

## К ТЕОРИИ СВЯЗАННЫХ РЕЗОНАТОРОВ

А. М. Белянцев

Получены интегро-дифференциальные уравнения, описывающие свободные и вынужденные колебания системы связанных резонаторов. Резонаторы связаны между собою через узкие параллельные щели в металлическом цилиндре, поперечные размеры которого много меньше длины волны исследуемых колебаний. Рассмотрены свободные колебания системы двух прямоугольных резонаторов, связанных между собою через узкую щель в «толстом» экране. Найдены дисперсионные характеристики ребристого волновода

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему резонаторов, связанных между собою посредством узких параллельных щелей, прорезанных в тонком металлическом цилиндре. Для простоты будем считать, что каждый резонатор имеет только одну щель\*. Очевидно, что связанные резонаторы можно рассматривать как „новый“ резонатор с новым спектром волновых чисел  $\bar{k}$ , и собственными функциями  $E$ , и  $H$ . Однако точное решение краевой задачи (отыскание  $\bar{k}$ , и  $E$ ,  $H$ ) при геометрии границ „неправильной“ формы, как известно, не представляется возможным.

В работах [1,2] показано, что краевая задача для уравнений Максвелла в случае резонатора с тонкими антеннами или узкими щелями может быть решена приближенно, если первоначально найти токи в антеннах или напряжения на щелях, а затем по найденным токам и напряжениям определить соответствующие им поля. Такой подход в случае связанных резонаторов, если связь осуществляется через щели в цилиндре, поперечные размеры которого значительно меньше длины волны рассматриваемых колебаний, а собственные поля для невозмущенных резонаторов (или однородные импедансные граничные условия на щелях) заданы, позволяет свести задачу о свободных и вынужденных колебаниях связанных резонаторов к исследованию системы интегро-дифференциальных уравнений для напряжений (или магнитных токов) на щелях.

## 2. ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вывод интегро-дифференциальных уравнений для напряжений (или магнитных токов  $J_p$ ) на щелях сводится, как известно, к отысканию продольных составляющих магнитного поля как функции напряжения по обе стороны от экрана, в котором прорезаны щели. Для узких щелей продольная составляющая магнитного поля на раскрыве щелевой антенны представляется обычно в виде двух частей [3] квазистационарной особенности и регулярной части поля:

$$H_z = \hat{L}J / \pi i \chi k Z_0 + H_z^{\text{per}} \{J\}. \quad (1)$$

\* Полученные в работе уравнения легко обобщаются на случай, когда резонаторы имеют по несколько щелей.

где  $\hat{L} = \partial^2/\partial z^2 + k^2$ ,  $k$  — волновое число,  $z$  — координата вдоль щели,  $Z_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}$  — импеданс свободного пространства,  $\chi = [\ln(l/a)]^{-1}$  — параметр малости ( $a$  — ширина щели,  $l$  — наименьший характерный размер пространственного изменения поля вблизи щели),  $H^{\text{per}}\{J\}$  — регулярная часть поля.

Регулярная часть поля в случае щелей, прорезанных в незамкнутом экране, как правило, значительно меньше квазистационарной особенности поля. Однако, когда щель прорезана в замкнутом экране, регулярная часть поля на раскрыве со стороны резонансной полости имеет особенности резонансного характера, которые могут быть того же порядка, что и квазистационарная особенность, а в ряде случаев и значительно превосходить ее (например, резонансное поле на раскрыве щели со стороны канавки, прорезанной в металлическом экране [4]). Поэтому из „регулярной“ части поля на раскрыве щелевой антенны со стороны резонатора целесообразно выделить в явном виде [1] члены резонансного характера:

$$H_z = \frac{\hat{L}J}{\pi i \chi k Z_0} - i \frac{k}{Z_0} \sum \frac{h_\nu H_{z\nu}}{k_\nu^2 - k^2} + \hat{H}_z^{\text{per}}(J), \quad (2)$$

где  $k_\nu$ ,  $H_\nu$  — собственные числа и собственные нормированные на объем функции невозмущенного резонатора,

$$h_\nu = \frac{1}{V} \int_S j^m H_\nu dS,$$

$$\int_V H_\nu H_\mu dV = -V \delta_{\nu\mu},$$

$$\delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1 & \nu = \mu \\ 0 & \nu \neq \mu \end{cases}$$

$S$  — поверхность щели,  $V$  — объем резонатора,  $j^m = [En]$  — плотность поверхностного магнитного тока,  $n$  — внешняя нормаль.

Для резонансной полости типа „канавка“ и других, для которых квазистационарная особенность поля на раскрыве щели с одной стороны экрана „отсутствует“ и структура электрического поля на щели известна, для выделения резонансных членов из регулярной части поля удобно воспользоваться однородным поверхностным импедансом, т. е. представить резонансную часть поля в виде [4]

$$H_z = j_z^m / Z, \quad (3)$$

где  $Z$  — однородный поверхностный импеданс (функция частоты, геометрии полости и типа колебаний).

Продольная составляющая магнитного поля на поверхности щели со стороны области связи (на внутренней поверхности цилиндра) является функцией  $N$  магнитных токов и для длин волн  $\lambda = 2\pi/k \gg R_0$  ( $R_0$  — поперечный размер цилиндра) может быть записана в виде [5]:

$$\tilde{H}_z^{\text{per}} = -\frac{1}{i\omega} \hat{L} \sum_{q=1}^N [\psi_p(x_p, y_p, j_q^m) - \psi_0(x_0, y_0, j_q^m)] + H_z^0 + O(R/\lambda). \quad (4)$$

Здесь  $\omega$  — циклическая частота,  $\sum \psi(x, y, j_q)$  — решение двумерной статической задачи\*,  $H_z^0$  — продольная составляющая магнитного поля в некоторой точке  $M(x_0, y_0)$  области связи,  $O(R/\lambda)$  — поле порядка  $R_0/\lambda \tilde{H}_z^p$ .

Обозначая

$$\psi_p(x_p, y_p, j_q) = \psi_0(x_0, y_0, j_q) = J_q \tilde{\chi}_{pq}^{-1} / \pi u,$$

уравнение (4) можно записать следующим образом:

$$\tilde{H}_z^p = - \frac{1}{\pi i k Z_0} \tilde{L} \sum_{q=1}^N \tilde{\chi}_{pq}^{-1} J_q + H_z^0 + O(R/\lambda). \quad (4a)$$

Поскольку точка  $M(x_p, y_p)$ , вообще говоря, произвольная точка в поперечном сечении области связи, то, интегрируя (4a) по поперечному сечению цилиндра и учитывая связь между полями  $E$  и  $H$ , нетрудно получить выражение для продольной составляющей магнитного поля  $H_z^0$ , которая для „закрытых“ систем (замкнутых экранов) может быть того же порядка, что и „квazистационарная особенность“  $\tilde{\chi}_{pq}^{-1} \tilde{L} J_q / \pi i k Z_0$ :

$$H_z^0 = - \frac{1}{\pi i k Z_0} \tilde{L} \sum_{q=1}^N \tilde{\chi}_{q, \text{ин}}^{-1} J_q + \frac{1}{i k Z_0 S_{\perp}} \sum_{q=1}^N J_q - O_{\text{ин}}(R/\lambda). \quad (5)$$

В (5)

$$\tilde{\chi}_{q, \text{ин}}^{-1} = (1/S_{\perp}) \int_{S_{\perp}} \tilde{\chi}_q^{-1}(x_p, y_p) dx_p dy_p,$$

$S_{\perp}$  — площадь поперечного сечения тонкого цилиндра.

$$O_{\text{ин}}(R/\lambda) = (1/S_{\perp}) \int_{S_{\perp}} O(R/\lambda) dS.$$

Полагая, что для  $N_1$  резонаторов поле на раскрые щели со стороны резонансной полости может быть задано в виде (2), а для остальных  $N - N_1$  резонаторов — в виде однородных импедансных условий (3), нетрудно из условия непрерывности магнитного поля на раскрые щелевой антенны получить для магнитных токов систему интегродифференциальных уравнений:

$$\tilde{L} \sum_{q=1}^N \tilde{\chi}_{pq}^{-1} J_q = \frac{\pi}{S_{\perp}} \sum_{q=1}^N J_q - \pi k^2 \sum_{p=1}^{N_1} \frac{h_p^p H_p^p}{k_{yp}^2 - k^2} + \pi i k Z_0 (M_p^{\text{ст}} + G_p) \quad (6)$$

$$(p = 1, 2, \dots, N_1);$$

$$\tilde{L} \sum_{q=1}^N \tilde{\chi}_{pq}^{-1} J_q = \frac{\pi}{S_{\perp}} \sum_{q=1}^N J_q + \pi i k Z_0 \left( \frac{J_p}{Z_p d_p} + M_p^{\text{ст}} + G_p \right) \quad (7)$$

$$(p = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N),$$

\* Здесь  $j_{qz}^m = -j_{qz}^m$ , причем знак  $\sim$  указывает на принадлежность к области связи. Индексы  $m$  и  $z$  в дальнейшем опускаются.

где

$$\chi_{pq}^{-1} = \tilde{\chi}_{pq}^{-1} + \delta_{pq} \tilde{\chi}_{-q}^{-1} - \tilde{\chi}_{q, \text{ин}}^{-1},$$

$$M_p^{\text{ст}} = \tilde{H}_p^{\text{ст}} - H_p^{\text{ст}},$$

$H_p^{\text{ст}}$  — стороннее поле, направленное по оси  $z$ ,

$$G_p = -\hat{H}_p^{\text{рег}} + O(R/\lambda) - O_{\text{ин}}(R/\lambda).$$

Уравнения (6) и (7) можно разрешить относительно  $\hat{L}J_m$  и привести к виду:

$$\hat{L}J_m = \frac{\pi \chi_{\perp} \chi_m}{S_{\perp}} \sum_{q=1}^N J_q - \pi k^2 \chi \sum_{q=1}^N x_{qm} [T_q - i \frac{Z_0}{k} (M_q^{\text{ст}} + G_q)] \quad (8)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N),$$

где  $\chi$  — единый параметр малости,  $x_m \chi = D_m/D$ ,  $x_m \sim 1$ ,  $x_{qm} \chi = A_{qm}/D$ ,  $D = \text{Det} |\chi_{pq}^{-1}|$ ,  $A_{qm}$  — адъюнкта  $q$ -ой строки  $m$ -го столбца определителя  $D$ ,

$$D_m = \sum_{q=1}^N A_{qm},$$

$$T_q = \begin{cases} \sum_v \frac{h_v^q H_v^q}{k_{vq}^2 - k^2} & (q \leq N_1) \\ -i \frac{Z_0}{k} \frac{J_q}{Z_q d_q} & (q > N_1) \end{cases}$$

Уравнения (6), (7) или (8) совместно с уравнением

$$h_v^m = \frac{1}{V} \int_{L_m} J_m H_{vz}^m dz \quad (9)$$

и граничными условиями на концах щелей

$$J_m(0) = J_m(L_m) = 0 \quad (10)$$

образуют полную систему уравнений для напряжений (или магнитных токов) на щелях. Уравнения (6)–(8), как нетрудно видеть, написаны с точностью  $\chi R_0/\lambda$ . Поэтому решение уравнений (6)–(10) при извест-

ной функциональной зависимости регулярных полей  $\hat{H}^{\text{рег}}$  от тока\* и заданных сторонних полях имеет смысл только до членов порядка  $\chi R_0/\lambda$ . Решение уравнений (6)–(10) может быть выполнено методом последовательных приближений по малому параметру  $\chi$ .

### 3. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ РЕЗОНАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ ЧЕРЕЗ ЩЕЛЬ В «ТОЛСТОМ» ЭКРАНЕ

Щель, прорезанную в толстом металлическом экране, очевидно, можно рассматривать как две щели в тонком цилиндре (см. рис. 1а). В этом случае колебания напряжения на щелях 1 и 2 будут описываться системой уравнений (6)–(10).

\* Регулярные поля вне области связи в ряде простейших случаев известны и могут считаться заданными линейными функционалами тока.

Для симметричной системы за точку  $M(x_0, y_0)$  удобно взять точку пересечения осей симметрии щели, что ведет к симметрии коэффициентов  $\chi_{pq}$  ( $\chi_{11} = \chi_{22}$ ,  $\chi_{12} = \chi_{21}$ ). Уравнения (8), (9) при этом легко приводятся к виду:

$$\frac{\partial^2 J_{\pm}}{\partial z^2} + k_{\pm}^2 J_{\pm} = \pi k^2 \chi_{\pm} \sum_{\nu} \frac{h_{\nu}^{\pm} H_{\nu}}{k_{\nu}^2 - k^2} + \pi i k Z_0 \chi_{\pm} (M_{\pm}^{\text{ct}} + G_{\pm}); \quad (11)$$

$$h_{\nu}^{\pm} = \frac{1}{V} \int J_{\pm} H_{\nu z} dz; \quad J_{\pm}(0) = J_{\pm}(L) = 0, \quad (12)$$

где

$$J_{\pm} = J_1 + J_2, \quad \chi_{\pm}^{-1} = \chi_{11}^{-1} \pm \chi_{12}^{-1}, \quad k_{-} = k,$$

$$k_{+} = (k^2 - 2\pi\chi_{+}/S_{\pm})^{1/2}, \quad M_{\pm}^{\text{ct}} = M_1^{\text{ct}} \pm M_2^{\text{ct}},$$

$$G_{\pm} = G_1 \pm G_2.$$

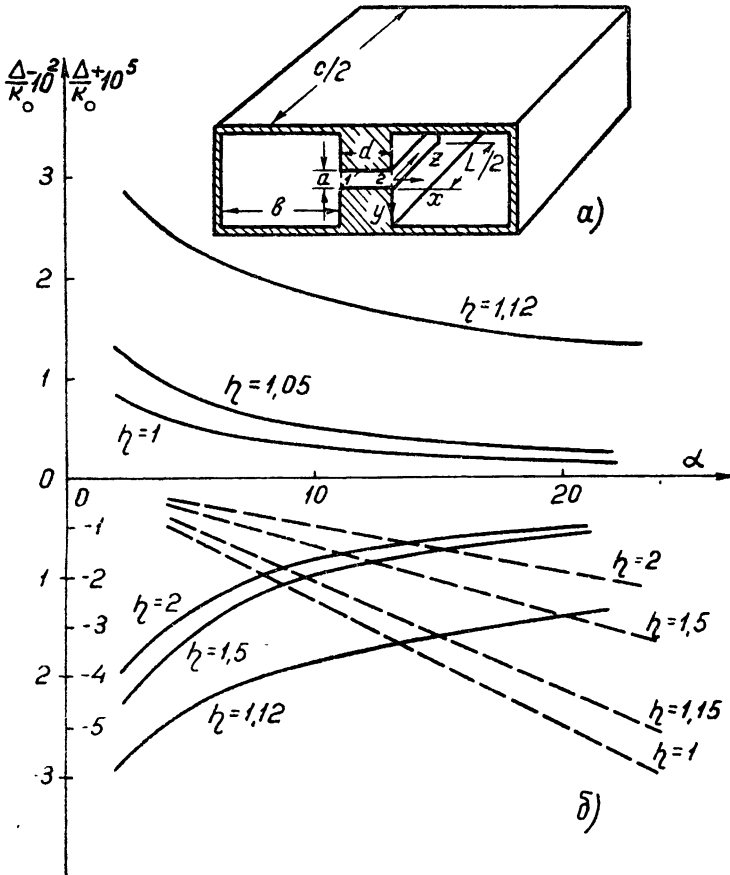


Рис. 1. Зависимость относительного приращения волновых чисел  $\Delta_{\pm}/k_0$  от толщины экрана:  $\Delta_{-}/k_0$ —сплошные линии,  $\Delta_{+}/k_0$ —пунктирные линии ( $\alpha = d/a$ ,  $\gamma = c/L$ ,  $\zeta = b/L = 2$ ,  $L/a = 100$ ).

При  $M_{\pm}^{\text{ct}} = 0$  уравнения (11), (12) описывают свободные колебания. Существенный интерес представляют те решения (11), (12), которым соответствуют волновые числа  $\bar{k}$ , близкие к волновым числам невоз-

мущенных резонаторов. Допустим, что  $\bar{k}$  близко  $m$  — кратно вырожденному волновому числу  $k_\nu = k_0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ), т. е.  $\bar{k} = k_0 + \Delta$  и  $\Delta \ll k_0$ . При этом, очевидно, в уравнениях нулевого приближения по  $\chi$  необходимо оставить члены порядка  $k_0^2(k_0^2 - k^2)^{-1}$ :

$$\frac{\partial^2 J_\pm}{\partial z^2} + k_\pm^2 J_\pm = \pi k_0 \chi_\pm \sum_{\nu=1}^m a_\nu^\pm H_\nu; \quad (13)$$

$$a_\nu^\pm = - \frac{1}{2 k_0 V \Delta} \int_\chi J_\pm H_{\nu z} dz. \quad (14)$$

Уравнения (13), (14) по форме совпадают с уравнениями (2.1) и (2.2) работы [1]; однако параметры  $\chi_\pm$  и волновое число в данном случае являются функциями параметров щели и экрана. Уравнения (2.1) и (2.2) достаточно подробно исследованы в общем виде [1], поэтому для выяснения особенностей решения, связанных с конечной толщиной экрана, ограничимся случаем  $m = 1$ .

1. Если щель прорезана в незамкнутом экране конечной толщины\*, то уравнение

$$\frac{\partial^2 J_\pm}{\partial z^2} + k_\pm^2 J_\pm = 0; \quad J_\pm(0) = J_\pm(L) = 0 \quad (15)$$

будет в нулевом приближении описывать свободные колебания магнитных токов, текущих по раскрывам щели в „толстом“ незамкнутом экране. Распределение магнитных токов для синфазного ( $J_+ = 2J_1 = 2J_2$ ;  $H_{1z} = H_{2z}$ ) и противофазного ( $J_- = 2J_1 = -2J_2$ ;  $H_{1z} = -H_{2z}$ ) типов колебаний в нулевом приближении синусоидально, т. е.

$$f_\pm(z) = \sin(h_n z), \quad h_n = n\pi/L, \quad n = 1, 2, \dots$$

Собственная частота синфазного типа колебаний может быть существенно больше собственной частоты противофазного колебания. Первая в нулевом приближении определяется волновым числом  $k_+^0 = (h_n^2 + 2\pi\chi_+/S_\perp)^{1/2}$ , вторая —  $k_-^0 = h_n$ .

Из решения статической задачи для щели в толстом экране (в приближении  $a \ll d$ ) нетрудно найти параметры

$$\chi_+ = [\ln(l/a)]^{-1}, \quad \chi_- = [\pi d/2a + \ln(l/a)]^{-1},$$

где  $l$  — наименьшая из величин  $L, b, \lambda$  (см. рис. 1).

Таким образом, если величина  $L^2/\pi n^2 a d \ln(l/a)$  — порядка единицы, то частоты синфазного и противофазного типов колебаний разнесены на величину порядка собственной частоты противофазного колебания.

2. Если щель прорезана в толстом экране, разделяющем два одинаковых резонатора, и собственные волновые числа  $k_0$  ( $\nu = 1$ ) невозмущенных резонаторов далеки от парциальных чисел щели  $k_+^0$  и  $k_-^0$ , то колебания с волновыми числами  $\bar{k}$ , близкими к  $k_0$  (т. е.  $\bar{k} = k_0 + \Delta$ ), будут описываться уравнениями (13), (14):

$$J_\pm(z) = \pi \chi_\pm \left( \frac{k_0}{k_\pm^0} \right)^2 a_1^\pm \left[ \varphi^\pm(z) - \frac{\sin(k_0^\pm z)}{\sin(k_0^\pm L)} \varphi^\pm(L) \right]; \quad (16)$$

\* Это соответствует случаю, когда резонансные частоты щели далеки от резонансных частот невозмущенных резонаторов.

$$\frac{\Delta_{\pm}}{k_0} = -\frac{\pi\chi_{\pm}}{2V(k_0^{\pm})^3} S_{11}^{\pm}, \quad (17)$$

где

$$k_0^- = k_0; \quad k_0^+ = (k_0^2 - 2\pi\chi_{\pm}/S_{\perp})^{1/2};$$

$$\varphi^{\pm}(z) = k_0^{\pm} \int_0^z H_1(\xi) \sin[k_0^{\pm}(z - \xi)] d\xi;$$

$$S_{11}^{\pm} = k_0^{\pm} \int_L^z H_1(z) \left[ \varphi^{\pm}(z) - \frac{\sin(k_0^{\pm}z)}{\sin(k_0^{\pm}L)} \varphi^{\pm}(L) \right] dz.$$

Интересно отметить, что вырождение, обусловленное идентичностью резонаторов, при наложении связи снимается, причем волновые числа как синфазного, так и противофазного типов колебаний являются функциями толщины экрана.

На рис. 1б приведена зависимость относительного расщепления волнового числа от толщины экрана для основного типа колебаний в прямоугольном резонаторе ( $H_z = H_{z0} \cos(\pi x/b) \cos(\pi z/c) (z - L/2)$ ), когда данный резонатор связан с идентичным через щель в „толстом“ экране. С ростом толщины экрана волновое число противофазного типа колебаний (сплошные кривые, рис. 1б) приближается к невозмущенному волновому числу, тогда как волновое число синфазного типа колебаний (пунктирные кривые) — увеличивается.

3. Если волновое число  $k_0$  невозмущенных резонаторов равно (или близко) парциальному волновому числу противофазного колебания щели  $k_0^-$ , то собственные магнитные токи, соответствующие волновому числу  $\bar{k}$ , близкому  $k_0$ , будут иметь вид:

$$J_-(z) = \pi\chi_- b_1^- \left[ \sin(\bar{k}z) - \frac{\varphi^-(z)}{\varphi^-(L)} \sin(\bar{k}L) \right], \quad (18)$$

где

$$\bar{k} = k_0 + \Delta; \quad a_1^- = -b_1^- \sin(\bar{k}L)/\varphi^-(L);$$

$$\Delta_{1,2}^- = \pm \left[ \frac{\pi\chi_- \varphi^-(L) R_1^-}{2k_0^2 LV} \right]^{1/2};$$

$$R_1^- = k_0 \int_L^z \sin(k_0 z) H_{1z}(z) dz.$$

Таким образом, в случае настроенной по противофазному колебанию щелевой антенны расщепление вырожденного волнового числа  $k_0$  происходит на величину  $\Delta \sim k_0 [\pi d/2a + \ln(l/a)]^{-1/2}$ . На рис. 1б этому случаю соответствует кривая с  $\eta = 1, 12$ .

Если щелевая антенна „настроена“ по синфазному типу колебаний (т. е.  $k_0 = k_0^+$ ), то при  $\chi_+^{1/2} \gg S_{\perp} k_0^2$  распределение тока и расщепление вырожденного волнового числа определяются формулами (17) и (18), т. е. расщепление такое же, что и при „расстроенной“ щели. В тех случаях, когда  $\chi_+^{1/2} \sim S_{\perp} k_0^2$ , расщепление

$$\Delta_{1,2}^+ = \frac{\pi\chi_+}{4h_n S_{\perp}} \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{8h_n^2 S_{\perp}^2 \varphi^+ R_1^+}{\pi\chi_+ k_0^2 LV} \right)^{1/2} \right]$$

волнового числа  $k_0 = k_0^+$  того же порядка, что и для щели, настроенной по противофазному колебанию.

#### 4. ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛНОВОДА С РЕБРИСТОЙ СТРУКТУРОЙ

Система уравнений (7)–(10) после незначительных видоизменений может быть применена для приближенного расчета дисперсионных характеристик ребристого волновода (рис. 2а) в диапазоне частот, удовлетворяющих условию  $k^2 b l \ll 1$ . За  $n$ -ую ячейку ребристого волновода удобно взять звено, выделенное на рис. 2а пунктиром. Очевидно, эту ячейку можно рассматривать как тонкий цилиндр, нагруженный щелями 1–3, и как резонатор со щелями 1–2\*. Граничные

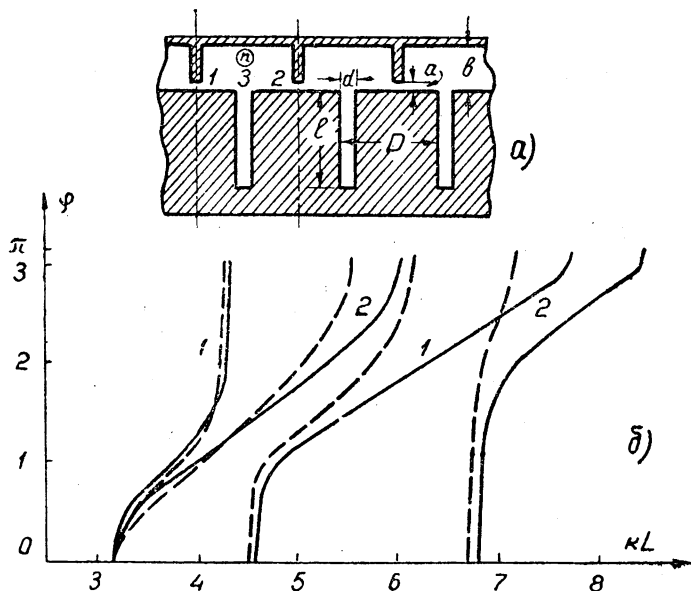


Рис. 2. Зависимость сдвига фазы  $\varphi$  от частоты  $kL$ . Размеры системы:  $d = 2a$ ,  $b = D = 20a$ ,  $\xi = b D/l^2 = 0,04$ ,  $L/l = 2$  (кривые 1),  $L/l = 4$  (кривые 2). Сплошными линиями соответствуют значения параметров:  $\gamma_{11} \approx 0,19$ ,  $\gamma_{21} \approx -0,44$ ,  $\gamma_{31} \approx 5$ ,  $\gamma_{33} \approx 0,28$ ,  $\gamma_{13} \approx -1,25$ ; пунктирными линиями —  $\gamma_{11} = [2 \ln(b/a)]^{-1}$ ,  $\gamma_{33} = [2 \ln(b'/d)]^{-1}$ .

условия на щели 3 будем считать заданными с помощью однородного поверхностного импеданса (3). Уравнения нулевого приближения для магнитных токов, текущих по раскрытым щелям 1–3, с учетом граничных условий будут иметь вид:

$$\hat{L} \sum_{q=1}^3 \gamma_{3q}^{-1} J_q^n = \frac{\pi}{S_{\perp}} \sum_{q=1}^3 J_q^n + \pi i k Z_0 \frac{J_3^n}{Z_3 d}; \tag{19}$$

$$\hat{L} \sum_{q=1}^3 (\gamma_{2q}^{-1} J_q^n - \gamma_{1q}^{-1} J_q^{n+1}) = \frac{\pi}{S_{\perp}} \sum_{q=1}^3 (J_q^n - J_q^{n+1});$$

$$J_2^n = -J_1^{n+1},$$

\* Цепочки резонаторов, связанных через щели, в предположении, что щели расположены одна от другой на расстоянии порядка длины волны, рассматривались в работах [6]. Когда щели находятся на расстояниях, много меньших длины волны, метод, развитый в указанных работах, нуждается в обобщении, учитывающем «ближние» поля щелевых антенн. В уравнениях (6)–(10) «ближние» поля учтены с помощью решения статической задачи для области связи, которая, вообще говоря, может рассматриваться и как часть объема невозмущенного резонатора.



где

$$\chi_{pq}^{-1} = \tilde{\chi}_{pq}^{-1} - \tilde{\chi}_{q,ин}^{-1}.$$

Так как щели имеют одинаковую длину\*, то решением, удовлетворяющим граничным условиям (20)

$$J_q^n(0) = J_q^n(L) = 0, \quad (20)$$

будет

$$J_q^n(z) = J_{q0}^n \sin(h_m z), \quad h_m = m\pi/L \\ (m = 1, 2, \dots).$$

При этом однородный поверхностный импеданс может быть задан в виде [4]:

$$Z_3 = iZ_0 \frac{k}{\Gamma} \operatorname{tg}(\Gamma l), \quad \Gamma^2 = k^2 - h_m^2.$$

Полагая фазовый сдвиг на ячейку равным  $\varphi$  (т. е.  $J_q^{n+1} = e^{i\varphi} J_q^n$ ), нетрудно получить дисперсионное уравнение системы:

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\chi_{11}^{-1} - \chi_{12}^{-1}}{2} \left[ \frac{\pi}{S_{\perp} \Gamma^2} - \chi_{12}^{-1} - \frac{(\pi/S_{\perp} \Gamma^2 - \chi_{13}^{-1})(\pi/S_{\perp} \Gamma^2 - \chi_{31}^{-1})}{\pi/S_{\perp} \Gamma^2 - \chi_{33}^{-1} + \pi/d \Gamma \operatorname{tg}(\Gamma l)} \right]^{-1}. \quad (21)$$

Когда глубина канавки  $l$  равна нулю, волноводную систему можно рассматривать как цепочку тонких цилиндров, связанных между собой через узкие щели. Дисперсионные свойства такой системы будут описываться уравнением

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} (1 - f) \left( \frac{\pi \chi_{11}}{S_{\perp} \Gamma^2} - f \right)^{-1}, \quad (22)$$

где  $f = \chi_{11}/\chi_{12}$ .

На рис. 2 и 3 приведена зависимость фазового сдвига от частоты  $kL$ , рассчитанная по уравнениям (21) и (22) соответственно. Дисперсионные кривые построены для случая, когда  $a \sim d \ll b$ ,  $D$  (решение статической задачи приведено в приложении). С целью сравнения на рис. 2 и 3 приведены дисперсионные характеристики (пунктирные линии), рассчитанные в приближении, не учитывающим „перекрестных“ параметров  $\chi_{pq}$  и близость щелей при определении  $\chi_{pp}$ .

Уравнения (6) — (10), описывающие колебания связанных резонаторов, могут быть применены для расчета волноводных систем, представляющих собой волноводы, связь которых осуществляется посредством щелей в тонком цилиндре. В некоторых системах область связи можно условно (подобно тому, как это сделано для щели в „толстом“ экране) заменить тонким цилиндром с узкими щелями. Такие системы, очевидно, можно включить в круг задач, охватываемых уравнениями

\* Условие, что щели должны быть одинаковой длины, связано с необходимостью иметь решение с синусоидальным распределением магнитного тока по щели. Последнее, как правило, необходимо для формулировки однородных импедансных граничных условий.

(6)–(10). Уравнения (6)–(10) можно использовать и при приближенном решении задачи о колебаниях тонкого цилиндра с узкими щелями, на раскрые которых заданы импедансные граничные условия или фиксирована структура электрического поля. Наконец, уравнения

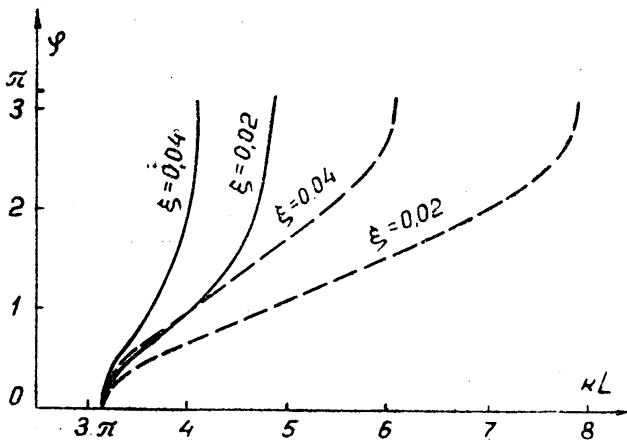


Рис. 3. Зависимость сдвига фазы  $\varphi$  от частоты  $kL$  при  $l=0$ . Размеры системы и обозначения приведены на рис. 2.

(6)–(10) позволяют, не раскрывая в явном виде регулярную часть поля, найти приближенное решение вынужденной задачи для частоты, отличной от резонансных.

Автор весьма признателен А. В. Гапонову за замечания и советы при выполнении работы.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Для определения параметров  $\gamma_{pq}$  приведем приближенное решение двумерной статической задачи в области связи (рис. 2а). Когда размеры  $a, d \ll b, D$ , для отыскания потенциала внутри цилиндра удобно воспользоваться методом зеркальных отображений. „Полоски“ магнитных токов на раскрывах щели, играющие в статической задаче роль поверхностных магнитных зарядов, вместе с их отображениями можно, очевидно, заменить токами, текущими по поверхности тонких круглых цилиндров. После многократных отражений в идеальных плоских металлических экранах получим бесконечную двумерную решетку с линейными зарядами (или токами)  $2J_1, 2J_2$  и  $2J_3$ . Потенциал решетки с линейными зарядами  $2J_3$ , расположенной в плоскости  $y=nD$ , следуя [7], запишем в виде:

$$\psi^n(x, y, j_3) = -\frac{J_3}{\pi\mu} \ln \left[ \operatorname{ch} \frac{\pi}{b} (y - nD) - \cos \frac{\pi x}{b} \right] + C_n,$$

где  $2b$  — период решетки,  $C_n$  — постоянная.

Суммируя по всем идентичным линейным решеткам, найдем потенциал, создаваемый линейным магнитным зарядом внутри области связи:

$$\psi_3(x, y, j_3) = -\frac{J_3}{\pi\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left[ \operatorname{ch} \frac{\pi}{b} (y - nD) - \cos \frac{\pi x}{b} \right] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n,$$

откуда

$$\tilde{\chi}_3^{-1}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \frac{\operatorname{ch}(n\pi D/b)}{\operatorname{ch}[(\pi/b)(y - nD)] - \cos(\pi x/b)}, \quad (I)$$

Здесь точке  $M_0$  соответствует точка с координатами  $x_0 = b/2$ ,  $y_0 = 0$ .

Подставляя в (I) координаты щелей 3, 2 и 1, найдем соответственно  $\tilde{\chi}_{33}^{-1}$ ,  $\tilde{\chi}_{23}^{-1}$  и  $\tilde{\chi}_{13}^{-1}$ . Интегральный параметр  $\tilde{\chi}_{3, \text{ин}}^{-1}$  может быть найден путем численного интегрирования (I) по площади сечения области связи, исключая площадь сечения круглых цилиндров (токов). При вычислениях можно ограничиться первыми членами (I), так как ряд внутри области связи сходится быстро.

Параметры  $\tilde{\chi}_{q1}$  и  $\tilde{\chi}_{q2}$  определяются аналогичным образом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, ЖТФ, 25, 1069 (1955).
2. А. В. Гапонов, ЖТФ, 25, 1085 (1955).
3. М. А. Леонтович, М. Л. Левин, ЖТФ, 14, 481 (1944).
4. М. А. Миллер, ЖТФ, 24, 1483 (1954).
5. А. М. Белянцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 5—6, 112 (1958).
6. А. В. Гапонов, Электромагнитные волны вдоль цепочки связанных резонаторов, отчет ГИФТИ, Горький, 1952; Доклад на конференции МВО СССР по радиоэлектронике, Горький, 1956; А. И. Ахизер, Г. Я. Любарский, ЖТФ, 25, 1597 (1955).
7. Б. Хэг, Электромагнитные расчеты, Госэнергоиздат, М.—Л., 1934.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
5 июля 1960 г.