В. М. Дашенкова и И. Ш. Белуги.

В докладах Б. Г. Цикина и В. С. Коваленко, В. С. Коваленко и Н. М. Чиркина, а также в представленном в письменном виде докладе Л. Н. Безматерных и А. Н. Диденко рассмотрены различные методы расчета диафрагмированных волноводов.

Результаты расчета двумерно-периодических штыревых «гребенок» приведены в докладе Е. С. Коваленко.

Аналізу модулированной замедляющей системы типа «встречные штыри» было посвящено сообщение В. Е. Чайки.

А. С. Бондарев и Г. Ф. Семенов дали обоснование метода для приближенного расчета сопротивления связи спиральной замедляющей системы с диэлектрическими стержнями произвольного поперечного сечения.

К указанному кругу вопросов примыкают также доклады Б. А. Солнцева, А. А. Воробьева, А. И. Диденко и Е. С. Коваленко, посвященные исследованию ускоряющих систем—резонаторных и волноводных—для циклических ускорителей элементарных частиц.

М. С. Лифшиц применил основные положения спектральной теории несамосопряженных операторов к определению полей в резонаторных системах с несколькими каналами ввода в вывода энергии, а также к анализу распространения волн в нецилиндрических волноводах.

В докладе В. Н. Кессениха рассмотрен вопрос о применении методов теории цепей к расчету влияния сосредоточенных неоднородностей в однопроводных линиях, длина которых велика по сравнению с длиной волны.

В докладе И. А. Шехтмана описан квазистатистический метод расчета параметров линии, эквивалентной волноводу с волной поперечно-электрического типа.

Расчету направленных ответвителей были посвящены доклады А. Н. Ахизера и В. А. Сосунова и В. А. Кошкарова.

В докладах Н. М. Ковтуна и А. И. Терещенко, В. А. Коробкина и А. И. Терещенко исследовались характеристики ферритовых фазовращателей, построенных на волноводах сложной формы поперечного сечения, а также вопросы перестройки ферритом  $H$ -резонаторов. Результаты расчета параметров  $H$ -волновода, частично или полностью заполненного изотропным диэлектриком, приведены в докладе Л. П. Яцук, В. М. Дмитриева, А. Ф. Зоркина, Н. В. Ляпунова, В. М. Седых.

Э. Л. Куликовым описан вариационный метод расчета цилиндрических волноводов, частично заполненных гиротропной средой.

Ю. Ф. Филিপповым выполнен анализ магнитогидродинамических колебаний проводящей среды, заполняющей цилиндрические резонаторы и волноводы.

Теоретическое и экспериментальное исследование возможностей использования метода симметричных аналогов для измерения параметров волноводных и коаксиальных согласующих СВЧ трансформаторов проведено в работе Н. М. Советова, В. А. Климова, Е. И. Нефедова.

Ю. С. Архангельским, В. Р. Мерцлиным и И. А. Шехтманом произведен расчет calorиметрических эквивалентов антенн, содержащих диэлектрик с высокой проницаемостью.

Н. М. Советовым рассчитан коэффициент отражения от конического отрезка спиральной линии, причем последняя была заменена спирально-проводящей поверхностью.

А. Н. Сивовым получена система граничных условий для частой решетки из параллельных проводов, которая может быть использована для анализа распространения электромагнитных волн в спиральных волноводах с учетом формы и относительных размеров провода.

Доклад Ю. В. Корниенко был посвящен вопросу построения асимптотического решения волнового уравнения с малой нелинейностью при граничных условиях, заданных на замкнутой цилиндрической поверхности.

Теоретический анализ процесса распространения волн в нелинейных линиях в двух предельных случаях: а) большой дисперсии и б) отсутствия дисперсии проведен в работе Р. В. Хохлова.

Л. А. Островским рассмотрено распространение электромагнитных волн в распределенных параметрических системах с различными видами дисперсии.

#### 4. Секция общей электроники

На заседаниях секции обсуждалось 15 докладов. Ряд докладов был посвящен рассмотрению различных вопросов электронной оптики. В докладе В. Т. Овчарова дан строгий вывод уравнения параксиальной оптики электронных пучков с большой плотностью тока и указаны методы использования полученных результатов для расчета формирования электронных пучков в СВЧ приборах. В докладе Н. С. Зинченко и В. М. Сорокиной приведен расчет распределения потенциала в трубчатых электронных лучках, а в работе И. К. Овчинникова и Н. С. Зинченко получены оценки погрешности метода исследования лучков с помощью вибрирующего зонда.

В докладе Г. Н. Застенкера, Г. С. Солнцева, Б. Н. Швилкина и работе С. Б. Моченева изложены результаты исследования высокочастотного разряда. В первом рассмотрен процесс установления стационарного ВЧ разряда низкого

давления в вакууме, во втором—влияние неоднородности поля на характеристики пробы.

В работе В А Малышева, исходя из совместного решения уравнения Пуассона и закона Шоттки, получено аналитическое выражение, определяющее ход вольтамперной характеристики плоского диода в области насыщения.

Два доклада Г С Михайлова, И. Г. Фронина, И. Н. Акимовича, Г. Н. Преснякова были посвящены изучению испарения металлического хрома под действием электронной бомбардировки и применению его в сорбционно-ионном насосе в качестве сорбирующего агента.

На заседаниях секции были заслушаны также доклады И А Савченко, А. А. Зайцева «Исследование высокочастотных колебаний плазмы», М. М. Карлинера, Ю. К. Сорокина «Метод градуировки диодных генераторов шума, основанный на принципе взаимности», А. И. Вишневецкого «Некоторые пути миниатюризации приборов с термоэлектронным катодом», Д. В. Сорокина, А. П. Беляевой «ЭлектрOLUMИнесцентные знаковые индикаторы», Я М Бойко «Исследование одновременного влияния электро-и фотовозбуждения на свойства некоторых люминофоров», Р. Г. Романец «Исследование фотопроводимости некоторых органических систем» и В Н Костина «О влиянии магнитного поля на работу счетчика фотонов».

### 5. Секция квантовой радиобифики

Ряд докладов на секции был посвящен ядерному магнитному резонансу А. А. Галкина и М. В. Матяш доложили результаты изучения релаксации ядерных спинов адсорбированных водорода и гелия методом спинового эхо.

Доклад А. А. Галкина, Ю. А. Браташевского, В. П. Лобачева, М. В. Герасименко посвящен описанию супергетеродинного спектроскопа трехсантиметрового диапазона со стабилизацией частоты сигнального и гетеродинного клистронов.

А. А. Галкин и В. П. Набережных рассказали про обнаруженные ими новые линии магнитного поглощения ряда металлов: лития, алюминия, меди. Эти линии обнаруживаются лишь при температуре жидкого азота. Доклад Ю. С. Константинова и Н. Н. Дзбановского посвящен применению параметрически возбужденного контура для наблюдения парамагнитного резонанса.

Обобщение понятия эффективной температуры для систем с отрицательным поглощением дано в докладе Ф. В. Бункина. В другом его докладе обсуждены тепловые флуктуации в нелинейных системах.

Несколько докладов были посвящены процессам, протекающим в ферритовых средах. В докладе И. А. Дерюгина, В. В. Данилова, П. С. Жуца, И. П. Пугача приводятся результаты по выращиванию монокристаллов некоторых ферритов и их исследование в трехсантиметровом диапазоне. Измерению магнитной и диэлектрической проницаемости смесей ферромагнитных порошков с парафином в диапазоне  $500 \div 40000$  мГц посвящен доклад И. А. Дерюгина и М. А. Сигала. В работе Л. А. Шишкина и М. А. Савченко определяется интенсивность шумов ферритовых усилителей, связанных с флуктуациями намагниченности ферритового элемента устройства.

В. М. Файном и Я. И. Ханников рассмотрены условия создания когерентных колебаний в распределенных спиновых системах. Анализируется возможность возбуждения волн намагниченности (спиновых волн) в различных магнитных системах.

Ряд докладов посвящен теории молекулярного генератора. В работе В. С. Троицкого, А. И. Наумова, Б. С. Иванова разрабатывается молекулярно-кинетическая теория образования пучка молекул в вакууме, а также приводятся результаты экспериментального исследования диаграмм направленности и интенсивности пучка молекул аммиака при истечении в вакуум из каналов.

Доклад Г. Л. Сучкина и Г. К. Раковой посвящен исследованию возможности возбуждения колебаний  $E_{010}$  в резонаторе молекулярного генератора, а в докладе Г. Л. Сучкина дан расчет открытых резонаторов.

В докладе А. М. Глуцкого, В. М. Которовича и Г. Е. Черняка изложена теория масера с бегущей волной.

Два доклада Ю. Е. Дьякова были посвящены теории усилителя с шумовой и усилителя с почти синусоидальной накачкой. В докладе А. С. Тагера показано, что связь между коэффициентом усиления и шириной полосы регенеративного усилителя, определяющая качество усилителя, существенно зависит от характеристик его колебательной системы. Путем использования многоконтурных колебательных систем или специальных согласующих трансформаторов можно существенно (больше, чем на порядок) увеличить полосу регенеративного усилителя по сравнению с полосой обычного одноконтурного усилителя.

Усилению и преобразованию частоты в широком электронном потоке посвящен доклад В. А. Солищева.

В. Е. Мицук рассказал об эксперименте по обнаружению эффекта Штарка в

переменном поле частоты 9400 мгц на линии бальмеровской серии с помощью методов оптической спектроскопии.

В докладе С. А. Ахманова, Ю. Е. Дьякова, А. К. Романюка и М. М. Струковой были приведены результаты теоретического и экспериментального исследований факторов, определяющих стабильность частот колебаний, генерируемых двухконтурным полупроводниковым генератором

В докладе С. А. Ахманова, А. С. Горшкова, В. Г. Дмитриева и В. Ф. Марченко обсуждаются возможности и эффективность смещения, умножения и деления частоты в нелинейных волноводных системах.

Ю. А. Кравцовым исследованы явления насыщения в усилителях на полупроводниковых диодах.

Доклад В. И. Трифонова содержит анализ колебаний в схемах со многими степенями свободы, содержащих переменную емкость.

### *6. Секция распространения радиоволн и радиоастрономии*

На секции было обсуждено 37 докладов и сообщений, посвященных некоторым вопросам радиоастрономии, экспериментальным и теоретическим исследованиям распространения радиоволн в неоднородных средах, методике изучения структуры ионосферы и специальным антенным системам.

Первое заседание секции открылось докладом Г. Г. Гетманцева «Синхротронный механизм космического радиоизлучения в свете новых радиоастрономических данных», где новейшие экспериментальные данные интерпретируются с точки зрения синхротронного механизма космического радиоизлучения. Г. Г. Гетманцев рассказал также о работе радиоастрономической комиссии на XIII Генеральной Ассамблее Международного Радиосоюза в Лондоне (сентябрь 1960 г.).

Значительная часть докладов содержала различные экспериментальные данные о распространении электромагнитных волн в случайной-неоднородных средах.

В докладе А. А. Семенова, Г. А. Карпеева, П. Е. Кубасова и Н. Д. Филиппа были представлены данные экспериментального исследования временной и пространственной корреляции амплитудных флюктуаций поля УКВ в различных метеослосах.

А. В. Мень доложил о результатах спектрального анализа флюктуаций разностей фаз, измеренных в разнесенных точках. Измерения охватывали области освещенности, тени и полутени. В другом докладе А. В. Мень рассказал о приближенном методе исследования нестационарных спектров и результатах эксперимента по изучению нестационарных спектров флюктуаций разностей фаз.

В сообщении В. А. Зиничева обсуждалась возможность изучения корреляционной функции флюктуаций показателя преломления атмосферы путем корреляционного анализа волн, рассеянных под углом и назад при вертикальном зондировании атмосферы. Экспериментальные данные, полученные при изучении волн сантиметрового диапазона, рассеянных в атмосфере под большими углами, обсуждались в докладе В. А. Зиничева, Ю. А. Рыжова и О. И. Юдина.

С. Ф. Миркотан и И. А. Бирилин сообщили об установке для одновременной регистрации на киноплёнке флюктуаций амплитуды и фазы рассеянного поля.

Ф. Г. Бассом и Э. А. Канером были приведены результаты расчетов флюктуаций фазы и амплитуды радиоволн в области тени, где среднее поле определяется дифракционными формулами, а флюктуации обусловлены волнами, рассеянными на турбулентных неоднородностях атмосферы. В докладе Ф. Г. Басса была изложена теория рассеяния волн на неровных поверхностях, основывающаяся на локальных граничных условиях. Н. Г. Денисов сообщил о расчете флюктуаций амплитуды и фазы электромагнитной волны, прошедшей через хаотически неоднородный слой магнитоактивной плазмы.

О влиянии флюктуаций в падающей волне на дифракционную картину в плоскости линзы рассказал Я. С. Шифрин. В докладе М. С. Ландкофа и Я. С. Шифрина рассмотрен вопрос о статистике фокусирующих систем.

Доклад Я. Д. Ширмана посвящен статистическому анализу оптимального решения.

Небольшая часть работ, представленных на секции, была посвящена расчету рефракции радиоволн. В докладе В. И. Иванчикова приведены результаты точного расчета углов прихода и горизонтальной дальности для плоских слоев. В. А. Мисюра доложил о приближенном методе расчета рефракции, группового и фазового запаздывания радиоволн в атмосфере Земли. Задача решалась в лучевом приближении в случае, когда коэффициент преломления зависит от трех координат. Результаты численного расчета рефракции и запаздывания радиоволн в атмосферных и ионосферных слоях приведены в докладе В. А. Мисюры, В. Н. Румянцев и А. С. Фирсова.

В нескольких докладах обсуждались результаты исследования структуры ионосферы и условий распространения радиоволн в ионосфере. Л. В. Гришкевич в двух докладах рассказал о результатах эксперимента, поставленного для определения

времени жизни мелкомасштабных ионосферных неоднородностей и дрейфов ионосферных неоднородностей в слоях *E* и *F*. Наблюдения производились методом пространственно-разнесенного приема с малой базой на частотах  $2 \pm 0,2$  мГц и в диапазоне 2—10 мГц. В докладе В. Д. Гусева и Ю. В. Березина обсуждалась методика обработки ветровых ионосферных измерений, основывающаяся на корреляционном методе.

Доклад В. А. Мисюры, И. Ф. Хлестакова и Н. Н. Минервина посвящен обсуждению методики, основывающейся на использовании Доплера, эффекта Фарадея, запаздывания и рефракции волн, для изучения параметров ионосферы. О расчетах фазового и группового пути сигнала в связи с методикой измерения электронной концентрации в ионосфере сообщили Э. Е. Митяков, Н. А. Митяков и В. О. Рапопорт. В докладе Б. С. Шапиро проведен расчет распределения ионизации с высотой с помощью электронной цифровой машины «Стрела».

О результатах измерений поглощения радиоволн в ионосфере методом А-2 и результатах ионосферных наблюдений, проведенных на шхуне «Заря», рассказал Г. В. Васильев. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов и Л. М. Ерухимов сообщили о данных измерения поглощения радиоволн в ионосфере на частоте 30 мГц в условиях наклонного падения. В экспериментах использовалось радиополучение дискретного источника, находящегося в созвездии Лебедь.

Результаты измерения поляризации радиоволн, отраженных от ионосферы, и их обсуждение с точки зрения магнито-ионной теории составили содержание работы Б. Л. Кашеева и В. И. Тарана. В. И. Таран в отдельном докладе рассказал о принципах работы поляриметра в диапазоне  $2 \pm 6$  мГц и методике измерения поляризации с помощью этого прибора.

Об исследованиях условий распространения УКВ сообщалось в докладах Ч. Ц. Цыдыпова «Некоторые результаты экспериментального исследования распространения УКВ», П. М. Трифонова «К исследованию поля при сверхдальнем телевизионном приеме» и П. М. Трифонова, В. Н. Будко и В. С. Зотова «О некоторых итогах дальнего радиоприема в диапазоне 40—100 мГц».

Ряд докладов на секции был посвящен специальным антенным системам. В докладе П. А. Майсурадзе описывается исключаящая поляризационные эмиграции антенная система, предназначенная для исследования дрейфа ионосферных неоднородностей и поглощения радиоволн в ионосфере.

Ю. А. Ковура и А. А. Семенов рассказали о применении и расчетах специального типа рупорно-линзовых антенн с одинаковыми апертурами и различными углами раствора их диаграмм направленности.

В работе Я. С. Шифрина рассмотрены флюктуации поля синфазной линейной антенны при наличии случайных фазовых ошибок источников, распределенных неравномерно вдоль системы. Два сообщения Ю. В. Шубарина и Т. Н. Анященко посвящены волноводно-щелевому излучателю с вращающейся поляризацией на полукруглом и круглом волноводах.

### 7. Секция общей радиотехники

На секции общей радиотехники было заслушано 12 докладов.

В докладе В. А. Тарасенко рассматривается найденный методами статистических решений алгоритм экстремального регулирования в присутствии помех и его моделирование на машине «Урал». Доклад А. Д. Закревского посвящен применению *n*-мерных полей при машинном синтезе релейных схем. В. Р. Кузьмин сообщил о получении гонимых электролитических пленок пермаллоя, предназначенных для использования в качестве запоминающих элементов в вычислительной технике.

К. А. Лонтович и М. С. Лонтович рассказали и продемонстрировали электронно-музыкальный инструмент «Эола».

Переходные процессы в многозвенном фильтре нижних частот с учетом потерь были рассмотрены Б. В. Елизаровым и Г. И. Макаровым. А. А. Бронникова привела результаты расчета пластинчатых электромеханических фильтров.

Работа В. И. Беспалова и А. М. Кубарева была посвящена формированию квазипрямоугольных импульсов тока в индуктивной нагрузке.

Л. И. Гудзенко исследовал спектр сигнала при малых флюктуациях автогенератора; в докладе Ю. Э. Аптека и А. М. Гершта рассмотрена форма контура спектральной линии генератора.

А. Б. Орлов и П. Н. Занадворов исследовали один из вариантов системы фазирования с автоматической подстройкой частоты.

В сообщении И. И. Рофман приведены расчеты схем на функциональных элементах.

В докладе В. В. Акиндинова определяется помехоустойчивость приемника, идеального в смысле Котельникова, при передаче любого числа дискретных ортогональных и неортогональных сигналов по одностороннему каналу с шумами, содержащими мультипликативную и аддитивную компоненты.

В. Н. Яновский рассказал о работе опытного образца полуавтомата для разбраковки ферритовых сердечников по  $\mu$  и  $Q$  при серийном производстве.

Некоторые вопросы телевизионной автоматки обсуждались в докладе В. С. По-  
лоник.

### 8. Секция полупроводников

На секции полупроводников ряд докладов был посвящен изготовлению и приме-  
нению полупроводников в радиотехнике. В докладе Ю. Г. Крюкова приведены не-  
которые результаты работ по созданию смесителей, кварцевых автогенераторов, уси-  
лителей радиочастот на транзисторах. Л. С. Берман разработал низкочастотный  
RC-сви́нггенератор, в котором качание частоты осуществляется путем изменения ем-  
кости варикапы при подаче на нее изменяющегося смещения. Частота сви́нггенератора  
изменяется во времени по линейному закону. Разработана схема преобразователя  
постоянного тока в переменный на варикапах.

И. Н. Ваченин, П. Е. Жандыба и А. И. Иванов доложили о результатах  
теоретического и экспериментального исследования спектров флюктуаций амплитуды  
и частоты полупроводникового автогенератора Ю. И. Воронцов и К. С. Ржев-  
кин провели анализ принципиальной схемы широкополосного и резонансного уси-  
лителей на туннельных диодах. Экспериментальная проверка подтвердила результаты  
расчетов. А. И. Гомонова, Л. Н. Жулумбегова и К. Я. Сенаторов рас-  
сказали о результатах исследования триггерной схемы на  $p-n-p-n$  структурах. В  
работе В. Б. Брагинского, В. А. Диановой и Е. Р. Мустеля исследован  
умножитель на нелинейной емкости  $p-n$  перехода.

А. С. Афиногенов сообщил об особенностях проектирования, изготовления и  
применения полупроводниковых усилителей следящих систем.

В. Я. Майстровой и А. С. Галенко разработали универсальный перенос-  
ный измерительный прибор для измерения напряжений, токов и др. на полупровод-  
никах.

В докладе Ю. Р. Носова рассмотрены методы изготовления полупроводнико-  
вых импульсных диодов Л. А. Зубрицкий, Э. Д. Прохоров, Н. А. Шеховцов  
доложили о результатах разработки и исследования конструкции импульсных полу-  
проводниковых диодов на германевой основе.

Некоторые доклады были посвящены исследованию процессов в полупроводни-  
ках. Измерения электропроводности и эффекта Холла черного карбида кремния были  
произведены Г. П. Зубриным, В. А. Малышев исследовал зависимость прово-  
димости полупроводников от электрического поля малой напряженности. Свойства  
германия, легированного никелем и золотом, и возможности его применения в транзи-  
сторной электронике изучались в работе О. М. Копыталова.

В. В. Борзенко доложил о результатах работы по использованию эффекта на-  
копления для измерения времени жизни неосновных носителей. В докладе Л. А. Зуб-  
рицкого и Н. А. Шеховцова рассмотрены возможности использования эф-  
фекта экстракции для улучшения импульсных характеристик транзисторов. Использо-  
вание лонной бомбардировки для управления рассмотрено в докладе И. А. Рыжак.  
О теории переходных процессов в полупроводниковых диодах рассказал Л. И. Баран-  
ов. Р. Н. Бондаренко, И. Г. Стреха и В. И. Самбур посвятили свой  
доклад изучению спектров шумов карбодокремниевого детектора на видеочастоте.

Ю. Н. Карханин сделал сообщение о Пражской конференции по полупровод-  
никам.

### 9. Секция радиоизмерений

Доклады на этой секции были посвящены разработке и исследованию кварцевых  
генераторов, измерениям параметров ЛОВ и ЛБВ, измерениям диэлектрических  
свойств веществ и новым методам измерений.

Л. Д. Брызжев доложил о разработке и эксплуатационных испытаниях квар-  
цевого генератора с суточной нестабильностью частоты менее  $\pm 3 \cdot 10^{-10}$ . В докладе  
Е. Д. Новгородова изложены результаты исследования зависимости декремента  
затухания от давления среды, которое проводилось у созданных кварцевых резона-  
торов в форме брусков, камертонов и чечевиц (двойковыпуклых линз). Доклад А. Г.  
Смагина посвящен дальнейшему повышению стабильности и уменьшению старения  
кварцевых генераторов.

В докладе Л. Б. Цукермана и М. М. Новикова дано описание частот-  
ногомера высокой точности, а в работе Б. И. Коварского и В. С. Удовенчика  
приведены данные о генераторе сигналов на СВЧ.

А. Н. Малахов, В. Н. Никонов и Т. Д. Разина сообщили об измерениях  
технической ширины спектральной линии генераторов.

Несколько докладов на секции были посвящены измерениям на ЛБВ и ЛОВ.

М. У. Муртазин доложил о результатах экспериментов на панорамной установ-  
ке, предназначенной для измерения некоторых параметров ЛБВ. А. Н. Бакушин,  
В. И. Гуртовой и Е. И. Черненко дали описание установки для осциллогра-  
фирования распределения осевого поля магнитных фокусирующих систем ЛБВ и ЛОВ,  
В. И. Правдина и В. В. Шаткина поделились опытом применения косвенного  
метода контроля качества внутриламповых поглотителей в ЛОВ.

Доклад А И Штырова и А Г Медокс был посвящен исследованию электрической неоднородности периодических структур интерференционным методом.

Р. А. Валитов, В Г Орлов и В Д Кукуш рассказали об эксперименте, в котором наблюдалось механическое действие СВЧ поля на помещенную в резонатор крыльчатку. В другом докладе этих же авторов описываются многопластинчатые пондеромоторные ваттметры

Метод измерения проходящей мощности, основанный на взаимодействии электромагнитной волны в волноводе с пространственным зарядом, предложили Л. А. Зубрицкий, В. А. Петров и А. И Терещенко.

В работе Е. А. Страхова приведены результаты, полученные при исследовании газоразрядных аттенуаторов СВЧ с электрическим управлением.

В. П. Шейко изложил соображения о возможности применения варикондов для измерения напряженности электрического поля в волноводе на СВЧ

Результаты измерения диэлектрической проницаемости монокристаллов этилсульфата лангана с примесью этилсульфатов гадолиния и церия на волне 3,2 см были приведены в докладе И Н Олейник, С А. Песковацкого, Г. И Повстовгарда, А. Н. Чернеца и Т. Г. Шейной

Доклад В. К. Ткача, Л Д Степина и В Б. Казанского посвящен измерению  $\epsilon$  и  $\text{tg } \delta$  жидких диэлектриков резонаторным методом на  $\lambda = 3,2$  см. Обоснование нового метода измерения  $\epsilon$  и  $\text{tg } \delta$  на СВЧ с помощью спирального резонатора выполнено в докладе К П. Яцук В докладе С А. Песковацкого и Т. Г. Шейной приводятся измерения  $\epsilon$  малых образцов в диапазоне СВЧ

Ю. А. Петренко и В. К Ткач привели результаты измерений молекулярных весов некоторых высокополимеров в растворе ультразвуковыми методами.

Новый вариант метода четырехполосника для определения сопротивлений контактов полупроводниковых диодов в диапазоне СВЧ предложил Ю. Ф. Соколов. Измерению электропроводности собственных полупроводников при эффекте Холла посвящен доклад Е. А. Домановой.

Описанию широкополосного стабилизатора СВЧ мощности посвящен доклад Р. А. Валитова и Е. А. Домановой.

В докладе Е. Е. Богатырева описан ядерный измеритель напряженности магнитного поля высокой точности. В работе И. А. Батыревой и А. М. Кубарева приводятся некоторые результаты экспериментального исследования импульсных магнитных полей.