

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ ЖУРНАЛА № 6, 1960 г.

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
968	8 сверху	... относительный вклад неот- клоняющего	... относительный вклад от- клоняющего
986	13 сверху	... $\left\{ \epsilon_{\text{пл}} + \omega \frac{\partial \epsilon_{\text{пл}}}{\partial \omega} \right\}^{-1}$... $\left\{ \epsilon_{\text{пл}} + 2\omega \frac{\partial \epsilon_{\text{пл}}}{\partial \omega} \right\}^{-1}$
1019	10 сверху	одновременного распределения ...	одномерного распределения ...
1121	2 сверху	$d = 2\Theta [(\omega_1^2 - \omega_2^2 - \theta^2)^2] \dots$	$d = 2\Theta [(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \theta^2)^2] \dots$

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ ЖУРНАЛА № 1, 1961 г.

4	2 снизу	Forth All-Union ...	Fourth All-Union ...
5	2 снизу	... оболочки Земли [6] оболочки Земли [6] ...
52	1 снизу	... $\int_0^{z_0} l^{-2\pi p} V \sin^2 \varphi_0 + 2az dz$... $\int_0^{z_0} e^{-2\pi p V \sin^2 \varphi_0 + 2az} dz$
53	16 сверху	$\frac{[1 - l^{-2l/l_0}]^{1/2}}{[1 - l^{-2l/l_0}]^{1/2}}$	$\frac{[1 - e^{-2l/l_0}]^{1/2}}{[1 - e^{-2l/l_0}]^{1/2}}$
66	2 сверху	... $ k_\perp - v $... $ k_\perp - v $
79	17 сверху	... $\equiv \frac{\partial}{\partial t} W = \dots$... $\equiv \frac{\partial}{\partial t} W'_E = \dots$
81	19 снизу	... $\Delta_v f + S = 0$... $\nabla_v f + S = 0$
87	9 сверху	+ $(d\varepsilon/d\omega)_0 \} \Omega$	+ $(d\varepsilon/d\omega)_0 \omega_0 \} \Omega$
	11 сверху	... $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sigma(\omega_0) + \left(\frac{d\sigma}{d\omega} \right) \Omega \right) \dots$... $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sigma(\omega_0) + \left(\frac{d\sigma}{d\omega} \right)_0 \Omega \right) \dots$
121	7 снизу	... + $2h \frac{dq_1}{dt} q_1 \omega_0^2 [1 + m \cos \omega_H t] \dots$... + $2h \frac{dq_1}{dt} + q_1 \omega_0^2 [1 + m \cos \omega_H t] \dots$
128	2 снизу	... = - $2 \frac{\sin(\theta/2)}{p} e^{-ky} \dots$... = - $2 \frac{\sin(\theta/2)}{p} e^{-jkv} \dots$

СОДЕРЖАНИЕ

Разин В. А. О спектре нетеплового космического радиоизлучения	921
Ханбердиев А. Спектр пространственных частот и восстанавливающая способность радиоинтерферометров	937
Ханбердиев А., Кайдановский Н. Л. Лампа бегущей волны как фазовый модулятор для радиоинтерферометров	943
Митякова Э. Е., Митяков Н. А., Рапопорт В. О. К вопросу об измерении электронной концентрации в ионосфере и межпланетном пространстве	949
Бенедиктов Е. А., Коробков Ю. С., Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Ходалева Л. Н. Результаты измерения поглощения радиоволн в ионосфере	957
Станкевич К. С. О флюктуациях радиоизлучения атмосферы	969
Рыжков Ю. А., Лаптева Э. П. Флюктуации параметров тригармонической волны при распространении ее в локально-однородной среде	976
Гинзбург М. А. О возможности возбуждения радиоволн солнечными корпускулярными потоками	983
Ящин Э. Г. Возбуждение парамагнетика путем перемагничивания	989
Берштейн И. Л. Флюктуации колебаний параметрического генератора	995
Малахов А. Н. Флюктуации коэффициента передачи смесителя на кристаллическом диоде	1001
Малахов А. Н. Прохождение квазимохроматического сигнала через нестабильный смеситель	1004
Васильев Д. В. Инерционное детектирование случайной последовательности прямоугольных импульсов	1010
Белянцев А. М. К теории связанных резонаторов	1022
Антаков И. И., Боков В. М., Васильев Р. П., Гапонов А. В. Взаимодействие трохоидального электронного пучка с электромагнитными волнами в прямоточном волноводе	1033
Ергаков В. С., Шапошников А. А. Клистрон с электронным лучом, управляемым поперечным электрическим полем	1045
Перещенченко А. И., Минц М. Я. Влияние различных факторов на величину электронного смещения частоты магнетрона	1054
Бенуа Е. Ю. Точное определение условий существования автоколебательных режимов в системе экстремального регулирования при наличии коммутатора	1062
Сергеев П. В. Детализированные диаграммы И. А. Вышнеградского и выбор оптимальных параметров для системы непрямого регулирования с корректирующим дифференциатором	1077
Яковлев Б. С. Методика выбора параметров корректирующих контуров систем автоматического управления при помощи номограмм	1093
Дозоров В. А. Коэффициент передачи по концентрации для реакции первого порядка в распределенном химическом реакторе непрерывного действия	1107
Валеев К. Г. Об одном методе решения систем линейных дифференциальных уравнений с синусоидальными коэффициентами	1113
 Краткие сообщения и письма в редакцию	
Троицкий В. С., Цейтлин Н. М. Метод измерения диэлектрической постоянной лунной породы	1127
Скворцов В. А., Крупнов А. Ф., Наумов А. И. Молекулярный генератор без системы вымораживания	1128
Никонов В. Н. Об одном методе измерения амплитудных флюктуаций генератора	1129
Абрамов Ю. А. О флюктуациях генератора, контур которого содержит индуктивность с ферритовым сердечником	1130
Памяти Венедикта Ивановича КАЛИНИНА	1133
Содержание №№ 4, 5, 6 журнала «Известия вузов МВ и ССО СССР» по разделу «Радиотехника» за 1960 г.	1134
Содержание т. III журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1960 г.	1137
Именной указатель т. III журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1960 г.	1142

О СПЕКТРЕ НЕТЕПЛОВОГО КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

B. A. Разин

Вычислен спектр синхротронного излучения релятивистских электронов, имеющих дифференциальный энергетический спектр $N(E) \propto (a/bE^2 + 1)^{-1} E^{-\gamma}$, с учетом отличия показателя преломления среды от единицы. Соответствующие результаты использованы при анализе данных о спектре нетеплового космического радиоизлучения.

ВВЕДЕНИЕ

В этой статье будут рассмотрены некоторые вопросы теории механизма синхротронного излучения космических электронов, движущихся в межзвездных магнитных полях, и обсуждены данные о спектре нетеплового космического радиоизлучения.

Как известно [1-6], релятивистские электроны с энергетическим спектром

$$N(E) dE = KE^{-\gamma} dE \quad (1)$$

(E —энергия электронов, K и γ —постоянные), двигаясь в однородном магнитном поле в вакууме со скоростями, распределенными изотропно по направлениям, генерируют излучение, интенсивность которого

$$I_\nu \propto H_\perp^{(\gamma+1)/2} \nu^{(1-\gamma)/2}, \quad (2)$$

где ν —частота излучения, H_\perp —перпендикулярная лучу зрения компонента магнитного поля. При хаотически изменяющейся вдоль луча зрения величине H_\perp среднее значение интенсивности синхротронного излучения релятивистских электронов может быть найдено путем усреднения выражения (2) по всем возможным значениям H_\perp :

$$\bar{I}_\nu \propto \overline{H_\perp}^{(\gamma+1)/2} \nu^{(1-\gamma)/2} \quad (2a)$$

(черта сверху означает усреднение).

Таким образом, спектр синхротронного излучения релятивистских электронов с дифференциальным энергетическим спектром (1) имеет степенной характер, причем спектральный индекс излучения $\alpha = (\gamma - 1)/2$ определяется только величиной γ . Во всех работах, посвященных синхротронному механизму излучения, ограничиваются, по существу, именно этим приближением. Между тем, представление дифференциального энергетического спектра космических электронов в виде (1) возможно лишь в ограниченном интервале энергий. Поэтому, если интересоваться спектром синхротронного излучения космических электронов в достаточно широком диапазоне частот, то нельзя ожидать такой простой зависимости интенсивности излучения от частоты, как в выражении (2). В связи с этим возникает задача нахождения спектра синхротронного излучения релятивистских электронов, распределенных по энергии не по степенному закону, а более сложным образом, с функцией распределения, более или менее точно отражаю-

щей истинный энергетический спектр космических электронов в широком интервале энергий. Кроме того, при некоторых условиях нельзя считать, что релятивистские электроны излучают в вакууме, как это обычно полагают, а следует учитывать отличие показателя преломления межзвездной среды от единицы.

В свете этих замечаний в настоящей статье и будет проведено вычисление спектра синхротронного излучения космических электронов.

1. СПЕКТР СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

Пусть $N(E, \Theta', \varphi', r) dE d\Omega' dV$ — число космических электронов в элементе объема dV с радиусом-вектором r (за начало координат принято местонахождение наблюдателя), энергия которых заключена в интервале $E, E + dE$, а направления скоростей — в телесном угле $d\Omega' = \sin \Theta' d\Theta' d\varphi'$, где Θ' — угол между направлением магнитного поля и скоростью электронов, φ' — азимутальный угол. Обозначим посредством $S(\nu, E, r, \xi, \Theta')$ спектральную плотность модуля вектора Пойнтинга в поле излучения релятивистского электрона, находящегося в точке с радиусом-вектором r (ξ — угол между соприкасающейся плоскостью к траектории электрона и лучом зрения). Очевидно, $\Theta' - \xi = \Theta$ — угол между направлением магнитного поля и лучом зрения. На площадку $d\sigma$, перпендикулярную к лучу зрения в точке наблюдения, в телесном угле $d\Omega$ за одну секунду поступает энергия $dW = I_s d\sigma d\Omega$, где I_s — интенсивность излучения.

С другой стороны (поглощение радиоволн в межзвездном пространстве для простоты не учитываем),

$$dW = \left[\int_{r=0}^R \int_{E=mc^2}^{\infty} \int_{\Omega'} S(\nu, E, r, \xi, \Theta') N(E, \Theta', \varphi', r) dE d\Omega' r^2 dr \right] d\Omega d\sigma,$$

где R — размер излучающей области. Отсюда

$$I_s = \int_{r=0}^R \int_{E=mc^2}^{\infty} \int_{\Omega'} S(\nu, E, r, \xi, \Theta') N(E, \Theta', \varphi', r) r^2 dr dE d\Omega'. \quad (3)$$

Естественно считать, что функция распределения космических электронов не зависит от φ' и меняется достаточно плавно с изменением Θ' . Далее, поскольку релятивистские электроны излучают в основном в конусе с раствором $\Delta\xi \sim (mc^2/E) \ll 1$, положим $S(\nu, E, r, \xi, \Theta') \approx S(\nu, E, r, \Theta') \delta(\xi)$, где $\delta(\xi)$ — дельта-функция. Воспользовавшись равенством

$$r^2 \int_{\Omega'} S(\nu, E, r, \Theta') \delta(\xi) d\Omega' = P_\nu(E, H_\perp),$$

где $P_\nu(E, H_\perp)$ — энергия, излучаемая релятивистским электроном в одну секунду в интервале частот один герц, из соотношения (3) получаем:

$$I_s = \int_{r=0}^R \int_{E=mc^2}^{\infty} P_\nu(E, H_\perp) N(E, \Theta, r) dE dr. \quad (4)$$

В случае изотропного распределения скоростей космических электронов по направлениям $N(E, \Theta, r) = N(E, r)/4\pi$, где $N(E, r)$ — число релятивистских электронов в 1 см^3 . При этом

$$I_s = \frac{1}{4\pi} \int_{r=0}^R \int_{E=mc^2}^{\infty} P_s(E, H_{\perp}) N(E, r) dE dr. \quad (5)$$

Энергия $P_s(E, H_{\perp})$, излучаемая электроном в 1 сек в интервале частот 1 гц, равна [6,7]

$$P_s(E, H_{\perp}) = 16 (e^2/c) \omega_0 (\omega/2\omega_0)^{1/3} \times \times J \{ (\omega/2\omega_0)^{2/3} [1 + (1 - n^2) (E/mc^2)^2] \}, \quad (6)$$

где e —заряд электрона, c —скорость света, n —показатель преломления среды, ω —циклическая частота излучения, $\omega_0 = \omega_H \sin \Theta$, $\omega_H = (eH/mc) (mc^2/E)$, $\omega_1 = (eH_{\perp}/mc) (E/mc^2)^2$; $J(x)$ —функция, протабулированная Владимирским [8]. Формула (6) справедлива при условиях $n < 1$, $1 - n \ll 1$, $[eH/mc \omega]^2 \ll 1$, которые хорошо выполняются для межзвездной среды.

Нахождение функции распределения $N(E, r, \Theta)$ в общем случае представляет собой сложную задачу, так как энергетический спектр космических электронов определяется многими факторами, роль которых далеко не полностью известна. Ограничимся поэтому лишь довольно грубым приближением*, которое, однако, позволит выявить основные особенности спектра синхротронного излучения космических электронов. Будем считать, что а) в Галактике существуют стационарные условия; б) скорости космических электронов распределены изотропно по направлениям и концентрация космических электронов не зависит от координат, т. е. $N(E, \Theta, r) = N(E)/4\pi$; в) спектр релятивистских электронов, генерируемых источниками, имеет вид $K' E^{-\gamma'}$ ($\gamma' \neq 1$); г) релятивистские электроны при движении в межзвездном пространстве не приобретают энергию [1], а лишь теряют ее, причем за время их существования в Галактике они теряют значительную часть первоначальной энергии. При этих предположениях дифференциальный энергетический спектр космических электронов удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial E} [\psi(E) N(E)] = K' E^{-\gamma'}, \quad (7)$$

где $\psi(E)$ —функция, дающая среднюю величину потерь энергии релятивистских электронов в секунду.

Потери энергии космических электронов определяются в основном потерями на синхротронное излучение и ионизационными потерями [1]. Ионизационные потери слабо зависят от энергии электронов; при $E \sim 10^8$ эв для электронов, движущихся в нейтральном водороде, их можно принять равными

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{ион}} \approx 2,5 \cdot 10^{-7} N \text{ эв. сек}^{-1}, \quad (8)$$

где N —концентрация межзвездного газа. Если газ ионизирован, то "ионизационные потери" приблизительно вдвое больше величины, даваемой формулой (8). Обозначая через ρ степень ионизации среды, т. е. отношение концентрации электронов с тепловыми скоростями N_e к полной концентрации газа N , можно записать величину ионизационных потерь энергии космических электронов формулой

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{ион}} \approx f(\rho) N \text{ эв. сек}^{-1}, \quad (8a)$$

* Более строго эта задача рассматривалась в работах [9–11].

где $f(\rho)$ — медленно меняющаяся функция степени ионизации среды:

$$f(0) \approx 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ эв} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}, \quad f(1) \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ эв} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Средние ионизационные потери энергии космических электронов за секунду равны

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{ион}} \approx \bar{f}(\rho) \bar{N} \text{ эв} \cdot \text{сек}^{-1} = a \text{ эв} \cdot \text{сек}^{-1}. \quad (86)$$

Средняя энергия, теряемая космическим электроном в одну секунду из-за синхротронного излучения, дается выражением:

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{синхр}} = \frac{2c}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right) \bar{H}_\perp^2 \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 = b \varepsilon^2 \text{ эв} \cdot \text{сек}^{-1}; \quad (9)$$

$$b = 0,98 \cdot 10^{-3} \bar{H}_\perp^2 \text{ эв} \cdot \text{сек}^{-1}; \quad \bar{H}_\perp = H \sin \Theta'; \quad \varepsilon = E/mc^2$$

Таким образом,

$$\varphi(E) = -a - b \varepsilon^2, \quad (10)$$

и из уравнения (7) получаем:

$$N(\varepsilon) = K_1 / [a/b\varepsilon^2 + 1] \varepsilon^\gamma, \quad (11)$$

где

$$\gamma = \gamma' + 1, \quad K_1 = K'/(\gamma' - 1) (mc^2)^{\gamma'-2} b.$$

Подставляя выражения (6) и (11) в (5) и полагая, что в межзвездной среде

$$1 - n^2 = e^2 N \rho / \pi m v^2$$

(так как $(eH/2\pi mc v)^2 \ll 1$), найдем:

$$I_\gamma = \int_{r=0}^R \left\{ \frac{3e^3 H_\perp(r) K}{\pi (mc^2)^4} \left(\frac{\pi mc}{eH_\perp(r)} \right)^{(1-\gamma)/2} v^{(1-\gamma)/2} \times \right. \\ \left. \times \int_0^\infty \frac{J(x + \rho/v' \sqrt{x}) x^{(3\gamma-5)/4} dx}{1 + A(\rho) x^{3/2}/v''} \right\} dr, \quad (12)$$

где $K = K_1 (mc^2)^{\gamma-1} = K' mc^2 / (\gamma' - 1) b$, $A(\rho)$ — медленно меняющаяся функция степени ионизации межзвездного газа. $A(1) \approx 200$, $A(0) \approx 100$,

$$v' = \frac{v H_\perp(r)}{ec N(r)}; \quad v'' = \frac{v H_\perp^2}{ec \bar{N} H_\perp(r)}. \quad (13)$$

H_\perp — компонента магнитного поля, перпендикулярная лучу зрения, \bar{H}_\perp — компонента магнитного поля, перпендикулярная скорости релятивистского электрона.

Если параметры среды не зависят от координат, то $v' = v''$ и спектр синхротронного излучения релятивистских электронов дается выражением:

$$\varphi(v', \gamma, \rho) = (v')^{(1-\gamma)/2} \int_0^\infty \frac{J(x + \rho/v' \sqrt{x}) x^{(3\gamma-5)/4} dx}{1 + A(\rho) x^{3/2}/v'} . \quad (14)$$

Графики этой функции при $\gamma=3$, $\rho=0$ и $\rho=1$ показаны на рис. 1. Для сравнения на рис. 1 начерчена также прямая линия, отвечающая спектру $1/\nu'$. Разница спектров $\varphi(\nu', \gamma, \rho)$ и $(\nu')^{(1-\gamma)/2}$ оказывается заметной в весьма широком интервале частот. Особенно велика разница при $\nu' < 10 \div 10^2$. Но и на более высоких частотах влияние параметров среды на спектр синхротронного излучения релятивистских электронов довольно ощутимо. Так, $\varphi(\nu', \gamma=3, \rho=1) \propto (\nu')^{-0.8}$ при $\nu'=10^2 \div 2 \cdot 10^3$. Этому интервалу значений ν' отвечает при $N \sim 10^{-2} \text{ см}^{-3}$, $H_\perp \sim 3 \cdot 10^{-6} \text{ эрстед}$ диапазон частот $4.5 \cdot 10^7 \text{ гц} \leq \nu \leq 9 \cdot 10^8 \text{ гц}$, т. е. как раз тот диапазон, в котором проводится значительная часть исследований космического радиоизлучения.

Обратим внимание на различие спектров синхротронного излучения релятивистских электронов при $\rho=0$ и $\rho=1$ на частотах, которым отвечает $\nu' < 10$. При $\rho=1$ и $\nu' < 10$ интенсивность синхротронного излучения релятивистских электронов быстро уменьшается с частотой из-за отличия показателя преломления среды от единицы, в то время как при $\rho=0$ интенсивность синхротронного излучения, определяемая лишь энергетическим спектром релятивистских электронов, не имеет такой особенности. Принимая $\rho N \sim 10^{-2} \text{ см}^{-3}$, $H_\perp \sim 3 \cdot 10^{-6} \text{ эрстед}$, $\nu'=10$, найдем $\nu \sim 5 \cdot 10^5 \text{ гц}$. Таким образом, на частотах ниже $5 \cdot 10^5 \text{ гц}$ следует уже учитывать отличие показателя преломления среды от единицы.

В случае неоднородной среды, какой и является среда в межзвездном пространстве, исследовать спектр синхротронного излучения труднее. Для этого необходимо знать не только параметры среды, но и характер движения релятивистских электронов. Здесь мы ограничимся рассмотрением спектра излучения от областей пространства, в которых среду можно считать квазиоднородной, и выделим, кроме того, лишь два крайних случая:

$$1) \nu'/\rho \ll \nu'', \quad 2) \nu' \gg \nu'' \gg 2\rho \sqrt{3}/(\gamma-1)$$

При $\nu'/\rho \ll \nu''$ интенсивность излучения

$$I_\nu \propto (\nu')^{(1-\gamma)/2} \int_0^\infty J(x + \rho/\nu' \sqrt{x}) x^{(3\gamma-5)/4} dx. \quad (15)$$

График этой функции для $\gamma=3$ показан на рис. 1 (кривая 2). Излучение максимально на частоте $\nu'_{\max} \approx 2\sqrt{3}\rho/(\gamma-1)$ [7]. На частотах ниже ν'_{\max} интенсивность излучения быстро убывает с частотой.

При $\nu' \gg \nu'' \gg 2\sqrt{3}\rho/(\gamma-1)$ спектр синхротронного излучения от областей с квазиоднородной средой определяется выражением

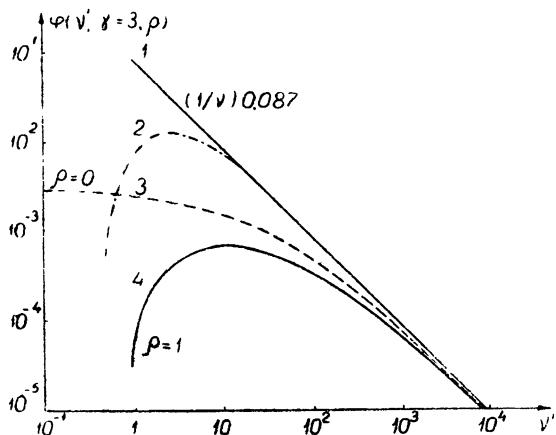


Рис. 1.

$$I_v \propto (v'')^{(1-\gamma)/2} \int_0^{\infty} \frac{J(x) x^{(3\gamma-5)/4} dx}{1 + A(\rho) x^{3/2}/v''}. \quad (16)$$

Для $\gamma=3$ и $\rho=0$ график этой функции показан на рис. 1 (кривая 3).

Следует отметить существенное отличие выражения (14) при $\rho=0$ от выражения (16) при $\rho=0$ и $H_{\perp}^2 = \text{const}$, связанное с разной зависимостью v' и v'' от H_{\perp} . Величина v' уменьшается при уменьшении H_{\perp} , а величина v'' при этом возрастает. Согласно (14), уменьшение H_{\perp} приводит к тому, что спектр синхротронного излучения релятивистских электронов делается более пологим, согласно же (16)—более крутым. Такое различие в изменении характера спектра излучения при изменении H_{\perp} в случае однородной и неоднородной сред вполне понятно. Уменьшение H_{\perp} в однородной среде приводит к уменьшению потерь энергии релятивистских электронов на излучение, и спектр излучения делается более пологим из-за преобладающей роли ионизационных потерь. При движении релятивистских электронов в неоднородной среде их дифференциальный энергетический спектр определяется средними потерями энергии на излучение и взаимодействие со средой. На фиксированной частоте в областях с $H_{\perp}^2 \ll \bar{H}_{\perp}^2$ излучают электроны с более высокой энергией, для которых в среднем ионизационные потери менее существенны, а соответственно и спектр синхротронного излучения от таких областей более крутой. В случае неоднородной среды спектр излучения релятивистских электронов делается более пологим при уменьшении $\bar{H}_{\perp}^2/H_{\perp}$. Отмеченная разница между выражениями (14) и (16) существенна при анализе возможных отличий спектров различных компонент нетеплового космического радиоизлучения.

Возвращаясь к формуле (12), заметим следующее. В силу того, что на луче зрения величина H_{\perp} меняется весьма нерегулярно, интенсивность синхротронного излучения релятивистских электронов можно охарактеризовать средней величиной, получающейся путем усреднения выражения (12) по всем возможным значениям H_{\perp} . Но чтобы статистическое описание было достаточно полным, нужно еще определить среднеквадратичные флюктуации интенсивности и спектрального индекса излучения. Флюктуации интенсивности радиоизлучения галактической короны были оценены в работе [12]. Они могут достигать величины $\sim 10\%$ и, вероятно, наблюдались в [13]*. Что касается флюктуаций спектрального индекса, обусловленных отличием спектров излучения областей с разными значениями H_{\perp} на луче зрения, то они также могут иметь величину порядка нескольких процентов. Измерение таких флюктуаций спектрального индекса в настоящее время представляет большие трудности.

Разница в спектрах излучения, принимаемого в разных направлениях, может проявиться в том, что радиоизофоты, снятые на различных волнах с помощью одинаковых по направленности антенных систем, не будут тождественными в деталях. Сравнивая результаты измерений интенсивности космического радиоизлучения на $\lambda=22 \text{ см}$ [16] и $\lambda=3,5 \text{ м}$ [15] в направлениях, где нет мощных дискретных источников и областей ионизированного водорода (например, в направлении с $l \sim 332^\circ$ и $b \sim -\dot{+}2^\circ \dot{-} +4^\circ$), можно заметить различие в характере изофот на этих волнах. Если эти различия реальны, а не связаны с ошибками изме-

* Флюктуации интенсивности метагалактического радиоизлучения, по оценкам [14], не превосходят 2% от общей интенсивности космического радиоизлучения

рений, то они, вероятно, свидетельствуют о флюктуациях спектрального индекса нетеплового космического радиоизлучения.

2. ОБСУЖДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

а) Некоторые сведения о космическом радиоизлучении. Принимаемое на Земле космическое радиоизлучение можно разделить на несколько компонент. Прежде всего можно выделить радиоизлучение, возникающее в пределах Галактики, т. е. галактическое радиоизлучение, и радиоизлучение объектов, находящихся за пределами Галактики (так называемое метагалактическое радиоизлучение). Доля метагалактического радиоизлучения в наблюдаемом космическом радиоизлучении точно неизвестна. Вероятно, она не превосходит $1/3$ в направлениях на галактические полюса [18, 19] и меньше в других областях небесной сферы. Спектр метагалактического радиоизлучения также неизвестен. Обычно [2, 15] полагают, что он такой же, как и спектр нетеплового галактического радиоизлучения в наиболее „холодной“ области небосвода.

Галактическое радиоизлучение, в свою очередь, можно разделить на компоненты, отличающиеся как механизмом генерации, так и пространственным распределением источников излучения. Вблизи галактической плоскости в направлении с $l \sim 358^\circ$ на волне 22 см около половины интенсивности излучения приходится на долю теплового излучения ионизированного водорода [20].

В других направлениях и на более длинных волнах преобладает нетепловое радиоизлучение. Нетепловое галактическое радиоизлучение обнаруживает весьма сложное распределение по небосводу. В нем можно выделить следующие основные компоненты.

1) Радиоизлучение галактической короны, слабо концентрирующееся к плоскости Млечного Пути и галактическому центру. Отношение размеров осей короны $\sim 1:1.5$; размер большой оси ~ 25 кпс. Максимальная излучательная способность единицы объема короны вблизи галактического центра на $\lambda = 3.5$ м около $5.4 \cdot 10^9$ вт·гц $^{-1}$ ·нс $^{-3}$ [21, 22].

2) Радиоизлучение спиральных галактических рукавов („спиральная“ компонента) [21, 22]. Спиральные радиорукава имеют в грубом приближении круговое сечение диаметром ~ 500 нс между точками половинной излучательной способности. Излучательная способность в центре рукавов на $\lambda = 3.5$ м $\sim 6 \cdot 10^{10}$ вт·гц $^{-1}$ ·нс $^{-3}$, т. е. примерно в десять раз превосходит излучательную способность в короне. Однако полное излучение спиральных рукавов на $\lambda = 3.5$ м составляет лишь около 10% от полного галактического радиоизлучения, так как рукава занимают относительно небольшой объем в Галактике.

3) Радиоизлучение центральной области Галактики. В этой области, радиус которой ~ 3 кпс, весь межзвездный газ, вероятно, движется от галактического центра со скоростями, достигающими 130 км·сек $^{-1}$, и быстро вращается (угловая скорость $\sim 10^{-13}$ см $^{-1}$) [23]. Распределение средней плотности газа в зависимости от расстояния до галактического центра в этой области неизвестно. В центре Галактики имеется вытянутый вдоль галактической плоскости источник нетеплового радиоизлучения, в который внедрено облако ионизированного водорода (область H II) с размерами ~ 80 нс·35 нс и массой $\sim 2.5 \cdot 10^5 M_\odot$ [21].

Источники нетеплового радиоизлучения в центральной области Галактики не обнаруживаются спиральной структуры. Спирали формируются, по-видимому, на расстояниях ≥ 3 кпс от галактического центра [21–23].

4) Радиоизлучение дискретных источников, представляющих собой остатки сверхновых звезд. Эти источники распределены вблизи галактической плоскости в слое толщиной $\sim 100 \text{ pc}$ [24].

Далее речь будет идти главным образом о „распределенном“ нетепловом галактическом радиоизлучении, т. е. о компонентах 1,2 и 3.

Выделение нетеплового галактического радиоизлучения и особенно определение спектров различных его компонент представляет собой сложную задачу. Для ее решения необходимо применение радиотелескопов с высокой разрешающей способностью. Большая же часть имеющихся радиоизофот получена с помощью антенн, обладающих относительно малой направленностью, недостаточной для разрешения многих деталей в распределении космического радиоизлучения. Кроме того, абсолютные измерения интенсивности космического радиоизлучения пока не отличаются высокой точностью (см. таблицу 1). Поэтому

Т а б л и ц а 1

Минимальная температура небосвода на радиочастотах

$\lambda (\text{мк})$	$\nu (\text{мгц})$	$T_{\min} (\text{°К})$	Ширина диаграммы направленности по точкам половинной мощности	автор	[¹⁹]
3,7	81	900 ± 140	$2^\circ \cdot 15^\circ$	Baldwin	
1,5	200	100 ± 40	$16^\circ, 8^\circ \cdot 16^\circ, 3^\circ$	Droge, Priester	[²⁰]
1,2	250	80 ± 30	$1^\circ, 2^\circ \cdot 8^\circ$	Ko	[³⁹]
0,75	400	10 ± 5	$2^\circ \cdot 2^\circ$	Mc Gee, Slee, Stanley	[⁴⁰]

в настоящее время спектры радиоизлучения отдельных компонент нетеплового галактического радиоизлучения известны не достаточно точно. По данным работы [25] спектральный индекс радиоизлучения короны α_k на частотах $38 \text{ мгц} \div 500 \text{ мгц}$ равен $0,5 \pm 0,1$. Согласно [16, 21], при $\nu > 10 \text{ мгц}$ $\alpha_k = 0,7$. В работе [2] приводится значение $\alpha_k = 0,82$ (см. примечание при корректуре). На частотах ниже 10 мгц вплоть до $\nu = 0,9 \text{ мгц}$, по-видимому, $\alpha_k \approx 0$ [26], т. е. $I_r = \text{const}$ в этом диапазоне частот. В дальнейшем будем считать, что на дециметровых и метровых волнах спектр радиоизлучения короны характеризуется спектральным индексом $\alpha_k \approx 0,7$.

Спектры нетеплового радиоизлучения спиральных рукавов и центральной области Галактики известны еще менее надежно. Согласно [17], они не отличаются от спектра радиоизлучения короны.

Анализируя данные о спектре нетеплового космического радиоизлучения, можно получить некоторую информацию как о свойствах межзвездной среды, так и о характере движения космических электронов в межзвездном пространстве. С другой стороны, используя значение параметров межзвездной среды, полученные какими-либо независимыми способами, и предполагая определенный характер движения космических электронов, можно сделать заключение о спектре таких компонент нетеплового космического радиоизлучения, выделить которые пока не удается. Оба эти метода анализа данных будут использованы в дальнейшем.

б) *О спектре нетеплового галактического радиоизлучения.* Рассматривая вопрос о спектре нетеплового галактического радиоизлучения, интересно проанализировать два случая.

1) В отношении движения космических электронов Галактика представляет собой единую систему. Релятивистские электроны возникают главным образом в спиральных рукавах*, а затем диффундируют по всему объему Галактики.

* Ниже везде предполагается, что спиральные рукава и центральная область Галактики представляют собой единую систему

2) Обмен релятивистскими электронами между галактическими рукавами и окружающим пространством затруднен в силу квазизамкнутости магнитного поля в галактических рукавах.

В первом варианте можно ожидать, что спектры радиоизлучения галактической короны, спиральных рукавов и центральной области Галактики будут почти одинаковы. Некоторая разница в спектрах возможна лишь из-за различия H_{\perp} в этих областях. Примем, что спиральный индекс галактического радиоизлучения на частотах $\nu \sim 10^7$ гц $x_r = 0,7$, и оценим величину $\bar{H}_{\perp}^2/\bar{N}H_{\perp}$. Чтобы это сделать, надо знать величину γ . До недавнего времени считалось [1], что в интересующем нас интервале энергий спектр релятивистских электронов, генерируемых источниками, характеризуется показателем степени $\gamma' \approx 2$, т. е. $\gamma \approx 3$. Однако по последним данным [27] $\gamma' = 2,5 \pm 0,2$ и $\gamma = 3,5 \pm 0,2$. Так как значение $\gamma = 3$ совсем исключить, по-видимому, еще нельзя, дальнейшее рассмотрение будем вести параллельно для $\gamma=3$ и $\gamma=3,5$.

На рис. 1 приведены кривые, изображающие спектр синхротронного излучения релятивистских электронов при $\gamma=3$. Поворачивая их на некоторый угол в плоскости чертежа вокруг точки с координатами (1; 0,087), можно получить кривые для значений γ , не равных, но близких к трем. Этот прием будет использован для нахождения спиральных индексов синхротронного излучения электронов при $\gamma=3,5$.

Как видно из рис. 1, спиральный индекс $\alpha=0,7$ при $\gamma=3$ и $\gamma=3,5$ отвечает значениям $\nu'' > 10$, где различие между кривыми 3 и 4 невелико. Для определенности будем использовать кривую 3, изображающую спектр синхротронного излучения релятивистских электронов в неионизированной среде. С помощью этой кривой находим, что $\alpha=0,7$ в окрестности $\nu''=10^2$ при $\gamma=3$ и $\nu''=20$ при $\gamma=3,5$. Таким образом, $\bar{H}_{\perp}^2/\bar{N}H_{\perp} = ec\nu''/\nu \approx 1,5 \cdot 10^{-4}$ при $\gamma=3$ и $\bar{H}_{\perp}^2/\bar{N}H_{\perp} = 3 \cdot 10^{-5}$ при $\gamma=3,5$. Примем, что $\sqrt{\bar{H}_{\perp}^2} \sim H_{\perp} \sim 3 \cdot 10^{-6}$ эрстед. Тогда $\bar{N} \sim 2 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-3}$ при $\gamma=3$ и $\bar{N} \sim 0,1 \text{ см}^{-3}$ при $\gamma=3,5$. Значение $\bar{N} \sim 0,1 \text{ см}^{-3}$ кажется неприемлемо большим. Выводы из этого факта будут рассмотрены ниже.

В случае, если обмен релятивистскими электронами между спиральными рукавами и галактической короной затруднен, можно ожидать значительной разницы спектров радиоизлучения короны и спиральных рукавов. Поскольку спектр радиоизлучения галактических рукавов, по существу, неизвестен, определим спиральный индекс, задаваясь величинами \bar{N} , \bar{H}_{\perp}^2 и H_{\perp} . Примем, что в галактических рукавах $\bar{N} \sim 1 \text{ см}^{-3}$, $\sqrt{\bar{H}_{\perp}^2} \sim H_{\perp} \sim 10^{-5}$ эрстед. В центральной области Галактики, вероятно, можно принять значение $H_{\perp} \sim 3 \cdot 10^{-5}$ эрстед [28]. Соответствующие значения спиральных индексов в диапазоне частот $10^7 \text{--} 10^9$ гц приведены в таблице 2. В этой же таблице приведены спиральные индексы радиоизлучения короны при $\sqrt{\bar{H}_{\perp}^2} \sim H_{\perp} \sim 3 \cdot 10^{-6}$ эрстед, $\bar{N} \sim 10^{-2} \text{ см}^{-3}$ и $\bar{N} \sim 10^{-3} \text{ см}^{-3}$. Разность спиральных индексов радиоизлучения короны α_k и галактических рукавов α_{gr} оказывается не меньше 0,2, а при некоторых условиях достигает 0,4.

Так как солнечная система находится в галактическом рукаве, а излучательная способность единицы объема галактического рукава значительно превосходит излучательную способность единицы объема короны, регистрируемое нетепловое галактическое радиоизлучение нужно рассматривать как сумму имеющих разные спектры излучений короны и рукавов, причем доля того или иного радиоизлучения на фиксированной частоте зависит от направления луча зрения. Как уже

Таблица 2

Спектральные индексы радиоизлучения в интервале частот 10^7 Гц— 10^9 Гц

τ	\bar{N} (см^{-3})	$H_{\perp}^{1/2}$ (эрстед 2)	H_{\perp} (эрстед)	η
3	1	10^{-10}	10^{-5}	0,6
3	1	10^{-10}	10^{-5}	0,5
3	10^{-2}	$9 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-6}$	0,8
3	10^{-8}	$9 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-6}$	1
3,5	1	10^{-10}	10^{-5}	0,8
3,5	1	10^{-10}	$3 \cdot 10^{-5}$	0,7
3,5	10^{-2}	$9 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-6}$	1
3,5	10^{-3}	$9 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-6}$	1,25

отмечалось, на $\lambda=3,5$ м излучательная способность источников нетеплового радиоизлучения в галактических рукавах приблизительно в десять раз больше их излучательной способности в короне. При разности $\alpha_k - \alpha_{gr} = 0,2$ излучательная способность в галактических рукавах на $\lambda = 22$ см будет в 17 раз, а при $\alpha_k - \alpha_{gr} = 0,4$ в 30 раз больше, чём излучательная способность в короне. Таким образом, если галактические рукава представляют собой квазизамкнутую систему в отношении движения космических электронов, то на высоких частотах спиральная структура Галактики должна проявляться более отчетливо.

Этот вывод не противоречит имеющимся экспериментальным данным. Действительно, на высоких частотах распределение радиоизлучения по небосводу обнаруживает более сильную концентрацию к галактической плоскости, чем на низких частотах. Далее, в северном полушарии при $l \approx 0^\circ$ наблюдается полоса „избыточного“ радиоизлучения, связанная, вероятно, с излучением рукава, в котором находится солнечная система. Спектральный индекс „избыточного“ радиоизлучения в диапазоне $1,5 \div 3$ м равен $0,3 \div 0,6^*$, т. е. меньше спектрального индекса общего космического радиоизлучения. Наконец, результаты измерений интенсивности космического радиоизлучения вблизи галактической плоскости на частотах 19,7 мГц [17], 85,7 мГц [15] и 1390 мГц [16], полученные с помощью весьма остронаправленных антенн (разрешающая способность около 1°), также, по-видимому, свидетельствуют о том, что спектральный индекс радиоизлучения галактических рукавов меньше спектрального индекса радиоизлучения короны.

В таблице 3 приведены значения эффективных температур небосвода на частотах 1390 мГц, 85,7 мГц и 19,7 мГц и их отношений для нескольких направлений луча зрения, свободных от дискретных источников. Галактические долготы выбраны те же, что и в работе [20], а галактические широты — несколько иные, чтобы можно было воспользоваться результатами работы [17]. Предполагая, что в диапазонах 1390 мГц—85,7 мГц и 85 мГц—19,7 мГц эффективные температуры небосвода пропорциональны $\nu^{-\beta}$, по данным таблицы 3 можно определить показатель степени β . Значения β приведены в таблице 4.

Количественный анализ этих данных представляет некоторые трудности, так как необходимо учесть вклад, вносимый ионизированным межзвездным газом**. Однако качественные результаты могут быть

* Эта величина спектрального индекса найдена путем сравнения радиоизофот северного и южного полушарий [29] на $\lambda = 1,5$ м [30] и 3 м [31].

** Ионизированный межзвездный газ приводит, с одной стороны, к поглощению радиоизлучения на низких частотах, а с другой — является источником теплового радиоизлучения, которое на достаточно высоких частотах может составить заметную часть в наблюдаемом космическом радиоизлучении.

Таблица 3

Значения эффективных температур небосвода на волнах 22 см [16], 3,5 м [15] и 15 м [17] и их отношений для нескольких направлений луча зрения

<i>l</i> (град)	332	340	348,5	355,5	8	332	340	348,5	355,5	8
<i>b</i> (град)	+3	+3	+3	+3	+3	-1	-1	-1	-1	-1
$T_{\lambda=0,22 \text{ м}} (\text{°К})$	2	3	6	3,5	3	17,9	16,2	14,6	14,6	6,5
$T_{\lambda=3,5 \text{ м}} (\text{°К})$	5500	4000	5500	5500	4600	18000	16000	12500	11500	9000
$T_{\lambda=15 \text{ м}} (\text{°К})$	280000	225000	240000	180000	250000	310000	180000	170000	190000	320000
$T_{\lambda=3,5}/T_{\lambda=0,22}$	2750	1340	920	1570	1530	1000	990	860	790	1390
$T_{\lambda=15}/T_{\lambda=3,5}$	50	50	44	25	55	17,2	11,2	13,6	16,5	35,6

Таблица 4

Значения β ($T_{\text{эфф}} \propto \nu^{-\beta}$), найденные по данным таблицы 3

<i>l</i> (град)	332	340	348,5	355,5	8	Интервал длин волн
<i>b</i> (град)						
+3	2,8	2,53	2,44	2,6	2,6	22 см - 3,5 м
-1	2,46	2,46	2,4	2,38	2,58	
+3	2,68	2,66	2,57	2,2	2,73	3,5 м + 15 м
-1	1,5	1,65	1,78	1,9	2,44	

получены сразу же. В направлениях с галактическими долготами 340°; 348°,5; 8° и галактической широтой +3°, где влияние ионизированного межзвездного газа, вероятно, относительно невелико*, индекс β в диапазоне 1390 мгц - 85,7 мгц меньше, чем в диапазоне 85,7 мгц - 19,7 мгц. Это увеличение спектрального индекса радиоизлучения с понижением частоты в рамках рассматриваемых в настоящей статье представлений естественно объяснить тем, что спектр нетеплового радиоизлучения галактических рукавов менее крутой, чем спектр нетеплового радиоизлучения короны. Разумеется, если отказаться от тех ограничений, которые приводят к энергетическому спектру космических электронов вида (1), то можно предложить и другие объяснения. В частности, при наличии ускорения космических электронов в межзвездном пространстве спектральный индекс их синхротронного излучения может расти с понижением частоты [32]. Однако возможность ускорения космических электронов в межзвездном пространстве весьма сомнительна [1]. Таким образом, из рассмотренных выше двух моделей более предпочтительна модель Галактики с квазизамкнутыми в отношении движения релятивистских электронов спиральными рукавами.

* В направлениях с $l = 340^\circ; 348^\circ,5; 8^\circ$ и $b = +3^\circ; -1$ в диапазоне частот 1390 мгц - 85,7 мгц интенсивность теплового радиоизлучения, по-видимому, значительно меньше интенсивности нетеплового радиоизлучения, так как спектральные индексы при одних и тех же значениях l и $b = 3^\circ; -1^\circ$ близки друг к другу.

Остановимся теперь на объяснении „излома“ в спектре радиоизлучения короны на частоте $\nu \sim 10 \text{ мгц}$. Из рис. 1 видно, что спектр синхротронного излучения при $\rho=0$, $\gamma=3$ хотя и не имеет резкого „излома“, но все же допускает грубую аппроксимацию функцией $I_\nu \propto (\nu')^{-0.7}$ при $\nu' > 10$ и $I_\nu = \text{const}$ при $\nu' < 10$. Полагая, что значению $\nu' = 10$ отвечает частота $\nu = 10^7 \text{ гц}$, найдем $\bar{H}_\perp^2 / \bar{N} H_\perp = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ эрстед} \cdot \text{см}^3$. Отсюда при $\bar{H}_\perp^2 / H_\perp \sim 3 \cdot 10^{-6} \text{ эрстед} \cdot \text{см}^{-3}$ это значение для средней концентрации газа в Галактике (включая и галактическую корону) неприемлемо велико. В случае $\gamma=3.5$ отмеченное затруднение только усугубляется. Следовательно, нужно искать другое объяснение „излома“ спектра. Вероятно, более правдоподобно объяснение, состоящее в том, что в диапазоне частот $0.9 \text{ мгц} \div 10 \text{ мгц}$ спектральный индекс излучения короны ~ 0.7 , но из-за частичной экранировки областями $H\text{II}$ телесного угла приема радиоизлучения регистрируемый спектральный индекс становится близким к нулю [32].

в) О вариациях спектра нетеплового галактического радиоизлучения. Во всех случаях, когда энергетический спектр релятивистских электронов дается выражением (1) и $\nu' < 10^3$, можно ожидать некоторых вариаций спектра нетеплового галактического радиоизлучения в зависимости от направления луча зрения. Особенно заметную разницу в спектрах можно ожидать при наблюдении в галактической плоскости. Это связано, во-первых, с тем, что спектр радиоизлучения спиральных рукавов может заметно отличаться от спектра радиоизлучения галактической короны, и во-вторых, с возможным различием конфигурации магнитного поля в рукавах и окружающем их межзвездном пространстве.

Конфигурация магнитного поля в спиральных рукавах неизвестна. До недавнего времени считалось (на основании измерений поляризации света звезд), что магнитное поле в галактических рукавах упорядочено на расстояниях $\sim 1000 \text{ pc}$ [34]. Однако исследования радиоизлучения на $\lambda = 3.5 \text{ м}$, выполненные Миллсом [21, 22], заставляют усомниться в справедливости этого вывода. Интенсивность принимаемого радиоизлучения всякий раз резко возрастает, когда главный лепесток антены оказывается направленным вдоль галактического рукава. Этот факт, по-видимому, свидетельствует о наличии в галактических рукавах значительной неупорядоченной компоненты магнитного поля. Если можно воспользоваться для определения спектра синхротронного излучения формулой (16), то следует ожидать, что при наблюдении вдоль галактического рукава спектр будет круче, чем при наблюдении поперек рукава, так как H_\perp в первом случае, вероятно, меньше, чем во втором. Напротив, если в галактических рукавах преобладает упорядоченная компонента магнитного поля, так что можно воспользоваться формулой (14), то при наблюдении вдоль рукава спектр излучения должен быть более пологим, чем при наблюдении поперек рукава. Используя данные таблицы 4 и картину радиоспиралей, полученную в [21, 22], можно склониться к мысли о преобладании в галактических рукавах неупорядоченной компоненты магнитного поля, так как при наблюдении в направлениях, близких к направлениям вдоль галактических рукавов ($l=8^\circ; 340^\circ$), спектр излучения несколько более крутой, чем при наблюдении в направлении, пересекающем „радиорукав“ ($l=348^\circ, 5$).

Обращает на себя внимание большая вариация спектра галактического радиоизлучения при $l=332^\circ$ и $b=+3^\circ$. В направлении $l=332^\circ, b=+3^\circ$ луч зрения почти перпендикулярен радиорукавам; тем не менее,

спектральный индекс излучения значительно больше, чем при наблюдении в направлении $l=8^\circ$, $b=+3^\circ$. Это связано, вероятно, с существованием „разрыва“ в одном из спиральных рукавов при $l=332^\circ$. В направлении $l=332^\circ$, $b=+3^\circ$, по-видимому, принимается преимущественно радиоизлучение короны. Возможность существования „окна“ в одном из галактических рукавов в направлении с $l=330^\circ$ отмечалась также в работе [17] в связи с существованием максимума отношения эффективных температур небосвода на частотах 19,7 мгц и 85,7 мгц при $l=330^\circ$, $b=-1^\circ$.

Спектральный индекс радиоизлучения короны также может испытывать некоторые вариации. Помимо отмечавшихся в [35, 5] вариаций спектра излучения короны, связанных с изменением энергетического спектра релятивистских электронов по мере их диффузии от источников на периферию Галактики, возможны также упоминавшиеся выше вариации, обусловленные различием спектров излучения отдельных областей с квазиоднородным магнитным полем. Надежных экспериментальных данных о вариациях спектра радиоизлучения короны пока, к сожалению, нет.

г) *О границах Галактики.* Как уже отмечалось, при $\gamma=3,5$ и разумных значениях \bar{N} спектр синхротронного радиоизлучения космических электронов оказывается круче наблюдаемого (см. таблицу 2). Можно было бы принять, что отношение $\bar{H}_\perp^2/H_\perp^2$ много меньше, чем $3 \cdot 10^{-6}$ эрстед, например, порядка $3 \cdot 10^{-7}$ эрстед. Однако при этом возникают затруднения с объяснением интенсивности радиоизлучения. Кроме того, высокая степень изотропии космических лучей, по-видимому, свидетельствует о том, что $\sqrt{\bar{H}_\perp^2} \sim \sqrt{H_\perp^2}$, а последнее значение по порядку величины равно $3 \cdot 10^{-6}$ эрстед. Таким образом, при $\gamma'=2,5$, вероятно, нельзя считать, что энергетический спектр космических электронов дается выражением (1).

При более строгом, чем это сделано в настоящей статье, решении задачи об определении вида энергетического спектра космических электронов нужно, прежде всего, рассмотреть диффузию релятивистских электронов от их источников, определенным образом распределенных в Галактике. Существенно, что решения получаются разными в зависимости от того, сказывается или нет „отражение“ релятивистских электронов от галактической границы. Если „отражение“ релятивистских электронов от галактической границы не сказывается, то в непосредственной близости от источников энергетический спектр релятивистских электронов определяется спектром электронов, генерируемых источниками, т. е. имеет вид $N(E)=K'E^{-\gamma'}$. По мере движения космических электронов от источников их энергетический спектр изменяется из-за потери энергии на синхротронное излучение и взаимодействие со средой, так что в достаточно удаленных от источников областях Галактики энергетический спектр электронов может приобрести вид (1).

За радиоизлучение, наблюдаемое в каком-либо направлении, ответственны релятивистские электроны с некоторым эффективным энергетическим спектром вдоль луча зрения. В довольно широких интервалах энергий спектр релятивистских электронов по лучу зрения может быть записан в виде $N(E) \sim E^{-\gamma_{\text{эфф}}}$, где величина $\gamma_{\text{эфф}}$ заключена в пределах $\gamma'-1 \leq \gamma_{\text{эфф}} \leq \gamma'+1$ в зависимости от энергии релятивистских электронов, напряженности межзвездного магнитного поля, средней концентрации межзвездного газа и „длины свободного пробега“ релятивистских электронов, определяемой средним размером областей с квазиоднородным магнитным полем l . Такому энергетиче-

скому спектру релятивистских электронов отвечает в некотором интервале частот спектр синхротронного излучения вида $I \propto \nu^{(1-\gamma_{\text{эфф}})/2}$.

В работе [5] рассмотрена диффузия космических электронов в галактической короне и найден их энергетический спектр по лучу зрения в предположениях, что 1) $\gamma' = 2$; 2) источники космических электронов сконцентрированы вблизи галактической плоскости; 3) электроны теряют энергию только из-за синхротронного излучения; 4) „отражение“ космических электронов от галактической границы несущественно. Как следует из результатов этой работы, при $\bar{N}_\perp^2 \sim \sim 9 \cdot 10^{-12} \text{ эрстед}^2$ и $l \sim 100 \text{ нс}$ $\gamma_{\text{эфф}} \approx \gamma'$, а при $l \leq 2,5 \text{ нс}$ $\gamma_{\text{эфф}} \approx \gamma' + 1$.

Таким образом, если не учитывать „отражения“ релятивистских электронов от галактической границы, то пользоваться выражением (1) для энергетического спектра космических электронов можно только при характерном размере областей с квазиоднородным магнитным полем $l \leq 2,5 \text{ нс}$. Такая величина l по ряду причин представляется неприемлемо малой. С другой стороны, при $l \sim 100 \text{ нс}$ (этот размер кажется наиболее подходящим [32, 33]) потери энергии релятивистских электронов оказываются мало в течение времени, которое требуется им, чтобы продиффундировать на периферию Галактики. В этом случае энергетический спектр космических электронов вида (1) может установиться лишь при наличии „отражения“ релятивистских электронов от галактической границы.

При $\gamma' = 2$ энергетический спектр космических электронов вида (1) вполне приемлем. Поэтому, полагая $l \sim 100 \text{ нс}$, следует заключить, что в случае $\gamma' = 2$ „отражение“ релятивистских электронов от галактической границы играет важную роль.

Совсем иная картина представляется при $\gamma' = 2,5$. Принимая, что на метровых волнах спектральный индекс галактического радиоизлучения $\alpha_r \approx 0,7$, находим $\gamma_{\text{эфф}} = 2,4$, т. е. $\gamma_{\text{эфф}} \approx \gamma'$. Этот результат может означать, что либо невелики энергетические потери релятивистских электронов, либо различные процессы энергетических потерь приводят к взаимно компенсирующимся в некотором интервале энергий изменениям спектра релятивистских электронов. Действительно, потери энергии на синхротронное излучение увеличиваются, а ионизационные потери уменьшают $\gamma_{\text{эфф}}$; при этом в некотором интервале энергий $\gamma_{\text{эфф}}$ может остаться приблизительно равным γ' . И в том, и в другом случае при $\gamma' = 2,5$, $l \sim 100 \text{ нс}$ и $\bar{N} \sim 10^{-2} \div 10^{-3} \text{ см}^{-3}$ отражение релятивистских электронов от границы Галактики должно практически отсутствовать, иначе в конце концов установился бы спектр вида (1). Таким образом, если равенство $\gamma_{\text{эфф}} \approx \gamma'$ действительно имеет место, то оно, вероятно, свидетельствует об „открытой“ границе Галактики.

д) *Замечание о нетепловом радиоизлучении облаков межзвездного газа.* Вопрос о нетепловом радиоизлучении облаков межзвездного газа представляет интерес по следующей причине. Вполне возможно, что космические электроны почти не проникают в сравнительно плотные облака газа [32]. В этом случае нетепловое радиоизлучение облаков будет отсутствовать. С другой стороны, если космические лучи проникают в облака и порождают там основную массу космических электронов вторичного происхождения, то излучательная способность в облаках межзвездного газа на достаточно высоких частотах будет во всяком случае не меньше, чем излучательная способность в окружающем облака межзвездном пространстве.

Заметим, что спектр нетеплового радиоизлучения областей HII на волнах метрового диапазона может заметно отличаться от спектра из-

лучения релятивистских электронов в окружающем межзвездном пространстве в силу отличия показателя преломления среды от единицы и поглощения радиоволн в областях $H\text{II}$. Отличие показателя преломления среды от единицы сказывается при $\gamma \approx 3$ на частотах, для которых параметр $v' < 10$ (см. рис. 1), т. е. на $v < 150 N_e/H_\perp$. Полагая в области $H\text{II}$ $H_\perp \sim 10^{-5}$ эрстед, $N_e \sim 10 \text{ см}^{-3}$, найдем $v < 1,5 \cdot 10^8 \text{ гц}$. На частотах ниже $30 N_e/H_\perp$ интенсивность синхротронного излучения релятивистских электронов быстро уменьшается. Коэффициент поглощения радиоволн на этой частоте равен $\kappa_v \approx 0,2 H_\perp^2 / 10^3 T_c^{3/2}$. Принимая, что размер $H\text{II}$ области $d \sim 10 \text{ pc}$, $T \sim 10^4 \text{ К}$ и $H_\perp \sim 10^{-5}$ эрстед, для оптической толщины области $H\text{II}$ получаем величину $\kappa_v d \sim 0,6$, т. е. при размерах областей $H\text{II}$ $d \sim 10 \text{ pc}$ на тех частотах, на которых интенсивность синхротронного излучения падает из-за отличия показателя преломления среды от единицы, заметно также и поглощение радиоволн в ионизированном газе.

Радиоизлучение областей $H\text{II}$ исследовалось в работе [36]. На волне $3,5 \text{ м}$ их нетепловое радиоизлучение не было обнаружено. Интересно измерить нетепловое радиоизлучение областей $H\text{I}$, так как при этом отсутствовали бы затрудняющие интерпретацию результатов измерений факторы, отмеченные в связи с обсуждением нетеплового радиоизлучения областей $H\text{II}$.

е) Замечание о спектре метагалактического радиоизлучения. Основным результатом проведенного в разделе 1 анализа является вывод о том, что спектральный индекс синхротронного излучения зависит от параметров среды, в которой движутся релятивистские электроны. Зависимость эта такова, что спектр синхротронного излучения делается более крутым при увеличении параметра $v'' = v H_\perp^2 / ec \bar{N} H_\perp$.

Если релятивистские электроны попадают на межгалактическое пространство из галактик, то величина v'' может возрасти во много раз, так как H_\perp в межгалактическом пространстве значительно слабее, чем в галактиках. В этом же направлении действует и красное смещение частоты, связанное с расширением Вселенной. Таким образом, следует ожидать, что спектр метагалактического радиоизлучения, не связанного с излучением метагалактических дискретных источников, более крутой, чем спектр нетеплового галактического радиоизлучения. По имеющимся данным [37] спектральные индексы радиоизлучения метагалактических дискретных источников больше спектрального индекса нетеплового галактического радиоизлучения. Следовательно, есть основания полагать, что спектр общего метагалактического радиоизлучения круче, чем спектр нетеплового галактического радиоизлучения, и доля последнего в наблюдаемом космическом радиоизлучении уменьшается с понижением частоты*.

На частоте $19,7 \text{ мгц}$ около одной трети интенсивности космического радиоизлучения в направлениях на галактические полюса обусловлено излучением метагалактики. Если разница спектральных индексов излучения Галактики и метагалактики около 0,3, что при некоторых условиях вполне возможно, то на частоте $v \sim 1 \text{ мгц}$ метагалактическое радиоизлучение будет составлять более $2/3$ от общего космического радиоизлучения в направлениях на полюса Галактики.

* Противоположный вывод, сделанный в работах [35, 38], в свете новых радиоастрономических данных кажется необоснованным.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, УФН, **62**, 37 (1957).
2. И. С. Шкловский, Космическое радиоизлучение, Гостехиздат, М., 1956.
3. Г. Г. Гетманцев, ДАН СССР, **83**, 557 (1952).
4. А. А. Корчак, Астрон. ж., **34**, 365 (1957).
5. С. И. Сыроватский, Астрон. ж., **36**, 17 (1959).
6. В. А. Разин, Диссертация, ГГУ, 1957.
7. В. А. Разин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 584 (1960).
8. В. В. Владимировский, ЖЭТФ, **18**, 393 (1948).
9. А. А. Логунов, Я. П. Терлецкий, Изв. АН СССР, сер. физ., **17**, 19 (1953).
10. L. Davis, Phys. Rev., **101**, 351 (1956).
11. С. А. Каплан, ЖЭТФ, **29**, 406 (1955).
12. Г. Г. Гетманцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 3 (1959).
13. B. Y. Mills, O. B. Sfee, Austr. J. Phys., **10**, 162 (1957).
14. J. H. Oort, Paris Symp. on R. A., R. N. Bracewell, ed., Stanford Univ. Press, 1959, p. 463.
15. B. Y. Mills, E. R. Hill, O. B. Sfee, Austr. J. Phys., **11**, 530 (1958).
16. G. Westerhout, Paris Symp. on R. A., R. N. Bracewell, ed., Stanford Univ. Press, 1959, p. 447.
17. C. A. Shain, Paris Symp. on R. A., R. N. Bracewell, ed., Stanford Univ. Press, 1959, p. 451.
18. C. A. Shain, Paris Symp. on R. A., R. N. Bracewell, ed., Stanford Univ. Press, 1959, p. 328.
19. J. E. Baldwin, M. N. R. A. S., **115**, 690 (1955).
20. B. Y. Mills, E. R. Hill, O. B. Sfee, Observatory, **78**, 116 (1958).
21. B. Y. Mills, Publ. A. S. P., **71**, 267 (1959).
22. B. Y. Mills, Paris Symp. on R. A., R. N. Bracewell, ed., Stanford Univ. Press, 1959, p. 431.
23. G. W. Rougoor, J. H. Oort, Paris Symp. on R. A., R. N. Bracewell, ed., Stanford Univ. Press, 1959, p. 416.
24. B. Y. Mills, Paris Symp. on R. A., R. N. Bracewell, ed., Stanford Univ. Press, 1959, p. 498.
25. R. Adgie, F. G. Smith, Observatory, **76**, 181 (1958).
26. G. R. Ellis, J. Geophys. Res., **62**, 229 (1957).
27. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, УФН, **71**, 411 (1960).
28. И. С. Шкловский, Труды Московской конференции по косм. лучам, 1959.
29. И. С. Шкловский, Астрон. ж., **29**, 418 (1952).
30. F. Dröge, W. Priester, Zs. f. Astrophys., **40**, 236 (1956).
31. J. Bolton, K. Westfold, Austr. J. Sci. Res., **3A**, 19 (1950).
32. В. А. Разин, Астрон. ж., **35**, 829 (1958).
33. С. Б. Пикельнер, И. С. Шкловский, Астрон. ж., **34**, 314 (1957).
34. С. Б. Пикельнер, УФН, **58**, 285 (1956).
35. Г. Г. Гетманцев, Труды 5-го совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М., 1956, стр. 490.
36. H. Rishbeth, Austr. J. Phys., **11**, 550 (1958).
37. G. R. Whitfield, M. N. R. A. S., **117**, 680 (1957).
38. Г. Г. Гетманцев, Астрон. ж., **32**, 22 (1955).
39. Н. С. Ко, Proc. IRE, **46**, 208 (1958).
40. R. X. McGee, O. B. Sfee, G. J. Stanley, Austr. J. Phys., **8**, 347 (1955).
41. C. H. Costain, M. N. R. A. S., **120**, 248 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
23 июля 1960 г.

Примечание при корректуре. В опубликованной недавно работе [41] по результатам измерений на волнах 1,7 м и 7,9 м найдено значение $\gamma_K = 0,37 \pm 0,04$.

СПЕКТР ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ВОССТАНАВЛИВАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРОВ

A. Ханбердиев

Вводится понятие области восстанавливющей способности антенной системы. Обсуждаются возможные применения этого понятия, а также вопрос о сужении области восстанавливющей способности вследствие шумов. Указывается на возможность разделения сигналов от протяженных источников радиоизлучения и рассеянных помех с ограниченным (хотя бы снизу) спектром при помощи поворотных прохождений через диаграмму направленности с различными скоростями.

1. Современные задачи радиоастрономии, такие как исследование мелких деталей распределения радиояркости дискретных источников радиоизлучения и активных областей Солнца, требуют изучения распределения радиояркости источников во все более широком диапазоне „пространственных частот“. Поэтому становятся важными характеристики радиотелескопа, которые показали бы, в каком диапазоне спектра „пространственных частот“ возможно изучение распределения радиояркости.

Одной из этих характеристик может до некоторой степени служить разрешающая способность радиотелескопа. Широко распространенным критерием разрешающей способности для оптических приборов является критерий Рэлея [1], хотя впоследствии были предложены и другие критерии (см., например, [2–4]). Тот же критерий Рэлея используется и для определения разрешающей способности радиотелескопов [5, 6].

Действительно, в случае сплошных апертур разрешающая способность определяет и возможности этой апертуры в изучении распределения радиояркости, т. е. определяет диапазон спектра „пространственных частот“, внутри которого можно исследовать это распределение. Однако в случае радиоинтерферометров, особенно в случае составных интерферометров [7], разрешающая способность не может определять эти возможности. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

2. Распределение радиояркости источников радиоизлучения является функцией углов (прямого восхождения и склонения) и не зависит от времени, за исключением таких источников, как Солнце, Луна и некоторые планеты. Для удобства изучения эти ограниченные в пространстве функции углов разлагаются в интеграл Фурье. В одномерном случае

$$f(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{j\varphi s} ds,$$

где s — частота компонент пространственного разложения функции $f(\varphi)$ или просто *пространственная частота*, а

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi) e^{-j\varphi s} d\varphi$$

есть спектр пространственных частот функции $f(\varphi)$ или пространственный спектр.

Как обычная частота ω определяется обратной величиной времени T , где T —период гармонического колебания функции времени, так и пространственная частота s определяется обратной величиной угла Φ , где Φ —период колебания функции угла.

3. Пусть $a(\varphi)$ —диаграмма направленности антенной системы (или одной антенны) по мощности, $f(\varphi)$ —истинное распределение и $g(\varphi)$ —наблюдаемое распределение радиояркости. Тогда между ними имеет место соотношение [8]

$$g(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x-\varphi) f(x) dx. \quad (1)$$

Обозначим через $A(s)$, $F(s)$ и $G(s)$ преобразования Фурье или, как говорят, спектры функций $a(-\varphi)$, $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$ (т. е.

$$A(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(-\varphi) e^{-j\varphi s} d\varphi \quad (2)$$

и т. д.). Тогда между этими спектрами существует соотношение (см., например, [9])

$$G(s) = A(s) F(s); \quad F(s) = G(s) / A(s). \quad (3)$$

Отсюда видно, что гармоники истинного распределения могут быть восстановлены тогда и только тогда, когда соответствующие гармоники в спектре диаграммы направленности $A(s)$ не равны нулю [9].

Ту полосу, в пределах которой $A(s)$ не обращается в нуль, будем называть областью восстанавливющей способности или полосой восстановления антенной системы, так как только в пределах этой области принципиально можно восстановить истинное распределение. Самый верхний предел этой полосы s_c будет определять разрешающую способность этой системы.

Для примера рассмотрим одномерную равномерно облучаемую апертурой. Для нее

$$a(\varphi) = \frac{w}{\lambda} \left[\frac{\sin(\pi \varphi w/\lambda)}{\pi \varphi w/\lambda} \right]^2; \quad (4)$$

$$A(s) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|s|}{w/\lambda} \right) & \text{при } |s| < w/\lambda, \\ 0 & \text{при } |s| > w/\lambda. \end{cases}; \quad (5)$$

$$s_c = w/\lambda; \quad \varphi_c = 1/s_c = \lambda/w, \quad (6)$$

где w —длина апертуры, λ —длина волны.

В этом случае область восстанавливающей способности простирается от $s=0$ до $s=s_c=w/\lambda$. Разрешающая способность по Рэлею будет равна $\varphi_c=\lambda/w=1/s_c$. Следовательно, верхний предел области восстанавливающей способности одновременно определяет и разрешающую способность антенной системы.

До последнего времени не было особой необходимости в таком понятии как восстанавливающая способность, поскольку действовали или сплошные антенны, или интерферометры, размеры отдельных антенн которых были малы по сравнению с базой. В случае сплошной апертуры ее спектр всегда ограничивался со стороны низких частот нулем, а со стороны высоких частот значением $s_c=w/\lambda$. Этот верхний

предел обычно приводился как разрешающая способность. В случае радиоинтерферометров указанная область восстанавливющей способности была сравнительно узкой; поэтому обычно ограничивались указанием средней частоты этой полосы в виде разрешающей способности радиоинтерферометра.

4. В случае составных интерферометров можно получить спектры диаграмм направленности антенных систем, имеющие довольно широкие полосы, но ограниченные с обеих сторон, и даже несколько таких полос. Так, например, если сплошная апертура длиной w действует как один элемент составного интерферометра, а другим элементом служит сам простой интерферометр, состоящий из двух антенн, малых по сравнению с базой, то этот составной интерферометр будет иметь диаграмму направленности по мощности (для одномерного случая) [7]

$$a_r(\varphi) = ab \cos(k_1 \varphi) \frac{\sin(k_2 \varphi)}{k_2 \varphi} \cos(2k_3 \varphi),$$

где $k_1 = \pi l/\lambda$ (l —база простого интерферометра), $k_2 = \pi w/\lambda$, $k_3 = \pi d/\lambda$ (d —расстояние между фазовыми центрами сплошной апертуры и простого интерферометра). При различных значениях k_1 , k_2 , k_3 этот составной интерферометр будет иметь различные диаграммы направленности $a_r(\varphi)$. Следовательно, и спектры пространственных частот $A_c(s)$, соответствующие этим диаграммам, будут различны.

На рис. 1 приведены спектры пространственных частот для различных значений k_1 , k_2 , k_3 . Для сравнения пунктиром указан также спектр $A(s)$, соответствующий диаграмме направленности отдельно

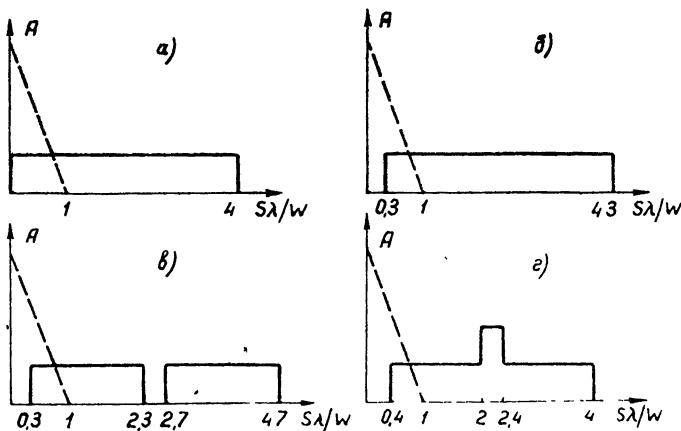


Рис. 1. Спектры пространственных частот для различных значений k_1 , k_2 , k_3 : а) $k_1=k_2=k_3$ и $k_1=2k_2$, $k_3=0,5k_2$; б) $k_1=k_2$, $k_3=1,15k_2$; в) $k_1=1,2k_2$, $k_3=1,25k_2$; г) $k_1=0,8k_2$, $k_3=1,1k_2$.

взятой сплошной апертуры $a(\varphi)$. Как видим, даже для самого простого составного интерферометра можно получить различные спектры $A_c(s)$. В этих случаях особенно важно указание областей восстанавливющей способности.

Интересно заметить, что в случаях $k_1=k_2=k_3$ и $k_1=2k_2$, $k_3=0,5k_2$ (рис. 1а), т. е. при разных расположениях составных элементов интерферометра, область восстанавливющей способности одна и та же. При этом диаграмма направленности антенной системы будет оптимальной, так как спектр от 0 до граничной частоты s_c постоянен. Если наряду

с составным интерферометром будет использоваться также отдельно взятый простой интерферометр, являющийся одним из плеч составного, то следует выбрать расположение антенн, соответствующее случаю $k_1=2k_2$, $k_3=0,5 k_2$. Такой простой интерферометр будет обладать в 2 раза большей разрешающей способностью по сравнению с простым интерферометром в случае $k_1=k_2=k_3$.

В случае рис. 1 в составной интерферометр будет иметь область восстанавливющей способности в пределах от $s_1=0,3w/\lambda$ до $s_2=2,3w/\lambda$ и от $s_3=2,7w/\lambda$ до $s_4=4,7w/\lambda$. В то же время $s_c=s_{c'}=4,7w/\lambda$ будет определять разрешающую способность по Рэлею $\varphi_c=1/s_c$.

5. Понятие восстанавливющей способности полезно при создании радиоинтерферометров, так как в зависимости от конкретной задачи требуется интерферометр, имеющий данную область восстанавливющей способности. Другим примером приложения этого понятия являются наблюдения на составных интерферометрах с переменной базой. В этом случае можно выбрать оптимальные дискретные точки расположения подвижной антенны, с целью получить полный сплошной спектр яркостного распределения от нуля до граничной частоты s_c , определяемой максимальной базой. Вообще говоря, чем больше будет отличаться диаграмма направленности антенной системы от хорошо изученных простых диаграмм направленности, тем важнее становится понятие восстанавливющей способности.

Конечно, восстановить соответствующие гармоники истинного распределения возможно, если известны также значения $A(s)$ в области восстанавливющей способности.

6. Как указывалось выше, в радиоастрономии очень удобным является описание функции распределения радиояркости источника с помощью спектра пространственных частот s . Однако в некоторых случаях представляется более удобным описывать процесс прохождения источника через диаграмму направленности антенны как функцию времени, т. е. с помощью спектра обычных временных частот ω . При этом необходимо переходить от спектра пространственных частот s к спектрам обычных частот ω и наоборот.

Если радиоисточник проходит через диаграмму направленности антенны с определенной скоростью v , то запись распределения яркости в зависимости от угла будет представлять (в определенном масштабе) и функцию времени (поскольку время t и угол φ связаны соотношением $\varphi=vt$). Найдем спектр функции $f(vt)$:

$$F_v(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(vt) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} f(vt) e^{-j(\omega/v)v t} d(vt) = \frac{1}{v} F(\omega/v),$$

где $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ есть спектр функции $f(t)$. Для функции рас-

пределения радиояркости источника временная частота ω пропорциональна пространственной частоте s и скорости прохождения v ; следовательно,

$$F_v(\omega) = \frac{1}{v} F(s).$$

Таким образом, независимо от скорости прохождения ширина спектра пространственных частот остается неизменной; изменяется только амплитуда спектра $F(s)$, которая обратно пропорциональна скорости прохождения v . Если скорость прохождения v равна единице, то спектры пространственных и временных частот совпадают.

Теперь обратим внимание на спектр временных частот функции распределения радиояркости источника

$$F_v(\omega) = \frac{1}{v} F(\omega/v).$$

В этом случае ширина спектра также изменяется пропорционально скорости прохождения, т. е. при уменьшении скорости в n раз ширина спектра обычных частот сжимается тоже в n раз и наоборот.

7. Пусть теперь на вход приемника подается сигнал от проходящего через диаграмму направленности источника радиоизлучения, являющейся функцией только от угла, и рассеянная помеха, зависящая только от времени. Спектр пространственных частот этого общего сигнала будет состоять из двух частей. Первая часть (спектр функции распределения радиояркости источника) не будет зависеть от скорости прохождения источника через диаграмму направленности, тогда как вторая часть (спектр рассеянных помех) будет зависеть от этой скорости. Спектр временных частот того же общего сигнала будет состоять из тех же двух частей. Однако в этом случае спектр функции распределения радиояркости источника (в отличие от спектра рассеянных помех) будет зависеть от скорости прохождения.

Следовательно, изменение скорости прохождения действует по-разному на спектры сигнала от радиоисточника и рассеянной помехи. Если изменить скорость прохождения в n раз, то ширина одной из частей спектра, в зависимости от того, спектр каких частот мы рассматриваем, сожмется или расширится в n раз относительно другой части. На основе этого можно отделить полезный сигнал от помехи, если последняя совсем не зависит от угла (рассеянная помеха) и имеет спектр, хотя бы снизу ограниченный.

8. Как мы видели, для удобства можно рассматривать функции времени как функции от угла при данной скорости прохождения эквивалентного источника через диаграмму направленности антенны. Шум приемника, который обычно рассматривается как функция времени, можно также трактовать как функцию угла ϕ . Следовательно, в этом смысле можно говорить о пространственном спектре шумов приемника $N(s)$.

Практическое восстановление спектра распределения источника радиоизлучения в области восстанавливающей способности антенной системы может ограничиваться шумами. Пусть на входе приемника имеются шумы, состоящие из внешних помех и собственных шумов приемника со спектром мощности $N(s)$. Тогда не могут быть восстановлены те гармоники s спектра истинного распределения радиояркости, для которых

$$N(s) \geq G(s) = A(s) F(s). \quad (7)$$

Если $A(s)$ — непрерывная функция, то для некоторых s всегда существует неравенство (7). Следовательно, в этом случае всегда будет иметь место сужение области восстанавливающей способности антенной системы шумами на входе приемника.

Если внешние помехи отсутствуют, то $N(s)$ представляет спектр мощности шумов только приемника. Так как приемник создает „белый“ шум, спектр которого равен постоянной величине во всей полосе частот, неравенство (7) переходит в

$$N \geq G(s) = A(s) F(s), \quad (8)$$

где N — постоянная, не зависящая от s и определяемая шум-фактором.

Если известны мощность шумов приемника и наблюдаемое рас-

пределение радиояркости источника, то можно проверить, насколько практически сужается в данном случае полоса восстановливающей способности антенной системы шумами приемника.

Спектр внешних помех обычно неизвестен; он не стационарен и не является сплошным. Поэтому учесть сужение области восстановливающей способности из-за таких помех представляется затруднительным.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность С. Э. Хайкину, Н. Л. Кайдановскому и Ю. Н. Парийскому за обсуждение и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Стрэтт (Рэлей), Волновая теория света, ГИТТЛ, М.—Л., 1940.
2. С. М. Sparrow, *Astrophys. J.*, **44**, 76 (1916).
3. W. V. Houston, *Phys. Rev.*, **24**, 478 (1927).
4. Г. С. Раутиан, УФН, **66**, 475 (1958).
5. В. В. Виткович, Труды 5-го совещания по вопросам космогонии, изд АН СССР, М., 1956, стр. 14.
6. J. D. Kraus, *Trans. IRE, AP—4*, 445 (1956).
7. A. E. Covington, N. W. Broten, *Trans. IRE, AP—5*, 247 (1957).
8. И. С. Шкловский, Космическое радиоизлучение, ГИТТЛ, М., 1956.
9. R. N. Bracewell, J. A. Roberts, *Austral J Phys.*, **7**, 615 (1954).

Гла́вная астроно́мическая обсерватория
АН СССР

Поступила в редакцию
11 апреля 1960 г

ЛАМПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ КАК ФАЗОВЫЙ МОДУЛЯТОР ДЛЯ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРОВ

А. Ханбердиев, Н. Л. Каидановский

Рассмотрена возможность применения ЛБВ в качестве фазового модулятора для радиоинтерферометра. Исследована паразитная амплитудная модуляция на частоте фазовой модуляции и ее гармониках. Произведена сравнительная оценка модулятора на ЛБВ

Двухантенный интерферометр с фазовой модуляцией с успехом применяется в радиоастрономии с 1952 г. [1]. В последнее время фазовый модулятор используется также в составном интерферометре [2,3].

В существующих системах фазовая модуляция достигается за счет изменения длины фидера или скорости распространения в нем волны. Конструктивно фазовые модуляторы представляют собой контактные или емкостные переключатели, а также плавные фазовращатели с диэлектриком или ферритом. В настоящей работе предлагается использовать в качестве фазового модулятора для сантиметрового и дециметрового диапазона лампу бегущей волны [1].

1 ФАЗОВЫЙ МОДУЛЯТОР НА ЛБВ

Фазовый сдвиг, вносимый ЛБВ, зависит главным образом от напряжения на электродах и фокусирующего поля [1]. Наибольший сдвиг фазы вызывает изменение напряжения на спирали. Соответствующие относительные изменения других параметров режима влияют на сдвиг фазы на порядок слабее. Фазовый сдвиг $\Delta\varphi$ в ЛБВ изменяется линейно на $40^\circ \div 55^\circ$ при изменении напряжения U на спирали на 1% (в пределах $\pm 2\%$ от оптимального значения U_0 , дающего максимальное усиление). Это значение U_0 называется синхронизирующими напряжением. При удалении напряжения U от U_0 более, чем на 2%, зависимость $\Delta\varphi(U)$ становится нелинейной (рис. 1) [6]. Для стопроцентной модуляции разность фаз сигналов, поступающих из обоих плеч интерферометра, должна изменяться в пределах $0 \div 180^\circ$. Этого можно достигнуть за счет постоянного сдвига фазы на 90° и дополнительного изменения фазы на $\pm 90^\circ$.

Блок-схема интерферометра изображена на рис. 2. Модулирующее напряжение может быть подано на одну или обе ЛБВ. В последнем случае лампы модулируются противофазно на $\div 45^\circ$. Фазовая модуляция собственных шумов ЛБВ не играет при этом роли, так как они некогерентны.

Предложенный способ модуляции проверялся экспериментально в лабораторных условиях. Блок-схема экспериментальной установки представлена на рис. 3. Когерентный сигнал от двух антенн имитируется с помощью генератора и тройника 2. Усиленные ЛБВ сигналы выравниваются аттенюаторами и фазируются коаксиальным тромбоном. В качестве дискриминатора фазовой модуляции служит тройник 4.

При наличии модуляции на выходе УНЧ появляется сигнал на частоте модуляции. Зависимость выходной мощности от модулирую-

шего напряжения представлена на рис. 4. Максимум на кривой, соответствующий стопроцентной модуляции, наступает при амплитуде модулирующего напряжения, равной 6,3 в, что составляет 1,8% от синхро-

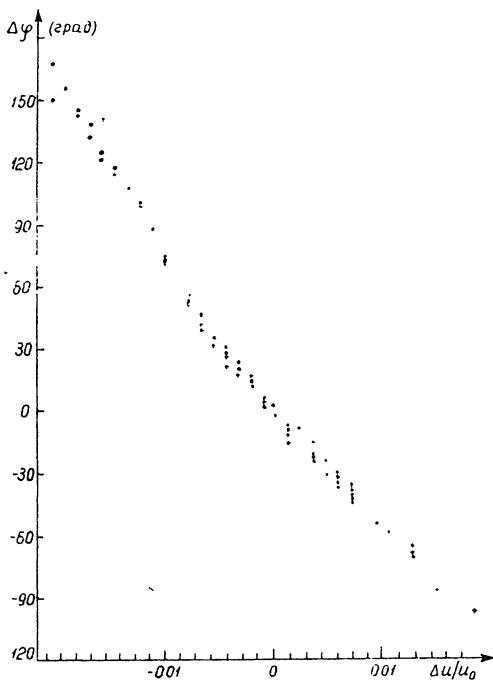


Рис. 1. Сдвиг фазы в зависимости от напряжения на спирали.

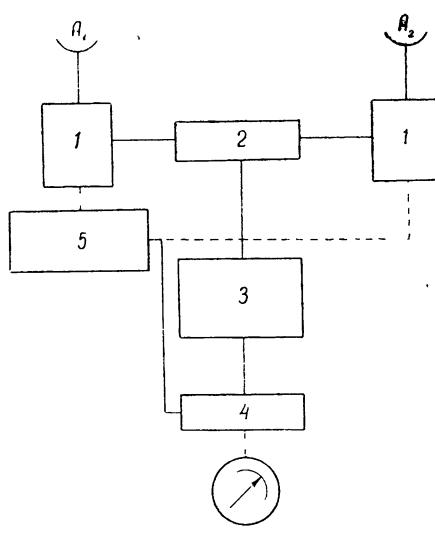


Рис. 2. Блок-схема интерферометра с фазовой модуляцией на ЛБВ:

A_1, A_2 —антенны, 1—ЛБВ, 2—тройник, 3—приемник, 4—синхронный детектор, 5—генератор модулирующего напряжения.

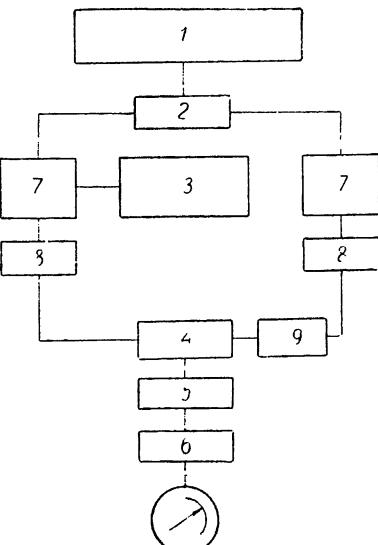


Рис. 3. Блок-схема экспериментального фазового модулятора:

1—генератор стандартных сигналов, 2—тройник 1, 3—генератор модулирующего напряжения, 4—тройник 2, 5—детектор, 6—усилитель низкой частоты, 7—ЛБВ, 8—аттенюатор, 9—фазовращатель

низирующего напряжения U_0 на спирали. Этот результат находится в согласии с данными статических измерений [6].

За счет некоторого ухудшения шум-фактора ЛБВ можно применить также в качестве амплитудного модулятора одноантенного радиотелескопа (рис. 5).

2. ПАРАЗИТНАЯ АМПЛИТУДНАЯ МОДУЛЯЦИЯ

При изменении напряжения на спирали меняется коэффициент усиления и шум-фактор ЛБВ. Вследствие этого при фазовой модуляции будет происходить также амплитудная модуляция собственных шумов ЛБВ и сигнала. Амплитудная модуляция собственных шумов создает ложный сигнал, который может понизить чувствительность радиометра. В лучших экспериментальных лампах бегущей волны максимум усиления и минимум шум-фактора имеет место при одном и том же значении напряжения [7]. У серийных ЛБВ напряжение, соответствующее минимуму шум-фактора, несколько ниже синхронизирующего напряжения U_0 . Согласно [7], шум-фактор ЛБВ десятисантиметрового диапазона, равный 7 дБ ($N=5,0$) при синхронизирующем напряжении U_0 , возрастает до 8 дБ ($N=6,3$) при изменении напряжения на спирали на 2%.

Изменение коэффициента усиления ЛБВ в зависимости от напряжения на спирали исследовалось в [4,7]. Кривая изменения коэффициента усиления использованной нами ЛБВ приведена на рис. 6. Из кривой следует, что изменение напряжения на спирали на 2% вызывает уменьшение усиления на 0,5 дБ. Следовательно, при фазовой модуляции в одной ЛБВ на $\pm 90^\circ$ будет иметь место амплитудная модуляция с индексом порядка $m = 0,05$.

Кривые зависимости шум-фактора и коэффициента усиления ЛБВ от напряжения на спирали почти симметричны относительно синхронизирующего значения напряжения U_0 . Вследствие квазисимметричности кривых паразитная амплитудная модуляция будет происходить в основном с частотой, в два раза большей частоты модулирующего напряжения. В тех случаях, когда в каждом плече интерферометра можно применить по два каскада усиления на ЛБВ, целесообразно модулировать лампу второго каскада, так как при этом паразитная амплитудная модуляция будет вызвана изменением только коэффициента усиления, но не шум-фактора.

Амплитудная модуляция на частоте модулирующего напряжения и ее гармониках исследовалась экспериментально по схеме рис. 7. Измеренные величины мощности гармоник паразитной амплитудной модуляции приведены в таблице 1.

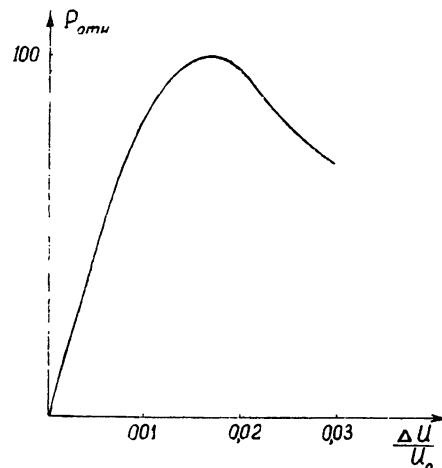


Рис. 4. Зависимость выходной мощности от амплитуды модулирующего напряжения.

Таблица 1

№ гармоники	Мощность гармоники (в % к общей мощности)
1	2
2	91
3	0
4	7

Таким образом, через узкополосный фильтр, настроенный на частоту модуляции, пройдет только около 2% от мощности промодулированных шумов ЛБВ. Так как индекс амплитудной модуляции m по-

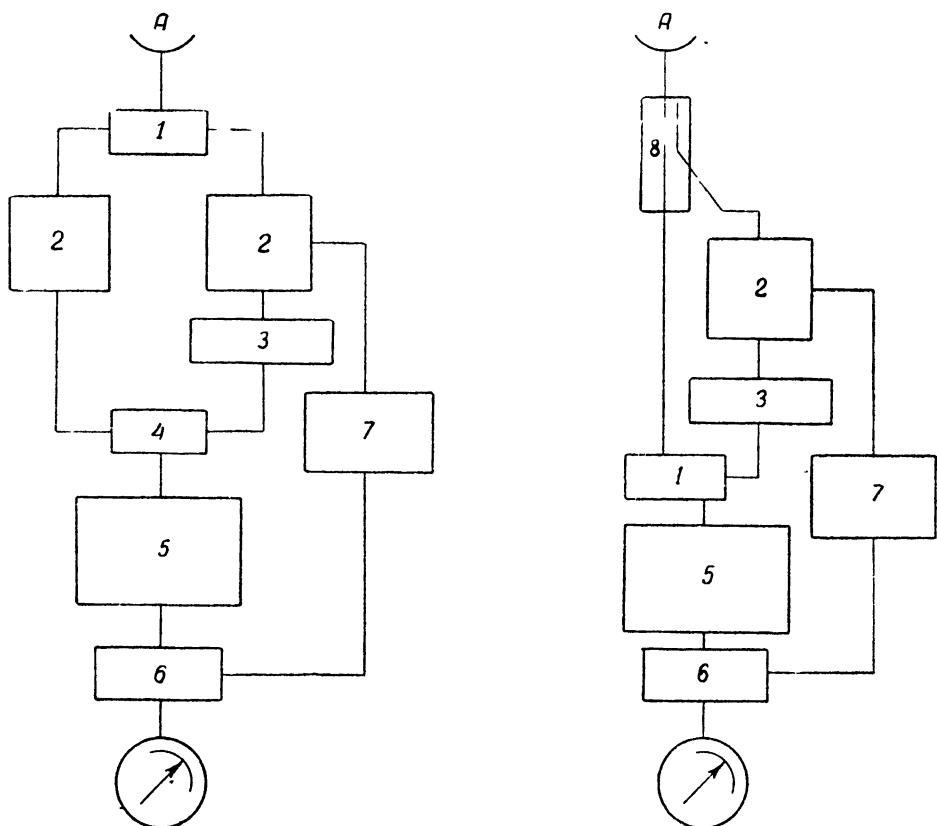


Рис. 5. Принципиальные схемы амплитудного модулятора на ЛБВ:
А—антenna, 1—трайник, 2—ЛБВ, 3—фазовращатель, 4—трайник, 5—приемник,
6—синхронный детектор, 7—генератор модулирующего напряжения, 8—ответвитель.

рядка 0,05, то мощность паразитной компоненты промодулированных шумов ЛБВ на выходе фильтра, отнесенная ко входу, будет порядка 0,001 от мощности шумов ЛБВ.

Рассмотренные условия образования паразитной компоненты относятся к случаю модуляции на одной из ЛБВ. Производя одновременную противофазную модуляцию на обеих ЛБВ, можно снизить паразитные эффекты почти на порядок.

3. СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА СПОСОБА ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИИ НА ЛБВ

Предложенный метод модуляции имеет следующие преимущества перед существующими.

1. В тех случаях, когда ЛБВ может быть применена в качестве УВЧ, отпадает необходимость в специальном модуляторе, что уменьшает потери в фидере и освобождает от паразитной модуляции вследствие изменения согласования в течение такта модуляции.

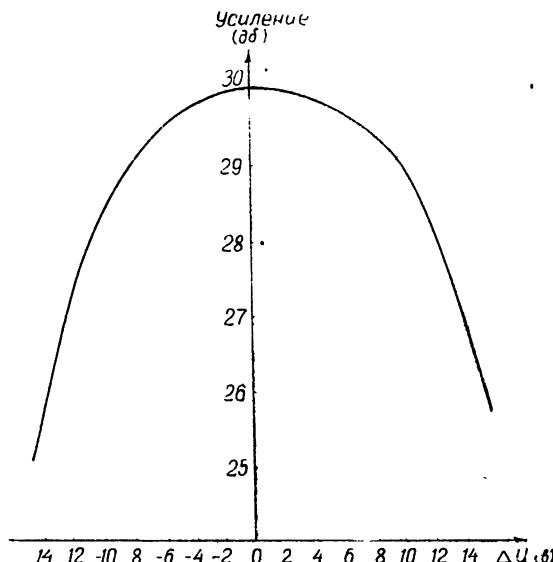


Рис. 6. Зависимость коэффициента усиления ЛБВ от изменения напряжения на спирали.

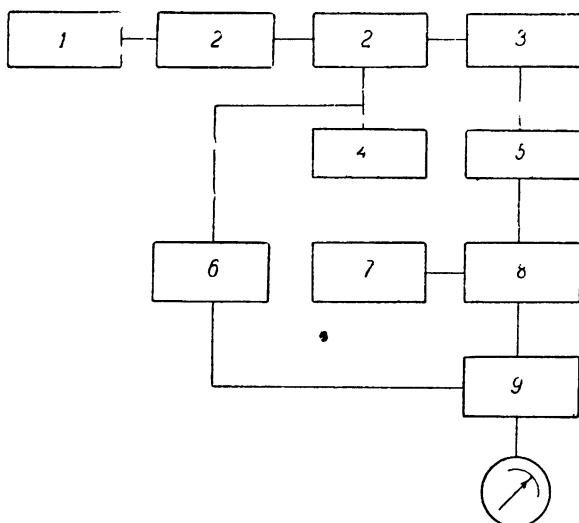


Рис. 7. Схема для исследования паразитной амплитудной модуляции.

1—генератор стандартных сигналов, 2—ЛБВ, 3—амперметр, 4—ламповый вольтметр, 5—детектор, 6—генератор модулирующего напряжения, 7—осциллограф, 8—избирательный усилитель, 9—синхронный детектор

2. Расширяется диапазон возможных частот модуляции до многих десятков мегагерц.

Несмотря на принципиальную неустранимость паразитной амплитудной модуляции в предлагаемом способе, практически эта величина, по-видимому, может быть сделана меньше, чем в существующих системах. Это налагает жесткие условия на стабильность постоянной составляющей напряжения на спирали и, быть может, потребует ее автоподстройки на уровне, при котором исчезает первая гармоника амплитудной модуляции.

Авторы выражают благодарность С. Э. Хайкину за обсуждение и ценные советы и А. А. Новышу за участие в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. A. Ryle, Proc. Roy. Soc., A211, 351 (1952).
2. A. E. Covington, N. W. Brotzen, IRE Trans., AP-5, 3, 247 (1957).
3. A. E. Covington, J. Roy. Astron. Soc. Canada, 54, 17, 58 (1960).
4. W. J. Gray, Proc. IEE, III, 99, 15 (1952).
5. W. R. Beam, D. J. Blattner, RCA Review, 17, 89 (1956).
6. А. Ханбердиев, Изв. АН Туркм. ССР, сер. физ-техн., хим. и геол. наук, 3, 87 (1960).
7. R. W. Peter, Noise in electron devices, ed. by L D Smullin and H. A. Haus, Technology press of MIT (1959).

Главная астрономическая обсерватория
АН СССР

Поступила в редакцию
1 июля 1960 г.

К ВОПРОСУ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В ИОНОСФЕРЕ И МЕЖПЛАНЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Э. Е. Митякова, И. А. Митяков, В. О. Рапопорт

Кратко рассмотрены описанные в литературе методы определения электронной концентрации в ионосфере с помощью искусственных спутников Земли (ИСЗ). В квазипротодальном приближении с учетом сферичности Земли находятся выражения для фазового и группового путей сигнала, излучаемого ИСЗ. Обсуждаются новые методы определения электронной концентрации путем измерения угла между плоскостями поляризации на двух частотах, а также путем измерения разности групповых путей на двух частотах. Комбинацию этих двух методов предлагается использовать для измерения электронной концентрации межпланетного пространства с помощью космической ракеты.

Одним из основных вопросов в исследовании ионосферы является изучение распределения электронной концентрации с высотой в зависимости от времени суток, сезона и солнечной активности. Метод вертикального зондирования дает возможность получить достаточно надежные сведения лишь до максимума слоя F , расположенного на высоте 300 ± 350 км. Исследование ионосферы с помощью ракет позволило, с одной стороны, уточнить данные вертикального зондирования, с другой стороны, получить сведения об электронной концентрации выше максимума слоя F [1,2]. В то же время ракетные данные еще весьма отрывочны и не могут быть использованы для изучения связи состояния ионосферы с различными геофизическими и солнечными явлениями. Некоторые сведения об электронной концентрации в ионосфере (числе электронов в вертикальном столбе сечением 1 см²), а также ее изменениях в течение суток и сезона получены в работе [3] с помощью локации Луны. Наиболее перспективными, однако, являются исследования ионосферы с помощью ИСЗ, хотя возможности использования ИСЗ в настоящее время изучены далеко не полностью. Одним из методов, с помощью которого были получены некоторые сведения об электронной концентрации выше максимума слоя F , является метод „радиовосходов“ и „радиозаходов“ [4]. Однако при этом требуется статистическая обработка результатов за большой период времени, что не дает возможности получать систематические сведения о состоянии ионосферы. В литературе обсуждаются, кроме того, еще два метода определения электронной концентрации в ионосфере: по допплеровскому смещению частоты [5–8] и по эффекту Фарадея [8–10], которые аналогичны методам, применяющимся в ракетных исследованиях [1,2].

Непосредственные измерения допплеровского смещения частоты практически неприемлемы, так как они приводят к большим ошибкам вследствие нестабильности частоты передатчика. В ракетных исследованиях для исключения этих ошибок используется метод двух когерентных частот [1], который по существу является методом дисперсионного радиоинтерферометра, предложенным Мандельштамом и Папалекси [11]. При использовании этого метода для исследования ионосферы с помощью ИСЗ [5] возникают, однако, дополнительные трудности, связанные с необходимостью учета горизонтальной состав-

ляющей скорости спутника и сферичности Земли. Приведенные ниже оценки показывают, что приближение плоской Земли, обычно используемое в литературе, может приводить к значительным ошибкам при определении электронной концентрации ионосферы. Представляется поэтому целесообразным рассмотреть указанные методы с единой точки зрения для реальной орбиты спутника и с учетом сферичности Земли.

Рассмотрим случай сферически-слоистой ионосферы, когда электронная концентрация N зависит только от расстояния до поверхности Земли z . Показатель преломления с учетом магнитного поля Земли в квазипротодольном приближении может быть записан в виде [11]:

$$n_{1,2}^2 = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m \omega (\omega \pm \omega_L)^2} = 1 - \frac{2aN}{\omega (\omega \pm \omega_L)}, \quad (1)$$

где e и m — заряд и масса электрона, ω — частота, $\omega_L = (eH_0/mc) \cos \gamma$ — „продольная составляющая“ гиромагнитной частоты, c — скорость света, γ — угол между магнитным полем Земли и волновой нормалью. Индекс 2 и знак (—) относятся к обыкновенной волне, индекс 1 и знак (+) — к необыкновенной волне.

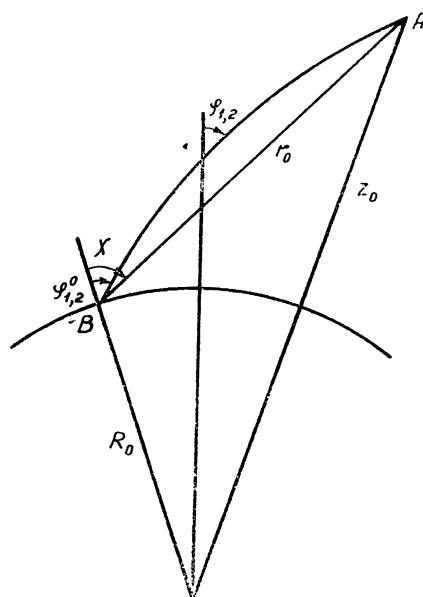


Рис. 1

Напишем выражение для фазового и группового путей радиоволн в случае, когда передатчик находится на расстоянии z_0 от поверхности Земли (точка A), а приемник расположен на поверхности Земли в точке B (рис. 1). Фазовый путь равен [11]

$$L_{\phi 1,2} = \int_A^B n_{1,2} dl_{1,2} = \int_0^{z_0} \frac{n_{1,2}}{\cos \varphi_{1,2}} dz, \quad (2)$$

где интегрирование ведется по пути распространения волны. Используя закон Снеллиуса, можно написать:

$$L_{\phi 1,2} = \int_0^{z_0} \frac{n_{1,2} dz}{\sqrt{1 - (\sin \varphi_{1,2}^0/n_{1,2})^2 (R_0/R)^2}}. \quad (3)$$

Здесь $\varphi_{1,2}^0$ — угол прихода обыкновенной (необыкновенной) волны, R_0 — радиус Земли. Подынтегральное выражение можно разложить в ряд при условии

$$\frac{2aN}{\omega (\omega \pm \omega_L) \cos^2 \varphi_{1,2}^0} \ll 1, \quad \frac{2z_0}{R_0 \cos^2 \varphi_{1,2}^0} \ll 1. \quad (4)$$

Ограничиваюсь членами порядка aN/ω^2 , $aNz_0/\omega^2 R_0$, после несложных преобразований имеем⁴:

$$L_{\Phi 1,2} = r_0 - \frac{a}{\omega \cos \chi} \left[\int_0^{z_0} \frac{N}{\omega \pm \omega_L} dz - \operatorname{tg}^2 \chi \int_0^{z_0} \frac{Nz}{R_0 (\omega \pm \omega_L)} dz \right], \quad (5)$$

где r_0 — расстояние между точками A и B , а χ — зенитный угол спутника (см. рис. 1).

Необходимо отметить, что выражение (5) можно получить, если, не учитывая рефракцию, интегрировать в (2) по прямой, соединяющей точки A и B . Поэтому условия (4), при которых выведена формула (5), являются, по существу, условиями, при которых возможно пренебречь рефракцией.

Групповой путь $L_{rp1,2}$ можно записать в виде [11]:

$$L_{rp1,2} = \int_A^B \frac{\partial (n_{1,2} \omega)}{\partial \omega} dl_{1,2}. \quad (6)$$

Если выполняются условия (4), то в квазипротодольном приближении аналогично тому, как это сделано для фазового пути, получаем:

$$L_{rp1,2} = r_0 + \frac{a}{\omega \cos \chi} \left[\int_0^{z_0} \frac{N}{\omega \pm \omega_L} dz - \operatorname{tg}^2 \chi \int_0^{z_0} \frac{Nz}{R_0 (\omega \pm \omega_L)} dz \right]. \quad (7)$$

В нашем приближении как фазовый, так и групповой пути отличаются (с точностью до знака) от истинного пути r_0 на одну и ту же величину

$$\delta_{1,2} = \frac{a}{\omega \cos \chi} \left[\int_0^{z_0} \frac{N}{\omega \pm \omega_L} dz - \operatorname{tg}^2 \chi \int_0^{z_0} \frac{Nz}{R_0 (\omega \pm \omega_L)} dz \right]. \quad (8)$$

На высоких частотах, когда выполняются условия (4), величина $\delta_{1,2} \ll r_0$, и для исключения ошибок желательно измерять либо непосредственно разности $r_0 - L_{\Phi 1,2}$ и $L_{rp1,2} - r_0$, либо пропорциональные им величины.

Остановимся кратко на возможных способах измерения $\delta_{1,2}$. Пусть передатчик излучает когерентные частоты $\omega_1 = m_1 \omega$ и $\omega_2 = m_2 \omega$, где m_1 и m_2 — целые числа. Если в приемном устройстве умножить частоту ω_1 на m_2 и ω_2 на m_1 , то разность фаз сигналов, приведенных к частоте $\omega_1 m_2 = \omega_2 m_1 = \omega m_1 m_2$, будет иметь вид:

⁴ При выводе этого выражения для рефракции использовалась формула

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{1,2} = \varphi_1 - \varphi_{1,2}^0 &= \frac{a}{\omega} \operatorname{tg} \chi \frac{1 - (z_0/2R_0)(1 - 3\sec^2 \chi)}{z_0} \times \\ &\times \int_0^{z_0} \frac{N}{\omega \pm \omega_L} \left[1 + \frac{z}{R_0} (1 - 3\sec^2 \chi) \right] dz, \end{aligned}$$

полученная при условии (4) методом, изложенным в [12]. Авторы пользуются возможностью поблагодарить Я. Л. Альперта за сообщение этой формулы до выхода из печати книги [12].

$$\Phi = m_2 \frac{\omega_1}{c} L_\phi(\omega_1) - m_1 \frac{\omega_2}{c} L_\phi(\omega_2) = \\ = \frac{a}{c \omega \cos \chi} \left(\frac{m_2}{m_1} - \frac{m_1}{m_2} \right) \left[\int_0^{z_0} N dz - \operatorname{tg}^2 \chi \int_0^{z_0} \frac{N z}{R_0} dz \right], \quad (9)$$

что справедливо при $\omega_L/\omega \ll |m_2/m_1^2 - m_1/m_2^2|$. Непосредственно измерение Φ не представляется возможным; однако можно экспериментально определить производную

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{a}{c \omega \cos \chi} \left(\frac{m_2}{m_1} - \frac{m_1}{m_2} \right) \left[N(z_0) \left(1 - \frac{z_0}{R_0} \operatorname{tg}^2 \chi \right) \frac{dz_0}{dt} + \right. \\ \left. + \left(\int_0^{z_0} N dz - \frac{3 \sec^2 \chi - 1}{R_0} \int_0^{z_0} N z dz \right) \operatorname{tg} \chi \frac{d\gamma}{dt} \right]. \quad (10)$$

Это выражение в приближении плоской Земли, т. е. при $R_0 \rightarrow \infty$, переходит в аналогичную формулу работы [5].

Из (10) видно, что в общем случае измерение $d\Phi/dt$ позволяет определить лишь комбинацию из $N(z_0)$ (электронная концентрация в области спутника) и величин $\int_0^{z_0} N dz$ и $\int_0^{z_0} (N z / R_0) dz$. Однако, когда $\chi = 0$ или $d\chi/dt = 0$, выражение (10) определяет величину $N(z_0)$ с относительной точностью порядка $(z_0/R_0) \operatorname{tg}^2 \chi$. Подобные условия могут иметь место для каждого прохождения спутника. С другой стороны, если $dz_0/dt = 0$ (вблизи апогея или перигея) или $N(z_0)$ достаточно мало (когда спутник находится на больших высотах), то из (10) можно определить также $\int_0^{z_0} N dz$ с относительной точностью порядка $(z_0/R_0) (3 \sec^2 \chi - 1)$. При высотах $z_0 \approx 500 \text{ км}$ и углах $\chi \approx 30^\circ$ с учетом поправки на сферичность Земли точность определения величины $N(z_0)$ составляет 3%, а величины $\int_0^{z_0} N dz - 30\%$. При больших углах и высотах ошибки становятся еще значительнее.

Аналогичная ситуация имеет место и при измерении частоты федингов, обусловленных эффектом Фарадея. Действительно, угол поворота плоскости поляризации суммарного сигнала ψ на пути от спутника до наблюдателя вдвое меньше разности фаз обычновенной и необыкновенной компонент в месте приема* и, как можно показать из (7), определяется соотношением:

$$\psi = \frac{a}{c \omega^2 \cos \chi} \left[\int_0^{z_0} N \omega_L dz - \operatorname{tg}^2 \chi \int_0^{z_0} \frac{\omega_L N z}{R_0} dz \right]. \quad (11)$$

Вынося некоторое среднее значение ω_L из-под знака интеграла, имеем:

* В ряде работ (см., например, [3]) угол поворота плоскости поляризации по недоразумению приравнивается к разности фаз между обычновенной и необыкновенной компонентами

$$\psi = \frac{a \bar{\omega}_L}{c \omega^2 \cos \chi} \left[\int_0^{z_0} N dz - \operatorname{tg}^2 \chi \frac{\tilde{\omega}_L}{\omega_L} \int_0^{z_0} \frac{N z}{R_0} dz \right]. \quad (12)$$

Выражение для $d\psi/dt$ аналогично выражению для $d\Phi/dt$; однако обработка результатов измерений частоты федингов, обусловленных эффектом Фарадея, затруднена необходимостью учета $d\omega_L/dt$. Кроме того, на высоких частотах, когда величина $d\psi/dt$ становится сравнимой с частотой вращения спутника, задача еще более усложняется.

Нам кажется целесообразным производить измерение угла между плоскостями поляризации на двух частотах, что позволит непосредственно определить величину $\int_0^{z_0} N dz$. Действительно, если антенны, расположенные на спутнике, излучают радиоволны с одинаковой поляризацией на частотах ω_1 и ω_2 , то

$$\psi(\omega_1) - \psi(\omega_2) = \frac{a \bar{\omega}_L}{c \cos \chi} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) \left[\int_0^{z_0} N dz - \operatorname{tg}^2 \chi \frac{\tilde{\omega}_L}{\omega_L} \int_0^{z_0} \frac{N z}{R_0} dz \right]. \quad (13)$$

Если выбрать частоты ω_1 и ω_2 так, чтобы разность углов $\psi(\omega_1) - \psi(\omega_2)$ была порядка нескольких радиан, то из выражения (13) можно определить $\int_0^{z_0} N dz$ с относительной точностью до величин порядка $z_0 \operatorname{tg}^2 \chi / R_0$, т. е. значительно точнее, чем описанными выше методами. Легко видеть, что при этом автоматически исключается также эффект вращения спутника. Подобный метод вполне реален, так как для его осуществления требуется сравнительно простая аппаратура.

Полную электронную концентрацию в ионосфере можно определить также с помощью измерения разности групповых путей на двух частотах. Из (7) при $\omega_L \ll \omega_1, \omega_2$ следует, что

$$\Delta L_{rp} = L_{rp}(\omega_1) - L_{rp}(\omega_2) = \frac{a}{\cos \chi} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) \times \\ \times \left[\int_0^{z_0} N dz - \operatorname{tg}^2 \chi \int_0^{z_0} \frac{N z}{R_0} dz \right], \quad (14)$$

т. е. измерение разности групповых путей позволяет с относительной точностью до величины порядка $\frac{z_0}{R_0} \operatorname{tg}^2 \chi$ определить $\int_0^{z_0} N dz$.

Определение разности групповых путей на двух частотах может быть осуществлено по изложенной ниже методике.

Пусть передатчик на спутнике генерирует два сигнала с частотами ω_1 и ω_2 , синхронно модулированные низкочастотным синусоидальным напряжением частоты Ω :

$$E_1(t) = E_0 [1 + m \cos(\Omega t)] e^{i\omega_1 t}; \\ E_2(t) = E_0 [1 + m \cos(\Omega t)] e^{i\omega_2 t}. \quad (15)$$

В отсутствие поглощения соответствующие напряженности электрических полей в точке наблюдения будут иметь вид [11]:

$$\begin{aligned}
 E_1(r_0, t) = & E'_0 \left[1 + m \cos \left(\Omega t - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\Omega}{c} \int_0^{r_0} \frac{1}{n_1} dr \right) \right] e^{i \left(\omega_1 t - \frac{\omega_1}{c} \int_0^{r_0} n_1 dr \right)}; \\
 E_2(r_0, t) = & E'_0 \left[1 + m \cos \left(\Omega t - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\Omega}{c} \int_0^{r_0} \frac{1}{n_2} dr \right) \right] e^{i \left(\omega_2 t - \frac{\omega_2}{c} \int_0^{r_0} n_2 dr \right)},
 \end{aligned} \tag{16}$$

где n_1 и n_2 —показатели преломления среды на частотах ω_1 и ω_2 , r_0 —расстояние до спутника, а интегрирование ведется по пути распространения радиоволн. Из (16) видно, что разность фаз низкочастотных колебаний определяется разностью групповых путей на частотах ω_1 и ω_2 , т. е.

$$\theta = \frac{\Omega}{c} \int_0^{r_0} \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right) dr = \frac{\Omega}{c} \Delta L_{\text{гр}}. \tag{17}$$

Таким образом, измерение разности фаз низкочастотных колебаний позволяет определить величину $\int_0^{z_0} N dz$ с относительной точностью порядка $\frac{z_0}{R_0} \operatorname{tg}^2 \gamma$ (см. (14)).

На первый взгляд кажется, что, измеряя разность групповых путей на двух частотах, можно определить и концентрацию электронов в межпланетном пространстве N_m . Однако измерение разности групповых путей на двух частотах можно использовать для непосредственного определения электронной концентрации межпланетного пространства N_m с помощью космической ракеты лишь в случае одновременных наблюдений эффекта Фарадея на двух частотах. Дело в том, что величина N_m мала и по данным различных авторов находится в пределах от 10 до 10^3 эл. \cdot см $^{-3}$ (для оценок будем считать $N_m = 10^2$ эл. \cdot см $^{-3}$). В то же время измерения сводятся к определению электронной концентрации по всему пути $\int_0^{r_0} N dr$, и наличие большого вклада, обусловленное ионосферой, приводит к снижению точности определения N_m . Именно поэтому важно, что ионосферный вклад в $\int_0^{r_0} N dr$ можно определить из измерений эффекта Фарадея, используя то обстоятельство, что магнитное поле Земли быстро убывает с высотой и на высотах, больших 2000 км, вращение плоскости поляризации практически отсутствует.

В случае космической ракеты, когда источник удален от Земли на расстояние r_0 , которое много больше радиуса Земли, формулы (13), (14) несправедливы; поэтому сферичность Земли учитывается нами

аналогично тому, как это сделано в [8]. Разность фаз низкочастотных сигналов, обусловленных разностью групповых путей на двух частотах, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{a \Omega}{c} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) \int_0^{r_0} N dr = \\ &= \frac{a \Omega}{c} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) \left(\overline{\sec \chi} \int_0^{z_1} N dz + \int_{z_1}^{r_0} N_m dr \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\overline{\sec \chi}$ — некоторое значение $\sec \chi$ в интервале высот от 0 до z_1 , вынесенное за знак интеграла по теореме о среднем, z_1 — высота порядка 2000 км, которую можно условно назвать границей земной ионосферы.

Угол между плоскостями поляризации радиоизлучения на двух частотах

$$\Gamma = \frac{a}{c} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) \overline{\omega_L \sec \chi} \int_0^{z_1} N dz. \quad (19)$$

Аналогичная формула в работе [3] используется для определения величины $\int_0^{z_1} N dz$ в ионосфере по измерениям эффекта Фарадея сигналов, отраженных от Луны. Численный расчет для общепринятой модели ионосферы показывает, что $\overline{\omega_L \sec \chi} \int_0^{z_1} N dz = \int_0^{z_1} \overline{\omega_L \sec \chi} N dz$, если величина $\overline{\omega_L \sec \chi}$ взята на высоте 350 км. Таким образом, измерения θ и Γ позволяют определить $\int_{z_1}^{r_0} N_m dz$ и, следовательно, среднее значение электронной концентрации межпланетного пространства \bar{N}_m . Если принять, что $\int_0^{z_1} N dz = 10^{11} \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$, а $N_m = 10^2 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$, то для того, чтобы вклад межпланетного пространства был сравним с вкладом ионосферы, ракета должна удалиться от Земли на расстояние 10^6 км . Прием сигналов с таких расстояний затруднителен в связи с тем, что мощность передатчика, установленного на ракете, не превосходит нескольких ватт. Эту трудность легко устранить, если использовать синусоидальную модуляцию сигнала. При этом для полосы пропускания приемного устройства порядка 1 гц и указанной мощности передатчика можно обеспечить уверенный прием сигнала при использовании простейших антенных систем.

Таким образом, для измерения электронной концентрации N_m межпланетного пространства необходимо иметь сигналы на частотах ω_1 , ω_2 , ω_3 , синфазно замодулированные низкой частотой Ω . Близкие частоты ω_1 и ω_2 можно использовать для измерения эффекта Фарадея, а далекие частоты ω_1 и ω_3 или ω_2 и ω_3 — для измерения разности групповых путей.

В недавно опубликованной работе [13] предложен аналогичный метод определения электронной концентрации межпланетного пространства. Однако практическая реализация измерений, предложенных

автором [13], вряд ли возможна. Автор предлагает использовать импульсный метод для непосредственного измерения разности групповых путей. Очевидно, что для $N_m = 10^3 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$ и расстояний 10^6 км на частотах 100 и 200 мгц $\Delta L_{\text{пр}} \sim 4 \text{ км}$. Для измерения такой разности групповых путей с точностью 10% необходима полоса приемного устройства порядка 0,1 — 1 мгц. Уверенный прием сигнала при такой полосе возможен либо при очень большой мощности передатчика в импульсе (около 10^6 вт)*, либо при использовании антенн с большим коэффициентом направленного действия. Следует отметить, что при столь широких полосах пропускания флюктуационный порог приемной аппаратуры ограничивается космическими шумами.

Кроме того, в [13] используется для оценок верхняя граница N_m и не принимается во внимание то обстоятельство, что временные изменения $\int_0^t N dz$ в ионосфере могут маскировать полезный эффект.

В заключение авторы пользуются случаем поблагодарить Г. Г. Гетманцева и В. Л. Гинзбурга за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. C. Seddon, A. D. Pickar, J. E. Jackson, J. Geophys. Res., **59**, 513 (1954).
2. К. И. Грингауз, ДАН СССР, **120**, 1934 (1958).
- 3 S. J. Valer, F. B. Daniels, J. Geophys. Res., **64**, 1371 (1959).
4. Я. Л. Альперт, Э. Ф. Чудесенко, Б. С. Шапиро, сб. Предварительные итоги научных исследований с помощью ИСЗ и ракет, изд. АН СССР, М., 1958.
5. Я. Л. Альперт, УФН, **64**, 3 (1958).
6. F. H. Hibberd, J. Atm. Terr. Phys., **12**, 338 (1959).
7. W. W. Bergning, Proc. IRE, **47**, 230 (1959).
8. S. J. Valer, F. B. Daniels, J. Frankl. Inst., **267**, 187 (1959).
9. K. Weekes, J. Atm. Terr. Phys., **12**, 335 (1959).
10. P. R. Agendt, J. Appl. Phys., **30**, 793 (1959).
11. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Файнберг, Распространение радиоволн, ГИТГЛ, М.—Л., 1953.
12. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, изд. АН СССР (в печати).
13. J. M. Kelso, J. Atm. Terr. Phys., **16**, 357 (1959).
14. Новейшие исследования распространения радиоволн вдоль земной поверхности, сб. под ред. Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалеки, Гостехиздат, М.—Л., 1945.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
2 апреля 1960 г.

* Автор приводит также оценки $\Delta L_{\text{пр}}$ для расстояний 10^8 км .

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

*Е. А. Бенедиктов, Ю. С. Коробков, Н. А. Митяков,
В. О. Рапопорт, Л. Н. Ходалева*

Предлагаются результаты одновременных измерений поглощения радиоволн в ионосфере радиоастрономическим и импульсным методами в г. Горьком в 1959 г. Показано, что поглощение радиоволн внеземных источников в основном обусловлено слоем F .

Существующие методы измерения поглощения радиоволн в ионосфере можно разделить на две группы. К первой группе относятся хорошо разработанные методы определения поглощения радиоволн, отраженных от ионосферы (импульсное и непрерывное зондирование ионосферы) [1]. Во вторую группу входят методы, в которых используется радиоизлучение внеземных источников (радиоастрономические методы) [2, 3, 4, 5]. Последние стали применяться сравнительно недавно и их возможности еще далеко не исчерпаны.

Метод импульсного зондирования не позволяет измерить поглощение выше максимума слоя F . С другой стороны, радиоастрономические методы дают возможность измерить лишь поглощение, относящееся ко всей толще ионосферы. Попытки определения вклада различных слоев ионосферы в общее поглощение с использованием только радиоастрономических данных были предприняты в работах [3, 4]. Однако, как будет показано ниже, применяемая в этих работах методика может привести к ошибочным результатам. В то же время определение вклада различных слоев в полное поглощение легко осуществить при одновременных измерениях поглощения радиоастрономическим и импульсным методами. Ниже изложены результаты таких измерений, проведенных в г. Горьком в 1959 г.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Измерение полного поглощения в ионосфере проводилось методом двух частот. Предположим, что космическое радиоизлучение принимается одновременно на двух частотах f_1 и f_2 , причем $f_2 > f_1$. Для каждой из этих частот интегральное поглощение радиоволн в ионосфере определяется соотношением

$$\Gamma_i = \ln (I_{0i}/I_i), \quad (1)$$

где I_{0i} и I_i — интенсивности космического радиоизлучения частоты f_i до и после прохождения радиоволн через ионосферу. Если $(2\pi f_i)^2 \gg v^2$ и $f_i^2 \gg f_c^2$, где v — эффективное число соударений электронов с ионами и нейтральными частицами и f_c — критическая частота слоя F , то интегральное поглощение определяется выражением

$$\Gamma_i = \frac{e^2}{\pi m c f_i^2} \int_0^z N v dz, \quad (2)$$

где N — электронная концентрация, z — толщина поглощающего слоя, e и m — заряд и масса электрона и c — скорость света. Таким образом, для частот f_1 и f_2 справедливо соотношение $\Gamma_1/\Gamma_2 = f_2^2/f_1^2$. Учитывая это, можно написать равенство

$$\Gamma_2 - \Gamma_1 = \Gamma_1 \left(\frac{f_1^2}{f_2^2} - 1 \right) = \Gamma_2 \left(1 - \frac{f_2^2}{f_1^2} \right) = \ln \frac{I_2}{I_1} - \ln \frac{I_{02}}{I_{01}},$$

из которого определяются величины интегрального поглощения для каждой из частот:

$$\Gamma_1 = \frac{\ln (I_{02}/I_{01}) - \ln (I_2/I_1)}{1 - f_2^2/f_1^2}, \quad (3a)$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 (f_1/f_2)^2. \quad (3b)$$

Если частотный спектр космического радиоизлучения одинаков для всех областей небосвода, т. е. если I_{02}/I_{01} не зависит от галактических координат*, то изменения поглощения Γ_i во времени согласно (3a) и (3b) определяются только отношением интенсивностей принимаемого радиоизлучения на частотах f_1 и f_2 . По имеющимся сведениям о поглощении радиоволн в ионосфере в ночные часы поглощение часто бывает настолько малым, что им можно пренебречь. Если в эти часы определить величину I_{02}/I_{01} , то по (3a) и (3b) можно вычислить поглощение в любое другое время. Точность определения поглощения методом двух частот зависит от выбора значений рабочих частот. Наибольшая точность получается в том случае, когда поглощением на одной частоте можно пренебречь по сравнению с поглощением на другой частоте, т. е. когда $f_2^2 \gg f_1^2$. Однако при выборе рабочих частот следует иметь в виду, что частоты f_1 и f_2 не могут быть выбраны произвольно. Нижний предел частоты $f_1 \sim 17 \div 18$ мгц определяется условием отсутствия экранировки радиоволн ионосферой в пределах диаграммы направленности приемной антенны. С другой стороны, на частотах выше $35 \div 40$ мгц может оказаться изменение спектра радиоизлучения из-за появления тепловой составляющей радиоизлучения, что трудно учесть количественно. Следовательно, оптимальным диапазоном рабочих частот для измерения поглощения методом двух частот следует считать интервал $18 \div 40$ мгц. Используемый нами метод измерения поглощения отличается от стандартного метода [3,5] тем, что он не требует высокой стабильности аппаратуры и длительных (порядка года) наблюдений. Действительно, для того, чтобы определить поглощение из измерений интенсивности космического радиоизлучения на одной частоте, необходимо получить зависимость „первичного“ радиоизлучения I_0 от звездного времени при отсутствии поглощения (в ночные часы). Сравнение интенсивности радиоизлучения в данный момент времени с соответствующей интенсивностью I_0 дает возможность определить поглощение радиоволн в ионосфере.

Радиоастрономические измерения ионосферного поглощения проводились с августа по декабрь 1959 г. на частотах 18,6 и 25 мгц. Для приема космического радиоизлучения использовались идентичные синфазные антенны и приемники с низким коэффициентом шумов. Антенны состояли из 6 волновых вибраторов, расположенных на высоте 0,2 л над поверхностью Земли, и имели одинаковые расчетные диаграммы

* Вообще говоря, спектр космического радиоизлучения в разных областях небосвода нельзя считать постоянным, однако изменение спектра, по-видимому, невелико и не должно внести больших ошибок при измерениях поглощения [6].

направленности с размерами $35^\circ \times 25^\circ$ по половине мощности в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях. На выходе приемников, ширина полосы пропускания которых составляла 3 мГц, имелся ограничитель импульсных помех [7]. Калибровка усиления приемников производилась через каждые полчаса при помощи шумового генератора. Обработка записей принимаемого сигнала проводилась следующим образом. По измеренным интенсивностям I_1 и I_2 для каждого часа находилось отношение I_2/I_1 и затем по формуле (3) вычислялась величина поглощения на частоте 18,6 мГц. Отношение I_{02}/I_{01} определялось из формул (3) в предположении, что в предутренние часы $\Gamma_{1,2}$ близко к нулю*. Для уменьшения случайной ошибки, возникающей при таком определении величины I_{02}/I_{01} , полученные значения I_{02}/I_{01} усреднялись за несколько дней. При обработке записей учитывалось изменение спектра космического излучения в районе галактического экватора и наличие в том же районе дискретного источника Кассиопея А. Изменение спектра в районе галактического экватора, вызванное поглощением в межзвездной среде, можно оценить на основе данных работы [8]. В нашем случае оно приводит к уменьшению уровня принимаемого радиоизлучения на $\sim 1,5\%$ при прохождении области экватора через диаграмму антennы. Вклад источника Кассиопея А в общий фон радиоизлучения на частотах f_1 и f_2 был определен с помощью интерферометра, элементы которого имели такие же диаграммы направленности, что и антennы, применяющиеся при измерении поглощения. Оказалось, что этот вклад на частоте 25 мГц составляет 13,6%, а на частоте 18,6 мГц—13% от общего фона радиоизлучения.

В качестве независимой проверки результатов измерений величины поглощения стандартным методом [3,5] было проведено сравнение суточных кривых интенсивности радиоизлучения за конец ноября и конец августа для одного и того же звездного времени. Поглощение в августе с точностью до ошибок измерений совпало с величиной, измеренной методом двух частот.

Измерение поглощения импульсным методом проводилось в октябре—декабре 1959 г. с помощью ионосферной станции, имеющей мощность в импульсе порядка 20 квт при длительности импульса около 130 мксек. Измерения проводились на частотах от 2,2 мГц до 2,8 мГц по обычно применяемой методике [9]. Во время дневных наблюдений запись однократно и двукратно отраженных от ионосферы сигналов проводилась последовательно по 15 минут; в утренние и вечерние часы производилась одновременная запись сигналов первого и второго отражений в течение 30 минут каждого часа наблюдений. Для сравнения с радиоастрономическими данными измеряемые величины поглощения приводились к частоте 18,6 мГц, о чем подробнее будет сказано ниже.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Результаты измерений поглощения радиоастрономическим методом показаны на рис. 1. При вычислении среднемесячных кривых поглощения записи интенсивности сигнала как правило группировались по пятидневкам. Для каждой пятидневки находились средние значения кривых хода интенсивности радиоизлучения на обеих частотах, по формулам (3) вычислялось среднее поглощение за пятидневку, а затем находилось среднее поглощение за месяц. Такая процедура обработки

* Минимальное значение $\Gamma_{1,2}$, вообще говоря, больше нуля, однако для нормальных условий в ионосфере в умеренных широтах оно вряд ли превышает 0,1 дБ на частотах порядка 18 мГц.

была принята для того, чтобы отмечать изменения, происходящие в течение месяца. В ряде случаев из-за большого уровня помех от радиостанций на частоте 18,6 мгц получение данных о поглощенииказалось невозможным. Спорадическое радиоизлучение Солнца обычно не вызывало затруднений при обработке за исключением нескольких дней во второй половине августа. Общее число дней, по которым проводилось усреднение, составило: в августе—12 дней, в сентябре, октябре

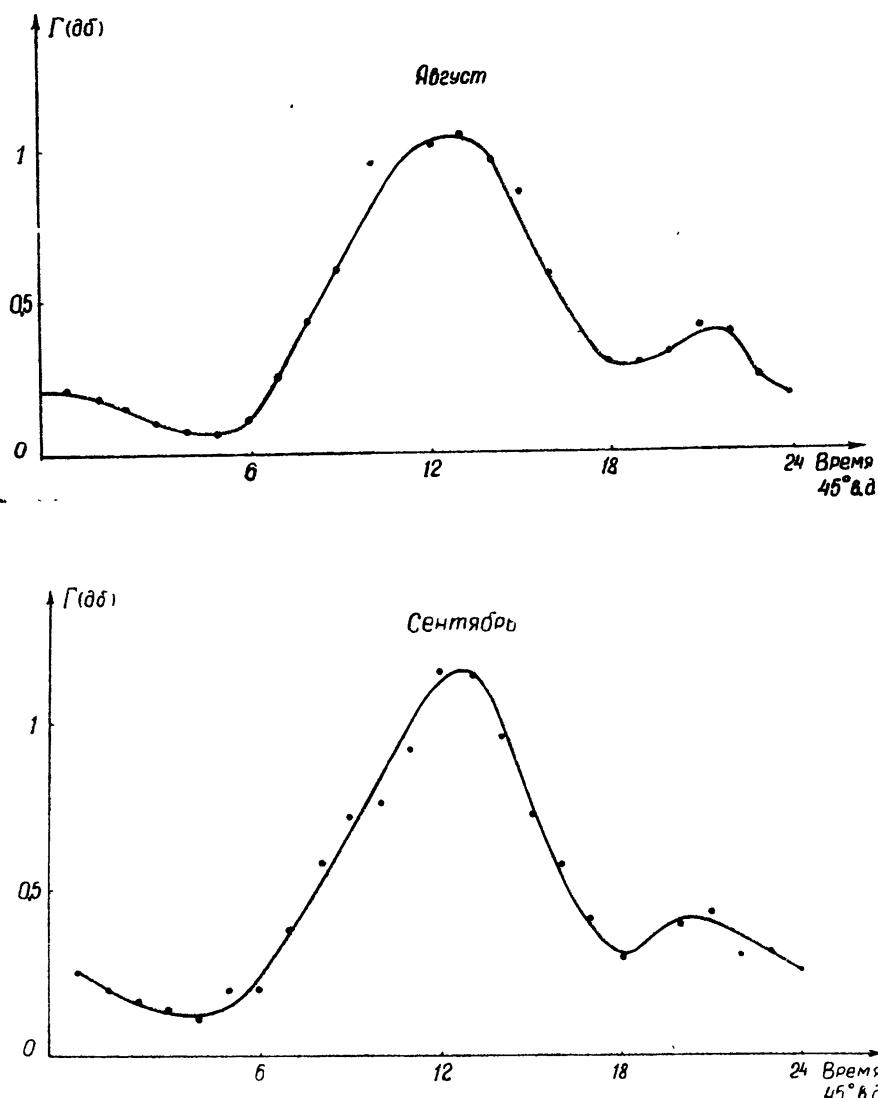


Рис. 1 а, б. Среднемесечные суточные изменения поглощения (частота 18,6 мгц).

и ноябре — по 20–25 дней и в декабре — 7 дней. Случайная ошибка при усреднении суточной зависимости за 10–20 дней не превышает 0,1 дБ, систематическая ошибка, имеющая постоянный знак и определяемая „остаточным“ поглощением в предутренние часы, как отмечено выше, имеет порядок 0,1 дБ.

На рис. 1 видно, что поглощение имеет характерный максимум

около полудня и минимум в предутренние часы. В августе и сентябре имеется также дополнительный вечерний максимум. Аналогичный максимум вечером был отмечен в Ахмедабаде при наблюдениях на 25 мгц в 1957—58 гг. [4], но его величина была значительно больше. С другой стороны, в Хорнсби в 1950—51 гг. на частоте 18,3 мгц [3] второй максимум не был обнаружен. Причина появления вечернего максимума поглощения пока еще точно не установлена.

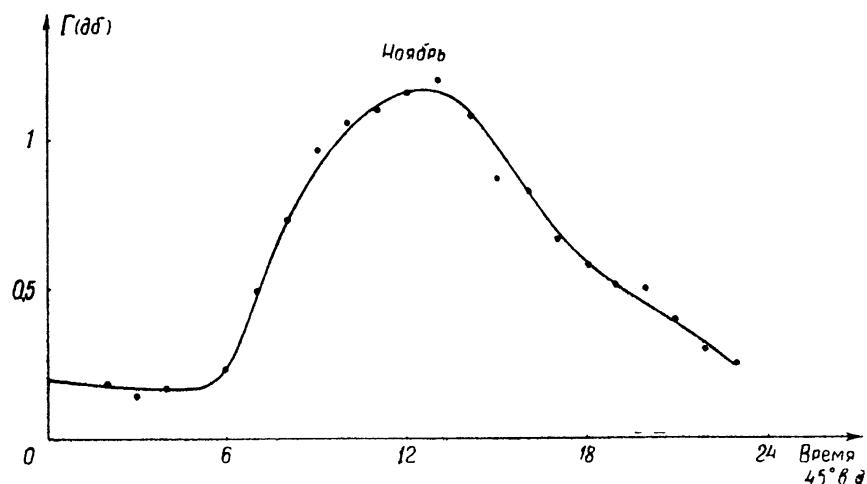
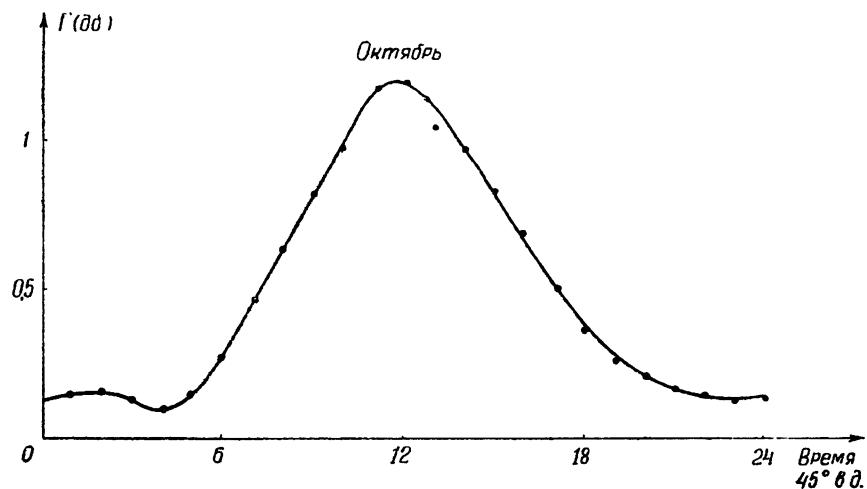


Рис. 1 в, г. Среднемесячные суточные изменения поглощения (частота 18,6 мгц).

Величина полуденного максимума поглощения на частоте 18,6 мгц составляла в августе 1,1 дБ, в сентябре 1,15 дБ, в октябре и ноябре 1,2 дБ и в декабре 1,6 дБ. Повышенное поглощение в декабре связано, по-видимому, с зимней аномалией поглощения. В таблице 1 приведены значения полуденного поглощения по данным работ [2, 3, 4] и по измерениям в г. Горьком. Если привести по формуле (3б) данные измерений к одной частоте, то значения Г, измеренные в Маркоси, Хорнсби и Горьком, имеют один и тот же порядок величины, в то время как

для Ахмедабада поглощение оказалось больше в $6 \div 9$ раз. Столь существенная разница объясняется, вероятно, в первую очередь большими значениями критических частот при наблюдениях в Ахмедабаде.

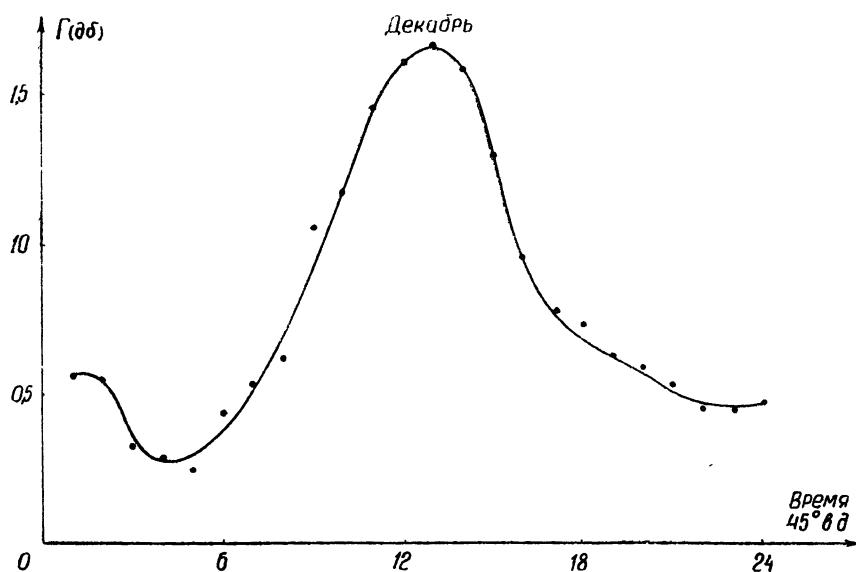


Рис. 1д. Среднемесячное суточное изменение поглощения
(частота 18,6 мгц).

Таблица 1

№	Место наблюдений	Частота (мгц)	Период наблюдений	Долгота	Широта	Величина поглощения (дБ)		
						Лето	Равноденствие	Зима
1.	Горький	18,6	1959	44° в. д.	56° с. ш. (август)	1,1	1,2	1,6
2.	Маркоси	29,5	1949—1950	2°12' в. д.	45°58' с. ш	0,28	0,35	—
3.	Хорнсби	18,3	1950—1951	151° в. д.	34°5' с. ш.	1,3	0,8	0,9
4.	Ахмедабад	25	1957—1958	72°38' в. д.	23°02' с. ш.	3,4	5,1	4,2

В течение каждого месяца имеются отдельные дни и группы дней, для которых поглощение существенно отличается от среднемесячных значений поглощения. Так, для конца августа максимальное поглощение было больше по сравнению с серединой августа на 0,35 дБ. Аналогично 22—24 сентября величина полуденного поглощения равнялась 1,65 дБ, тогда как 12—14 сентября она была 1 дБ. В середине ноября поглощении достигало в полдень 1,9 дБ, тогда как среднемесячная величина составляла 1,2 дБ. Для всех групп дней с повышенным поглощением характерно наличие больших значений критических частот f_c слоя F^* .

Пример связи между поглощением и критическими частотами слоя F показан на рис. 2. В таблице 2 приведены данные о максимальном поглощении и полуденных значениях критических частот f_c для отдельных групп дней.

* Данные о критических частотах получались на автоматической ионосферной станции НИРФИ, работавшей по программе МГГ—МГС.

Было замечено также, что разброс значений принимаемой интенсивности в той или иной группе дней тем больше, чем большие разброс критических частот за эти же дни.

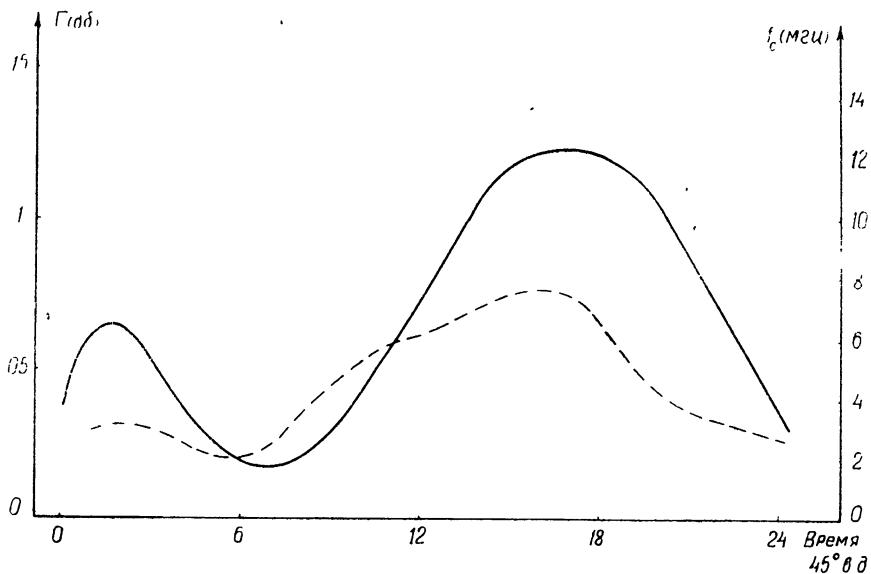


Рис. 2. Суточная зависимость общего поглощения (сплошная кривая) и критических частот слоя F (пунктирная кривая) для 28 ноября 1959 г. (частота 18,6 мгц).

Таблица 2

Дата наблюдений	Август			Сентябрь			Ноябрь	
	13÷22	26÷30	средн. мес.	12÷14	26÷29	средн. мес.	12÷14	средн. мес.
Величина поглощения в пот- день (дБ)	0,95	1,32	1,1	1	1,65	1,15	1,9	1,2
Полуденные значения кри- тических частот (мгц)	7,6	10,4	8,2	9	11	9,2	13	12

Зависимость поглощения от f_c была использована в работах [3,4] для разделения общего поглощения на поглощение в слоях F_2 и D . С этой целью для каждого дневного часа того или иного месяца строилась зависимость общего поглощения Γ от f_c . Экстраполяция полученных кривых к малым значениям f_c давала некоторую величину поглощения, не зависящую от f_c . Поскольку поглощение не зависело также от критических частот слоев E и F_1 , авторы цитированных выше работ относили его к слою D . Разница между общим поглощением и поглощением в слое D , определенным таким образом, соответствовала слою F_2 . Этот способ разделения общего поглощения на поглощение в слоях D и F_2 вызывает ряд возражений. В частности, следует отметить, что критическая частота слоя F_2 не является единственным параметром, характеризующим поглощение в слое F_2 . Вряд ли можно также пренебречь поглощением в слоях E и F_1 . Кроме того, поглощение в нижних слоях может иметь корреляцию с f_c .

Для непосредственного разделения общего поглощения на поглощение в нижних и верхних слоях ионосферы мы воспользовались одновременными измерениями поглощения радиоастрономическим и импульсным методами. Измерение поглощения импульсным методом проводилось периодами в несколько дней в течение октября, ноября

и декабря месяцев. В октябре максимальная величина поглощения на частоте 2,2 мгц достигала около полудня 25 дБ. Наблюдения в ноябре и декабре обнаружили значительные изменения величины поглощения день ото дня. 11—13 ноября величина поглощения доходила в полдень до 40 дБ. 1-го декабря поглощение составляло 50 дБ, тогда как 3-го декабря оно не превышало 30 дБ. Эти результаты находятся в количественном соответствии с аналогичными измерениями других авторов [10, 11]. На рис. 3 приведена зависимость полуденных значений поглощения от полуденных величин f_c , откуда видно, что между поглощением в нижней ионосфере и критическими частотами слоя F_2 имеется заметная корреляция.

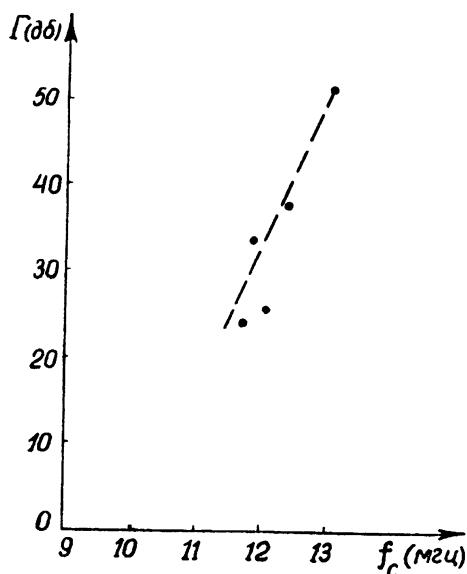


Рис. 3. Зависимость полуденных значений поглощения, измеренных импульсным методом на частоте 2,2 мгц, от критической частоты слоя F .

$f = 2,2$ мгц и $f_1 = 18,6$ мгц равен $(1 \div 1,3) \cdot 10^{-2}$. При этом поглощение относится только к нижней ионосфере до уровня отражения радиоволн с частотой f_1 .

На рис. 4 приведены результаты одновременных измерений поглощения двумя методами для нескольких групп дней. Нижние кривые соответствуют поглощению радиоизлучения на частоте 18,6 мгц в нижней ионосфере. Разность между полным поглощением и поглощением в нижней ионосфере соответствует поглощению в слое F . Обращает на себя внимание тот факт, что основной вклад в полное поглощение вносится слоем F . Даже в полдень поглощение в слое F в 3–4 раза больше, чем в нижних слоях ионосферы. Этот результат отличается от выводов, полученных ранее в работах [3, 4]. По измерениям в Хорнсби поглощение в верхних слоях ионосферы составляло, наоборот, лишь около 1/3 полного поглощения в полдень. Наблюдения в Ахмедабаде дают для полуденных значений большой разброс отношений поглощения в верхней и нижней частях ионосферы. Для зимних месяцев величины поглощения для обеих частей ионосферы приблизительно равны, а летом поглощение в слое F мало по сравнению с поглощением в слое D .

На основе полученных данных была построена зависимость поглощения в слое F от критической частоты слоя f_c (см. рис. 5). Для сравнения приведена также аналогичная зависимость, взятая из работы [3].

При сравнении данных о поглощении, полученных импульсным и радиоастрономическим методами, существенное значение приобретает пересчет величины поглощения на другую частоту. Если f —рабочая частота при измерении поглощения Γ импульсным методом, то, как показано в приложении, поглощение на частоте f_1 определяется выражением

$$\Gamma_1 = \frac{(f + f_L)^2}{f_1^2} \frac{\gamma}{2} \quad \Gamma = \beta \Gamma_1, \quad (4)$$

где $f_L = f_H \cos \alpha$, f_H —гиромагнитная частота и α —угол между магнитным полем и направлением распространения волн, а коэффициент β для частот

$18,6$ мгц равен $(1 \div 1,3) \cdot 10^{-2}$. При этом поглощение

Качественный ход кривых I, II и III существенно различен. Действительно, в то время как на кривой III поглощение при низких критических частотах не зависит от f_c и, лишь начиная с частоты ~ 6 мгц, резко возрастает с ростом f_c , на кривых I, II наблюдается монотонное

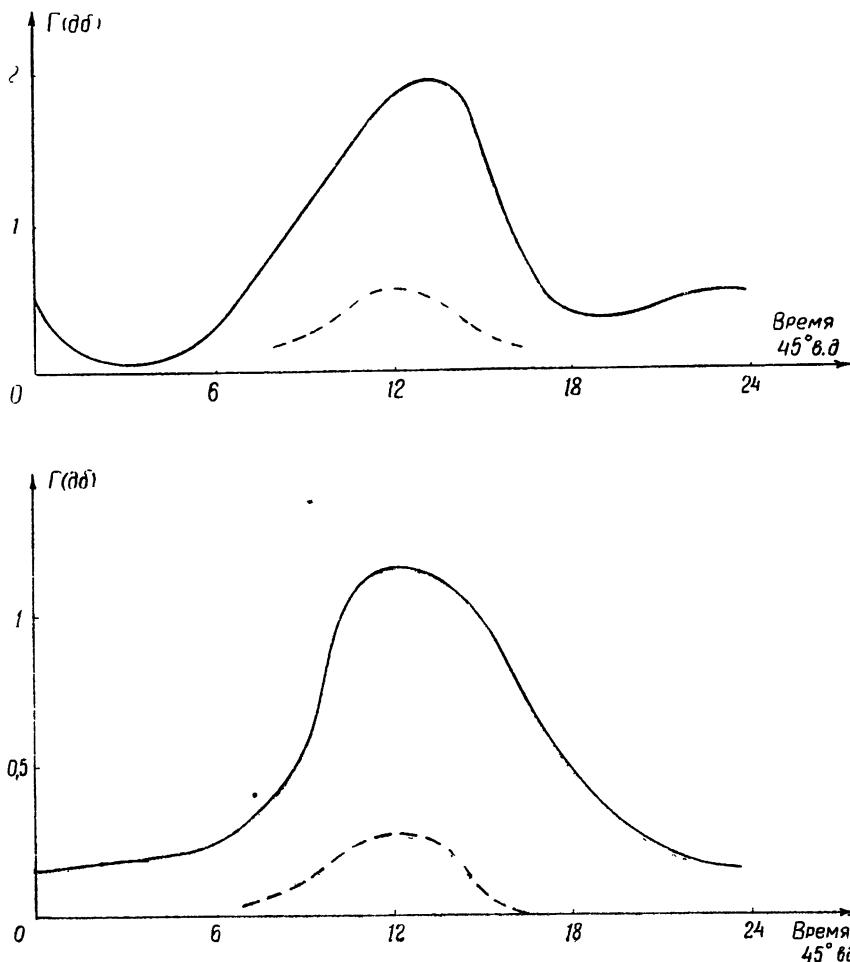


Рис. 4а, б. Суточная зависимость общего поглощения (сплошная кривая) и поглощения в нижних слоях ионосферы (пунктирная кривая), усредненная за период а) 23–31 октября, б) 12–15 ноября (частота 18,6 мгц)

увеличение поглощения в слое F с ростом критической частоты слоя. Разброс точек, особенно при малых f_c , связан с большими относительными ошибками измерений малых поглощений. Если кривые I, II на рис. 5 экстраполировать до $f_c = 0$, то мы получим некоторый нулевой уровень поглощения. Для кривой I этот уровень составляет 0,2 дБ, для кривой II—0,1 дБ. Можно предположить, что эти величины являются систематическими ошибками, приводящими к завышению поглощения. Исключение этих ошибок приводит к тому, что зависимость поглощения в слое F от критической частоты в первом приближении подчиняется квадратичному закону $\Gamma = kf_c^2$ с коэффициентом пропорциональности $k = 2,5 \cdot 10^{-3}$ дБ·мгц⁻¹. Необходимо, однако, иметь в виду, что, вообще говоря, уровень остаточного поглощения при минимальных (порядка 3 мгц) критических частотах по нашим измерениям, так же

как и по измерениям других авторов, вряд ли возможно определить*.

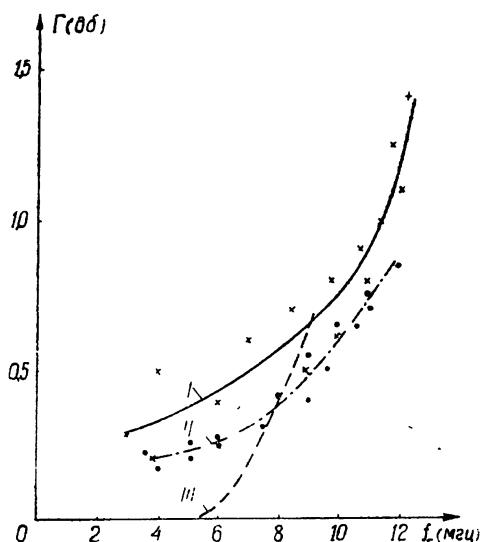


Рис. 5 Зависимость поглощения в слое F от критических частот слоя F (частота 18,6 мгц): I—для 12–15 ноября, II—для 20–31 октября, III—из работы [1]

ПРИЛОЖЕНИЕ

При пересчете поглощения, измеренного импульсным методом на частоте $f \sim 2$ мгц, на более высокую частоту f_1 (например, 18,6 мгц) возникает ряд трудностей. Действительно, если на высоких частотах имеет место неотклоняющее поглощение и пересчет осуществляется по формуле

$$\Gamma_2 f_2^2 = \Gamma_1 f_1^2, \quad (36)$$

то на низких частотах, когда радиоволны отражаются от ионосферного слоя, необходим учет отклоняющего поглощения. При расчете отклоняющего поглощения весьма существенным оказывается наличие магнитного поля Земли. В общем случае поглощение радиоволн на пути до точки отражения равно

$$\Gamma = 4,35 \frac{4\pi f}{c} \int_0^z \alpha dz, \quad (5)$$

где α —показатель поглощения. Необыкновенная компонента на частотах ~ 2 мгц поглощается гораздо сильнее обычной. Поэтому измеренное поглощение обычно относится к обычной компоненте, для которой вдали от точки отражения, где выполняется условие

$$\frac{n \sin^4 \sigma}{n \cos^2 \sigma} \ll (1 - v)^2 + s^2, \quad (6)$$

показатель преломления имеет вид [12]:

* В принципе остаточное поглощение можно определить при раздельном приеме необыкновенной и обычной компонент космического радиоизлучения [1].

$$(n - i \alpha)^2 = 1 - \frac{v}{1 + \sqrt{u_L}} - is \left[1 + \frac{u_T}{2(1-v)^2 + s^2} \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{\sqrt{u}}{2[(1-v)^2 + s^2] \cos^2 \alpha} \right) \right], \quad (7)$$

где

$$v = e^2 N / \pi m f^2, \quad u = f_H^2 / f^2, \quad u_T = u \sin^2 \alpha, \quad u_L = u \cos^2 \alpha.$$

Если, кроме того,

$$u \sin^2 \alpha \ll 2(1-v)^2 + s^2, \quad (8)$$

то

$$(n - i \alpha)^2 = 1 - \frac{v}{1 + \sqrt{u_L}} - is. \quad (9)$$

С другой стороны, вблизи точки отражения, где

$$\frac{u \sin^4 \alpha}{4 \cos^2 \alpha} \gg (1-v)^2 + s^2, \quad (10)$$

имеем

$$(n - i \alpha)^2 = (1-v) \frac{u_L}{u_T} - is \left(\frac{u_L}{u_T} + 1 \right). \quad (11)$$

Для оценки поглощения на различных участках пути распространения радиоволн примем для определенности, что слой E имеет параболическое распределение электронной концентрации с высотой $v = \frac{f_c^2}{f^2} \times \left(1 - \frac{z^2}{z_m^2} \right)$, где $f_c = 3$ мгц, $f = 2$ мгц, $z_m = 20$ км. Будем считать также, что $f_H = 1,4$ мгц, $\alpha = 20^\circ$ и величина v в области отражения составляет 10^5 [1]. В этом случае условие (8) справедливо для высоты z_1 , находящейся ниже точки отражения z_0 на расстоянии 2 км; условие (6) — до высоты z_2 — на 0,6 км ниже точки отражения, условие (10) — справедливо от уровня z_3 , расположенного на 0,1 км ниже точки отражения, до точки отражения. Расчеты поглощения для принятой нами модели слоя E с применением указанных формул показывают, что вклад области $z_2 - z_1$ составляет 1,5 дБ и области $z_0 - z_3$, примыкающей к точке отражения, — 2,5 дБ. Если считать, что поглощение в области $z_3 - z_2$ не превышает 2 дБ, то общее поглощение в области, где не выполняется условие (8), оказывается порядка 6 дБ*. В то же время поглощение радиоволн до точки отражения, измеренное на эксперименте, оказывается порядка 15 дБ и, таким образом, поглощение в отклоняющей области может быть такого же порядка, что и в неотклоняющей области. Как известно, в неотклоняющей области поглощениe определяется выражением

$$\Gamma_{\text{неоткл}} = 4,35 \frac{e^2}{\pi mc (f + f_L)^2} \int_0^z N v dz (\text{дБ}) \quad (12)$$

* Следует отметить, что оценки произведены в приближении геометрической оптики. Как показано в [1], точное решение в изотропном случае приводит к поправке, которая может лишь увеличить поглощение по сравнению с приближением геометрической оптики. Можно надеяться, что учет влияния магнитного поля Земли не изменяет этого результата.

и пересчет этого поглощения на частоту 18,6 мгц не представляет труда. В то же время полное поглощение

$$\Gamma = \Gamma_{\text{неоткл}} + \Gamma_{\text{откл}} \sim \frac{1}{\gamma} \Gamma_{\text{неоткл}}, \quad (13)$$

где γ —коэффициент, зависящий от поглощения в отклоняющей области ($\gamma \sim 0,5 \div 0,7$). Таким образом, можно считать

$$\Gamma_{\text{неоктл}} = \gamma \Gamma. \quad (14)$$

Вечером, когда неотклоняющее поглощение, обусловленное в основном слоем D , уменьшается, относительный вклад неотклоняющего поглощения может возрастать, что вряд ли возможно учесть в силу неопределенности параметров ионосферы. В то же время проделанный выше грубый расчет дает основания сделать ряд выводов при сравнении результатов измерения поглощения импульсным и радиоастрономическим методами. Так как поглощение, определяемое импульсным методом, относится к пути распространения радиоволн до точки отражения и обратно, то приближенная формула для пересчета поглощения в нижних слоях ионосферы с низкой частоты $f = 2,2$ мгц на высокую частоту $f_1 = 18,6$ мгц будет иметь вид

$$\Gamma_1 \simeq \frac{(f + f_L)^2}{f_1^2} \frac{\gamma}{2} \Gamma = \beta \Gamma, \quad (15)$$

где Γ —поглощение, измеренное импульсным методом на частоте 2,2 мгц, а коэффициент $\beta = (1 \div 1,3) \cdot 10^{-2}$.

В заключение авторы пользуются случаем поблагодарить Г. Г. Гетманцева и В. Л. Гинзбурга за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, ГИТЛ, М., 1953.
2. E. Y. Blum, Y. F. Denisse, Y. L. Steinberg, C. R. Acad. Sci., **238**, 1695 (1954).
3. A. P. Mitra, C. A. Shain, J. Atm. Terr. Phys., **4**, 204 (1953).
4. R. V. Bhonsle, K. R. Ramanathan, J. Sci. Industr. Res. Suppl., **17A**, 40 (1958).
5. C. G. Little, H. Leinbach, Proc. IRE, **46**, 334 (1958).
6. И. С. Шкловский, Космическое радиоизлучение, ГИТЛ, М., 1956.
7. R. H. Lee, Electronics, **30**, 162 (1957).
8. C. A. Shain, Austral. J. Phys., **10**, 195 (1957).
9. W. R. Pigott, W. Y. C. Beynon, G. M. Brawn, C. G. Little, Ann. Intern. Geophys. J., **3**, 177 (1957).
10. А. М. Свечников, Ю. К. Часовитин, Н. А. Коченова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 375 (1960).
11. E. Appleton, W. R. Pigott, J. Atm. Terr. Phys., **5**, 141 (1954).
12. Е. А. Бенедиктов, Уч. зап. ГГУ, **27**, 43 (1951).
13. Е. А. Бенедиктов, Радиотехника и электроника, **4**, 1201 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 мая 1960 г.

О ФЛЮКТУАЦИЯХ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ АТМОСФЕРЫ

К. С. Станкевич

В статье вычисляются (с использованием результатов теории атмосферной турбулентности) средне-квадратичные флюктуации эффективной температуры радиоизлучения атмосферы ΔT_a^2 . Выражение, полученное для ΔT_a^2 , может быть использовано для оценок флюктуаций антенной температуры радиотелескопов в случае, если ширина диаграммы направленности антенны не превышает 20° . Найдено, что на волне $\lambda \approx 3$ см и зенитных углах $\theta < 85^\circ$ $\sqrt{\Delta T_a^2} \approx 0,018 (\cos \theta)^{-1/2}$ К. Средний период флюктуаций порядка 10 сек.

В связи с повышением чувствительности приемных радиоастрономических устройств сантиметрового диапазона при использовании мазеров бегущей волны возникает необходимость исследования внешних условий приема радиоизлучения с целью выяснения возможности реализации высокой чувствительности аппаратуры. Ниже рассмотрен вопрос о флюктуациях радиоизлучения атмосферы, поскольку они могут ограничивать чувствительность приемных систем.

Исследования, проведенные в работе [1], показывают, что коэффициент поглощения для волн сантиметрового диапазона во всей толще атмосферы определяется коэффициентами поглощения в кислороде и водяном паре:

$$\gamma = x_{10} l_1 + x_{20} l_2, \quad (1)$$

где x_{10} и x_{20} —коэффициент поглощения в кислороде и водяном паре на поверхности земли и l_1 и l_2 —эффективные пути в кислороде и водяном паре. Для вычисления величины флюктуаций температуры радиоизлучения атмосферы найдем зависимость коэффициентов поглощения от параметров.

Для сантиметрового диапазона при $\lambda > 1,5$ см поглощение в кислороде носит нерезонансный характер, при этом коэффициент поглощения равен [2]:

$$x_1 \sim \frac{64 \pi^2 \beta^2 N_k}{3kT_c} \Delta\nu; \quad \beta = \frac{eh}{4\pi mc}, \quad (2)$$

где N_k концентрация атомов кислорода.

Ширина линии поглощения $\Delta\nu$ определяется соударениями (вплоть до давлений порядка 10^{-1} мм рт. ст.)

$$\Delta\nu = 4\sigma^2 L \sqrt{\frac{2\pi}{R} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{p}{V T}}, \quad (3)$$

где L —число Лошмидта, R —газовая постоянная, σ —эффективное сечение для соударений.

Поскольку концентрация атомов кислорода $N_k \sim \frac{p}{kT}$, то для

коэффициента поглощения в кислороде получим следующую зависимость от температуры и давления:

$$\chi_1 = K_1 \frac{p^2}{T^{5/2}}, \quad (4)$$

где

$$K_1 = \frac{64 \pi^2 \beta^2}{3k^2 c} 4\sigma^2 L \sqrt{\frac{2\pi}{R} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}.$$

Поглощение в водяном паре для волн $\lambda > 1,35 \text{ см}$ определяется резонансным поглощением линии $1,35 \text{ см}$; выражение для коэффициента поглощения приведено в [3]. Концентрацию водяного пара в атмосфере можно выразить через давление и температуру, используя приближенную формулу [4]

$$p_{H_2O} = 1,62 pq, \quad (5)$$

точка

$$N_{H_2O} = \frac{p_{H_2O}}{kT} = \frac{1,62 pq}{kT},$$

q —удельная влажность, равная отношению массы водяного пара в единице объема к массе влажного воздуха в этом объеме. Для коэффициента поглощения в водяном паре получим:

$$\chi_2 \sim \frac{0,15 \pi^2 \mu_0^2 \sigma_{H_2O}^2 L}{\lambda^2 [(1,348)^2 - (1/\lambda)^2]} \sqrt{\frac{2\pi}{N} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} \frac{p^2 q}{(kT)^{5/2}} = K_2 \frac{p^2 q}{T^{5/2}}. \quad (6)$$

В атмосфере p , q , T зависят от высоты над земной поверхностью и времени года. Воспользуемся моделью сухой стандартной атмосферы, для которой принимают [5]:

$$p = p_0 e^{-\frac{1}{8} h}; \quad (7)$$

$$T = T_0 - 6,5 h \quad (h < 12 \text{ км}),$$

где T_0 и p_0 —абсолютная температура и давление воздуха у поверхности земли. Для изменения удельной влажности с высотой воспользуемся эмпирической зависимостью [5]:

$$q = q_0 e^{-bh-ch^2}, \quad b = 0,21 \text{ км}^{-1}, \quad c = 0,03 \text{ км}^{-2}, \quad (8)$$

где q_0 —удельная влажность у поверхности земли, h —высота над поверхностью земли в км. При вертикальных перемещениях влажного воздуха удельная влажность сохраняется, если не происходит конденсации водяных паров.

Наблюдения показывают, что происходящие в атмосфере процессы, особенно в восходящих или нисходящих потоках воздуха, очень близки к адиабатическим [5]. Можно показать, что в этом случае величина $H = T + \gamma_a h$ ($\gamma_a = 9,8 \text{ град} \cdot \text{км}^{-1}$), называемая потенциальной температурой, остается неизменной при вертикальных перемещениях элемента объема воздуха. Она характеризует данный элемент объема, являясь его консервативным свойством.

Пользуясь выражением для коэффициента поглощения, можно написать уравнение переноса для температуры радиоизлучения атмосферы. Выберем направление распространения волны за ось x . В этой системе координат

$$\frac{dT_a}{dx} + \chi T_a - \chi T = 0. \quad (9)$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда $T_a \ll T$. Для волн сантиметрового диапазона этот случай реализуется всегда, если исключить углы, меньшие 5° над горизонтом. Так, для $\lambda = 3 \text{ см}$, согласно [6], в зените $T_a = 2,5^\circ\text{K}$, а вдоль горизонта $T_a = 70^\circ\text{K}$. Уравнение переноса для температуры радиоизлучения атмосферы запишется в виде:

$$\frac{dT_a}{dx} = \Theta, \quad (10)$$

где $\Theta = \alpha T$ — температура радиоизлучения единицы объема с единицы пути.

Для объяснения флюктуаций температуры радиоизлучения обратимся к схеме флюктуаций за счет турбулентного перемешивания в атмосфере, аналогично тому, как это было сделано для флюктуаций коэффициента преломления в работе [4].

Пусть объем воздуха с уровня h_1 , характеризуемого значениями $\Theta(h_1, p(h_1), q(h_1), H(h_1))$, в результате действия турбулентного перемешивания оказался на уровне h_2 , где такой же объем характеризуется параметрами $\Theta(h_2, p(h_2), q(h_2), H(h_2))$. Так как при вертикальных перемещениях объема воздуха сохраняются q и H , то на уровне h_2 поднявшийся объем характеризуется $\Theta(h_2, p(h_2), q(h_1), H(h_1))$ и отличается от местного значения Θ на величину:

$$\Delta\Theta = \left[\frac{\partial\Theta}{\partial H} \frac{dH}{dh} + \frac{\partial\Theta}{\partial q} \frac{dq}{dh} \right] \Delta h. \quad (11)$$

Таким образом, величина Θ будет описываться случайным турбулентным полем, которое носит неоднородный характер из-за изменения p , q и H с высотой.

Структурная функция $D_\Theta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ и спектр $\Phi_\Theta(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ флюктуаций величины Θ в неоднородном турбулентном потоке с плавно меняющимися характеристиками найдены в [4] и имеют вид:

$$D_\Theta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = C_\Theta^2 \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^{2/3} \quad (12)$$

при $l_0 \ll |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll L_0$, где l_0 и L_0 — внутренний и внешний масштабы турбулентности;

$$\Phi_\Theta(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = C_\Theta^2(\mathbf{r}) \Phi_\Theta^{(0)}(\mathbf{k}); \quad (13)$$

$$\Phi_\Theta^{(0)} = 0,033 k^{-11/3}, \quad (13a)$$

где k — пространственные волновые числа. Коэффициент пропорциональности для структурной функции является медленной функцией от h и равен:

$$C_\Theta^2 = a^2 L_0^{4/3}(h) (\text{grad } \bar{\Theta})^2. \quad (14)$$

Однако из (11) видно, что возникшая флюктуация пропорциональна не „полному“ $\text{grad } \bar{\Theta}$, а величине:

$$M = \frac{\partial\Theta}{\partial H} \frac{dH}{dh} + \frac{\partial\Theta}{\partial q} \frac{dq}{dh} = -\frac{3}{2} \frac{p^2}{T^{5/2}} (K_1 + K_2 q) \left(\frac{dT}{dh} + \gamma_a \right) + \frac{p^2 K_2}{T^{3/2}} \frac{dq}{dh}. \quad (15)$$

Таким образом, $C_\Theta^2 = a^2 L_0^{4/3} M^2(h)$. Для дальнейших вычислений представим случайное локально изотропное поле Θ в виде

$$\Theta(x, y, z) = \Theta(x, 0, 0) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - e^{i(k_2 y + k_3 z)}] d\nu(k_2, k_3, x) \quad (16)$$

и будем искать решение уравнения (10) в такой же форме:

$$T_a(x, y, z) = T_a(x, 0, 0) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - e^{i(k_2 y + k_3 z)}] d\varphi(k_2, k_3, x). \quad (17)$$

Теперь уравнение (10) записалось в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_a(x, 0, 0)}{\partial x} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - e^{i(k_2 y + k_3 z)}] \frac{\partial}{\partial x} d\varphi(k_2, k_3, x) = \\ &= \Theta(x, 0, 0) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - e^{i(k_2 y + k_3 z)}] d\nu(k_2, k_3, x). \end{aligned} \quad (18)$$

Положив в этом уравнении $y = z = 0$, получим уравнение

$$\frac{\partial T_a(x, 0, 0)}{\partial x} = \Theta(x, 0, 0), \quad (18a)$$

определенное стационарную часть. Вычтя (18a) из (18), получим уравнение, из которого легко найти, что случайные амплитуды $d\nu(k_2, k_3, x)$ и $d\varphi(k_2, k_3, x)$ связаны дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial x} d\varphi(k_2, k_3, x) = d\nu(k_2, k_3, x), \quad (19)$$

которое имеет решение, обращающееся в нуль при $x = 0$:

$$d\varphi(k_2, k_3, x) = \int_0^x d\nu(k_2, k_3, x') dx'. \quad (20)$$

Найдем теперь связь между двумерными спектральными плотностями F_{T_a} и F_Θ . Для этого умножим $d\varphi$ на $d\varphi^*$ и полученное произведение усредним:

$$\overline{d\varphi d\varphi^*} = \int_0^x \int_0^x dx' dx'' d\nu(k_2, k_3, x') \overline{d\nu^*(k'_2, k'_3, x'')} . \quad (21)$$

Поскольку по определению двумерной спектральной плотности

$$\overline{d\varphi d\varphi^*} = \delta(k_2 - k'_2) \delta(k_3 - k'_3) F_{T_a}(k_2, k_3, x' - x'') dk_2 dk_3 dk'_2 dk'_3$$

и аналогично

$$\overline{d\nu d\nu^*} = \delta(k_2 - k'_2) \delta(k_3 - k'_3) F_\Theta(k_2, k_3, x' - x'') dk_2 dk_3 dk'_2 dk'_3 ,$$

то из (21) получим искомое соотношение:

$$F_{T_a}(k_2, k_3, 0) = \int_0^x \int_0^x F_\Theta(k_2, k_3, x' - x'') dx' dx''. \quad (22)$$

Интегрирование ведется от источника по лучу к плоскости наблюдения. Для F_Θ двумерная спектральная плотность известна и приведена в [4]:

$$F_\Theta \left(k_2, k_3, |x' - x''|, \frac{r_1 + r_2}{2} \right) = C_\Theta^2 \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) f_\Theta(k_2, k_3, |x' - x''|), \quad (23)$$

где

$$\int_0^{\infty} f_{\Theta}(k_2, k_3, \xi) d\xi = \pi \Phi_{\Theta}^{(0)}(0, k_2, k_3). \quad (24)$$

Для интегрирования (22) введем координаты

$$\xi = x' - x'', z\gamma_l = x' + x'' \text{ и } 2r = r' + r''. \quad (25)$$

Область интегрирования является ромбом с вершинами $(0, 0)$, $(x, x/2)$, $(0, x)$ и $(-x, x/2)$. Поскольку в (22) подынтегральное выражение четно по ξ , то интегрирование можно произвести только по правой половине области интегрирования:

$$F_{T_a}(k_2, k_3, 0) = \int_0^{x/2} C_{\Theta}^2(r) d\gamma_l \int_0^{2\tau_l} f_{\Theta}(k, \xi) d\xi + \int_{x/2}^x C_{\Theta}^2(r) d\gamma_l \int_0^{x/2} f_{\Theta}(k, \xi) d\xi. \quad (26)$$

Поскольку при $k\xi \gg 1$ $f_{\Theta}(k, \xi) \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{2\tau_l} f_{\Theta}(k, \xi) d\xi &\sim \int_0^{\infty} f_{\Theta}(k, \xi) d\xi = \pi \Phi_{\Theta}^{(0)}(k); \\ \int_0^{x-2\tau_l} f_{\Theta}(k, \xi) d\xi &\simeq \int_0^{\infty} f_{\Theta}(k, \xi) d\xi = \pi \Phi_{\Theta}^{(0)}(k). \end{aligned} \quad (27)$$

Окончательно для спектральной плотности флюктуаций температуры радиоизлучения в плоскости наблюдения $x = L$ получим:

$$F_{T_a}(k_2, k_3, 0) = 2\pi \int_0^L C_{\Theta}^2(r) \Phi_{\Theta}^{(0)}(k) d\gamma_l, \quad (28)$$

где $\Phi_{\Theta}^{(0)}$ дается выражением (13а).

Так как $F_{T_a}(k_2, k_3, 0) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow 0$, то у случайного поля, описываемого спектром F_{T_a} , не существует корреляционной функции. Поэтому ограничим спектр F_{Θ} на пространственных числах $k_{\min} \sim 1/L_0$, т. е. предположим, что не существует неоднородностей с размером, большим внешнего масштаба турбулентности.

Согласно общей формуле, функция корреляции флюктуаций температуры в плоскости $x = L$:

$$B_{T_a}(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(k\rho) F_{T_a}(k, 0) k dk, \quad (29)$$

где $J_0(k\rho)$ — функция Бесселя.

Интенсивность флюктуаций температуры в этой плоскости равна

$$\bar{\Delta T^2} = B_{T_a}(0) = 4\pi^2 \int_0^L C_{\Theta}^2(r) d\gamma_l \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \Phi_{\Theta}(k, 0) k dk = 0,8a^2 \int_0^L L_0^3 M^2 dx. \quad (30)$$

Поместим начало координат в точку наблюдения и будем $L \rightarrow \infty$. Тогда получим выражение:

$$\bar{\Delta T^2} = B_T(0) = 0,8a^2 \int_0^{\infty} L_0^3 M^2 dx, \quad (31)$$

которое является решением задачи об интенсивности флюктуаций тем-

пературы в точке приема на луче. Для вычисления интеграла в (31) нужно знать распределение L_0 с высотой. Из экспериментальных данных известно [4], что в приземном слое $L_0 \approx 10 \text{ м}$ на высотах порядка 1 км $L_0 \approx 100 \text{ м}$. Для оценок примем $L_0 = 100 \text{ м}$ и независящим от высоты. Коэффициент $a = 2,4$, как это следует из измерений структурных функций температурного поля [1].

В интеграле (31) $M(h)$ функция только высоты, поэтому сделаем замену переменных $dx = \frac{dh}{\cos \vartheta}$, где ϑ — зенитный угол. В результате имеем:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta T^2} &= \frac{0,8a^2L_0^3}{\cos \vartheta} \int_0^\infty M^2(h) dh = \frac{0,8a^2L_0^3}{\cos \vartheta} \cdot \left\{ \frac{9}{8} (\gamma_a - \gamma)^2 H_1 z_{10}^2 + \right. \\ &+ 3z_{10} z_{20} (\gamma_a - \gamma) \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \left[\frac{3}{2} (\gamma_a - \gamma) + b T_0 - b \gamma \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \right] + z_{20}^2 H_2 \left[\gamma^2 b^2 \frac{H_2^2}{3} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} (\gamma_a - \gamma) + T_0 b \right) - \frac{H_2}{2} \gamma b \left(\frac{3}{2} (\gamma_a - \gamma) + T_0 b \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

где z_{10} и z_{20} — коэффициенты поглощения в кислороде и водяном паре у поверхности земли, $H_1 = 5,3 \text{ км}$, $H_2 = 2,1 \text{ км}$ — характеристические высоты кислорода и водяного пара, $\gamma = 6,5 \text{ град}\cdot\text{км}^{-1}$.

В работе [6] были произведены измерения коэффициентов поглощения кислорода и водяного пара на $\lambda = 3,2 \text{ см}$, из которых следует, что $z_{10} = 0,0087 \text{ дБ}\cdot\text{км}^{-1}$ и в $z_{20} = a \rho_0$, $a = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ дБ}\cdot\text{км}^{-1} \text{ м}^3 \cdot \text{г}^{-1}$ (ρ_0 — абсолютная влажность атмосферы). Принимая эти значения коэффициентов и $\rho_0 = 10 \text{ г}\cdot\text{м}^{-3}$, получим величину флюктуации температуры радиоизлучения атмосферы на $\lambda \sim 3 \text{ см}$ в данном направлении

$$\sqrt{\overline{\Delta T_a^2}} \approx \frac{0,018}{\sqrt{\cos \vartheta}} \text{ °К}. \quad (33)$$

Поскольку на высотах H_1 и H_2 поглощение в кислороде и водяном паре убывает в e раз, то основной вклад во флюктуации температуры радиоизлучения дает слой атмосферы до высоты 4 км. Временную зависимость флюктуаций радиоизлучения атмосферы в общем случае определить не представляется возможным. Можно сделать приближенную оценку вероятных периодов флюктуаций. Из (30) видно, что величина $\overline{\Delta T^2}$ определяется в основном большими неоднородностями, размеры которых сравнимы с внешним масштабом турбулентности L_0 . Зная среднюю скорость ветра \bar{v} , можно определить время прохождения отдельной неоднородности через бесконечно узкую диаграмму направленности антенны, которое определит временной масштаб флюктуаций температуры радиоизлучения атмосферы. Средняя скорость ветра возрастает почти линейно с высотой с $5 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$ на высоте 100 м до $11 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$ на высотах порядка 3 км [5]. Отсюда следует, что средний период флюктуаций будет порядка 10 сек.

Формула (33) дает оценку $\sqrt{\overline{\Delta T_a^2}}$ для температуры антенны, когда приемная антенна имеет δ -диаграмму направленности. Однако, если диаграмма направленности приемной антенны занимает некоторый телесный угол, который меньше телесного угла, занимаемого отдельными неоднородностями на границе слоя, дающего основной вклад в поглощению ($\sim 4 \text{ км}$), то $\sqrt{\overline{\Delta T_a^2}}$ по температуре антенны будет

таким же, как для δ -диаграммы. Для оценки примем, что для отдельной неоднородности, находящейся на границе слоя (R) на расстоянии ρ между двумя лучами, проходящими через точки половинной мощности диаграммы направленности антенны, функция корреляции $B_\Theta = \frac{1}{2} [D_\Theta(\infty) - D_\Theta(\rho)]$ убывает наполовину. Тогда для турбулентного поля с внешним масштабом L_0 радиус корреляции по уровню 0,5 будет $\rho_{0.5} \sim L_0/3$, и земной наблюдатель увидит его под углом $\Theta = (L_0/3)/R \sim 20'$. Таким образом, если ширина диаграммы направленности приемной антенны $\Theta \sim 20'$ и меньше, то можно использовать выражение (32) для оценки температурной флюктуации радиоизлучения атмосферы.

Знание величины флюктуаций температуры атмосферы важно не только для реализации чувствительности радиоастрономической аппаратуры, но также при целом ряде прецизионных измерений, таких, как измерение потока от слабого дискретного источника.

Следует также отметить, что в другом предельном случае, когда $T_{\text{спи}} > T$ за счет флюктуаций коэффициента поглощения χ будут наблюдаться флюктуации уровня принимаемого сигнала (особенно существенные на малых углах с горизонтом).

Пользуюсь случаем выразить благодарность В. С. Троицкому и В. А. Разину за дискуссию и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 4, 21 (1959).
- 2 J. H. Van Vleck, Phys. Rev., 71, 413 (1947).
- 3 J. H. Van Vleck, Phys. Rev., 71, 425 (1947).
- 4 В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959
- 5 А. Х. Хргиани, Физика атмосферы, ГИФМЛ, М., 1958
- 6 С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 1, 1, 19 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
7 июня 1960 г.

ФЛЮКТУАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ТРИГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЕЕ В ЛОКАЛЬНО-ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Ю. А. Рыжов, Э. П. Лаптева

Рассмотрена теория модуляционного метода исследования дисперсионных свойств неоднородных сред, предложенного в [1]. Получено выражение для средних квадратов флюктуаций фазового инварианта и разности амплитуд боковых составляющих тригармонической волны, распространяющейся в локально-однородной среде, описываемой законом „двух третей“. Найдены корреляционные функции этих величин.

Вопрос о флюктуациях фазового инварианта при распространении плоской тригармонической волны в неоднородных средах был рассмотрен Зверевым [1] для случая малых флюктуаций. Им же был найден спектр фазового инварианта в статистически однородных средах [2].

Согласно современным представлениям реальная атмосфера не является статистически однородной средой, и флюктуации показателя преломления атмосферы можно рассматривать как однородные лишь в очень грубом приближении. Турбулентная атмосфера лучше всего описывается с помощью понятия локально-однородного поля. Исследование флюктуаций в плоской тригармонической волне, распространяющейся в такой среде, интересно с точки зрения изучения турбулентности в атмосфере вообще и исследования дисперсионных свойств такой среды в частности. Кроме того, модуляционный метод может быть использован для изучения распространения радиоволн в неоднородных средах.

1. ФЛЮКТУАЦИИ ФАЗОВОГО ИНВАРИАНТА

Фазовым инвариантом плоской тригармонической волны (т. е. волны, состоящей из трех распространяющихся в одном направлении плоских гармонических волн с частотами $\omega_1, \omega_0, \omega_2$, удовлетворяющими соотношению $\omega_0 - \omega_1 = \omega_2 - \omega_0 = \Delta\omega$) называется величина $\Theta = \varphi_0 - (\varphi_1 + \varphi_2)/2$, где $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ — фазы компонент волны [3]. Эта величина не меняется в пространстве и времени, если волна распространяется в однородной, недиспергирующей среде. Фазовый инвариант характеризует вид модуляции [3], и по его изменению можно судить о дисперсионных свойствах среды. В турбулентной среде фазовый инвариант флюктуирует, и нас будет интересовать величина и структура его флюктуаций в плоскости $x = L$, перпендикулярной направлению распространения волны (L — толщина неоднородного слоя, пройденного волной).

Рассмотрим структурную функцию инварианта в плоскости $x = L$

$$\begin{aligned} \overline{\Delta\Theta^2} &= [\overline{\Theta(0, L)} - \overline{\Theta(0, L)}]^2 = \overline{\Delta\varphi_0^2} + \frac{1}{4} \overline{\Delta\varphi_1^2} + \frac{1}{4} \overline{\Delta\varphi_2^2} - \\ &- \overline{\Delta\varphi_0\Delta\varphi_1} - \overline{\Delta\varphi_0\Delta\varphi_2} + \frac{1}{2} \overline{\Delta\varphi_1\Delta\varphi_2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для вычисления спектра структурной функции инварианта необходимо знать спектр величины $\Delta\varphi_1\Delta\varphi_2$. Для его определения проще всего воспользоваться спектральным методом, применив формулу, связывающую спектральные амплитуды флюктуаций фазы и коэффициента преломления [1]:

$$d\sigma(z_2, z_3, x) = k \int_0^x dx' \cos[(x^2(x-x')/2k)] d\sigma_2(z'_2, z'_3, x') .$$

Для определения спектра $\overline{\Delta\varphi_1\Delta\varphi_2}$ умножим $d\sigma_1(z_2, z_3, x)$ на $d\sigma_2^*(z'_2, z'_3, x)$, где индексы 1 и 2 соответствуют разным частотам. Учитывая, что

$$\begin{aligned} d\sigma_1(z_2, z_3, x) d\sigma_2^*(z'_2, z'_3, x) &= \delta(z_2 - z'_2) \delta(z_3 - z'_3) \times \\ &\times F_{12}(z_2, z_3, 0) dz_2 dz_3 dz'_2 dz'_3 , \end{aligned}$$

найдем $F_{12}(z, 0)$ — спектр функции $\overline{\Delta\varphi_1\Delta\varphi_2}$:

$$F_{12}(z, 0) = \pi k_0^2 L \left\{ \frac{\sin[(z^2 L/2k_0)(\Delta k/k_0)]}{(z^2 L/2k_0)(\Delta k/k_0)} + \frac{\sin(z^2 L/k_0)}{z^2 L/k_0} \right\} \Phi_n(z, 0), \quad (2)$$

где $\Phi_n(z, 0)$ — трехмерный спектр показателя преломления, Δk — разность волновых чисел рассматриваемых волн. Результат (2) получен в предположении, что $\lambda/l_0 \ll 1$ (где λ — длина волны, l_0 — внутренний масштаб турбулентности) и $\Delta k/k_0 \ll 1$.

Располагая спектром $F_{12}(z, 0)$, вычислим спектр фазового инварианта:

$$\begin{aligned} F_\Theta(z, 0) &= \pi k_0^2 L \Phi_n(z) \left\{ \frac{3}{2} - 2 \frac{\sin[(z^2 L/2k_0)(\Delta k/k_0)]}{(z^2 L/2k_0)(\Delta k/k_0)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\sin[(z^2 L/k_0)(\Delta k/k_0)]}{(z^2 L/k_0)(\Delta k/k_0)} \right\}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Delta k = k_0 - k_1 = k_2 - k_0 .$$

Этот результат, естественно, совпадает с формулой в статье [2]. Если сюда подставить спектр, соответствующий закону Колмогорова — Обухова, описывающему локально-однородную турбулентность:

$$\Phi_n(z) = \begin{cases} 0,033 C_n^2 z^{-11/3} & (z \leq z_m) \\ 0 & (z > z_m) \end{cases}, \quad (4)$$

то $F_\Theta(z, 0)$ при $z=0$ обращается в нуль, т. е. инвариант Θ образует в плоскости $x=L$ однородное поле. В то же время фаза каждой компоненты тригармонической волны в такой среде образует локально-однородное поле. Отмеченное свойство связано с тем, что крупные однородности не влияют на инвариант (меняют фазы компонент одинаково) и в приближении геометрической оптики инвариант является величиной постоянной.

Для флюктуаций инварианта существенны дифракционные эффекты. Корреляционная функция инварианта в плоскости $x=L$ может быть вычислена по формуле:

$$B_\Theta(\rho) = 2\pi \int_0^\infty J_0(x\rho) F_\Theta(z, 0) z dz . \quad (5)$$

Соответственно может быть вычислен и средний квадрат флюктуаций фазового инварианта

$$\bar{\Theta}^2 = 2\pi \int_0^{\infty} F_\Theta(z, 0) z dz. \quad (6)$$

Свойство однородности инварианта связано со структурой его выражения через фазы компонент тригармонической волны. Несмотря на то, что флюктуации фазы образуют локально-однородное поле, комбинация фаз (разность φ_0 и $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$) образует однородное поле. Таким образом, влияние самых больших неоднородностей, обусловливающих все нестационарные явления, оказывается исключенным. В частности, Θ является стационарной случайной функцией времени.

Все дальнейшие вычисления проводятся для спектра $\Phi_n(z)$, заданного формулой (4). Как и при рассмотрении флюктуаций амплитуды плоской волны [4], здесь в зависимости от взаимного расположения точек $2\pi/L_0$, $z_m = 2\pi/l_0$ и $z_0 = 2\pi/\sqrt{L\Delta\lambda}$ (z_0 — характерный размер функции $\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — заключенный в фигурные скобки множитель в спектре $F_\Theta(z, 0)$ (3), L_0 — внешний масштаб турбулентности) можно выделить три различных случая.

1. $L_0 \gg \sqrt{L\Delta\lambda} \gg l_0$ ($z_m \gg z_0 \gg 2\pi/L_0$). В этом случае спектр $F_\Theta(z, 0)$ имеет максимум вблизи точки z_0 , т. е. наибольший вклад во флюктуации Θ дают неоднородности с размерами, близкими к $\sqrt{L\Delta\lambda}$.

2. $\sqrt{L\Delta\lambda} \gg L_0$. При этом условии существенную роль играют крупномасштабные неоднородности, которые в реальной атмосфере неоднородны и неизотропны.

3. $\sqrt{L\Delta\lambda} \gg l_0$ ($z_0 \gg z_m$) — случай малых эффектов. Флюктуации определяются неоднородностями, близкими по размерам к внутреннему масштабу турбулентности.

Вычислим средний квадрат флюктуаций инварианта $\bar{\Theta}^2$. В предельном случае $\sqrt{L\Delta\lambda} \gg l_0$

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}^2 &= 2\pi^2 k_0^2 L \int_0^{z_m} \left\{ 1 - \frac{\sin[(z^2 L/2k_0)(\Delta k/k_0)]}{(z^2 L/k_0)(\Delta k/k_0)} \right\} \Phi_n(z) dz^2 - \\ &- \frac{\pi^2 k_0^2 L}{2} \int_0^{z_m} \left\{ 1 - \frac{\sin[(z^2 L/k_0)(\Delta k/k_0)]}{(z^2 L/k_0)(\Delta k/k_0)} \right\} \Phi_n(z) dz^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Первый интеграл в (7) равен

$$2\pi^2 k_0^2 L \left(\frac{\Delta k}{k_0} \frac{L}{2k_0} \right)^{5/6} 0,033 C_n^2 \int_0^{z_m^2 L \Delta k / 2k_0^2} \left(1 - \frac{\sin y}{y} \right) y^{-11/6} dy;$$

второй интеграл —

$$\frac{1}{2} \pi^2 k_0^2 L \left(\frac{\Delta k}{k_0} \frac{L}{k_0} \right)^{5/6} 0,033 C_n^2 \int_0^{z_m^2 L \Delta k / k_0^2} \left(1 - \frac{\sin y}{y} \right) y^{-11/6} dy.$$

Верхний предел в первом интеграле можно представить в виде $\pi L \Delta \lambda / l_0^2$, во втором интеграле — в виде $2\pi L \Delta \lambda / l_0^2$. В силу условия $\sqrt{L \Delta \lambda} \gg l_0$ интегрирование можно распространить до бесконечности, практически не делая никакой ошибки. В результате получим:

$$\Theta^2 = 0,19 k_0^{7/6} L^{11/6} (\Delta k / k_0)^{5/6} C_n^2. \quad (8)$$

В другом предельном случае, когда $\sqrt{L \Delta \lambda} \ll l_0$, также просто получить выражение для Θ^2 , пользуясь разложением $\varphi(z)$ по степеням z вблизи $z=0$ и ограничиваясь первым членом разложения:

$$\varphi(z) = \frac{1}{20} \left(\frac{z^2 L}{2k_0} \frac{\Delta k}{k_0} \right)^4.$$

Подставляя это значение $\varphi(z)$ в (6), получим:

$$\bar{\Theta}^2 = 36,4 L^5 k_0^{-2} \left(\frac{\Delta k}{k_0} \right)^4 l_0^{-19/3} C_n^2. \quad (9)$$

Теперь вычислим корреляционную функцию фазового инварианта $B_\Theta(\rho)$. Для этого удобно (5) представить в виде разности интегралов:

$$B_\Theta(\rho) = 4\pi^2 k_0^2 L 0,033 C_n^2 \int_0^\infty J_0(x\rho) \left\{ 1 - \frac{\sin[(x^2 L/2k_0)(\Delta k/k_0)]}{(x^2 L/2k_0)(\Delta k/k_0)} \right\} x^{-8/3} dx - \\ - \pi k_0^2 L 0,033 C_n^2 \int_0^\infty J_0(x\rho) \left\{ 1 - \frac{\sin[(x^2 L/k_0)(\Delta k/k_0)]}{(x^2 L/k_0)(\Delta k/k_0)} \right\} x^{-8/3} dx. \quad (10)$$

Здесь опять в случае $\sqrt{L \Delta \lambda} \gg l_0$ можно распространить интегрирование до бесконечности, а затем воспользоваться графиком корреляционной функции флюктуации амплитуды плоской волны $b_A(\rho)$ (см. [4]) для построения функции

$$b_\Theta(\rho) = B_\Theta(\rho)/B_\Theta(0),$$

поскольку

$$b_\Theta(\rho) = 1,8 b_A(\rho \sqrt{2k_0/\Delta k}) - 0,8 b_A(\rho \sqrt{k_0/\Delta k}), \quad (11)$$

где

$$b_A(\rho) = \frac{B_A(\rho)}{B_A(0)} = \frac{2\pi^2}{B_A(0)} 0,033 C_n^2 k_0^2 L \times \\ \times \int_0^\infty J_0(z\rho) \left(1 - \frac{k_0}{z^2 L} \sin \frac{z^2 L}{k_0} \right) z^{-8/3} dz.$$

График функции $b_\Theta(\rho)$ приведен на рис. 1.

Согласно (10), аргумент коэффициента корреляции фазового инварианта имеет такой же вид, как аргумент коэффициента корреляции амплитуды плоской волны (с заменой λ на $\Delta \lambda$).

Выясним, насколько существенен вид спектра турбулентности в различных условиях.

Пусть $\sqrt{L \Delta \lambda} \ll l_0$. Как уже говорилось выше, в этом случае можно функцию $\varphi(z)$ разложить в ряд и ограничиться первым членом разложения. Тогда для Θ^2 получим следующее выражение:

$$\bar{\Theta}^2 \sim L^5 k_0^{-2} (\Delta k / k_0)^4 \int_0^\infty x^9 \Phi_n(x) dx. \quad (12)$$

Независимо от вида функции $\Phi_n(x)$ $\bar{\Theta}^2$ определяется как функция расстояния, длины волны и относительной расстройки частот в тригармонической волне. От вида $\Phi_n(x)$ зависит лишь численный коэффициент

в $\bar{\Theta}^2$ и связь последнего с внутренним масштабом турбулентности l_0 .

В другом крайнем случае, когда $\sqrt{L\Delta\lambda} \gg l_0$, отдельно рассмотрим однородную и локально-однородную среду. Для однородной среды легко показать, что при $\sqrt{L\Delta\lambda} \gg l$ (l — радиус корреляции флюктуаций показателя преломления)

$$\bar{\Theta}^2 \approx 3\pi^2 k_0^2 L \int_0^\infty \Phi_n(x) x dx, \quad (13)$$

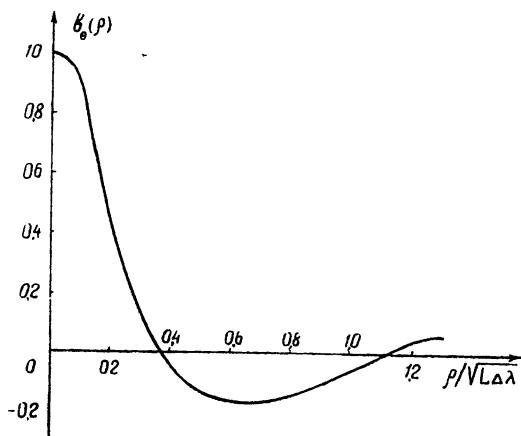


Рис. 1.

и мы опять имеем дело с универсальной зависимостью $\bar{\Theta}^2$ от L , k_0 и l , поскольку

$\int_0^\infty x \Phi_n(x) dx = \bar{l} \bar{\mu}^2 / 2\pi^2$ не зависит от вида корреляционной функции $B(r)$. (Здесь $\bar{\mu}^2 = B(0)$ — интенсивность флюктуаций показателя преломления.) В случае же локально-однородной среды не существует универсальной зависимости $\bar{\Theta}^2$ от указанных параметров при условии $\sqrt{L\Delta\lambda} \gg l_0$. Здесь существенно конкретное поведение функции $\Phi_n(x)$ вблизи $x=0$, и вклад интеграла (6) по области $(0, x_0)$ не является малым, как в случае однородной среды *. Отметим, что для промежуточных значений параметра $\sqrt{L\Delta\lambda}$ также не может существовать универсальной зависимости $\bar{\Theta}^2$ от L , k_0 , $(\Delta k / k_0)$, l , l_0 .

2. АМПЛИТУДНЫЕ ФЛЮКТУАЦИИ

Будем рассматривать флюктуации величины $\delta A/A_0 = (A_1 - A_2)/A_0$, где A_1 и A_2 — амплитуды волн боковых частот, A_0 — среднее значение каждой амплитуды, одинаковое для обеих частот. По существу, мы рассматриваем бигармоническую волну, но в экспериментальном отношении удобно проводить измерения фазового инварианта и разности амплитуд одновременно, используя для последней только две компоненты. Предполагая флюктуации амплитуды малыми, т. е. считая, что

$$\frac{\Delta A_1}{A_0} = \frac{A_1 - A_0}{A_0} \ll 1; \quad \frac{\Delta A_2}{A_0} = \frac{A_2 - A_0}{A_0} \ll 1,$$

получим:

$$\delta A/A_0 \approx \chi_1 - \chi_2,$$

где

$$\chi_{1,2} = \ln (A_{1,2}/A_0).$$

* В однородной среде отмеченное свойство существенно используется при выводе формулы (13).

Для структурной функции величины $\delta A/A_0$ в плоскости $x = L$ справедливо выражение:

$$D_A(\rho) = \overline{\Delta\chi_1^2} + \overline{\Delta\chi_2^2} - 2\overline{\Delta\chi_1\Delta\chi_2}. \quad (14)$$

Аналогично тому, как это было сделано для фазового инварианта, найдем спектр величины $\overline{\Delta\chi_1\Delta\chi_2}$:

$$F_{12}(z, 0) = \pi k_0^2 L \left\{ \frac{\sin [(z^2 L / 2k_0) (\Delta k / k_0)]}{(z^2 L / 2k_0) (\Delta k / k_0)} - \frac{\sin (z^2 L / k_0)}{z^2 L / k_0} \right\} \Phi_n(z) \quad (15)$$

$$(\Delta k = k_2 - k_1).$$

Здесь двухмерный спектр $D_A(\rho)$ соответственно имеет вид:

$$F_A(z, 0) = 2\pi k_0^2 L \left\{ 1 - \frac{\sin [(z^2 L / 2k_0) (\Delta k / k_0)]}{(z^2 L / 2k_0) (\Delta k / k_0)} \right\} \Phi_n(z). \quad (16)$$

Зная спектр, можно вычислить все интересующие нас величины. Приведем значение среднего квадрата величины $\delta A/A_0$ в двух крайних случаях.

Если $\sqrt{L\Delta\lambda} \gg l_0$, то

$$\left(\frac{\delta A}{A_0} \right)^2 = 0,35 C_n^2 k_0^{7/6} L^{11/6} \left(\frac{\Delta k}{k_0} \right)^{5/6} \simeq 2 \bar{\Theta}^2. \quad (17)$$

При условии $\sqrt{L\Delta\lambda} \ll l_0$

$$\left(\frac{\delta A}{A_0} \right)^2 = 1,7 C_n^2 L^3 \left(\frac{\Delta k}{k_0} \right)^2 l_0^{-7/3}. \quad (18)$$

Коэффициент корреляции величины $\delta A/A_0$ можно сразу построить, заметив, что его график совпадает с графиком уже упоминавшегося коэффициента корреляции амплитуды, приведенным в [4], если по оси абсцисс откладывать $\sqrt{2}\rho/\sqrt{L\Delta\lambda}$ вместо $\rho/\sqrt{L\Delta\lambda}$.

При применении формул (8) и (17) следует помнить, что в реальной турбулентной атмосфере выражение для спектра турбулентности (4) справедливо лишь для $z > 2\pi/L_0$ (L_0 — внешний масштаб турбулентности). Поэтому фактически нужно требовать соблюдения условия $L_0 \gg \sqrt{L\Delta\lambda} \gg l_0$, так как при этом условии область малых волновых чисел дает ненужный вклад в результаты и им можно пренебречь.

Кратко остановимся на экспериментальных возможностях метода. Флюктуации параметров тригармонической волны Θ и $\delta A/A_0$ (для последней величины нужно только две компоненты) непосредственно характеризуют дисперсионные свойства неоднородных сред и могут быть использованы для изучения последних. Из измерений $\bar{\Theta}^2$ и $(\delta A/A_0)^2$ можно получить значение C_n^2 . Зависимость $\bar{\Theta}^2$ и $(\delta A/A_0)^2$ от L , k_0 , $\Delta k/k_0$ также дает много возможностей экспериментальной проверки теории распространения коротких волн в турбулентных средах.

В заключение авторы выражают благодарность М. М. Кобрину за советы при написании рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Зверев, Доклад на IV Всесоюзной акустической конференции, М., 1958.
2. В. А. Зверев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 723 (1960).
3. В. А. Зверев, Сб. памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 1955.
4. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 июля 1960 г.

О ВОЗМОЖНОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ РАДИОВОЛН СОЛНЕЧНЫМИ КОРПУСКУЛЯРНЫМИ ПОТОКАМИ

M. A. Гинцбург

Рассмотрена возможность генерации радиоволн солнечными корпускулярными потоками в экзосфере Земли. Проанализированы условия возбуждения (с учетом движения ионов плазмы) и найдены частоты, на которых имеет место неустойчивость.

Поток заряженных частиц, движущийся в плазме вдоль направления внешнего магнитного поля H_0 , излучает поперечные электромагнитные волны (когерентное магнитотормозное излучение [1,2]). В настоящей статье мы, во-первых, получим результаты [1] иным способом и, во-вторых, доведем полученные результаты до формул, применимых к интересующей нас геофизической задаче о возбуждении солнечными корпускулярными потоками электромагнитных волн в земной плазме. В отличие от [1] и [2], в этой статье учтено движение не только электронов, но и ионов. Оказалось, что когерентное магнитотормозное излучение солнечных корпускулярных потоков может служить одной из составляющих микропульсаций земного магнитного поля и вообще одним из существенных механизмов образования электромагнитных волн (в ионосфере и экзосфере Земли и других планет, а также на Солнце и в межпланетном пространстве).

1. Введем следующие обозначения: ω_1 — комплексная частота волны ($\omega_1 = \omega + i\gamma$, ω — частота, γ — инкремент), N_l — концентрация частиц l -го сорта, T_l — их кинетическая температура, $S_l = \sqrt{2\pi} T_l m_l$ — скорость теплового движения, u_l — скорость направленного движения, k — волновое число. Индексы $l = 1$ и $l = 2$ относятся, соответственно, к электронам и ионам потока, индексы 3 и 4 — к электронам и ионам плазмы. Ниже рассматривается возбуждение волн, распространяющихся вдоль постоянного магнитного поля H_0 : напряженность электрического и магнитного полей E , $H \sim e^{i(kz - \omega t)}$.

Начальную функцию распределения скоростей в потоке считаем максвелловской в сопровождающей системе отсчета:

$$f_0 \sim \exp\{-[v_x^2 + v_y^2 + (v_z - u)^2] S^{-2}\}.$$

Можно было бы предложить и другие функции распределения, например: $f_0 = [(v - u_0)^2 + C]^{-1}$; однако выбор между различными функциями распределения из-за недостатка экспериментальных данных пока еще затруднителен.

Линеаризуя кинетическое уравнение, находим следующее соотношение для добавки к функции распределения f , связанной с полем волны:

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} - \frac{i}{\omega_H} (kv_z - \omega_1) f = \frac{e}{m} (v_x E_x + v_y E_y) 2 \left[1 - u \left(\frac{\omega}{k} \right)^{-1} \right] \frac{f_0}{S^2},$$

где $\cos \vartheta$ — направляющий косинус в пространстве скоростей: $v_x =$

$v_x = v \cos \vartheta$, $v_y = v \sin \vartheta$. Решение уравнения $y' + f(\vartheta)y = g(\vartheta)$, как известно, имеет вид:

$$y = e^{-F(\vartheta)} \left\{ C + \int_0^{\vartheta} e^{F(\vartheta)} g(\vartheta) d\vartheta \right\},$$

где $F(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} f(\vartheta) d\vartheta$.

Подставляя это решение в уравнения Максвелла, находим выражение для эффективной электрической проницаемости*:

$$\epsilon = \epsilon_{xx} \mp i\epsilon_{xy} = 1 + \frac{i\sqrt{\pi}}{\omega_1^2 k} \sum_{l=1}^4 \frac{\omega_{0,l}^2}{S_l} (\omega_1 - u_l k) W(z_l), \quad (1)$$

где

$$z_l = \frac{\omega \mp \omega_{H,l}}{k S_l} - \frac{u_l}{S_l} \sqrt{\omega_{0,l}^2} = \frac{4\pi e^2 N_l}{m_l}, \quad \omega_{H,l} = \frac{e_l H}{m_l c},$$

W — интеграл вероятности:

$$W(z) = e^{-z^2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right).$$

При больших по модулю значениях z $W(z) \approx i/\sqrt{\pi} z$ и выражение (1) переходит в формулу

$$\epsilon = 1 - \frac{1}{\omega_1^2} \sum (\omega_1 - u_l k) \frac{\omega_{0,l}^2}{\omega_1 \mp \omega_{H,l} - ku_l}$$

или при $u_l = 0$ (т. е. для ϵ плазмы)

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_{0,1}^2}{\omega(\omega \mp \omega_H)} - \frac{\omega_{0,4}^2}{\omega(\omega \mp \Omega_H)}, \quad (2)$$

где ω_H , Ω_H — ларморова частота электронов и ионов.

Из уравнений Максвелла следует закон дисперсии:

$$k^2 = \omega_1^2 \epsilon / c^2, \quad (3)$$

В соотношениях (1) — (3) ω_1 — комплексная частота. Пусть $\gamma = \operatorname{Im} \omega_1$, тогда из (3) следует, что при $\operatorname{Im} \omega_1 \ll \operatorname{Re} \omega_1$ (например, при $N_1 \ll N_3$) возбуждение ($\gamma > 0$) распространяющихся волн ($\operatorname{Re} \epsilon > 0$) имеет место при $\operatorname{Im} \epsilon < 0$.

Мы не будем искать общие условия неустойчивости, а поставим перед собой иную цель — показать, что солнечный корпускулярный поток в экзосфере действительно неустойчив и порождает радиоволны, т. е. будем искать не все значения ω и k , при которых мнимая часть выражения (1) отрицательна, а хотя бы одно такое значение.

Необыкновенная волна ($z_l = (\omega + \omega_{H,l})/kS_l - u_l/S_l$). Пусть

$$\omega + \Omega_H = ku_2, \quad (4)$$

где $\Omega_H = \omega_{H,2}$, точнее

$$\omega + \Omega_H - ku_2 \ll kS_2. \quad (4a)$$

Тогда $z_2 \ll 1$ и $W(z_2) = 1$. Далее, $\omega - ku$ равно $-\Omega_H$, и поскольку $\Omega_H > 0$, то $\omega - ku < 0$. Отсюда следует, что вклад пучка в ϵ — мнимая

* Выражение (1) может быть также получено из общей формулы (5) работы [3].

отрицательная величина, и плазма неустойчива. Условие (4) можно переписать в виде:

$$u_2 = v_\phi(1 + \Omega_H/\omega), \quad (5)$$

где v_ϕ — фазовая скорость волны.

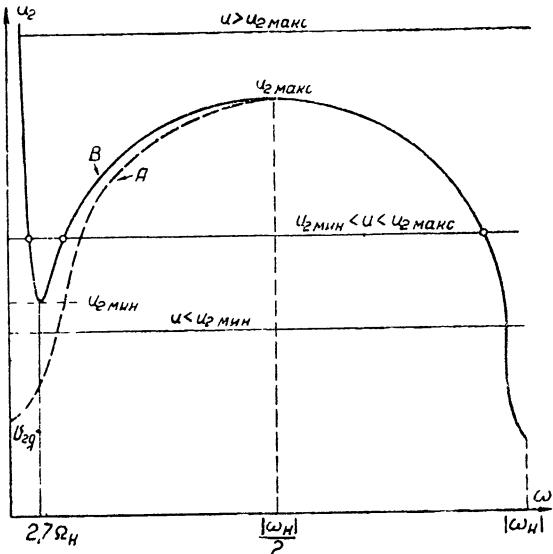
Вдали от резонанса (т. е. при $|(\omega + \omega_H)/kS_3| > 1$) для достаточно слабого пучка ($N_1 \ll N_3$) можно вычислить ϵ и v_ϕ по формулам элементарной теории (3). Подставив (3) в (5), получим уравнение для частоты (при $\epsilon \gg 1$):

$$u_2 = \frac{c}{\omega_{0,l}} [(|\omega_H| - \omega)(\omega + \Omega_H)]^{1/2} (1 + \Omega_H/\omega). \quad (6)$$

Из (1) и (6) следует, что необыкновенная волна возбуждается не электронной, а ионной компонентой пучка. На рис. 1 приведены графики зависимости $v_\phi(\omega)$

(кривая A) и $u_2(\omega)$ (кривая B). Из рисунка ясно, что с ростом частоты фазовая скорость увеличивается, достигает некоторого максимума и затем монотонно (до частот $\omega \sim \omega_H$) убывает. При $\omega = 0$ $v_\phi = (c/\omega_{0,3}) [|\omega_H| \Omega_H]^{1/2}$, т. е. равна фазовой скорости магнитогидродинамических волн $v_{\text{гд}} = H(4\pi NM)^{-1/2}$. Из условия $dv_\phi/d\omega = 0$ следует, что точка, в которой v_ϕ достигает максимума:

$$v_{\phi, \text{макс}} = \frac{1}{2} \sqrt{M/m} v_{\text{гд}},$$



определяется выражением

$$\omega = \frac{1}{2} (|\omega_H| - \Omega_H) \approx \frac{1}{2} |\omega_H|.$$

Рис. 1.

Функция $u(\omega) = v_\phi(\omega) [1 + \Omega_H/\omega]$ при $\omega \rightarrow 0$ стремится к бесконечности (т. е. для возбуждения низкочастотных волн нужны весьма быстрые пучки); с ростом ω величина u уменьшается, достигает минимума; затем она вновь растет, достигает при $\omega \approx |\omega_H|/2$ своего максимума и далее практически не отличается от функции $v_\phi(\omega)$. Точку минимума находим из условия $du(\omega)/d\omega = 0$: $\omega \approx 2,7 \Omega_H$; при этом $u_{2, \text{мин}} = 2,6 v_{\text{гд}}$. При $u_2 > u_{\text{мин}}$ прямая $u_2 = u$ пересекает кривую $u(\omega)$ в одной, двух или трех точках.

Таким образом, ионные пучки со скоростью $u > 2,6 v_{\text{гд}}$ возбуждают в плазме необыкновенную волну.

Заметим, что частота ω , определяемая условием (5), лежит в середине диапазона частот, генерируемых в начальный момент. В следующие моменты времени частотный спектр в данной точке пространства несколько изменится, появятся гармоники и субгармоники. В этом смысле формула (6), поскольку она получена в линейном приближении, не является точной.

Если ионный пучок возбуждает необыкновенную волну, то электронный пучок возбуждает волну с противоположным направлением

круговой поляризации. Условие, аналогичное (4), для этой обыкновенной волны принимает вид: $\omega = \omega_H - ku_1$, т. е.

$$u_1 = v_\Phi (1 - \omega_H/\omega) \quad (\omega_H < 0). \quad (7)$$

При этом

$$\epsilon \sim \frac{\omega_{0,3}^2}{(\Omega_H - \omega)(\omega + |\omega_H|)} \sim \frac{\omega_{0,3}^2}{(\Omega_H - \omega)|\omega_H|}, \quad (8)$$

т. е. волна распространяется лишь на частотах, меньших частоты гиromагнитного резонанса ионов; ее закон дисперсии обусловлен не электронами, а ионами (множитель $\Omega_H - \omega$). Равенство, аналогичное (6), в рассматриваемом случае имеет вид:

$$u_1 = c |\omega_H| (\omega_{0,l} \omega)^{-1} [(\Omega_H - \omega) |\omega_H|]^{1/2}.$$

Из соотношения (3) находим мнимую часть ω_1 — инкремент γ . При $\gamma \ll \omega$ для необыкновенной волны при $|z| \ll 1$

$$\gamma = -\frac{1}{2} \frac{\pi}{\omega k S} \frac{\omega - ku}{\omega_0^2} \left\{ \epsilon_{n1} + \omega \frac{\partial \epsilon_{n1}}{\partial \omega} \right\}^{-1}, \quad (9)$$

где $\epsilon_{n1} = \omega_{0,3}^2 [(\omega_{H,4} + \omega) (|\omega_{H,3}| - \omega)]^{-1}$; $\omega_{0,2}$, S — собственная частота и тепловая скорость в ионном пучке; $k = \frac{e}{c} \epsilon_{n1}^{1/2}$ (в первом приближении).

Инкремент для обыкновенной волны получаем заменой в (9) ионной циклотронной частоты Ω_H на электронную ω_H ($\omega_H = -M\Omega_H/m$).

Для возбуждения волны необходимо, чтобы инкремент γ за счет потока превышал декремент, создаваемый плазмой. Для поперечной волны, распространяющейся вдоль магнитного поля, имеют место два механизма затухания: а) затухание вследствие столкновений, б) циклотронное резонансное поглощение [8] (с декрементом α_1). Поэтому радиоволны возбуждаются пучком при

$$\gamma > \alpha_1 + \gamma_{\text{эфф}}, \quad (10)$$

где $\gamma_{\text{эфф}}$ — эффективное число столкновений.

2. Рассмотрим теперь возбуждение плазмы в экзосфере Земли солнечными корпускулярными потоками при следующих исходных данных: расстояние от центра Земли $h \approx 28 \cdot 10^3$ км, концентрация электронов в плазме $N_e \approx 10^2 \text{ см}^{-3}$, концентрация ионов в потоке $N_i \approx 1,0 \text{ см}^{-3}$, направленная скорость потока $u \approx 2 \cdot 10^8 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$, температура плазмы $T \approx 10^4 \text{ }^\circ\text{К}$, состав плазмы ионы H^+ , магнитное поле $H_0 \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ эрстед}$ [4]. Из этих данных, соответствующих результатам наблюдений, находим значения характерных констант: $\omega_H \approx 5,3 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$, $\Omega_H \approx 29 \text{ сек}^{-1}$, $\omega_{0,l} \approx 5,6 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}$, $S_l \approx 1,3 \cdot 10^6 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$.

Возбуждение необыкновенной волны. В рассматриваемом случае фазовая скорость магнитогидродинамических волн $v_r \approx 6,5 \cdot 10^7 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$, $u_{2,\text{мин}} \approx 2,6$ $v_r \approx 1,7 \cdot 10^8 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$. Поскольку направленная скорость солнечного корпускулярного потока превышает эту величину, то прямая $u = 2 \cdot 10^8 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ пересечет кривую $u_2(\omega)$ на рис. 1; следовательно, солнечные корпускулярные потоки должны возбуждать в экзосфере Земли поперечные электромагнитные волны.

При $u = 1,7 \cdot 10^8 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ частоты возбуждаемой волны порядка $\omega \sim f_1 = 2,7 \Omega_H/2\pi \approx 12 \text{ гц}$ и $f_2 = 0,999 f_H = 8440 \text{ гц}$. Поток со скоп-

ростью $u \simeq 8,5 \cdot 10^8 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ возбуждает уже 3 диапазона частот: $\omega \sim 0,08 \Omega_H$, $\omega \sim 0,1 |\omega_H|$ и $\omega \sim 0,9 |\omega_H|$, т. е. $f_1 \sim 5 \text{ гц}$, $f_2 \sim 850 \text{ гц}$ и $f_3 \sim 7600 \text{ гц}$.

Когерентное магнитотормозное излучение солнечных корпускулярных потоков можно разбить на три частотных интервала: $f_1 < 2,7 \Omega_H$ (магнитогидродинамические волны); $\frac{|\omega_H|}{2} > f_2 > 2,7 \Omega_H$ и $f_3 > \frac{|\omega_H|}{2\pi}$. Волны первого диапазона представляют собой одну из слагающих микропульсаций магнитного поля Земли.

Зная концентрацию ионов на разных высотах $N(h)$ и магнитное поле $H(h)$, можно вычислить $v_{\text{гл}}(h)$ ($\gamma_{\text{гл}} = H[4\pi NM]^{-1/2}$). Оказывается, что в ионосфере ($h = 150 - 700 \text{ км}$) $v_{\text{гл}} = (1 \div 2) \cdot 10^7 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$, далее с ростом h скорость возрастает, достигает на высоте $\sim 3000 \text{ км}$ своего максимума ($\sim 2 \cdot 10^8 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$) и затем убывает. Этот максимум обусловлен изменением состава газа — переходом от атомарного кислорода ионосферы к водороду экзосферы; $v_{\text{гл}}$ обратно пропорционально квадратному корню из молекулярного веса.

Если принять $u \simeq 2 \cdot 10^8 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$, то оказывается, что солнечные потоки с такими скоростями удовлетворяют условию $u > 2,6 v_{\text{гл}}$ в двух областях: в ионосфере ($h < 700 \text{ км}$) и за внешним радиационным поясом ($h \geq 2,5 \cdot 10^4 \text{ км}$).

При $\omega \gg \Omega_H$ (т. е. в диапазонах F_2 и F_3) слагаемым Ω_H/ω в (5) можно пренебречь, и соотношение (5) принимает вид:

$$u = v_{\Phi}. \quad (11)$$

При $h \simeq 2,8 \cdot 10^4 \text{ км}$ $\Omega_H \simeq 29 \text{ сек}^{-1}$ и формула (11) справедлива для частот 100 гц и выше.

Интересно отметить, что частицы с большими скоростями ($u > u_{\text{ макс}}$, см. рис. 1) генерируют только одну область частот. В нашем примере $u_{\text{ макс}} = 22 v_{\text{гл}} \sim 1,4 \cdot 10^9 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$.

Низкочастотное радиоизлучение солнечных корпускулярных потоков (область F_3 , рис. 1) наблюдалось Галле и Хелливеллом [6,7] и Эллисом [8]. Их результаты хорошо описываются формулой (11). Изложенная выше теория естественным образом объясняет наблюдавшиеся этими авторами радиоволны как когерентное магнитотормозное излучение солнечных корпускулярных потоков.

Из графика рис. 1 следует также корреляция между излучением солнечных корпускулярных потоков в радиодиапазоне ($1 \div 20 \text{ кгц}$) и магнитной активностью (микропульсациями земного магнитного поля)*.

Соотношение (5) представляет собой известную формулу аномального эффекта Допплера [2,9]: $\omega = \Omega_H [u/v_{\Phi} - 1]^{-1}$. Частоты излучения солнечных корпускулярных потоков с учетом эффекта Допплера вычислены также в [10,11]. В этих статьях эффект Допплера предполагался нормальным, т. е. поступательное движение ионов — „досветовым“ ($u < v_{\Phi}$). Однако, как следует из (1) и (9), при $u < v_{\Phi}$ поток устойчив; нарастание волн имеет место лишь при „сверхсветовом“ движении потока (при $u > v_{\Phi}$). Последнее обстоятельство не было учтено авторами [10,11].

Амплитуду возбуждаемых потоком волн можно найти только в нелинейной теории. Здесь мы приведем только грубую оценку амплитуды по порядку величины. Можно предположить, что амплитуды

* Примечание при корректуре Эта корреляция экспериментально обнаружена в работе [5].

колебаний будут возрастать до тех пор, пока не станет существенной обратная реакция волны на плазму и поток (т. е. пока приращение функции распределения не станет порядка невозмущенной функции распределения f_0). Этот порог можно оценить из энергетических соображений, поскольку тогда плотность энергии в волне будет равна плотности энергии пучка: $H^2/8\pi \sim N_2 m u^2/2$, откуда $H \approx 3(NM)^{1/2}$ и — амплитуда геомагнитных возмущений такого происхождения лежит в пределах $10^1 - 10^2$ г. Сделанная оценка свидетельствует о том, что энергии солнечных корпускулярных потоков достаточно для возбуждения наблюдавшихся короткопериодных вариаций земного магнитного поля. Пока эти магнитогидродинамические волны дойдут до Земли, их амплитуда вследствие рефракции, рассеяния и поглощения резко уменьшится и поле магнитогидродинамических волн близ поверхности Земли будет много меньше вычисленной величины H .

Л И Т Е Р А Т У Р А

- 1 В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 14 (1959).
- 2 В. Л. Гинцбург, УФН, 69, 537 (1959).
- 3 Р. З. Сагдеев и В. Д. Шафранов, Труды II Женевской конференции по мирному использованию атомной энергии, 1, 1959, стр. 202.
- 4 С. Ш. Долгинов и Н. В. Пушкин, ДАН СССР, 129, 77 (1959).
- 5 J. Aagøn, G. Gustafsson, A. Egeleand, Nature, 185, 148 (1960).
- 6 R. Gallet, Proc. IRE, 47, 211 (1959).
- 7 R. Gallet, R. Helliewell, J. Res. Nat. Bureau of Stand., 63 D, 21 (1959).
- 8 G. Ellis, Planetary Space Science, 1, 253-(1959).
- 9 И. М. Франк, Изв. АН СССР, сер. физ., 6, 3 (1942).
- 10 J. Mc Afthur, Phys. Rev. Letters, 2, 491 (1959).
- 11 W. Mursgray и J. Pope, Phys. Rev. Letters, 4, 5 (1960).

Институт земного магнетизма, ионосфера и распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию
1 февраля 1960 г.

ВОЗБУЖДЕНИЕ ПАРАМАГНЕТИКА ПУТЕМ ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЯ

Э. Г. Ящин

Рассмотрен вопрос о возбуждении парамагнетика при перемагничивании его под углом $180^\circ - \alpha$. При таком способе возбуждения в отличие от перемагничивания под углом 180° может быть осуществлено сразу «сверхизлучающее» состояние.

В работах [1,2] был предложен способ генерирования микрорадиоволн с помощью парамагнетика, возбужденного перемагничиванием. Этот способ возбуждения магнитной системы может оказаться не эффективным в случае, когда время спонтанного излучения [3,4] $\tau_{\text{сп}}$ больше „поперечного“ времени релаксации T_2 . В самом деле, если „продольное“ время релаксации $T_1 > T_2$ (что обычно имеет место) и $\tau_{\text{сп}} \gg T_2$, то система приходит в равновесие без образования поперечных (относительно магнитного поля) компонент магнитного момента, которые определяют интенсивность спонтанного излучения.

Можно освободиться от ограничения на время излучения, если так возбуждать парамагнитную систему, чтобы по окончании процесса возбуждения поперечная компонента магнитного момента была отлична от нуля. Ситуация будет особенно выгодна, если эта компонента окажется максимальной, т. е. будет реализовано „сверхизлучающее“ состояние [3,4]. Однако необходимо заметить, что в последнем случае длительность излучения будет порядка T_2 .

Одним из возможных методов получения возбужденного состояния с ненулевыми поперечными компонентами магнитного момента является переключение магнитного поля под углом $180^\circ - \alpha$, где α — некоторый небольшой угол.

1. ВРАЩЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим сначала поведение магнитного момента в постоянном по величине вращающемся магнитном поле. Без учета процессов релаксации и трения излучения движение системы описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = \gamma [\mathbf{M} \mathbf{H}], \quad (1)$$

где γ — гиромагнитное отношение электрона или ядра, \mathbf{M} — магнитный момент, \mathbf{H} — магнитное поле.

Решением этого уравнения в случае вращающегося поля

$$H_z = H_0 \cos(\Omega t), \quad H_y = H_0 \sin(\Omega t) \quad (2)$$

является „следящий“ за полем \mathbf{H} магнитный момент, если угловая скорость вращения магнитного поля Ω много меньше собственной частоты системы $\omega = |\gamma| H_0$. В этом особенно легко убедиться, если в начальный момент времени \mathbf{M} и \mathbf{H} были параллельны: достаточно подставить в уравнение (1) магнитный момент, имеющий ту же зави-

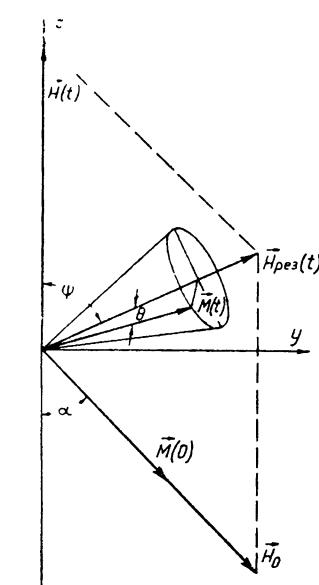
смость от времени, что и магнитное поле (2). „Следующее“ решение будет тем точнее, чем меньше отношение Ω/ω .

Таким образом, медленный (адиабатический) поворот магнитного поля не возбуждает систему, т. е. не увеличивает ее энергию. Только при быстром (неадиабатическом) повороте магнитного поля произойдет отставание магнитного момента от поля (увеличение энергии системы; см., например, [3]). Этот поворот нужно осуществить с угловой скоростью, превышающей собственную частоту системы, что в СВЧ-диапазоне сделать почти невозможно.

2. ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Возбуждение парамагнитной системы можно осуществить, например, быстрым по сравнению с продольным временем релаксации T_1 ^[1,2] переключением магнитного поля. После прохождения магнитного поля через нуль это поле и магнитный момент окажутся направленными антипараллельно; система будет возбуждена. Дальнейший рост магнитного поля увеличивает энергию системы адиабатически, т. е. пропорционально увеличению частоты.

Рассмотрим теперь случай, когда под углом $180^\circ - \alpha$ к постоянному магнитному полю \mathbf{H}_0 (см. рис. 1) включается линейно зависящее от времени поле $\mathbf{H}(t) = H_{\max} t/T$. Как будет видно из дальнейшего, возбуждение здесь будет немаксимальным (установившийся угол между \mathbf{M} и \mathbf{H} меньше 180°), и соответственно этому поперечные компоненты магнитного момента будут отличны от нуля.



С ростом поля $\mathbf{H}(t)$ результирующее магнитное поле $\mathbf{H}_{\text{рез}}(t)$ будет поворачиваться в плоскости zy и меняться по величине. Нас будет интересовать случай, когда при $t=0$ магнитный момент был направлен по постоянному полю \mathbf{H}_0 . С течением времени при вращении поля $\mathbf{H}_{\text{рез}}$ магнитный момент может отстать от магнитного поля. Будем определять это отставание углом Θ (см. рис. 1):

$$\cos \Theta = \frac{M_y \sin \psi + M_z \cos \psi}{|\mathbf{M}|}; \quad (3)$$

Рис. 1. Включение поля $\mathbf{H}(t) = H_{\max} t/T$ под углом α к постоянному полю \mathbf{H}_0 (в начальный момент $\mathbf{M}(0) \parallel \mathbf{H}_0$, угол ψ определяет движение результирующего поля $\mathbf{H}_{\text{рез}}(t)$).

для нахождения Θ нужно решить уравнение (1) при заданном магнитном поле

$$\mathbf{H}_{\text{рез}} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}(t) = y^0 \mathbf{H}_0 \sin \alpha + z_0 [\mathbf{H}(t) - H_0 \cos \alpha]. \quad (4)$$

Перепишем (1), (3), (4) в безразмерном виде. Для этого сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{M} / |\mathbf{M}|, & \omega_0 &= -\gamma H_0, \\ \omega_{\max} &= -\gamma H_{\max}, & \tau &= \omega_0 t, \quad \tau_0 = \omega_0 T, \\ h &= H_{\text{рез}}(t) / H_0, & h_{\max} &= H_{\max} / H_0. \end{aligned}$$

В безразмерном виде задача формулируется следующим образом: необходимо найти

$$\Theta = \arccos(m_y \sin \psi + m_z \cos \psi) \quad (3a)$$

при начальном условии $\tau=0$, $\Theta=0$, причем m_y , m_z определяются системой

$$\begin{aligned} \dot{m}_x &= -m_y h_z + m_z h_y; \\ \dot{m}_y &= -m_z h_x + m_x h_z; \\ \dot{m}_z &= -m_x h_y + m_y h_z, \end{aligned} \quad (1a)$$

а ψ и \mathbf{h} —заданные функции времени τ :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi(\tau) &= \frac{\sin \alpha}{h_{\max} \tau / \tau_0 - \cos \alpha}; \\ h_x &= 0; \quad h_y = \sin \alpha; \\ h_z &= h_{\max} \tau / \tau_0 - \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4a)$$

Указанныя задача в разных вариантах была решена на машине дискретного счета *. Результаты численного счета приведены на рис. 2 + 5.

На рис. 2 изображена зависимость Θ от безразмерного времени τ . Были выбраны следующие значения параметров: $\omega_0 = 10^{10}$ сек $^{-1}$, $\omega_{\max} = -3 \cdot 10^{10}$ сек $^{-1}$, $T = 10^{-8}$ сек. Из рисунка видно, что угол запаздывания Θ момента \mathbf{M} от магнитного поля $\mathbf{H}_{\text{рез}}$, характеризующий возбуждение системы, резко увеличивается в момент времени $\tau \sim \tau_0/h_{\max}$. Это

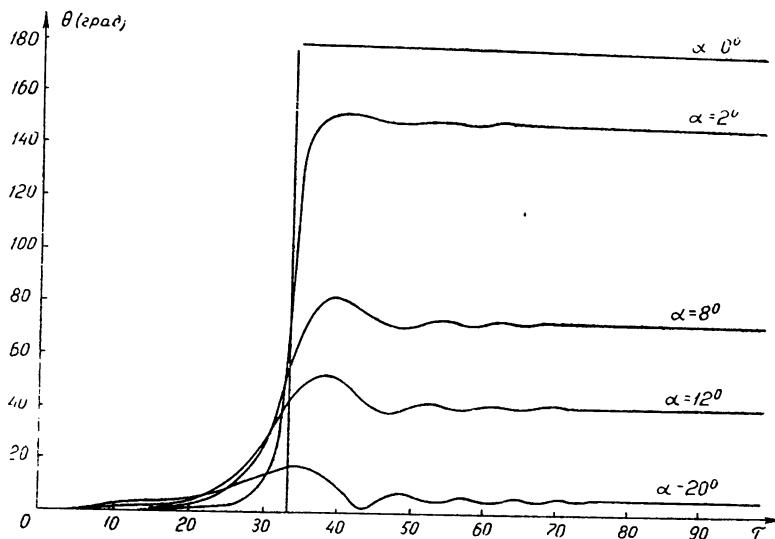


Рис. 2 Зависимость угла Θ от безразмерного времени $\tau = \omega_0 t$ для различных значений угла α ($\omega_0 = 10^{10}$ сек $^{-1}$, $\omega_{\max} = -3 \cdot 10^{10}$ сек $^{-1}$, $T = 10^{-8}$ сек)

* Аналогичная задача решалась в [6] аналитически. Однако, как будет видно из дальнейшего, там не были выполнены условия применимости соответствующих формул; поэтому результаты оказались сильно завышенными. В работе [6] в основном рассматривается перемагничивание ферромагнетиков под углом $180^\circ - \alpha$ в расчете на то, что в отличие от перемагничивания под углом 180° спиновые волны не будут возбуждаться. Однако, как следует из работ [7, 8] возбуждение спиновых волн в ферромагнетике будет и в этом случае.

связано с тем, что именно в это время результирующее магнитное поле проходит через минимум. Угловая скорость вращения $H_{\text{рез}}$ становится больше или же одного порядка с собственной частотой $\gamma H_{\text{рез}}$, т. е. процесс явно неадиабатичен. (Упомянутый выше случай перемагничивания может быть рассмотрен как частный случай переключения поля под углом $180^\circ - \sigma$ при стремлении α к нулю.) В самом деле, угловая скорость вращения результирующего поля равна [6]

$$\dot{\psi} = - \frac{T \sin \alpha / h_{\max}}{(t - T \cos \alpha / h_{\max})^2 + T^2 \sin^2 \alpha / h_{\max}^2}, \quad (5)$$

откуда ясно, что при

$$t = T \cos \alpha / h_{\max} \quad (\tau = \tau_0 \cos \alpha / h_{\max}) \quad (6)$$

величина $\dot{\psi}$ имеет максимум, равный

$$\dot{\psi}_{\max} = - h_{\max} / T \sin \alpha. \quad (7)$$

Собственная частота системы в этот момент равна

$$\omega_{\min} = - \gamma H_0 \sin \alpha. \quad (8)$$

Сравним (7) и (8) для случая, соответствующего рис. 2:
при

$$\alpha = 8^\circ \quad |\dot{\psi}_{\max}| = 2,15 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}; \quad \omega_{\max} = 1,4 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1};$$

при

$$\alpha = 2^\circ \quad |\dot{\psi}_{\max}| = 8,6 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}; \quad \omega_{\max} = 3,5 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}.$$

Из этой оценки видно, что с уменьшением угла α условие неадиабатичности усиливается и возбуждение системы увеличивается. Случай $\alpha = 0$ тривиален (возбуждение максимально; $\Theta = \pi$).

На рис. 3 приведены зависимости $\Theta(\tau)$ при одном и том же значении $\alpha = 4^\circ$, но при разных скоростях коммутации поля: значения

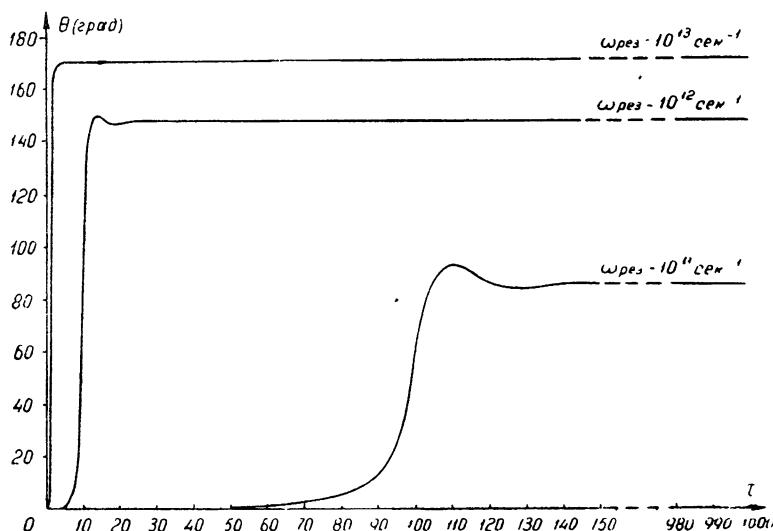


Рис. 3. Зависимость Θ от безразмерного времени τ для различных скоростей включения ($\alpha = 4^\circ$, $T = 10^{-7}$ сек, $\omega_0 = 10^{10}$ сек $^{-1}$); значения $\omega_{\max} = 10^{13}$, 10^{12} и 10^{11} сек $^{-1}$ достигаются за одно и то же время $T = 10^{-7}$ сек.

$\omega_{\max} = 10^{11}, 10^{12}, 10^{13}$ сек $^{-1}$ достигаются за одно и то же время $T = 10^{-7}$ сек. Из рисунка видно, что с ростом скорости включения поля устанавливающееся значение угла Θ увеличивается.

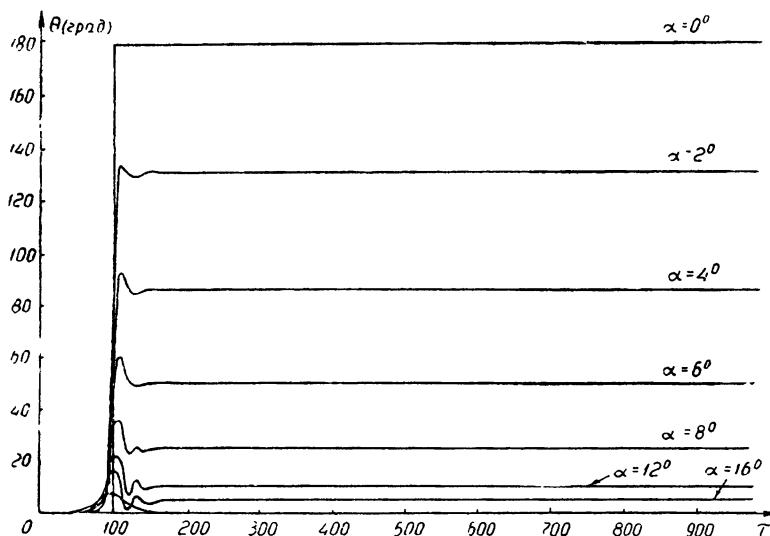


Рис. 4. Зависимость Θ от безразмерного времени τ для различных α ($\omega_0 = 10^{10}$ сек $^{-1}$, $\omega_{\max} = 10^{11}$ сек $^{-1}$, $T = 10^{-7}$ сек).

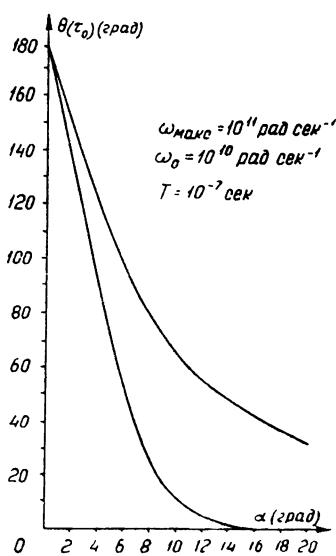


Рис. 5. Зависимость установившегося угла $\Theta(\tau_0)$ от α ($\omega_{\max} = 10^{11}$ сек $^{-1}$, $\omega_0 = 10^{10}$ сек $^{-1}$, $T = 10^{-7}$ сек). Верхняя кривая взята из [6].

Обратим теперь внимание на $\Theta(\tau)$ при $\alpha = 8^\circ$; здесь $\omega_{\max} = 3 \cdot 10^{10}$ сек $^{-1}$, $T = 10^{-8}$ сек (рис. 2), при $\alpha = 4^\circ$ $\omega_{\max} = 10^{11}$ сек $^{-1}$, $T = 10^{-7}$ сек (рис. 3). В этих случаях устанавливается угол Θ около 90° . Сказанное означает, что после возбуждения парамагнитная система окажется в „сверхизлучающем“ состоянии; интенсивность последующего спонтанного излучения будет максимальна в начале процесса излучения.

Выше указывалось, что такая же задача решалась в работе [6] приближенно. Для сравнения с точным решением нами был специально рассчитан один вариант из [6]: $\omega_0 = 10^{10}$ сек $^{-1}$, $\omega_{\max} = 10^{11}$ сек $^{-1}$, $T = 10^{-7}$ сек. Зависимости $\Theta(\tau)$ для разных углов α приведены на рис. 4. На рис. 5, воспроизводящем зависимость установившегося угла $\Theta(\tau_0)$ от α (верхняя кривая взята из [6]), видно, что кривые далеко не совпадают. Такое расхождение результатов, по-видимому, объясняется некорректным упрощением в [6] исходных уравнений. В самом деле, в уравнениях (5), (6)* из [6]

* В работе [6] для электрона была введена модель вращающегося заряда, на основании которой получены уравнения, (5), (6), носящие приближенный характер. Легко убедиться, что те же уравнения (5), (6) можно получить из (1) как точные, перейдя в подвижную систему координат.

$$\dot{\Phi}' + \psi \cos \Phi' \operatorname{ctg} \Theta' + \mu_0 \gamma H_r(t) = 0; \\ \dot{\Theta}' + \dot{\psi} \sin \Phi' = 0$$

автор пренебрегает членом $\dot{\psi} \cos \Phi' \operatorname{ctg} \Theta'$. Как легко убедиться, это можно сделать лишь в случае выполнения условия

$$v = T \sin \alpha / h_{\max} \ll \Delta = \sqrt{\pi T / \omega_{\max}} . \quad (9)$$

Для сравниваемого варианта $\omega_0 = 10^{10} \text{сек}^{-1}$, $\omega_{\max} = 10^{11} \text{сек}^{-1}$, $T = 10^{-7} \text{сек}$ имеем: $\Delta = \sqrt{\pi} \cdot 10^{-9} \text{сек}$, а v для различных α оказывается равным $3,5 \cdot 10^{-10} \text{сек}$ ($\alpha = 2^\circ$), $7 \cdot 10^{-10} \text{сек}$ ($\alpha = 4^\circ$), $1,4 \cdot 10^{-10} \text{сек}$ ($\alpha = 8^\circ$), $1,74 \cdot 10^{-9} \text{сек}$ ($\alpha = 10^\circ$). Из приведенной оценки видно, что результатами [6] можно пользоваться лишь при очень малых значениях α .

В заключение автор выражает благодарность Т. Н. Пиголкиной за решение уравнений (1а), (3а), (4а) на машине дискретного счета БЭСМ-2 в Вычислительном центре АН СССР и В. М. Файну за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Файн, ЖЭТФ, 34, 1032 (1958).
2. В. М. Файн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 5—6, 75 (1958).
3. В. М. Файн, УФН, 64, 273 (1958).
4. R. H. Dicke, Phys. Rev., 93, 99 (1954).
5. В. М. Рыжков, Г. В. Скроцкий, Ю. И. Алимов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 884 (1959).
6. F. R. Morgenthaler, Trans. IRE, MTG-7, 1, 6 (1959).
7. Л. Н. Булаевский, В. М. Файн, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 39, 516 (1960).
8. Л. Н. Булаевский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 июля 1960 г.

ФЛЮКТУАЦИИ КОЛЕБАНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА

И. Л. Берштейн

Рассматриваются флюктуации колебаний параметрического генератора, обусловленные флюктуациями напряжения накачки и тепловым эффектом.

В настоящей работе исследуются флюктуации амплитуды и фазы колебаний одноконтурного параметрического генератора. Возбуждение генератора обязано тому, что емкость контура несколько меняется в такт с напряжением накачки, частота которого вдвое больше частоты исследуемых колебаний.

Прежде всего заметим, что стационарная амплитуда такого параметрического генератора может определяться характером нелинейности конденсатора контура, мощностью генератора накачки (его „подсадкой“ при возбуждении колебаний исследуемого генератора), а также тем обстоятельством, что при достаточном размахе колебаний через конденсатор потечет дополнительный ток, дающий обычно детекторный эффект и вызывающий дополнительные потери в контуре, быстро растущие с амплитудой колебаний. Последнее имеет место при использовании широко распространенной ныне емкости $p - n$ -перехода.

Опыт показал, что если собрать контур, в который будет входить емкость $p - n$ -перехода, подать на этот конденсатор постоянное смещение $2 \pm 4 \text{ в}$ и не слишком большую амплитуду накачки (не более $1 \pm 2 \text{ в}$), то можно получить параметрическое возбуждение контура без появления заметного детекторного эффекта (т. е. без появления дополнительного тока через такой конденсатор). Поэтому нам представляется, что проведенное далее рассмотрение, учитывающее лишь нелинейность емкости конденсатора, правильно отражает закономерности явления при умеренных значениях напряжений накачки и генератора.

Причинами флюктуаций колебаний генератора при этих условиях являются флюктуации напряжения накачки и случайные ЭДС, вызванные тепловым эффектом в контуре.

Схема генератора изображена на рис. 1. Здесь L и r — индуктивность и сопротивление контура, дифференциальная емкость контура равна $C + C_1$ (где C — постоянная и C_1 — переменная части емкости), e — шумовая ЭДС. Примем, что на емкости имеется напряжение накачки $U \cos(2\omega t + \varphi)$, причем $U = U_0 + u$, $u \ll U_0$ (u и φ — флюктуации амплитуды и фазы напряжения накачки со средними значениями $u = \varphi = 0$). Напряжение на конденсаторе v и ток в контуре i связаны уравнениями

$$Ldi/dt + ri + v = e; \quad (1)$$

$$i = (C + C_1)dv/dt. \quad (2)$$

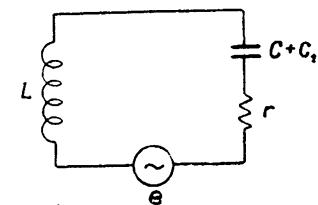


Рис. 1. Эквивалентная схема генератора.

Подставляя (2) в (1), имеем:

$$\begin{aligned} LC \frac{d^2v}{dt^2} + v = & -r(C + C_1) \frac{dv}{dt} - L \frac{d}{dt} \left(C_1 \frac{dv}{dt} \right) + e \cong -rC \frac{dv}{dt} - \\ & - L \frac{d}{dt} \left(C_1 \frac{dv}{dt} \right) + e. \end{aligned} \quad (3)$$

Вводя обозначения $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \approx \omega$ и $\delta = (\omega - \omega_0)/\omega \ll 1$, можем написать:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \omega^2 v = -\frac{r}{L} \frac{dv}{dt} - \frac{1}{C} \frac{d}{dt} \left(C_1 \frac{dv}{dt} \right) + 2\omega^2 \delta v + \omega^2 e. \quad (4)$$

Обозначив, наконец, $x = v$ и $y = \dot{x}/\omega$, получаем:

$$\dot{x} = \omega y; \quad (5)$$

$$\ddot{y} = -\omega x - \frac{r}{L} y - \frac{1}{C} \frac{d}{dt} (C_1 y) + 2\omega \delta x + \omega e = -\omega x + f(x, y, t),$$

где $f(x, y, t)$ характеризует отклонение системы от автономной и консервативной.

Будем искать решение (5) в виде:

$$\begin{aligned} x &= U \cos(2\omega t + \varphi) + R \cos(\omega t + \vartheta); \\ y &= -2U \sin(2\omega t + \varphi) - R \sin(\omega t + \vartheta). \end{aligned} \quad (6)$$

Для нахождения R и ϑ составляем укороченные уравнения Ван-дер-Поля:

$$\frac{dR}{dt} = \Phi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y, t) \sin(\omega t + \vartheta) d(\omega t); \quad (7)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \Psi = -\frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} f(x, y, t) \cos(\omega t + \vartheta) d(\omega t), \quad (8)$$

где под интегралами вместо x и y следует подставить их значения (6). Положим сначала $e = 0$. Тогда получим:

$$\Phi = -\frac{r}{2L} R - \frac{\omega}{C} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_1 y \cos(\omega t + \vartheta) d(\omega t); \quad (9)$$

$$\Psi = -\omega \delta + \frac{\omega}{CR} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_1 y \sin(\omega t + \vartheta) d(\omega t). \quad (10)$$

Для простоты вычисления зададимся зависимостью C_1 от приложенного напряжения в виде полинома*

$$C_1 = -\beta x + \gamma x^2. \quad (11)$$

При этом получим (предполагая, что U и φ практически постоянны на протяжении периода колебания):

* Такая аппроксимация с приводимыми ниже примерными значениями β и γ удовлетворительно описывает характеристику емкости $p-n$ -перехода при умеренном размахе колебаний

$$\frac{dR}{dt} = \Phi = -\frac{r}{2L} R + \frac{\omega\beta U}{4C} R \sin(2\vartheta - \varphi); \quad (12)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \Psi = -\omega\delta + \frac{\omega\beta U}{4C} \cos(2\vartheta - \varphi) - \frac{\omega\gamma}{4C} \left(U^2 + \frac{R^2}{2} \right). \quad (13)$$

Стационарные значения R_0 и ϑ_0 найдем, положив при $U = U_0$ и $\varphi = 0$

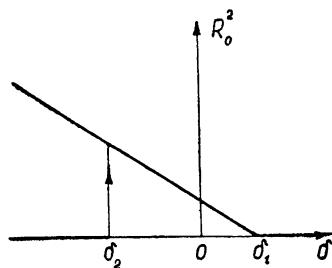
$$\frac{dR_0}{dt} = \Phi_0 = \left[-\frac{r}{2L} + \frac{\omega\beta U_0}{4C} \sin 2\vartheta_0 \right] R_0 = 0; \quad (14)$$

$$\frac{d\vartheta_0}{dt} = \Psi_0 = -\omega\delta + \frac{\omega\beta U_0}{4C} \cos 2\vartheta_0 - \frac{\omega\gamma}{4C} \left(U_0^2 + \frac{R_0^2}{2} \right) = 0. \quad (15)$$

Рис. 2.

$$\text{Здесь } \delta_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\beta U_0}{2C}\right)^2 - \frac{1}{Q^2} - \frac{\gamma U_0^2}{4C}};$$

$$\delta_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\beta U_0}{2C}\right)^2 - \frac{1}{Q^2} - \frac{\gamma U_0^2}{4C}}.$$



Решения этих уравнений, а также проверка их на устойчивость дают картину, изображенную на рис. 2. Здесь по оси абсцисс отложена относительная расстройка δ , а жирные линии показывают устойчивые значения R_0^2 . Как видно из рисунка, имеется „затягивание амплитуды“ и гистерезисная зависимость $R_0^2(\delta)$ *. Напомним, что наши исходные положения непригодны при больших значениях R_0 .

Для $R_0 \neq 0$ имеем из (14) и (15):

$$\begin{aligned} \gamma R_0^2 &= -8C \left(\delta + \frac{\gamma U_0^2}{4C} \right) + 4C \sqrt{\left(\frac{\beta U_0}{2C}\right)^2 - \frac{1}{Q^2}} = -8C \left(\delta + \frac{\gamma U_0^2}{4C} \right) + \\ &\quad + 2\beta U_0 \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $Q = \omega L/r$ — добродатность контура, а $\alpha = U_0 \beta Q / 2C = U_0 / U_{\text{пор}} > 1$ характеризует степень возбуждения генератора, так как $U_{\text{пор}}$ есть минимальное значение U_0 , начиная с которого возможно самовозбуждение генератора.

Для нахождения флюктуаций колебаний генератора положим $R = R_0 + z$, $\vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon$. Для флюктуаций амплитуды и фазы z и ε получим уравнения:

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_0 z + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right)_0 \varepsilon + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \right)_0 u + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)_0 \varphi; \quad (17)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial R} \right)_0 z + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \right)_0 \varepsilon + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial U} \right)_0 u + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right)_0 \varphi. \quad (18)$$

* Подобные эффекты были описаны в работах Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси

Индексы нуль показывают, что значения производных берутся при средних значениях параметров.

Значения R_0 и ϑ_0 устойчивы, если выполнены условия

$$\begin{aligned} p_1 &= -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_0 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}\right)_0 > 0; \\ p_2 &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}\right)_0 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right)_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right)_0 > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Из расчетов следует, что

$$p_1 = \omega/Q; \quad p_2 = \gamma R_0^2 \frac{\omega^2 \beta U_0}{8C^2} \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha}. \quad (20)$$

Подставив в (17) и (18) $u = u_m e^{j\omega t}$, $\varphi = \varphi_m e^{j\omega t}$ и положив $z = z_m e^{j\omega t}$, $\varepsilon = \varepsilon_m e^{j\omega t}$, найдем значения z_m и ε_m :

$$\begin{aligned} z_m &= \frac{1}{p_2 - \Omega^2 + j\Omega p_1} \left\{ \left[\frac{\omega^2 \beta R_0 U_0}{4C^2} \left(\frac{\beta}{2} - \gamma U_0 \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} \right) + j\Omega \frac{\omega}{2Q} \frac{R_0}{U_0} \right] u_m - \right. \\ &\quad \left. - j\Omega \frac{\omega \beta U_0 R_0}{4C} \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} \varphi_m \right\}; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= \frac{1}{p_2 - \Omega^2 + j\Omega p_1} \left\{ \left[- \frac{\omega^2 \gamma R_0^2}{8C Q U_0} + j\Omega \frac{\omega}{2C} \left(\frac{\beta}{2} \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} - \gamma U_0 \right) \right] u_m + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (p_2 + j\Omega p_1) \varphi_m \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Вводя спектральные плотности флюктуаций u и φ , u_{φ}^2 и φ_{φ}^2 , отсюда легко найти спектральные плотности искомых флюктуаций амплитуды и фазы колебаний генератора z_{φ}^2 и ε_{φ}^2 , обязанных флюктуациям напряжения накачки. Ввиду громоздкости этих выражений они в общем виде не приводятся, а порядок величин будет виден из приводимого ниже ориентировочного расчета. Отметим, что, как видно из (21), в случае справедливости равенства $\beta/2 = \gamma U_0 \sqrt{\alpha^2 - 1}/\alpha$ существенно уменьшаются флюктуации амплитуды (для небольших значений Ω).

Проведем теперь расчет флюктуаций, обязанных шумовой ЭДС в контуре. Заметный вклад даст, очевидно, лишь та часть спектра этой ЭДС, которая расположена вблизи частоты ω . Положим сначала

$$e = E \cos(\omega + \Omega)t, \quad \Omega \ll \omega, \quad E \ll R_0. \quad (23)$$

Наличие такого выражения в исходных уравнениях (5) даст при вычислении величины Φ добавочный член $(\omega E/2) \sin(\Omega t - \vartheta)$, а при вычислении величины Ψ — добавочный член $-(\omega E/2R) \cos(\Omega t - \vartheta)$. Эти добавки перейдут в правые части уравнений (17) и (18); отсюда можно вычислить соответствующие значения z и ε .

Заменив $E \sin(\Omega t - \vartheta)$ на $E e^{j\omega t}$ и положив, по-прежнему, $z = z_m e^{j\omega t}$, $\varepsilon = \varepsilon_m e^{j\omega t}$, найдем:

$$z_m = \frac{1}{p_2 - \Omega^2 + j\Omega p_1} [p_1 + j(\Omega - p_1 \sqrt{\alpha^2 - 1})] \frac{\omega}{2} F; \quad (24)$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{p_2 - \Omega^2 + j\Omega p_1} \left[\Omega - \frac{\omega\gamma R_0^2}{4C} \right] \frac{\omega}{2} \frac{\bar{E}}{R_0}. \quad (25)$$

Спектральная плотность величины E равна

$$\bar{E}_\Omega^2 = 2 \cdot 4r k T / 2\pi, \quad (26)$$

где k — постоянная Больцмана, T — температура.

При подсчете \bar{z}_Ω^2 , и $\bar{\varepsilon}_\Omega^2$ следует учесть в составе e не только колебания с частотами $\omega + \Omega$, но и колебания с частотами $\omega - \Omega$. Эти колебания не коррелированы, и мы получаем окончательно:

$$\bar{z}_\Omega^2 = \frac{1}{(p_2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2 p_1^2} [p_1^2 + (p_1 \sqrt{\alpha^2 - 1} - \Omega)^2] \frac{\omega^2 r k T}{\pi}; \quad (27)$$

$$\bar{\varepsilon}_\Omega^2 = \frac{1}{(p_2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2 p_1^2} \left[\frac{\omega\gamma R_0^2}{4C} - \Omega \right]^2 \frac{\omega^2 r k T}{\pi R_0^2}. \quad (28)$$

Отметим, что уровень флюктуаций амплитуды возрастает с уменьшением R_0 (напомним, что $p_2 \sim R_0^2$): при малых значениях Ω величина \bar{z}_Ω^2 , обусловленная флюктуациями напряжения накачки, пропорциональна $1/R_0^2$, а величина $\bar{\varepsilon}_\Omega^2$, обусловленная тепловым эффектом, пропорциональна $1/R_0^4$.

Для оценки порядка величин зададимся значениями $\omega = 2 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}$, $Q = 25$, $U_0 = 1,5 \text{ в}$, $\beta = 0,1 \text{ нф} \cdot \text{в}^{-1}$, $\gamma = 0,1 \text{ нф} \cdot \text{в}^{-2}$ и $\alpha = 1,1$. Кроме

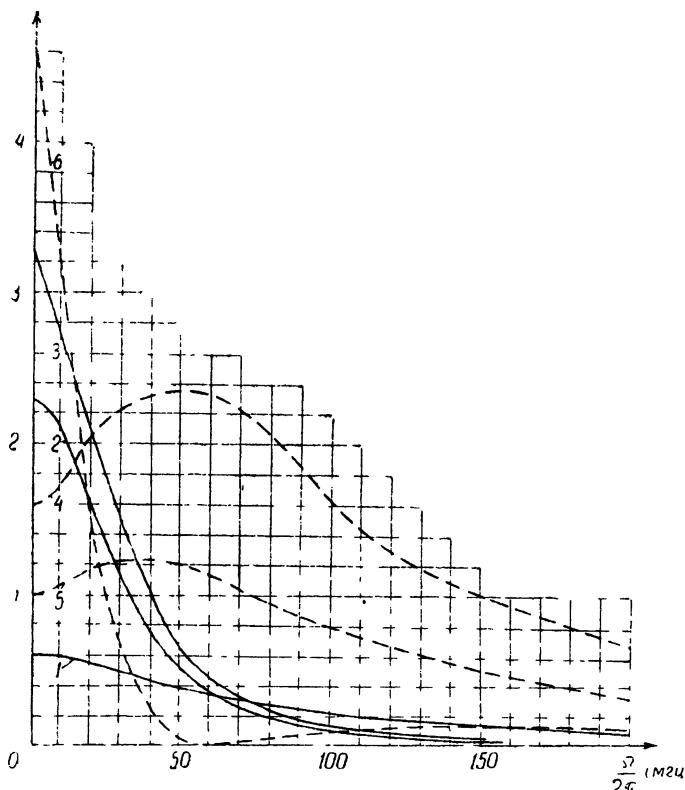


Рис. 3. Спектр флюктуаций амплитуды и фазы.

того, положим $\delta = -\gamma U_0^2/4C^*$ и $T=300^\circ\text{K}$. Тогда $R_0 \approx 1,1 \text{ } \mu\Omega$, $C \approx 1,7 \text{ } n\Phi$, $r \approx 1,2 \text{ } \text{ом}$, $p_1 \approx 8 \cdot 10^8$, $p_2 \approx 1,2 \cdot 10^{17}$.

Для этого случая на рис. 3 изображен рассчитанный спектр флюктуаций амплитуды и фазы колебаний генератора в полосе частот $\Omega/2\pi$ от 0 до 200 мгц . Кривая 1 показывает значения $(\bar{z}_\Omega^2/R_0^2)(\bar{u}_\Omega^2/U_0^2)^{-1}$, обусловленные лишь флюктуациями амплитуды накачки, кривая 2 — значения $10^{-2}(\bar{z}_\Omega^2/R_0^2)/\Omega^2 \bar{\varphi}_\Omega^2$, обусловленные лишь флюктуациями фазы накачки**, кривая 3 — значения $(\bar{z}_\Omega^2/R_0^2)10^{17}$, обусловленные лишь тепловым эффектом. Аналогично кривые 4, 5 и 6 соответствуют значениям $\bar{\varepsilon}_\Omega^2/(\bar{u}_\Omega^2/U_0^2)$, $\bar{\varepsilon}_\Omega^2/(\bar{\varphi}_\Omega^2/4)$ и $\bar{\varepsilon}_\Omega^2 \cdot 10^{18}$, обусловленным теми же тремя источниками флюктуаций.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 сентября 1950 г.

* При недовозбужденном генераторе это есть условие настройки контура на частоту ω .

** Напомним, что $\Omega^2 \bar{\varphi}_\Omega^2$ — спектральная плотность флюктуаций частоты накачки.

ФЛЮКТУАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕДАЧИ СМЕСИТЕЛЯ НА КРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ДИОДЕ

A. H. Малахов

Рассмотрены флюктуации коэффициента передачи кристаллического смесителя с кристаллическим гетеродином. Эти флюктуации порождаются фликкер-шумом кристалла и флюктуациями амплитуды колебания кристалла. Показано, что на частоте f спектральная плотность относительных флюктуаций коэффициента передачи $\delta K_f^2 \approx (10^{-7} \div 10^{-10})f$.

Коэффициент передачи какого-либо смесителя зависит, как известно, в общем случае от параметров нелинейного элемента и амплитуды напряжения гетеродина. Поскольку, с одной стороны, любой генератор обладает флюктуациями амплитуды, а, с другой стороны, параметры нелинейного элемента также могут флюктуировать (в случае кристаллического диода эти флюктуации параметров порождаются фликкер-шумом диода), то естественно, что и коэффициент передачи смесителя также будет обладать флюктуациями.

Помимо теоретического интереса флюктуации коэффициента передачи смесителя имеют и практический интерес, ибо они могут ограничивать чувствительность некоторых радиотехнических систем. Пусть, например, на вход супергетеродинного приемника, коэффициент передачи смесителя которого флюктуирует, поступает сигнал в виде двух близких монохроматических линий, одна из которых несет полезную информацию и имеет амплитуду, много меньшую амплитуды соседней паразитной линии, не несущей полезной информации. Тогда, как можно показать, на выходе смесителя существует дополнительный шум, порождаемый флюктуациями коэффициента передачи смесителя и зависящий от мощности паразитной линии, на фоне которого полезный сигнал может оказаться незаметным.

Рассмотрим смеситель, имеющий эквивалентную схему, изображенную на рис. 1. На вход смесителя подаются напряжения гетеродина $u_r = V_r \cos(\omega_r t)$ и сигнала $u_c = V_c \cos(\omega_c t)$, причем $V_c \ll V_r$. На выходе смесителя будем рассматривать лишь постоянное напряжение $V_0 = i_0 r$ (где i_0 — постоянная составляющая тока через кристалл, r — сопротивление нагрузки постоянному току) и напряжения промежуточной частоты $u_n = V_n \cos(\omega_0 t)$ ($\omega_0 = |\omega_r - \omega_c|$), существующее на активной нагрузке R . Емкость C шунтирует нагрузки для частот ω_c и ω_r .

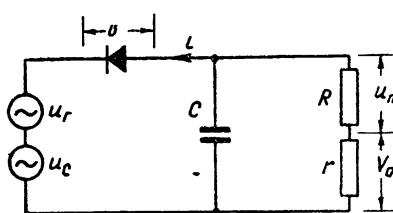


Рис. 1.

Характеристику кристаллического диода представим в обычном виде:

$$i = B(e^{\alpha v} - 1),$$

где α и B — параметры диода. В этом случае, как известно (см., например, [1]), модуль коэффициента передачи смесителя равен

$$K = V_n/V_c = \frac{\sigma(i_0 + B)R}{1 + \sigma(i_0 + B)R} \mu(x), \quad (1)$$

где $\mu(x) = I_1(x)/I_0(x)$ ($I_0(x)$, $I_1(x)$ —модифицированные функции Бесселя, $x = \sigma V_r$), i_0 определяется уравнением

$$i_0 = B [I_0(x) e^{-\sigma i_0} - 1]. \quad (2)$$

Поскольку для большинства практических случаев $i_0 \gg B$, то вместо (1) и (2) будем иметь:

$$K = -\frac{\sigma i_0 R}{1 + \sigma i_0 R} \mu(x), \quad i_0 = BI_0(x) e^{-\sigma i_0}. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь флюктуации K . В общем случае

$$dK = \frac{\partial K}{\partial i_0} di_0 + \left(\frac{\partial K}{\partial i_0} \frac{\partial i_0}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) dx.$$

Здесь di_0 —флюктуации тока кристалла, порождаемые фликкер-шумом кристалла, $dx = \sigma dV_r$, dV_r флюктуации амплитуды гетеродина. Вводя относительные флюктуации $\delta K = dK/K$, $\delta i_0 = di_0/i_0$, $\delta x = dx/x$ и учитывая, что $\delta i_0 = \delta V_r$, на основании (3) и (4) можно получить:

$$\delta K = A \delta V_r + D \delta x, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} A &= (1 + \sigma i_0 R)^{-1}; \\ D &= M(x) + N(x)/(1 + \sigma i_0 R)(1 + \sigma i_0 R); \\ N(x) &= x \frac{dI_0(x)}{I_0(x)dx}; \quad M(x) = x \frac{d\mu(x)}{\mu(x)dx}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из-за статистической независимости δV_r , порождаемых фликкер-шумом, и δx , порожденных флюктуациями амплитуды гетеродина, из (4) легко получить следующее соотношение для спектральных плотностей:

$$\overline{\delta K_f^2} = A^2 \overline{\delta V_{rf}^2} + D^2 \overline{\delta x_f^2}. \quad (6)$$

Это уравнение (6) и определяет спектральную плотность относительных флюктуаций коэффициента передачи кристаллического смесителя.

Исследования фликкер-шума полупроводниковых высокочастотных диодов при возбуждении последних полем высокой частоты показали*, что

$$\overline{\delta V_{rf}^2} = E / i_0^2 f^\gamma. \quad (7)$$

Здесь β и γ зависят от конкретного диода и принимают значения, близкие к единице: $E = 10^{-10} - 10^{-13} a^2 \text{ гц}^\gamma$ и зависит от типа и экземпляра кристаллического диода.

Взяв средние значения $\beta = \gamma = 1$ и постоянную составляющую тока через кристалл, равную $i_0 = 1 \text{ мА}$, получим:

$$\overline{\delta V_{rf}^2} = (10^{-7} \div 10^{-10}) f^{-1}. \quad (8)$$

Если в качестве гетеродина использовать клистроны, то на основании немногочисленных экспериментальных данных [2,3] можно предполагать, что в диапазоне $f = 1 \text{ гц} \div 100 \text{ кгц}$

$$\overline{\delta x_f^2} = (10^{-9} \div 10^{-10}) f^{-1}. \quad (9)$$

* Эти исследования проводились под руководством автора студентом-дипломником О. П. Павловским в 1959 г. в Горьковском государственном университете.

Для определения величин A , D необходимо задать значения R , r , i_0 и параметры детектора α , B и из (3) определить x . Выбирая значения $\alpha = 15 \text{ в}^{-1}$, $B = 3 \cdot 10^6 \text{ а}$, $r = 0$, $R = 150 \text{ ом}$, $i_0 = 1 \text{ ма}$, не-трудно получить, что $x = 7,7$ и, на основании (5), $N(x) = 7,2$, $M(x) = 0,1$, $A^2 = 0,1$, $D^2 = 5,4$. Отсюда следует, что

$$\overline{\delta K_f^2} = (10^{-8} \div 10^{-11}) f^{-1} + (0,5 \cdot 10^{-8} \div 0,5 \cdot 10^{-9}) f^{-1}.$$

Если $150 \text{ ом} \geq R > r \geq 0$ и $0,5 \text{ ма} \leq i_0 \leq 1 \text{ ма}$, то можно показать, что $A^2 = 0,1 \div 1,0$; $D^2 = 10 \div 1$. Тем самым, взяв несколько завышенные данные, можно считать, что для реальных кристаллических смесителей спектральная плотность их относительных флюктуаций усиления может быть оценена соотношением

$$\overline{\delta K_f^2} = (10^{-7} \div 10^{-10}) f^{-1} \quad (10)$$

на частотах $f = 1 \text{ гц} \div 100 \text{ кгц}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Гуткин, Преобразование сверхвысоких частот и детектирование, Госэнергоиздат, М., 1953.
2. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 915 (1959).
3. В. Н. Никонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 915 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 марта 1960 г.

Примечание при корректуре Как нам любезно сообщил С. А. Ахманов, проведенные им измерения низкочастотных амплитудных флюктуаций некоторых кристаллов показали, что эти флюктуации в общем случае зависят от режима генерации. Так, например, при движении от краев зоны генерации к центру спектральная плотность относительных флюктуаций амплитуды колебания кристаллона $\overline{\delta x_f^2}$ уменьшается в несколько раз, принимая в центре зоны следующие типичные значения:

$f \text{ гц}$	10^3	$2 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^4$	10^5
$\overline{\delta x_f^2}$	$5 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-13}$	$1 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-14}$	$5 \cdot 10^{-15}$

Негрудно видеть, что эти экспериментальные данные, полученные С. А. Ахмановым, довольно точно описываются формулой (9) текста статьи.

ПРОХОЖДЕНИЕ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОГО СИГНАЛА ЧЕРЕЗ НЕСТАБИЛЬНЫЙ СМЕСИТЕЛЬ

A. H. Малахов

Рассмотрено прохождение колебаний, имеющих определенную ширину спектральной линии, через смеситель, гетеродин которого также не монохроматичен и коэффициент передачи которого испытывает флюктуации. Показано, что форма спектральной линии колебания на выходе смесителя существенно отличается от таковой на входе, и это искажение обусловлено, во-первых, немонохроматичностью напряжения гетеродина и, во-вторых, флюктуациями коэффициента передачи смесителя.

1. Рассмотрим квазимонохроматическое колебание, имеющее определенную форму спектральной линии. Пусть это колебание подается на смеситель. Напряжение гетеродина смесителя является также немонохроматичным, поскольку, как известно, выходное напряжение любого реального генератора всегда обладает флюктуациями амплитуды и частоты. Кроме того, будем считать, что коэффициент передачи реального смесителя не постоянен во времени, а испытывает флюктуации, порожденные теми или иными причинами (например, у кристаллических смесителей их порождает фликкер-шум кристаллов [1]).

В связи с этим возникает задача определения формы спектральной линии колебания на выходе подобного смесителя, которая, как очевидно, в общем случае не должна совпадать с формой линии входного колебания. Решение этой задачи и составляет содержание настоящей статьи.

2. Рассмотрим сначала идеальный смеситель с постоянным во времени коэффициентом передачи K_0 . Интересуясь на выходе смесителя диапазоном разностных частот, можно без потери общности взять следующее уравнение смесителя:

$$z_1(t) = K_0 x(t) y(t), \quad (1)$$

где $z_1(t)$ — выходное напряжение, $x(t)$ — случайное напряжение сигнала, $y(t)$ — случайное напряжение гетеродина.

Пусть для простоты спектры функций $x(t)$ и $y(t)$ соответственно симметричны относительно частот ω_1 и ω_2 ; ширина их много меньше ω_1 , ω_2 и $\omega_0 = |\omega_2 - \omega_1|$. В этом случае, как известно (см., например, [2]), функции корреляции процессов $x(t)$ и $y(t)$ могут быть представлены в виде

$$\Phi_x(\tau) = A^0(\tau) \cos(\omega_1 \tau); \quad \Phi_y(\tau) = B^0(\tau) \cos(\omega_2 \tau), \quad (2)$$

где $A^0(\tau)$ и $B^0(\tau)$ — четные функции, медленные по сравнению с $\cos(\omega_1 \tau)$, $\cos(\omega_2 \tau)$ и $\cos(\omega_0 \tau)$.

Функция корреляции выхода смесителя на основании (1) и (2) равна (x и y статистически независимы)

$$\begin{aligned} \Phi_{z_1}(\tau) &= K_0^2 \Phi_x(\tau) \Phi_y(\tau) = 2^{-1} K_0^2 A^0(\tau) B^0(\tau) \times \\ &\times \{\cos[\omega_0 \tau] + \cos[(\omega_2 + \omega_1) \tau]\}. \end{aligned}$$

Ограничиваюсь только разностной частотой (и заменяя $z_1(t)$ на $z(t)$), имеем:

$$\Phi_z(\tau) = C^0(\tau) \cos(\omega_0 \tau); \quad (3)$$

$$C^0(\tau) = 2^{-1} K_0^2 A^0(\tau) B^0(\tau). \quad (4)$$

Рассмотрим спектральные плотности процессов $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$

$$W_x(\Omega), W_y(\Omega), W_z(\Omega)$$

с аргументом Ω , отсчитываемым соответственно от частот ω_1 , ω_2 , ω_0 . Как известно [2], эти спектральные плотности являются фурье-сопряженными функций $A^0(\tau)$, $B^0(\tau)$, $C^0(\tau)$, например,

$$W_x(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A^0(\tau) \cos(\Omega \tau) d\tau. \quad (5)$$

Вследствие этого соотношение (4) в терминах спектральных плотностей примет вид свертки:

$$W_z(\Omega) = \frac{1}{2} K_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(\xi) W_y(\xi - \Omega) d\xi. \quad (6)$$

Эта формула и решает в общем виде вопрос о форме спектра колебаний на выходе идеального смесителя. Из нее следует, в частности, известный вывод: форма спектра $z(t)$ не совпадает в общем случае ни с формой спектра $x(t)$, ни с формой спектра $y(t)$; другими словами, при прохождении через смеситель форма спектра сигнала искажается.

Рассмотрим два предельных случая. Пусть ширина спектра сигнала $\bar{\Pi}_x$ много меньше ширины спектра гетеродина $\bar{\Pi}_y$, т. е. $W_x(\Omega)$ отлична от нуля только в интервале $[-\bar{\Pi}_x, +\bar{\Pi}_x]$ и на этом интервале $W_y(\Omega)$ постоянно. Тогда

$$\begin{aligned} W_z(\Omega) &= \frac{K_0^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(\xi) W_y(\xi - \Omega) d\xi = \frac{K_0^2}{2} \int_{[-\bar{\Pi}_x, +\bar{\Pi}_x]} W_x(\xi) W_y(-\Omega) d\xi = \\ &= \frac{K_0^2}{2} W_y(\Omega) \int_{[-\bar{\Pi}_x, +\bar{\Pi}_x]} W_x(\xi) d\xi = \bar{x}^2 W_y(\Omega) \frac{K_0^2}{2}. \end{aligned}$$

Поскольку свертка (6) симметрична относительно x и y , то аналогично, если $\bar{\Pi}_y \ll \bar{\Pi}_x$ (что, как правило, имеет место),

$$W_z(\Omega) = \frac{K_0^2 \bar{y}^2}{2} W_x(\Omega), \quad (7)$$

т. е. в этом случае форма спектра сигнала, как и следовало ожидать, при прохождении через смеситель не изменяется.

3. Пусть теперь $x(t)$ и $y(t)$ представляют собой статистически независимые колебания, амплитуды и частоты которых флюктуируют около своих средних значений A_0 , B_0 , ω_1 , ω_2 :

$$x(t) = A_0[1 + \sigma(t)] \cos[\omega_1 t + \int_0^t v_1(\xi) d\xi]; \quad (8)$$

$$y(t) = B_0[1 + \beta(t)] \cos[\omega_2 t + \int_0^t v_2(\xi) d\xi].$$

Здесь $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$ — флюктуации амплитуд и частот, являющиеся стационарными процессами и подчиняющиеся условиям малости $\bar{x}^2 \ll 1$, $\bar{\beta}^2 \ll 1$, $\bar{\nu}_1^2 \ll \omega_1^2$, $\bar{\nu}_2^2 \ll \omega_2^2$ (чертат сверху — статистическое усреднение). Кроме того, будем полагать, что $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$ нормально распределены и статистически независимы от $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. В этом случае легко получить (см., например, [34]), что

$$\begin{aligned} A^0(\tau) &= \frac{A_0^2}{2} \left[1 + \Phi_\alpha(\tau) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \chi_1(\tau) \right\}; \\ B^0(\tau) &= \frac{B_0^2}{2} \left[1 + \Phi_\beta(\tau) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \chi_2(\tau) \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_1(\tau) &= 2 \int_0^\tau (\tau - \xi) \Phi_{\nu_1}(\xi) d\xi; \\ \chi_2(\tau) &= 2 \int_0^\tau (\tau - \xi) \Phi_{\nu_2}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

Совершенно аналогично можно записать, что

$$\begin{aligned} C^0(\tau) &= \frac{C_0^2}{2} \left[1 + \Phi_\gamma(\tau) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \gamma(\tau) \right\}; \\ \gamma(\tau) &= 2 \int_0^\tau (\tau - \xi) \Phi_\nu(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (11)$$

где мы полагаем, что $\gamma(t)$ и $\nu(t)$ определяются соотношением

$$z(t) = C_0 \left[1 + \gamma(t) \right] \cos \left[\omega_0 t + \int_0^t \nu(\xi) d\xi \right].$$

Сравнение (4), (9), (10) с (11) показывает, что

$$\begin{aligned} C_0^2 &= K_0^2 A_0^2 B_0^2 / 4; \quad \Phi_\gamma(\tau) = \Phi_\alpha(\tau) + \Phi_\beta(\tau); \\ \gamma(\tau) &= \chi_1(\tau) + \chi_2(\tau); \quad \Phi_\nu(\tau) = \Phi_{\nu_1}(\tau) + \Phi_{\nu_2}(\tau). \end{aligned} \quad (12)$$

Если теперь $\Phi_\alpha(\tau)$ и $\Phi_\beta(\tau)$, а также $\Phi_{\nu_1}(\tau)$ и $\Phi_{\nu_2}(\tau)$ имеют одинаковые структуры, то они сохраняются и для $\Phi_\gamma(\tau)$ и $\Phi_\nu(\tau)$. Отсюда следует, что и $C^0(\tau)$ подобна по структуре $A^0(\tau)$ и $B^0(\tau)$, а, следовательно, и спектральная линия $z(t)$ по форме подобна спектральной линии $x(t)$ (и $y(t)$).

Однаковость структур $\Phi_\alpha(\tau)$ и $\Phi_\beta(\tau)$, $\Phi_{\nu_1}(\tau)$ и $\Phi_{\nu_2}(\tau)$ для различных генераторов может иметь место, например, для генераторов, выполненных по близким схемам. Из (12) следует, кроме того, что $\bar{\gamma}^2 = \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2$ и $\bar{\nu}^2 = \bar{\nu}_1^2 + \bar{\nu}_2^2$, т. е. что ширина спектральной линии сигнала на выходе смесителя всегда шире, чем на входе.

Таким образом, в рассмотренном случае (8) искажающее действие смесителя оказывается лишь в уширении спектральной линии сигнала.

4. Рассмотрим теперь случай флюктуаций коэффициента передачи смесителя

$$K = K_0 [1 + z(t)],$$

где $\bar{z}^2 \ll 1$, $\bar{z} = 0$. Предположим также, что $z(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс, независимый от $x(t)$ и $y(t)$. Тогда вместо (1) будем иметь:

$$u_1(t) = K_0[1 + z(t)]x(t)y(t) = [1 + z(t)]z_1(t).$$

Функция корреляции выхода смесителя $u_1(t)$ равна

$$\Phi_{u_1}(\tau) = [1 + \Phi_z(\tau)]\Phi_{z_1}(\tau).$$

Рассматривая опять-таки только диапазон разностной частоты, получим (учитывая (3)):

$$\Phi_u(\tau) = D^0(\tau) \cos(\omega_0 \tau),$$

где

$$D^0(\tau) = C^0(\tau) + \Phi_z(\tau)C^0(\tau). \quad (13)$$

Совершая фурье-преобразование (13), получим следующее соотношение для спектральных плотностей:

$$W_u(\Omega) = W_z(\Omega) + \int_{-\infty}^{+\infty} W_z(\xi)W_z(\xi - \Omega)d\xi, \quad (14)$$

где

$$W_u(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D^0(\tau) \cos(\Omega\tau)d\tau;$$

$$W_z(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_z(\tau) \cos(\Omega\tau)d\tau.$$

Отсюда видно, что спектр на выходе реального смесителя состоит из спектра $W_z(\Omega)$ (выход идеального смесителя) и свертки спектров $W_z(\Omega)$ и $\Phi_z(\Omega)$. Структуру спектра $W_z(\Omega)$ мы уже обсудили в предыдущем разделе; здесь будем считать ее заданной и рассмотрим вопрос о том, насколько спектр $W_u(\Omega)$ отличается от спектра $W_z(\Omega)$.

Рассмотрим для этого подробнее (14). Предположим сначала, что флюктуации коэффициента передачи смесителя $z(t)$ имеют весьма узкий спектр, ширина которого Π_z много меньше ширины спектра $z(t)$ Π_z . Это может иметь место в случае очень медленных флюктуаций коэффициента передачи смесителя. На основании раздела 2 будем иметь тогда:

$$W_u(\Omega) = W_z(\Omega) + \bar{z}^2 W_z(\Omega) = W_z(\Omega).$$

Таким образом, в этом случае флюктуации коэффициента передачи смесителя не вносят дополнительных искажений в форму спектра на выходе смесителя ни на каких частотах Ω .

В действительности, однако, чаще всего имеет место обратная ситуация. Ширина спектральной линии генераторов сравнительно невелика даже на СВЧ. Если принять относительную ширину линии генератора равной 10^{-8} , то для $f_0 = 10^{10}$ Гц ширина спектра составит всего 100 Гц. Кроме того, поскольку реальное уширение спектральной линии генераторов определяется так называемым техническим уширением, порожденным медленными процессами, то, как показано в [1], $W_x(\Omega)$, $W_y(\Omega)$, а следовательно, и $W_z(\Omega)$ имеют гауссову форму и, тем самым, очень быстро спадают при возрастании Ω .

С другой стороны, флюктуации $w(t)$ имеют спектр фликкер-шума [1], т. е. спектр, достаточно медленно спадающий с частотой (как Ω^{-1}) и простирающийся вплоть до нескольких MHz . Поэтому мы имеем все основания считать, что в реальных условиях спектр $W_z(\Omega)$ много шире спектра $W_x(\Omega)$, и, следовательно,

$$W_u(\Omega) = W_z(\Omega) + \bar{z}^2 W_x(\Omega), \quad (15)$$

где $\bar{z}^2 = K_0^2 A_0^2 B_0^2 / 8$.

Обсудим полученный результат. Поскольку спектр $W_x(\Omega)$ много шире спектра $W_z(\Omega)$ и $\bar{z}^2 \ll 1$, то из (15) следует, что для достаточно малых частот $\Omega \ll \Omega_0$, где Ω_0 — некоторая критическая частота, $W_z(\Omega) \gg \bar{z}^2 W_x(\Omega)$ и

$$W_u(\Omega) \approx W_z(\Omega).$$

С другой стороны, для достаточно больших частот $\Omega \gg \Omega_0$, $W_z(\Omega) \ll \bar{z}^2 W_x(\Omega)$ и

$$W_u(\Omega) \approx \bar{z}^2 W_x(\Omega).$$

Нетрудно видеть, что критическая частота Ω_0 может быть определена соотношением

$$W_z(\Omega_0) = \bar{z}^2 W_x(\Omega_0). \quad (16)$$

Существование Ω_0 говорит о том, что флюктуации коэффициента передачи смесителя не вносят существенных искажений в спектр сигнала для $\Omega \ll \Omega_0$, существенно искажают спектр сигнала для $\Omega \approx \Omega_0$ и полностью определяют спектр на выходе смесителя для $\Omega \gg \Omega_0$.

5. Оценим критическую частоту Ω_0 . Предполагая спектр $W_z(\Omega)$ гауссовым:

$$W_z(\Omega) = \frac{\bar{z}^2}{\sqrt{2\pi\Gamma_z^2}} e^{-\frac{\Omega^2}{2\Gamma_z^2}}, \quad (17)$$

для $W_x(\Omega)$ имеем [1]:

$$W_x(\Omega) = N/\Omega.$$

Введем безразмерную величину $p = \Omega / \sqrt{2\Gamma_z^2}$. Тогда (16) запишется так:

$$e^{-p^2} = \sqrt{\pi} N/p. \quad (18)$$

Это уравнение при достаточно малой величине N имеет два корня. Большой корень p_0 и определяет $\Omega_0 = \sqrt{2} \Gamma_z p_0$.

Уравнение (18) имеет следующие примерные значения p_0 для ряда значений N :

N	10^{-7}	10^{-9}	10^{-11}
p_0	4,1	4,7	5,0

Поскольку значения N для реальных кристаллических детекторов заключены между 10^{-7} и 10^{-11} (см. [1]), то мы можем принять среднее значение $p_0 \approx 4,5$. Это значит, что

$$2\pi F_0 = \Omega_0 = 4,5\sqrt{2} \Pi_z \approx 6,4 \Pi_z. \quad (19)$$

Тем самым, например, для $\Pi_z/2\pi = 100$ гц $F_0 = 640$ гц.

Однако следует сказать, что в действительности условие (17) выполняется лишь приближенно, для достаточно малых Ω , в то время как для больших Ω , по-видимому, $W_z(\Omega) \sim \Omega^{-1}$. Это означает, что оценка (19) также приближена. Более подробно вопрос о поведении $W_z(\Omega)$ при больших Ω для реальных генераторов будет рассмотрен в другом месте.

6. Наконец, отметим в заключение, что спектральная плотность $W_u(\Omega)$, заданная формулой (15), может также трактоваться как спектральная плотность дополнительного шума, существующего на выходе смесителя и происходящего как от немонохроматичности сигнала и гетеродина, так и от существования флюктуаций коэффициента передачи смесителя. Этот шум может ограничивать, например, чувствительность системы, состоящей из смесителя и фильтра, на некоторую частоту $\tilde{\Omega}$, если за полезный сигнал, несущий информацию, принять дополнительный (помимо $x(t)$) небольшой поступающий на смеситель сигнал, имеющий частоту $\omega_1 \pm \tilde{\Omega}$. Тогда, как это следует из (15), для $\tilde{\Omega} \ll \Omega_0$ эта чувствительность будет определяться немонохроматичностью $x(t)$, для $\tilde{\Omega} \gg \Omega_0$ — флюктуациями коэффициента передачи смесителя, а для $\tilde{\Omega} \approx \Omega$ и тем и другим.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 1001 (1960).
2. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1957.
3. D. Middleton, Phil. Mag., 42, 689 (1951).
4. А. Н. Малахов, ЖЭТФ, 30, 884 (1956).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 марта 1960 г.

ИНЕРЦИОННОЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Д. В. Васильев

Решена задача о моментах одномерного распределения вероятностей для напряжения на RC -нагрузке линейного детектора непрерывных прямоугольных импульсов в стационарном случае. Зависимости первых четырех моментов от параметров детектора и импульсной последовательности даны в конечной форме для наиболее распространенных видов распределения пауз между импульсами постоянной длительности.

Из найденных формул, в частности, вытекают строгие выражения для постоянной и переменной слагающих на выходе детектора регулярных прямоугольных импульсов.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о воздействии прямоугольных импульсов со случайными длительностями и паузами на инерционный детектор ставилась многими авторами [1,2,3]. Однако до настоящего времени не найдено строгое ее решение даже в отношении параметров одномерного распределения вероятностей для напряжения на выходе детектора, хотя именно эти параметры представляют интерес в первую очередь при проектировании и расчете точности счетчиков излучений, накопительных схем и различных измерительных радиотехнических устройств. Впервые строгий путь расчета одномерного распределения был намечен в работе Тихонова [2], где вместе с тем указаны основные недостатки ранее опубликованных по этому вопросу работ ([1] и др.).

Работа [3], вышедшая в 1959 г., имела целью решить вопрос о первом моменте и дисперсии одномерного распределения для одного частного случая. Однако автор в ходе решения прибегает к столь далеко идущим допущениям, что в полученных им выражениях по существу отсутствует связь между параметрами входного и выходного распределений.

В данной работе сделана попытка решить в общем виде задачу об одномерном распределении напряжения на выходе детектора путем отыскания нескольких первых моментов указанного распределения для стационарного режима при условии независимости отдельных значений длительностей входных импульсов и пауз между ними.

Остановимся кратко на исходных положениях. На линейный детектор с произвольной RC -нагрузкой действует бесконечная последовательность неперекрывающихся прямоугольных импульсов постоянной амплитуды со случайными и независимыми значениями длительностей τ_1 и пауз τ_2 (рис. 1), для которых известны функции плотностей распределения вероятностей $W_1(x)$ и $W_2(x)$ соответственно. Эквивалентная схема детектора, как известно, сводится к изображенной на рис. 2. Постоянные времени заряда емкости τ_3 и разряда ее — τ_p , характеризующие процессы во время действия импульсов и в паузах между ними, определяются формулами (для последовательного детектора):

$$\tau_3 = R_3 C; \quad (1)$$

$$\tau_p = RC, \quad (2)$$

где

$$R_s = \frac{R}{1 + SR},$$

S — крутизна характеристики детекторного элемента, R — сопротивление нагрузки детектора, C — емкость нагрузки.

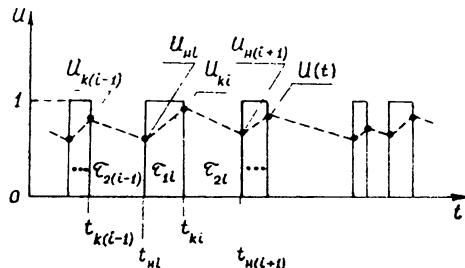


Рис. 1.

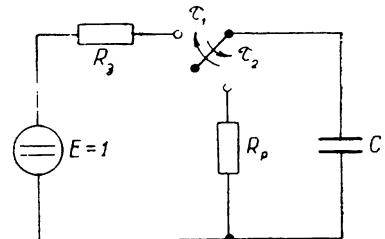


Рис. 2.

Опуская общезвестное решение дифференциальных уравнений, описывающих процесс детектирования в нашем случае, запишем выражение для мгновенного значения выходного напряжения $u(t)$, считая для простоты ЭДС источника в эквивалентной схеме рис. 2 равной единице:

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = 1 - (1 - U_{hi}) \exp\left(-\frac{t-t_{hi}}{\tau_3}\right); & t_{hi} \leq t \leq t_{ki} \\ u_2(t) = U_{ki} \exp\left(-\frac{t-t_{ki}}{\tau_p}\right); & t_{ki} \leq t \leq t_{hi+1} \end{cases}, \quad (3)$$

где U_{hi} и U_{ki} — напряжения на нагрузке в начале и в конце i -го входного импульса; t_{hi} и t_{ki} — моменты начала и окончания i -го входного импульса (см. рис. 1).

Обозначив через A событие, состоящее в том, что взятый наугад момент времени t совпал с временем действия импульса или $u(t) = u_1(t)$, а через B — событие противоположное, т. е. состоящее в том, что $u(t) = u_2(t)$, можем записать функцию плотности распределения вероятностей для u в виде

$$W(u) = P(A) W'(u/A) + P(B) W''(u/B), \quad (4)$$

где $P(A)$ и $P(B)$ — вероятности несовместимых событий A и B ; $W'(u/A)$, обозначаемое далее как $W'(u)$, и $W''(u/B)$, обозначаемое далее как $W''(u)$,— условные плотности распределения вероятностей напряжения $u(t) = u_1(t)$ и $u(t) = u_2(t)$ соответственно. Из условий поставленной задачи можно заключить, что

$$P(A) = \frac{m_1(\tau_1)}{m_1(\tau_1) + m_1(\tau_2)}; \quad (5)$$

$$P(B) = \frac{m_1(\tau_2)}{m_1(\tau_1) + m_1(\tau_2)}, \quad (6)$$

где $m_1(\tau_1) = \bar{\tau}_1$, $m_1(\tau_2) = \bar{\tau}_2$ — средние значения длительностей входных импульсов и пауз между ними соответственно.

Таким образом, основная часть задачи сводится к отысканию ус-

ловных плотностей $W'(u)$ и $W''(u)$ по заданным функциям $W_1(x)$ и $W_2(x)$ или хотя бы к установлению связей между моментами этих распределений при известных параметрах детектора.

Заметим, что постановка вопроса в изложенном виде применительно к данной задаче принадлежит Тихонову [2]. Однако его попытка найти непосредственное выражение для $W(u)$, не прибегая к разложению по моментам, не привела к успеху из-за больших трудностей вычислительного характера. Кроме того, как будет показано ниже, при выводе общих формул преобразования распределений в [2] была допущена неточность, исключавшая возможность получения строгого решения.

1. Остановимся подробнее на формуле (3), преобразовав ее к виду

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = 1 - (1 - U_{hi}) \exp\left(-\frac{\Delta\tau_{1i}}{\tau_3}\right) = 1 - (1 - U_{ki}) \alpha_i; & t_{hi} \leq t \leq t_{ki} \\ u_2(t) = U_{ki} \exp\left(-\frac{\Delta\tau_{2i}}{\tau_p}\right) = U_{ki} \beta_i; & t_{ki} \leq t \leq t_{h(i+1)} \end{cases}, \quad (7)$$

где

$$\alpha_i = \exp\left(-\frac{\Delta\tau_{1i}}{\tau_3}\right); \quad \tau_{1i} = t_{ki} - t_{hi}; \quad (8)$$

$$\beta_i = \exp\left(-\frac{\Delta\tau_{2i}}{\tau_p}\right); \quad \tau_{2i} = t_{h(i+1)} - t_{ki}, \quad (9)$$

Δ — случайная величина, заключенная в интервале $0 \div 1$, характеризующая положение взятой наугад точки t внутри совпавшего с ней промежутка τ_{1i} или τ_{2i} .

Очевидно, что в наших условиях распределение этой величины $W_\Delta(x)$ равномерно и постоянно в указанном интервале, т. е.

$$W_\Delta(x) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x < 1 \\ 0; & x < 0; \quad 1 \leq x \end{cases}. \quad (10)$$

Поскольку α_i и β_i зависят каждая лишь от двух случайных величин (Δ и τ_{1i} или Δ и τ_{2i}), учет статистических характеристик этих сомножителей в составе (7) не представляет труда. Если бы одновременно с этим нам были известны функции распределения $W_h(x)$ и $W_k(x)$ для напряжений U_h и U_k , расчет $W'(u)$ и $W''(u)$, а следовательно, и $W(u)$ мог быть произведен на основе следующих рассуждений.

Пусть известен некоторый достаточно большой интервал времени ΔT , в течение которого на вход детектора в среднем поступает n импульсов из состава стационарной последовательности импульсов со случайной длительностью τ_1 и средним периодом следования

$$\bar{T} = \bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2 = \frac{\Delta T}{n}.$$

Будем рассматривать события A' , заключающиеся в попадании взятой наугад точки в интервале ΔT внутрь импульса, длительность которого заключена в пределах

$$\tau_1 \leq x < \tau_1 + \delta\tau_1,$$

где $\delta\tau_1 \ll \tau_1$. Вероятность такого события, очевидно, равна

$$P(A') \cong \frac{n\tau_1 W_1(\tau_1) \delta\tau_1}{\Delta T} = \frac{\tau_1 W(\tau_1) \delta\tau_1}{T} = P(A) \frac{\tau_1 W_1(\tau_1) \delta\tau_1}{\tau_1}. \quad (11)$$

Это выражение справедливо для любого ΔT .

Предел

$$\lim_{\delta\tau_1 \rightarrow 0} \left[\frac{P(A')}{\delta\tau_1} \right] \frac{1}{P(A)} = \frac{\tau_1 W_1(\tau_1)}{\tau_1} = p_1(\tau_1) \quad (12)$$

естественно назвать условной плотностью вероятности величины τ_1 . Аналогичным образом можно ввести понятие условной плотности вероятности величины τ_2 :

$$p_2(\tau_2) = \frac{\tau_2 W_2(\tau_2)}{\tau_2}. \quad (13)$$

В группе событий A функция $p_1(\tau_1)$ характеризует вероятность попадания точки t в интервал τ_1 , которая зависит от заданного распределения $W_1(x)$ и при прочих равных условиях будет тем выше, чем больше значение τ_1 . В группе событий B аналогичную роль играет $p_2(\tau_2)$. На основании сказанного и известных формул преобразования функций условных вероятностей можно записать, пользуясь (7):

$$W'(u) = \int_{\tau_1}^{\infty} \int_{\Delta} W_y(u/\tau_1/\Delta) p_1(\tau_1) W_\Delta(\Delta) d\Delta d\tau_1; \quad (14)$$

$$W''(u) = \int_{\tau_2}^{\infty} \int_{\Delta} W_y(u/\tau_2/\Delta) p_2(\tau_2) W_\Delta(\Delta) d\Delta d\tau_2, \quad (15)$$

где

$$W_y(u/\tau_1/\Delta) = W_u \left[1 - (1-u) \frac{1}{\alpha} \right] \frac{1}{\alpha}; \quad (16)$$

$$W_y(u/\tau_2/\Delta) = W_k \left(\frac{u}{\beta} \right) \frac{1}{\beta} \quad (17)$$

—условные плотности распределения вероятностей для u_1 и u_2 соответственно при фиксированных τ_1 и Δ или τ_2 и Δ .

Подставив (16), (17), (12) и (13) в (14) и (15), получаем

$$W'(u) = \int_{\tau_1}^{\infty} \int_{\Delta} \frac{\tau_1}{\tau_1} W_u \left[1 - (1-u) \frac{1}{\alpha} \right] \frac{1}{\alpha} W_1(\tau_1) W_\Delta(\Delta) d\Delta d\tau_1; \quad (18)$$

$$W''(u) = \int_{\tau_2}^{\infty} \int_{\Delta} \frac{\tau_2}{\tau_2} W_k \left(\frac{u}{\beta} \right) \frac{1}{\beta} W_2(\tau_2) W_\Delta(\Delta) d\Delta d\tau_2. \quad (19)$$

и далее, используя (4), (5) и (6), находим общее выражение выходной функции распределения $W(u)$ через распределения $W_u(x)$ и $W_k(x)$ напряжений на нагрузке в начале и в конце импульсов и заданные функции $W_1(x)$ и $W_2(x)$:

$$W(u) = \frac{\int_{\tau_1}^{\infty} \int_{\Delta} \frac{\tau_1}{\alpha} W_u \left[1 - (1-u) \frac{1}{\alpha} \right] W_1(\tau_1) W_\Delta(\Delta) d\Delta d\tau_1}{\tau_1 + \bar{\tau}_2} + \\ + \frac{\int_{\tau_2}^{\infty} \int_{\Delta} \frac{\tau_2}{\beta} W_k \left(\frac{u}{\beta} \right) W_2(\tau_2) W_\Delta(\Delta) d\Delta d\tau_2}{\tau_1 + \bar{\tau}_2}, \quad (20)$$

Отметим, что отличием формул (18) и (19) от выведенных в [2] является наличие под интегралами множителей $\frac{\tau_1}{\tau_1}$ и $\frac{\tau_2}{\tau_2}$, учитывающих, по существу, „вклад“ каждой реализации $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в общий закон распределения в зависимости от величины τ_1 и τ_2 . Очевидно, что не-учет этих множителей допустим только при приближенных решениях задачи и не приводит к большим ошибкам лишь при относительно малых дисперсиях случайных величин τ_1 и τ_2 . В общем же случае пренебрежение указанными коэффициентами недопустимо.

2. Определение функций $W_n(x)$ и $W_k(x)$ представляет наибольшую трудность при решении поставленной задачи в общем виде. Однако в практических приложениях чаще всего нет необходимости знать точное выражение для $W(u)$ и достаточно ограничиться лишь вычислением нескольких первых моментов этой функции, с помощью которых можно построить ее приближенно.

На основании (7) или путем преобразования (18) и (19) моменты n -го порядка для функций распределения $W(u)$ и $W''(u)$ записываются в виде:

$$m_n(u_1) = \int_{U_h} \int_{\tau_1} \int_{\Delta} [1 - (1 - U_h)x]^n \frac{\tau_1}{\tau_1} W_h(U_h) W_1(\tau_1) W_{\Delta}(\Delta) d\Delta d\tau_1 dU_h; \quad (21)$$

$$m_n(u_2) = \int_{U_k} \int_{\tau_2} \int_{\Delta} [U_k \beta]^n \frac{\tau_2}{\tau_2} W_k(U_k) W_2(\tau_2) W_{\Delta}(\Delta) d\Delta d\tau_2 dU_k. \quad (22)$$

Независимость U_h от α и U_k от β позволяет провести операцию интегрирования по U_h и U_k при любом конечном n и выразить $m_n(u_1)$ и $m_n(u_2)$ через моменты распределений случайных величин U_h и U_k — $m_n(U_h)$ и $m_n(U_k)$. Особенно просто преобразуется (22):

$$m_n(u_2) = m_n(U_k) \int_{\tau_2} \int_{\Delta} \frac{\tau_2}{\tau_2} [\beta(\Delta, \tau_2)]^n W_2(\tau_2) W_{\Delta}(\Delta) d\Delta d\tau_2 = m_n(U_k) m'_n(\beta), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} m'_n(\beta) &= \frac{1}{\tau_2} \int_{\tau_2} \int_{\Delta} \tau_2 [\beta(\Delta, \tau_2)]^n W_2(\tau_2) W_{\Delta}(\Delta) d\Delta d\tau_2 = \\ &= \frac{1}{\tau_2} \int_{\tau_2} \int_0 \tau_2 \exp \left(-\frac{n \Delta \tau_2}{\tau_p} \right) W_2(\tau_2) d\Delta d\tau_2 = \frac{\tau_p}{n \tau_2} [1 - m_n(b)]^*; \end{aligned} \quad (24)$$

$$b = \beta(1, \tau_2) = \exp \left(-\frac{\tau_2}{\tau_p} \right); \quad m_n(b) = \int_{\tau_2} \exp \left(-\frac{n \tau_2}{\tau_p} \right) W_2(\tau_2) d\tau_2. \quad (25)$$

При $n=1$ и $n=2$ после аналогичных преобразований формула (21) дает в частности

$$m_1(u_1) = 1 - m_1(1 - U_h)m_1(\alpha); \quad (26)$$

$$m_2(u_1) = 1 - 2m_1(1 - U_h)m_1(\alpha) + m_2(1 - U_h)m_2(\alpha), \quad (27)$$

* В приложении в сводке формул фигурирует вместо $m'_n(\beta)$ более удобная для расчетов величина $m_n(\beta) = (Q - 1)m'_n(\beta)$, где Q — средняя скважность входных импульсов.

где

$$m_n(\alpha) = \frac{1}{\tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_3} \int_0^1 \tau_1 \exp\left(-\frac{n \Delta \tau_1}{\tau_3}\right) W_1(\tau_1) d\Delta d\tau_1 = \frac{\tau_3}{n \tau_1} [1 - m_n(\alpha)]; \quad (28)$$

$$\alpha = \alpha(1, \tau_1) = \exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau_3}\right); \quad m_n(\alpha) = \int_{\tau_1}^{\tau_3} \exp\left(-\frac{n \tau_1}{\tau_3}\right) W_1(\tau_1) d\tau_1; \quad (29)$$

Таким образом задача свелась к определению моментов распределений $W_n(x)$ и $W_k(x)$. Для этого мы преобразуем выражение (7) так, чтобы построить рекуррентные формулы, связывающие напряжения на нагрузке в начале и в конце каждого импульса с такими же напряжениями в соседних импульсах. Полагая последовательно

$$t = t_{ri}; \quad t = t_{ki}; \quad t = t_{k(i+1)}$$

и т. д. и пользуясь обозначениями (25) и (29), получим:

$$\frac{1 - U_{ki}}{1 - U_{bi}} = a_i; \quad (30)$$

$$\frac{U_{bi}}{U_{k(i+1)}} = b_i, \quad (31)$$

где индексы i при коэффициентах a и b указывают на номер импульса или паузы длительностью τ_{1i} или τ_{2i} .

Последовательная подстановка (31) в (30) для разных i позволяет записать выражение для напряжения U_k в конце взятого наугад импульса в виде бесконечного ряда

$$\begin{aligned} U_k &= (1 - a_m) + a_m b_m (1 - a_{m-1}) + a_m a_{m-1} b_m b_{m-1} (1 - a_{m-2}) + \dots = \\ &= (1 - a_m) + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - a_{m-k}) \prod_{l=0}^{k-1} a_{m-l} b_{m-l}. \end{aligned} \quad (32)$$

Формула для U_n аналогична и находится подстановкой (32) в (31). Отметим, что случайные величины a , взаимонезависимы и их моменты определяются через $W_1(x)$ в соответствии с (29). В свою очередь b , также независимы друг от друга и от a , а их моменты определяются по (25). Полезно указать, что поскольку по физическому смыслу задачи вероятность значений $\tau_1 \leq 0$ и $\tau_2 \leq 0$ равна нулю, из (25) и (29) следует:

$$\begin{aligned} m_n(a) &< 1; \\ m_n(b) &< 1. \end{aligned} \quad (33)$$

Начальный момент n -го порядка для U_k можно найти, раскрыв выражение

$$m_n(U_k) = m \left[(1 - a_m) + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - a_{m-k}) \prod_{l=0}^{k-1} a_{m-l} b_{m-l} \right]. \quad (34)$$

Эта операция выполняется достаточно просто при $n = 1$ и $n = 2$, если воспользоваться свойствами бесконечных убывающих геометрических прогрессий. Действительно, применив в правой части почленно операцию математического ожидания, при $n = 1$ мы получим:

$$m_1(U_k) = \lim_{l \rightarrow \infty} [1 - m_1(a) + m_1(a)m_1(b) - m_1^2(a)m_1(b) + m_1^2(a)m_1^2(b) - \dots \\ \dots + m_1^l(a)m_1^l(b) - m_1^{l+1}(a)m_1^l(b)] = [1 - m_1(a)] \lim_{l \rightarrow \infty} [1 + m_1(a)m_1(b) + \dots \quad (35) \\ \dots + m_1^l(a)m_1^l(b)] = \frac{1 - m_1(a)}{1 - m_1(a)m_1(b)}.$$

Аналогично, при $n=2$ после двукратного свертывания сумм, частично опуская выкладки, найдем:

$$m_2(U_k) = \frac{1 + m_2(a)}{1 - m_1(a)m_2(b)} - 2 \lim_{l \rightarrow \infty} \left\{ \frac{[1 - m_1(b)][1 - m_1^l(a)m_1^l(b)]}{1 - m_1(a)m_1(b)} m_1(a) + \right. \\ + \frac{[1 - m_1(a)][1 - m_1^l(a)m_1^l(b)]}{1 - m_1(a)m_1(b)} m_2(a)m_1(b) + \frac{[1 - m_1(b)][1 - m_1^{l-1}(a)m_1^{l-1}(b)]}{1 - m_1(a)m_1(b)} \times \\ \times m_2(a)m_2(b)m_1(a) + \dots + \frac{[1 - m_1(a)][1 - m_1(a)m_1(b)]}{1 - m_1(a)m_1(b)} m_2^l(a)m_2^{l-1}(b)m_1(b) + \\ \left. + \frac{[1 - m_1(b)][1 - m_1(a)m_1(b)]}{1 - m_1(a)m_1(b)} m_2^l(a)m_2^l(b)m_1(a) \right\} = \\ = \frac{[1 - 2m_1(a) + m_1(a)m_1(b)] + m_2(a)[1 - 2m_1(b) + m_1(a)m_1(b)]}{[1 - m_2(a)m_2(b)][1 - m_1(a)m_1(b)]}. \quad (36)$$

Вывод расчетных формул для моментов более высокого порядка не встречает принципиальных затруднений, но весьма громоздок.

Моменты распределения $\bar{W}_n(U_n)$ находятся с учетом (31) на основе независимости величин $U_{k(i-1)}$ и b_i

$$m_n(U_n) = m_n(U_k) m_n(b). \quad (37)$$

Для условий, когда длительность импульсов является постоянной величиной ($\tau_1=\text{const}$), были выведены формулы моментов до 4-го порядка включительно. Опуская выкладки, приведем эти выражения, поскольку такие задачи часто встречаются в практике:

$$m_1(U_k) = \frac{1 - a_0}{1 - a_0 m_1(b)}; \quad (38)$$

$$m_2(U_k) = \frac{(1 - a_0)^2}{1 - a_0^2 m_2(b)} (1 + 2\mu_1); \quad (39)$$

$$m_3(U_k) = \frac{(1 - a_0)^3}{1 - a_0^3 m_3(b)} [1 + 3(\mu_1 + \mu_2) + 6\mu_1\mu_2]; \quad (40)$$

$$m_4(U_k) = \frac{(1 - a_0)^4}{1 - a_0^4 m_4(b)} [1 + 2(2\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3) + 12(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3) + 24\mu_1\mu_2\mu_3], \quad (41)$$

где

$$a_0 = m_1(a) = \exp \left(-\frac{\tau_{10}}{\tau_3} \right); \quad \tau_1 = \tau_{10} = \text{const}; \quad \mu_i = -\frac{a_0^i m_i(b)}{1 - a_0^i m_i(b)}. \quad (42)$$

В целях упрощения расчетов целесообразно при $\tau_1=\text{const}$ воспользоваться другой формой записи для $m_n(u_1)$, основанной на преобразовании (7) к виду, исключающему необходимость определения $m_n(U_n)$:

$$u_1(t) = 1 - (1 - U_{ki}) \frac{1}{\alpha_i}, \quad (43)$$

где U_{ki} и α_i статистически независимы, так как α_i при $\tau_1 = \text{const}$ является функцией лишь одного случайного параметра Δ .

В силу этого

$$m_1(u_1) = 1 - m_1(1 - U_k) m_1\left(\frac{1}{\alpha}\right); \quad (44)$$

$$m_2(u_1) = 1 - 2m_1(1 - U_k) m_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) + m_2(1 - U_k) m_2\left(\frac{1}{\alpha}\right); \quad (45)$$

$$m_3(u_1) = 1 - 3m_1(1 - U_k) m_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 3m_2(1 - U_k) m_2\left(\frac{1}{\alpha}\right) - m_3(1 - U_k) m_3\left(\frac{1}{\alpha}\right); \quad (46)$$

$$m_4(u_1) = 1 - 4m_1(1 - U_k) m_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 6m_2(1 - U_k) m_2\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \quad (47)$$

$$- 4m_3(1 - U_k) m_3\left(\frac{1}{\alpha}\right) + m_4(1 - U_k) m_4\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

где

$$m_n\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^1 \exp\left(\frac{n \Delta \tau_1}{\tau_3}\right) d\Delta = \frac{\tau_3}{n \tau_1} \left(\frac{1}{a_0^n} - 1\right). \quad (48)$$

Входящие в (44)–(47) моменты вида $m_n(1 - x)$ связаны с $m_n(x)$ общизвестными соотношениями, приведенными ниже в сводке расчетных формул (см. приложение I).

Выведенные выражения позволяют построить моменты выходного распределения $W(u)$ при любых параметрах детектора по формуле, следующей из (4):

$$m_n(u) = \frac{\tau_1 m_n(u_1) + \tau_2 m_n(u_2)}{T}, \quad (49)$$

где

$$T = \tau_1 + \tau_2. \quad (50)$$

В общем случае поведение моментов $m_n(u)$ определяется видом функций $m_n(a)$ и $m_n(b)$, зависящих от исходных распределений $W_1(x)$ и $W_2(x)$, а при фиксированной длительности импульсов только функциями $m_n(b)$. Все остальные величины, входящие в расчет, зависят лишь от параметров детектора (τ_3 и τ_p) и средних значений длительностей и пауз между импульсами.

В приложении дана полная сводка расчетных формул, облегчающая расчет моментных функций при $\tau_1 = \text{const}$ или программирование задачи для решения на вычислительных машинах. Там же указаны формулы расчета $m_n(b)$ для четырех конкретных видов распределений пауз τ_2 между импульсами.

Пользуясь этими формулами и, например, известным разложением Эджвортса [4], можно приближенно оценить вид одномерного распределения напряжения на RC -нагрузке детектора.

Самостоятельный интерес могут представлять значения моментных функций выходного напряжения в детекторе регулярных прямоугольных импульсов с произвольной RC -нагрузкой. Практически наиболее полезным оказывается знание среднего значения и дисперсии этого напряжения, ибо такая задача весьма часто возникает при анализе

схем пикового детектирования, широко используемых в приемной и измерительной технике. Соответствующие формулы легко находятся на основе общих формул расчета моментов, если подставить в (1—21) (см. приложение) $W_2(\tau_2)$ в виде дельта-функции, что соответствует $\tau_2 = \text{const}$. При этом мы получим:

$$m_n(b) = b_0^n = \exp\left(-\frac{n\tau_2}{\tau_p}\right) = \exp\left(-\frac{n\Theta}{q\xi}\right), \quad (51)$$

где

$$b_0 = \exp\left(-\frac{\Theta}{q\xi}\right) = a_0^{(\Theta/q)}, \quad (52)$$

а остальные обозначения соответствуют принятым выше и в приложении. Постоянная составляющая выходного напряжения в этом случае

$$m_1(u) = \frac{1}{Q} \left[1 + (q-1)\xi \frac{(1-a_0)(1-b_0)}{1-a_0b_0} \right]. \quad (53)$$

Второй начальный момент распределения

$$m_2(u) = \frac{1}{Q} \left\{ 1 + \xi(1-b) \left[\frac{q(1+b)(1-a)^2}{2(1-ab)^2} + \frac{(1-b)(1+a)}{2(1-a)} - 2 \right] \right\}. \quad (54)$$

Дисперсия распределения, как обычно, находится из (53) и (54) по формуле

$$\sigma^2(u) = m_2(u) - m_1^2(u). \quad (55)$$

При большой скважности Q и высоком значении q формула (53) может быть заменена приближенным выражением

$$m_1(u) \approx \frac{q\xi}{Q} \frac{(1-a_0)(1-b_0)}{1-a_0b_0}, \quad (56)$$

что в наших обозначениях совпадает с формулой, приведенной в [3] и полученной для условий $Q \gg 1$ и $q \gg 1$. Использование точного выражения (53) вместо приближенного (56) целесообразно в случаях работы с импульсами малой скважности или при расчетах измерительных устройств высокой точности.

Относительно выражений (54), (55) заметим, что они дают возможность объективно оценивать эффективное значение флюктуаций на выходе детектора и в этом смысле более удобны, чем данное в [5] и других работах искусственное понятие коэффициента пульсаций.

Практическое применение формул (53), безусловно, облегчится, если провести ряд разумных упрощений. Это, однако, требует специального анализа, выходящего за рамки задач настоящей работы.

В заключение необходимо указать, что использованный выше прием свертывания бесконечных рядов, образующихся после применения операции математического ожидания к выражениям напряжений на нагрузке в начале и в конце импульсов, пригоден для отыскания моментов многомерных распределений напряжения на нагрузке. Однако сделанная нами попытка использовать этот метод для нахождения хотя бы функции корреляции привела к исключительно сложным выкладкам, не позволившим довести задачу до конца к моменту написания настоящей работы.

Следует особо подчеркнуть, что большинство полученных формул имеет вид знакопеременных сумм, причем, как показывают числовые расчеты, модули слагаемых разных знаков мало различаются между собой при достаточно типичных исходных данных. Это указывает на

необходимость проведения всех промежуточных выкладок с сохранением большого числа значащих цифр. Отмеченное обстоятельство особенно важно при расчете моментов высоких порядков (3-го и 4-го) и построении приближенных функций распределения по разложению Эджвортта.

Автор приносит глубокую благодарность В. И. Тихонову и В. Л. Лебедеву за просмотр рукописи и ценные советы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СВОДКА РАСЧЕТНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ОДНОВРЕМЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НАПРЯЖЕНИЯ RC НАГРУЗКЕ ЛИНЕЙНОГО ДЕТЕКТОРА НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ ПОСТОЯННОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

Обозначения, принятые в дополнение к введенным в основном тексте: Q —средняя скважность входных импульсов, определяемая как:

$$Q = \Theta + 1 = \frac{\tau_1 + \bar{\tau}_2}{\tau_1}; \quad \Theta = \frac{\bar{\tau}_2}{\tau_1}; \quad (1-1)$$

$$q = \frac{\tau_p}{\tau_3};$$

$$\xi = \frac{\tau_3}{\tau_1}; \quad (1-2)$$

$$a_0 = \exp \left(-\frac{\tau_1}{\tau_3} \right) = \exp \left(-\frac{1}{\xi} \right); \quad (1-3)$$

$U_k = x$ —напряжение на нагрузке в конце каждого импульса.

1. Общие расчетные формулы моментов (до 4-го порядка):

$$m_n(u) = \frac{1}{Q} [m_n(u_1) + m_n(x)m_n(\emptyset)]; \quad (1-4)$$

$$m_1(u_1) = 1 - m_1(1-x)m_1\left(\frac{1}{\alpha}\right); \quad (1-5)$$

$$m_2(u_1) = 1 - 2m_1(1-x)m_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) + m_2(1-x)m_2\left(\frac{1}{\alpha}\right); \quad (1-6)$$

$$m_3(u_1) = 1 - 3m_1(1-x)m_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 3m_2(1-x)m_2\left(\frac{1}{\alpha}\right) - m_3(1-x)m_3\left(\frac{1}{\alpha}\right); \quad (1-7)$$

$$m_4(u_1) = 1 - 4m_1(1-x)m_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 6m_2(1-x)m_2\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \quad (1-8)$$

$$- 4m_3(1-x)m_3\left(\frac{1}{\alpha}\right) + m_4(1-x)m_4\left(\frac{1}{\alpha}\right);$$

$$m_1(1-x) = 1 - m_1(x); \quad (1-9)$$

$$m_2(1-x) = 1 - 2m_1(x) + m_2(x); \quad (1-10)$$

$$m_3(1-x) = 1 - 3m_1(x) + 3m_2(x) - m_3(x); \quad (1-11)$$

$$m_4(1-x) = 1 - 4m_1(x) + 6m_2(x) - 4m_3(x) + m_4(x); \quad (1-12)$$

$$m_n(x) = \frac{(1-a_0)^n}{1-a_0^n m_n(b)} F_n(\mu); \quad (1-13)$$

$$F_1(\mu) = 1; \quad (1-14)$$

$$F_2(\mu) = 1 + 2\mu_1; \quad (1-15)$$

$$F_3(\mu) = 1 + 3(\mu_1 + \mu_2) + 6\mu_1\mu_2; \quad (1-16)$$

$$F_4(\mu) = 1 + 2(2\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3) + 12(\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3) + 24\mu_1\mu_2\mu_3; \quad (1-17)$$

$$\mu_i = \frac{a_0^i m_i(b)}{1 - a_0^i m_i(b)}; \quad (1-18)$$

$$m_n(\beta) = \frac{q \xi}{n} [1 - m_n(b)]; \quad (1-19)$$

$$m_n\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\xi}{n} \left(\frac{1}{a_0^n} - 1\right); \quad (1-20)$$

$$m_n(b) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \exp\left(-\frac{n \tau_2}{\tau_p}\right) W_2(\tau_2) d\tau_2 \quad (1-21)$$

(общий случай).

II. Формулы расчета моментов $m_n(b)$ для различных конкретных распределений пауз τ_2 между импульсами постоянной длительности.

$$1. \quad W_2(\tau_2) = \frac{1}{\tau_2} \exp\left(-\frac{\tau_2}{\tau_2}\right) \quad (\tau_2 > 0) \quad (1-22)$$

— „экспоненциальное“ распределение. соответствующее случаю „абсолютно хаотической“ последовательности импульсов;

$$m_n(b) = \frac{q \xi}{n \Theta + q \xi}. \quad (1-23)$$

$$2. \quad W_2(\tau_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(\tau_2 - \bar{\tau}_2)^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (\tau_2 > 0) \quad (1-24)$$

— „квазинормальное“ распределение;

$$m_n(b) = \exp\left[\frac{1}{2} n^2 \left(\frac{\nu \Theta}{q \xi}\right)^2 - n \frac{\Theta}{q \xi}\right], \quad (1-25)$$

где

$$\nu = \frac{\sigma_n}{\tau_2}; \quad (1-26)$$

$$\sigma_n \ll \tau_2. \quad (1-27)$$

$$3. \quad W_2(\tau_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta\tau_2} & ; \quad \bar{\tau}_2(1 - \delta) \leq \tau_2 < \bar{\tau}_2(1 + \delta) \\ 0 & ; \quad \tau_2 < \bar{\tau}_2(1 - \delta); \quad \bar{\tau}_2(1 + \delta) \leq \tau_2 \end{cases} \quad (1-28)$$

* Здесь и далее предполагается, что плотность вероятности значений $\tau_2 \leq 0$ равна нулю

— равномерное распределение;

$$m_n(b) = \frac{q \xi}{\delta n \Theta} \exp \left(-\frac{n \Theta}{q \xi} \right) \operatorname{sh} \left(\delta \frac{n \Theta}{q \xi} \right), \quad (1-29)$$

где

$$\delta < 1.$$

$$4. \quad W_2(\tau_2) = \frac{1}{\Gamma(\delta + 1) \lambda^{\delta+1}} \tau_2^\delta \exp \left(-\frac{\tau_2}{\lambda} \right) \quad (1-30)$$

— „гамма-распределение“ (рис. 3), удобное для приложений тем, что оно позволяет в широких пределах варьировать форму закона распределения путем изменения параметров δ и λ [6]. При этом, в частности, справедливы следующие соотношения для постоянной составляющей $\bar{\tau}_2$ и дисперсии σ_n^2 случайной величины τ_2 :

$$\bar{\tau}_2 = \lambda(\delta + 1); \quad (1-31)$$

$$\sigma_n^2 = \lambda^2 (\delta + 1). \quad (1-32)$$

С учетом (1-31) и (1-32) и принятых нами обозначений распределение (1-30)

может быть также записано в виде:

$$W_2(\tau_2) = \frac{1}{\Gamma(1/\nu^2)} (\nu^2)^{1/\nu^2} \left(\frac{\tau_2}{\bar{\tau}_2} \right)^{1/\nu^2} \exp \left(-\frac{\tau_2}{\bar{\tau}_2} \nu^2 \right). \quad (1-33)$$

В этом случае при любом ν и $\bar{\tau}_2$ (но, конечно, с условием $\nu \ll 1$)

$$m_n(b) = \left(\frac{q \xi}{n \Theta \nu^2 + q \xi} \right)^{1/\nu^2}. \quad (1-34)$$

Полезно отметить, что при $\nu^2 = 1$ выражения (1-33) и (1-34) вырождаются соответственно в (1-22) и (1-23), поскольку „экспоненциальное“ распределение является частным случаем „гамма“-распределения (кривая $\nu^2 = 1$ на рис. 3).

$$5. \quad \tau_2 = \text{const}$$

— случай детектирования регулярных импульсов;

$$m_n(b) = \exp \left(-\frac{n \Theta}{q \xi} \right). \quad (1-35)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. R. E. Burgess, Wireless Engineer, 28, 338 (1951).
2. В. И. Тихонов, Радиотехника, 10, 12, 41 (1955).
3. П. И. Пенин, Научн. докл. высш. шк.—Радиотехника и электроника, 2, 234 (1959).
4. Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, М., 1948.
5. Л. С. Гуткин, Преобразование сверхвысоких частот и детектирование, Госэнергоиздат, М., 1953.
6. И. В. Дунин-Барковский и Н. В. Смирнов, Теория вероятностей и математическая статистика в технике, ГИТТЛ, М., 1955.

К ТЕОРИИ СВЯЗАННЫХ РЕЗОНАТОРОВ

A. M. Белянцев

Получены интегро-дифференциальные уравнения, описывающие свободные и вынужденные колебания системы связанных резонаторов. Резонаторы связаны между собою через узкие параллельные щели в металлическом цилиндре, поперечные размеры которого много меньше длины волн исследуемых колебаний. Рассмотрены свободные колебания системы двух прямоугольных резонаторов, связанных между собою через узкую щель в «столе» экране. Найдены дисперсионные характеристики ребристого волновода

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему резонаторов, связанных между собою посредством узких параллельных щелей, прорезанных в тонком металлическом цилиндре. Для простоты будем считать, что каждый резонатор имеет только одну щель*. Очевидно, что связанные резонаторы можно рассматривать как „новый“ резонатор с новым спектром волновых чисел \bar{k} , и собственными функциями E , и H . Однако точное решение краевой задачи (отыскание \bar{k} , и E , и H) при геометрии границ „неправильной“ формы, как известно, не представляется возможным.

В работах [1,2] показано, что краевая задача для уравнений Максвелла в случае резонатора с тонкими антеннами или узкими щелями может быть решена приближенно, если первоначально найти токи в антенах или напряжения на щелях, а затем по найденным токам и напряжениям определить соответствующие им поля. Такой подход в случае связанных резонаторов, если связь осуществляется через щели в цилиндре, поперечные размеры которого значительно меньше длины волн рассматриваемых колебаний, а собственные поля для невозмущенных резонаторов (или однородные импедансные граничные условия на щелях) заданы, позволяет свести задачу о свободных и вынужденных колебаниях связанных резонаторов к исследованию системы интегро-дифференциальных уравнений для напряжений (или магнитных токов) на щелях.

2. ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Выход интегро-дифференциальных уравнений для напряжений (или магнитных токов J_p) на щелях сводится, как известно, к отысканию продольных составляющих магнитного поля как функции напряжения по обе стороны от экрана, в котором прорезаны щели. Для узких щелей продольная составляющая магнитного поля на раскрытии щелевой антенны представляется обычно в виде двух частей [3] квазистационарной особенности и регулярной части поля:

$$H_z = \hat{L}J/\pi i \chi k Z_0 + H_z^{\text{ре}}\{J\}, \quad (1)$$

* Полученные в работе уравнения легко обобщаются на случай, когда резонаторы имеют по несколько щелей

где $\hat{L} = \partial^2 / \partial z^2 + k^2$, k — волновое число, z — координата вдоль щели, $Z_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}$ — импеданс свободного пространства, $\chi = [\ln(l/a)]^{-1}$ — параметр малости (a — ширина щели, l — наименьший характерный размер пространственного изменения поля вблизи щели), $H^{\text{per}}(J)$ — регулярная часть поля.

Регулярная часть поля в случае щелей, прорезанных в незамкнутом экране, как правило, значительно меньше квазистационарной особенности поля. Однако, когда щель прорезана в замкнутом экране, регулярная часть поля на раскрытии со стороны резонансной полости имеет особенности резонансного характера, которые могут быть того же порядка, что и квазистационарная особенность, а в ряде случаев и значительно превосходить ее (например, резонансное поле на раскрытии щели со стороны канавки, прорезанной в металлическом экране [4]). Поэтому из „регулярной“ части поля на раскрытии щелевой антенны со стороны резонатора целесообразно выделить в явном виде [1] члены резонансного характера:

$$H_z = \frac{\hat{L} J}{\pi i \chi k Z_0} - i \frac{k}{Z_0} \sum_v \frac{h_v H_{zv}}{k_v^2 - k^2} + \hat{H}_z^{\text{per}}(J), \quad (2)$$

где k_v , H_v — собственные числа и собственные нормированные на объем функции невозмущенного резонатора,

$$h_v = \frac{1}{V} \int_S j^m H_v dS,$$

$$\int_V H_v \cdot H_\mu dV = - V \delta_{v\mu},$$

$$\delta_{v\mu} = \begin{cases} 1 & v = \mu \\ 0 & v \neq \mu \end{cases}$$

S — поверхность щели, V — объем резонатора, $j^m = [En]$ — плотность поверхностного магнитного тока, n — внешняя нормаль.

Для резонансной полости типа „канавка“ и других, для которых квазистационарная особенность поля на раскрытии щели с одной стороны экрана „отсутствует“ и структура электрического поля на щели известна, для выделения резонансных членов из регулярной части поля удобно воспользоваться однородным поверхностным импедансом, т. е. представить резонансную часть поля в виде [4]

$$H_z = j_z^m / Z, \quad (3)$$

где Z — однородный поверхностный импеданс (функция частоты, геометрии полости и типа колебаний).

Продольная составляющая магнитного поля на поверхности щели со стороны области связи (на внутренней поверхности цилиндра) является функцией N магнитных токов и для длин волн $\lambda = 2\pi/k \gg R_0$ (R_0 — поперечный размер цилиндра) может быть записана в виде [5]:

$$\tilde{H}_z^p = - \frac{1}{i\omega} \hat{L} \sum_{q=1}^N [\psi_p(x_p, y_p, j_q^m) - \psi_0(x_0, y_0, j_q^m)] + H_z^0 + O(R/\lambda). \quad (4)$$

Здесь ω — циклическая частота, $\sum \psi(x, y, j_q)$ — решение двухмерной статической задачи*, H_z^0 — продольная составляющая магнитного поля в некоторой точке $M(x_0, y_0)$ области связи, $O(R/\lambda)$ — поле порядка $R_0/\lambda H_z^0$.

Обозначая

$$\psi_p(x_p, y_p, j_q) = \psi_0(x_0, y_0, j_q) = J_q \tilde{\chi}_{pq}^{-1} / \pi \mu,$$

уравнение (4) можно записать следующим образом:

$$\tilde{H}_z^p = -\frac{1}{\pi i k Z_0} \tilde{L} \sum_{q=1}^N \tilde{\chi}_{pq}^{-1} J_q + H_z^0 + O(R/\lambda). \quad (4a)$$

Поскольку точка $M(x_p, y_p)$, вообще говоря, произвольная точка в поперечном сечении области связи, то, интегрируя (4a) по поперечному сечению цилиндра и учитывая связь между полями E и H , нетрудно получить выражение для продольной составляющей магнитного поля H_z^0 , которая для „закрытых“ систем (замкнутых экранов) может быть того же порядка, что и „квазистационарная особенность“ $\tilde{\chi}_{pq}^{-1} \tilde{L} J_q / \pi i k Z_0$:

$$H_z^0 = -\frac{1}{\pi i k Z_0} \tilde{L} \sum_{q=1}^N \tilde{\chi}_{q, \text{ин}}^{-1} J_q + \frac{1}{i k Z_0 S_\perp} \sum_{q=1}^N J_q = O_{\text{ин}}(R/\lambda). \quad (5)$$

В (5)

$$\tilde{\chi}_{q, \text{ин}}^{-1} = (1/S_\perp) \int_{S_\perp} \tilde{\chi}_q^{-1}(x_p, y_p) dx_p dy_p,$$

S_\perp — площадь поперечного сечения тонкого цилиндра.

$$O_{\text{ин}}(R/\lambda) = (1/S_\perp) \int_{S_\perp} O(R/\lambda) dS.$$

Полагая, что для N_1 резонаторов поле на раскрыве щели со стороны резонансной полости может быть задано в виде (2), а для остальных $N - N_1$ резонаторов — в виде однородных импедансных условий (3), нетрудно из условия непрерывности магнитного поля на раскрыве щелевой антенны получить для магнитных токов систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\tilde{L} \sum_{q=1}^N \tilde{\chi}_{pq}^{-1} J_q = \frac{\pi}{S_\perp} \sum_{q=1}^N J_q - \pi k^2 \sum_v \frac{h_v^p H_v^p}{k_{vp}^2 - k^2} + \pi i k Z_0 (M_p^{\text{ct}} + G_p) \quad (6)$$

$$(p = 1, 2, \dots, N_1);$$

$$\tilde{L} \sum_{q=1}^N \tilde{\chi}_{pq}^{-1} J_q = \frac{\pi}{S_\perp} \sum_{q=1}^N J_q + \pi i k Z_0 \left(\frac{J_p}{Z_p d_p} + M_p^{\text{ct}} + G_p \right) \quad (7)$$

$$(p = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N),$$

* Здесь $j_{qz}^{m'} = -j_{qz}^m$, причем знак \sim указывает на принадлежность к области связи. Индексы m и z в дальнейшем опускаются

где

$$\chi_{pq}^{-1} = \tilde{\chi}_{pq}^{-1} + \delta_{pq}\chi_q^{-1} - \tilde{\chi}_{q,\text{ин}}^{-1},$$

$$M_p^{\text{ст}} = \tilde{H}_p^{\text{ст}} - H_p^{\text{ст}},$$

$H_p^{\text{ст}}$ — стороннее поле, направленное по оси z ,

$$G_p = -\hat{H}_p^{\text{пер}} + O(R/\lambda) - O_{\text{ин}}(R/\lambda).$$

Уравнения (6) и (7) можно разрешить относительно $\hat{L}J_m$ и привести к виду:

$$\hat{L}J_m = \frac{\pi \chi \kappa_m}{S_{\perp}} \sum_{q=1}^N J_q - \pi k^2 \chi \sum_{q=1}^N \kappa_{qm} [T_q - i \frac{Z_0}{k} (M_q^{\text{ст}} + G_q)] \quad (8)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N),$$

где χ — единый параметр малости, $\kappa_m \chi = D_m/D$, $\kappa_m \sim 1$, $\kappa_{qm} \chi = A_{qm}/D$, $D = \text{Det}|\chi_{pq}^{-1}|$, A_{qm} —адъюнкта q -ой строки m -го столбца определителя D , $D_m = \sum_{q=1}^N A_{qm}$,

$$T_q = \begin{cases} \sum_v \frac{h_v^q H_v^q}{k_{vq}^2 - k^2} & (q \leq N_1) \\ -i \frac{Z_0}{k} \frac{J_q}{Z_q d_q} & (q > N_1) \end{cases}.$$

Уравнения (6), (7) или (8) совместно с уравнением

$$h_v^m = \frac{1}{V} \int_{L_m} J_m H_v^m dz \quad (9)$$

и граничными условиями на концах щелей

$$J_m(0) = J_m(L_m) = 0 \quad (10)$$

образуют полную систему уравнений для напряжений (или магнитных токов) на щелях. Уравнения (6)–(8), как нетрудно видеть, написаны с точностью $\chi R_0/\lambda$. Поэтому решение уравнений (6)–(10) при известной функциональной зависимости регулярных полей $\hat{H}^{\text{пер}}$ от тока* и заданных сторонних полях имеет смысл только до членов порядка $\chi R_0/\lambda$. Решение уравнений (6)–(10) может быть выполнено методом последовательных приближений по малому параметру χ .

3. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ РЕЗОНАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ ЧЕРЕЗ ЩЕЛЬ В «ТОЛСТОМ» ЭКРАНЕ

Щель, прорезанную в толстом металлическом экране, очевидно, можно рассматривать как две щели в тонком цилиндре (см. рис. 1а). В этом случае колебания напряжения на щелях 1 и 2 будут описываться системой уравнений (6)–(10).

* Регулярные поля вне области связи в ряде простейших случаев известны и могут считаться заданными линейными функционалами тока.

Для симметричной системы за точку $M(x_0, y_0)$ удобно взять точку пересечения осей симметрии щели, что ведет к симметрии коэффициентов χ_{pq} ($\chi_{11} = \chi_{22}$, $\chi_{12} = \chi_{21}$). Уравнения (8), (9) при этом легко приводятся к виду:

$$\frac{\partial^2 J_{\pm}}{\partial z^2} + k_{\pm}^2 J_{\pm} = \pi k^2 \chi_{\pm} \sum_v \frac{h_v^{\pm} H_v}{k_v^2 - k^2} + \pi i k Z_0 \chi_{\pm} (M_{\pm}^{\text{cr}} + G_{\pm}); \quad (11)$$

$$h_v^{\pm} = \frac{1}{V} \int J_{\pm} H_{vz} dz; \quad J_{\pm}(0) = J_{\pm}(L) = 0, \quad (12)$$

где

$$J_{\pm} = J_1 + J_2, \quad \chi_{\pm}^{-1} = \chi_{11}^{-1} \pm \chi_{12}^{-1}, \quad k_{\perp} = k,$$

$$k_{+} = (k^2 - 2\pi\chi_{+}/S_{\perp})^{1/2}, \quad M_{\pm}^{\text{cr}} = M_1^{\text{cr}} \pm M_2^{\text{cr}},$$

$$G_{\pm} = G_1 \pm G_2.$$

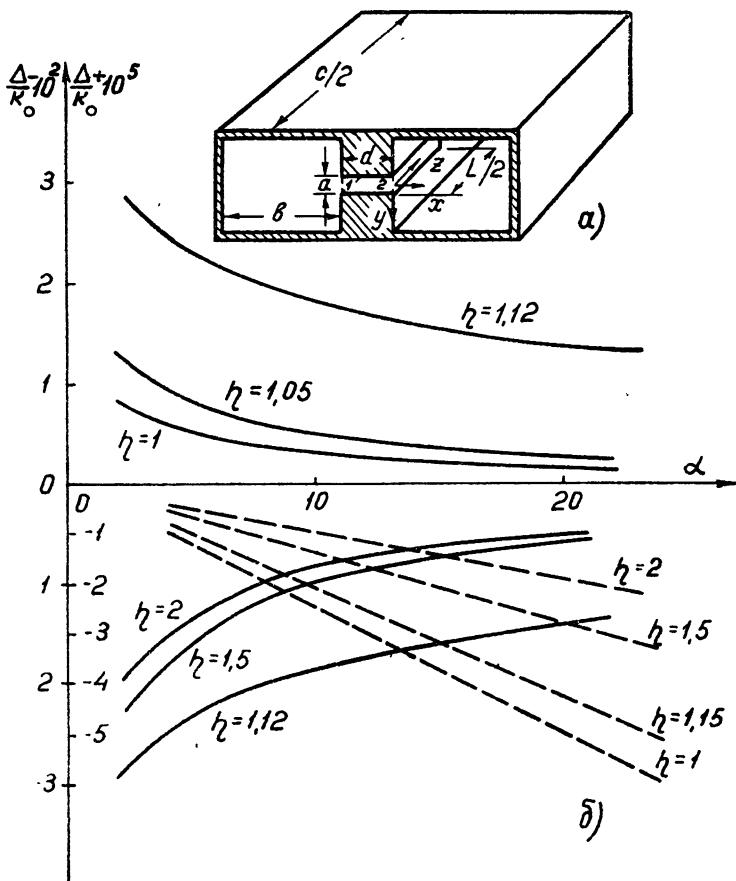


Рис. 1. Зависимость относительного приращения волновых чисел Δ_{\pm}/k_0 от толщины экрана: Δ_{-}/k_0 —сплошные линии, Δ_{+}/k_0 —пунктирные линии ($\alpha = d/a$, $\eta = c/L$, $\zeta = b/L = 2$, $L/a = 100$).

При $M_{\pm}^{\text{cr}} = 0$ уравнения (11), (12) описывают свободные колебания. Существенный интерес представляют те решения (11), (12), которым соответствуют волновые числа \bar{k} , близкие к волновым числам невоз-

мущенных резонаторов. Допустим, что \bar{k} близко кратно вырожденному волновому числу $k_v = k_0$ ($v = 1, 2, \dots, m$), т. е. $\bar{k} = k_0 + \Delta$ и $\Delta \ll k_0$. При этом, очевидно, в уравнениях нулевого приближения по χ необходимо оставить члены порядка $k_0^2(k_0^2 - \bar{k}^2)^{-1}$:

$$\frac{\partial^2 J_{\pm}}{\partial z^2} + k_{\pm}^2 J_{\pm} = \pi k_0 \chi_{\pm} \sum_{v=1}^m a_v^{\pm} H_v; \quad (13)$$

$$a_v^{\pm} = -\frac{1}{2k_0 V \Delta} \int_L J_{\pm} H_{vz} dz. \quad (14)$$

Уравнения (13), (14) по форме совпадают с уравнениями (2.1) и (2.2) работы [1]; однако параметры χ_{\pm} и волновое число в данном случае являются функциями параметров щели и экрана. Уравнения (2.1) и (2.2) достаточно подробно исследованы в общем виде [1], поэтому для выяснения особенностей решения, связанных с конечной толщиной экрана, ограничимся случаем $m = 1$.

1. Если щель прорезана в незамкнутом экране конечной толщины*, то уравнение

$$\frac{\partial^2 J_{\pm}}{\partial z^2} + k_{\pm}^2 J_{\pm} = 0; \quad J_{\pm}(0) = J_{\pm}(L) = 0 \quad (15)$$

будет в нулевом приближении описывать свободные колебания магнитных токов, текущих по раскрывам щели в „толстом“ незамкнутом экране. Распределение магнитных токов для синфазного ($J_+ = 2J_1 = 2J_2$; $H_{1z} = H_{2z}$) и противофазного ($J_- = 2J_1 = -2J_2$; $H_{1z} = -H_{2z}$) типов колебаний в нулевом приближении синусоидально, т. е.

$$f_{\pm}(z) = \sin(h_n z), \quad h_n = n\pi/L, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Собственная частота синфазного типа колебаний может быть существенно больше собственной частоты противофазного колебания. Первая в нулевом приближении определяется волновым числом $k_+^0 = (h_n^2 + \frac{1}{4} 2\pi\chi_+/S_1)^{1/2}$, вторая — $k_-^0 = h_n$.

Из решения статической задачи для щели в толстом экране (в приближении $a \ll d$) нетрудно найти параметры

$$\chi_+ = [\ln(l/a)]^{-1}, \quad \chi_- = [\pi d/2a + \ln(l/a)]^{-1},$$

где l — наименьшая из величин L , b , λ (см. рис. 1).

Таким образом, если величина $L^2/\pi n^2 ad \ln(l/a)$ — порядка единицы, то частоты синфазного и противофазного типов колебаний разнесены на величину порядка собственной частоты противофазного колебания.

2. Если щель прорезана в толстом экране, разделяющем два одинаковых резонатора, и собственные волновые числа k_v ($v = 1$) невозмущенных резонаторов далеки от парциальных чисел щели k_+^0 и k_-^0 , то колебания с волновыми числами \bar{k} , близкими к k_0 (т. е. $\bar{k} = k_0 + \Delta$), будут описываться уравнениями (13), (14):

$$J_{\pm}(z) = \pi \chi_{\pm} \left(\frac{k_0}{k_0^{\pm}} \right)^2 a_1^{\pm} \left[\varphi^{\pm}(z) - \frac{\sin(k_0^{\pm} z)}{\sin(k_0^{\pm} L)} \varphi^{\pm}(L) \right]; \quad (16)$$

* Это соответствует случаю, когда резонансные частоты щели далеки от резонансных частот невозмущенных резонаторов.

$$\frac{\Delta_{\pm}}{k_0} = - \frac{\pi \chi_{\pm}}{2V(k_0^{\pm})^3} S_{11}^{\pm}, \quad (17)$$

где

$$k_0^- = k_0; \quad k_0^+ = (\mathbf{k}_0^2 - 2\pi\chi_{+}'S_{\perp})^{1/2};$$

$$\varphi^-(z) = k_0^{\pm} \int_0^z H_1(\xi) \sin [k_0^{\pm}(z - \xi)] d\xi;$$

$$S_{11}^{\pm} = k_0^{\pm} \int_L^{\infty} H_1(z) \left[\varphi^{\pm}(z) - \frac{\sin(k_0^{\pm} z)}{\sin(k_0^{\pm} L)} \varphi^{\pm}(L) \right] dz.$$

Интересно отметить, что вырождение, обусловленное идентичностью резонаторов, при наложении связи снимается, причем волновые числа как синфазного, так и противофазного типов колебаний являются функциями толщины экрана.

На рис. 1б приведена зависимость относительного расщепления волнового числа от толщины экрана для основного типа колебаний в прямоугольном резонаторе ($H_z = H_{z0} \cos(\pi x/b) \cos(\pi z/c)$ ($z = L/2$)), когда данный резонатор связан с идентичным через щель в „толстом“ экране. С ростом толщины экрана волновое число противофазного типа колебаний (сплошные кривые, рис. 1б) приближается к невозмущенному волновому числу, тогда как волновое число синфазного типа колебаний (пунктирные кривые) — увеличивается.

3. Если волновое число k_0 невозмущенных резонаторов равно (или близко) парциальному волновому числу противофазного колебания щели k_0^- , то собственные магнитные токи, соответствующие волновому числу \bar{k} , близкому k_0 , будут иметь вид:

$$J_{-}(z) = \pi \chi_{-} b_1^- \left[\sin(\bar{k}z) - \frac{\varphi^-(z)}{\varphi^-(L)} \sin(\bar{k}L) \right], \quad (18)$$

где

$$\bar{k} = k_0 + \Delta; \quad a_1^- = -b_1^- \sin(\bar{k}L)/\varphi^-(L);$$

$$\Delta_{1,2}^- = \pm \left[\frac{\pi \chi_{-} \varphi^-(L) R_1^-}{2 k_0^2 L V} \right]^{1/2};$$

$$R_1^- = k_0 \int_L^{\infty} \sin(k_0 z) H_{1z}(z) dz.$$

Таким образом, в случае настроенной по противофазному колебанию щелевой антенны расщепление вырожденного волнового числа k_0 происходит на величину $\Delta \sim k_0 [\pi d/2a + \ln(l/a)]^{-1/2}$. На рис. 1б этому случаю соответствует кривая с $\eta = 1,12$.

Если щелевая антенна „настроена“ по синфазному типу колебаний (т. е. $k_0 = k_0^+$), то при $\chi_{+}^{1/2} \gg S_{\perp} k_0^2$ распределение тока и расщепление вырожденного волнового числа определяются формулами (17) и (18). т. е. расщепление такое же, что и при „расстроенной“ щели. В тех случаях, когда $\chi_{+}^{1/2} \sim S_{\perp} k_0^0$, расщепление

$$\Delta_{1,2}^- = \frac{\pi \chi_{+}}{4 h_n S_{\perp}} \left[1 \pm \left(1 - \frac{8 h_n^2 S_{\perp}^2 \varphi^+ R_1^+}{\pi \chi_{+} k_0^2 L V} \right)^{1/2} \right].$$

волнового числа $k_0 = k_0^0$ того же порядка, что и для щели, настроенной по противофазному колебанию.

4. ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛНОВОДА С РЕБРИСТОЙ СТРУКТУРОЙ

Система уравнений (7) — (10) после незначительных видоизменений может быть применена для приближенного расчета дисперсионных характеристик ребристого волновода (рис. 2а) в диапазоне частот, удовлетворяющих условию $k^2 b D \ll 1$. За n -ую ячейку ребристого волновода удобно взять звено, выделенное на рис. 2а пунктиром. Очевидно, эту ячейку можно рассматривать как тонкий цилиндр, нагруженный щелями 1—3, и как резонатор со щелями 1—2*. Границные

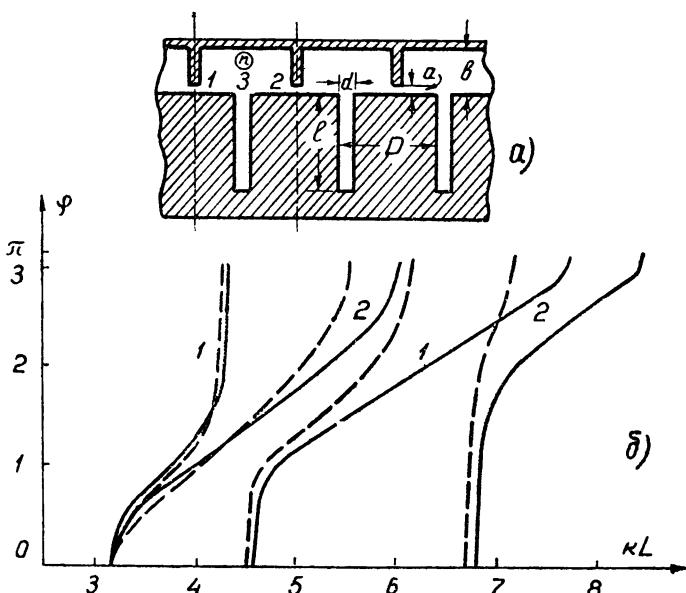


Рис. 2. Зависимость сдвига фазы φ от частоты kL . Размеры системы: $d = 2a$, $b = D = 20a$, $\xi = bD/L^2 = 0,04$, $L/l = 2$ (кривые 1), $L/l = 4$ (кривые 2). Сплошным линиям соответствуют значения параметров: $\chi_{11} \approx 0,19$, $\chi_{21} \approx -0,44$, $\chi_{31} \approx 5$, $\chi_{12} \approx 0,28$, $\chi_{13} \approx -1,25$; пунктирным линиям — $\chi_{11} = [2 \ln(b/a)]^{-1}$, $\chi_{33} = [2 \ln(b/d)]^{-1}$.

условия на щели 3 будем считать заданными с помощью однородного поверхностного импеданса (3). Уравнения нулевого приближения для магнитных токов, текущих по раскрывам щелей 1—3, с учетом граничных условий будут иметь вид:

$$\hat{L} \sum_{q=1}^3 \chi_{3q}^{-1} J_q^n = \frac{\pi}{S_\perp} \sum_{q=1}^3 J_q^n + \pi i k Z_0 \frac{J_3^n}{Z_3 d}; \quad (19)$$

$$\hat{L} \sum_{q=1}^3 (\chi_{2q}^{-1} J_q^n - \chi_{1q}^{-1} J_q^{n+1}) = \frac{\pi}{S_\perp} \sum_{q=1}^3 (J_q^n - J_q^{n+1});$$

$$J_2^n = -J_1^{n+1},$$

* Цепочки резонаторов, связанных через щели, в предположении, что щели расположены одна от другой на расстояниях порядка длины волны, рассматривались в работах [6]. Когда щели находятся на расстояниях, много меньших длины волны, метод, развитый в указанных работах, нуждается в обобщении, учитывающем «ближние» поля щелевых антенн. В уравнениях (6) — (10) «ближние» поля учтены с помощью решения статической задачи для области связи, которая, вообще говоря, может рассматриваться и как часть объема невозмущенного резонатора.

где

$$\chi_{pq}^{-1} = \tilde{\chi}_{pq}^{-1} - \tilde{\chi}_{q,\text{ин}}^{-1}.$$

Так как щели имеют одинаковую длину*, то решением, удовлетворяющим граничным условиям (20)

$$J_q^n(0) = J_q^n(L) = 0, \quad (20)$$

будет

$$J_q^n(z) = J_{q0}^n \sin(h_m z), \quad h_m = m\pi/L \\ (m = 1, 2, \dots).$$

При этом однородный поверхностный импеданс может быть задан в виде [4]:

$$Z_3 = iZ_0 \frac{k}{\Gamma} \operatorname{tg}(\Gamma l), \quad \Gamma^2 = k^2 - h_m^2.$$

Полагая фазовый сдвиг на ячейку равным φ (т. е. $J_q^{n+1} = e^{i\varphi} J_q^n$), нетрудно получить дисперсионное уравнение системы:

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\chi_{11}^{-1} - \chi_{12}^{-1}}{2} \left[\frac{\pi}{S_1 \Gamma^2} - \chi_{12}^{-1} - \right. \\ \left. \frac{(\pi/S_1 \Gamma^2 - \chi_{13}^{-1})(\pi/S_1 \Gamma^2 - \chi_{31}^{-1})}{\pi/S_1 \Gamma^2 - \chi_{33}^{-1} + \pi/d\Gamma \operatorname{tg}(\Gamma l)} \right]^{-1}. \quad (21)$$

Когда глубина канавки l равна нулю, волноводную систему можно рассматривать как цепочку тонких цилиндров, связанных между собою через узкие щели. Дисперсионные свойства такой системы будут описываться уравнением

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} (1 - f) \left(\frac{\pi \chi_{11}}{S_1 \Gamma^2} - f \right)^{-1}, \quad (22)$$

где $f = \chi_{11}/\chi_{12}$.

На рис. 2 и 3 приведена зависимость фазового сдвига от частоты kL , рассчитанная по уравнениям (21) и (22) соответственно. Дисперсионные кривые построены для случая, когда $a \sim d \ll b$, D (решение статической задачи приведено в приложении). С целью сравнения на рис. 2 и 3 приведены дисперсионные характеристики (пунктирные линии), рассчитанные в приближении, не учитывающим „перекрестных“ параметров χ_{pq} и близость щелей при определении χ_{pp} .

Уравнения (6) — (10), описывающие колебания связанных резонаторов, могут быть применены для расчета волноводных систем, представляющих собой волноводы, связь которых осуществляется посредством щелей в тонком цилиндре. В некоторых системах область связи можно условно (подобно тому, как это сделано для щели в „голстом“ экране) заменить тонким цилиндром с узкими щелями. Такие системы, очевидно, можно включить в круг задач, охватываемых уравнениями

* Условие, что щели должны быть одинаковой длины, связано с необходимостью иметь решение с синусоидальным распределением магнитного тока по щели. Последнее, как правило, необходимо для формулировки однородных импедансных граничных условий.

(6)–(10). Уравнения (6)–(10) можно использовать и при приближенном решении задачи о колебаниях тонкого цилиндра с узкими щелями, на раскрыве которых заданы импедансные граничные условия или фиксирована структура электрического поля. Наконец, уравнения

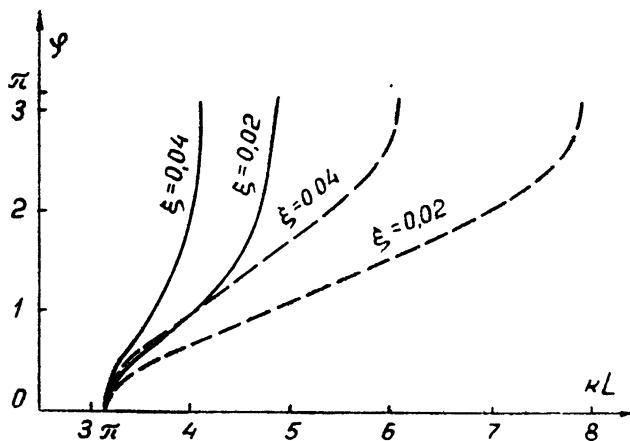


Рис. 3. Зависимость сдвига фазы φ от частоты kL при $l = 0$.
Размеры системы и обозначения приведены на рис. 2.

(6)–(10) позволяют, не раскрывая в явном виде регулярную часть поля, найти приближенное решение вынужденной задачи для частот, отличной от резонансных.

Автор весьма признателен А. В. Гапонову за замечания и советы при выполнении работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для определения параметров γ_{pq} приведем приближенное решение двухмерной статической задачи в области связи (рис. 2а). Когда размеры $a, d \ll b, D$, для отыскания потенциала внутри цилиндра удобно воспользоваться методом зеркальных отображений. „Полоски“ магнитных токов на раскрывах щели, играющие в статической задаче роль поверхностных магнитных зарядов, вместе с их отображениями можно, очевидно, заменить токами, текущими по поверхности тонких круглых цилиндров. После многократных отражений в идеальных плоских металлических экранах получим бесконечную двухмерную решетку с линейными зарядами (или токами) $2J_1$, $2J_2$ и $2J_3$. Потенциал решетки с линейными зарядами $2J_3$, расположенной в плоскости $y=nD$, следуя [7], запишем в виде:

$$\psi''(x, y, j_3) = -\frac{J_3}{\pi\mu} \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{b} (y - nD) - \cos \frac{\pi x}{b} \right] + C_n,$$

где $2b$ — период решетки, C_n — постоянная.

Суммируя по всем идентичным линейным решеткам, найдем потенциал, создаваемый линейным магнитным зарядом внутри области связи:

$$\psi_s(x, y, j_3) = -\frac{J_3}{\pi\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{b} (y - nD) - \cos \frac{\pi x}{b} \right] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n,$$

откуда

$$\tilde{\chi}_3^{-1}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \frac{\operatorname{ch}(n\pi D/b)}{\operatorname{ch}[(\pi/b)(y - nD)] - \cos(\pi x/b)}. \quad (I)$$

Здесь точке M_0 соответствует точка с координатами $x_0 = b/2$, $y_0 = 0$.

Подставляя в (I) координаты щелей 3, 2 и 1, найдем соответственно $\tilde{\chi}_{33}^{-1}$, $\tilde{\chi}_{23}^{-1}$ и $\tilde{\chi}_{13}^{-1}$. Интегральный параметр $\tilde{\chi}_{3..}^{-1}$ может быть найден путем численного интегрирования (I) по площади сечения области связи, исключая площадь сечения круглых цилиндров (токов). При вычислениях можно ограничиться первыми членами (I), так как ряд внутри области связи сходится быстро.

Параметры $\tilde{\gamma}_{q1}$ и $\tilde{\gamma}_{q2}$ определяются аналогичным образом.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. В. Гапонов, ЖТФ, 25, 1069 (1955)
2. А. В. Гапонов, ЖТФ, 25, 1085 (1955)
3. М. А. Леонович, М. Л. Левин, ЖТФ, 14, 481 (1944)
4. М. А. Миллер, ЖТФ, 24, 1483 (1954)
5. А. М. Белянцев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 1, 5—6, 112 (1958)
6. А. В. Гапонов, Электромагнитные волны вдоль цепочки связанных резонаторов, отчет ГИФТИ, Горький, 1952; Доклад на конференции МВО СССР по радиоэлектронике, Горький, 1956; А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, ЖТФ, 25, 1597 (1955).
7. Б. Хэг, Электромагнитные расчеты, Госэнергоиздат, М — Л., 1934.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 июля 1960 г.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРОХОИДАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

И. И. Антаков, В. М. Боков, Р. П. Васильев, А. В. Гапонов

Приводятся результаты теоретического исследования и экспериментальной проверки механизма взаимодействия трохоидального электронного пучка с различными типами волн прямоугольного волновода с одной «импедансной» стенкой. Неустойчивость системы (генерация или усиление высокочастотных колебаний) определяется эффектами порядка v^2/c^2 (v — скорость электрона, c — скорость света); с экспериментальными макетами получено усиление 15 ± 17 дБ.

Автофазировка возбужденных осцилляторов в поле излучения, обуславливающая возникновение в системе когерентных электромагнитных колебаний, связана, как известно [1], либо с неизохронностью свободных колебаний осцилляторов (в общем случае ангармонических), либо с их перемещением в неоднородном высокочастотном поле. В тех случаях, когда роль возбужденных осцилляторов играют электроны, вращающиеся в однородном магнитном поле, и неизохронность вращения связана только с релятивистскими эффектами (зависимостью гармоники от скорости), оба эти механизма оказываются, вообще говоря, одинаково эффективными и в равной мере могут привести к неустойчивости системы. Возможность усиления и генерирования высокочастотных колебаний при взаимодействии потока колеблющихся электронов с незамедленными электромагнитными волнами была показана в [2], где проведено общее рассмотрение систем с непрямолинейными электронными пучками, направляемыми продольным магнитным полем (винтовой или „спиральный“ пучок) или скрещенными электростатическим и магнитостатическим полями (трохоидальный пучок). Следует отметить, что с практической точки зрения системы с трохоидальными потоками обладают известными преимуществами, как конструктивными (более простые методы формирования пучка необходимой конфигурации), так и принципиальными (например, возможность подавления генерации на встречной волне при усилении E -волн [3] и относительно большой допустимый разброс электронов по скоростям).

В настоящей работе подробно рассматривается взаимодействие трохоидального электронного пучка^{*} с электромагнитными волнами в прямоугольном волноводе с тремя идеально проводящими и одной „импедансной“ стенками. На такой модели оказывается возможным выяснить основные особенности взаимодействия как с медленными, так и с „быстрыми“ волнами, а также выделить случаи, когда усиление (генерация) высокочастотных колебаний обусловлено лишь одним из указанных выше механизмов неустойчивости. В работе приводятся некоторые результаты экспериментального исследования усилителей

* Системы с винтовыми пучками будут рассмотрены в другом месте. Генерация высокочастотных колебаний в таких системах наблюдалась Пэнтелом [4].

и генераторов с трохоидальными электронными пучками, показывающие эффективность обоих механизмов

1. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛН В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ С ТРОХОИДАЛЬНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

Достаточно слабый электронный поток эффективно взаимодействует с одной из нормальных волн в линии передачи (волноводе) лишь при условии $h_0(1 + \varepsilon) = h_e + m\hbar_H$ или

$$\omega = \frac{m\omega_H}{(1 + \varepsilon)v_{\parallel}/v_{\Phi} - 1}, \quad (1)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $|\varepsilon| \ll 1$, $h_0 = \omega/v_{\Phi}^{(0)}$ — постоянная распространения соответствующей нормальной волны в „холодном“ волноводе. $v_{\parallel} = E_0/B_0$ — скорость дрейфа электронов, движущихся по трохоиде с амплитудой колебаний a в скрещенных E_0 и B_0 полях, $h_e = \omega/v$. $\hbar_H = \omega_H/v_{\parallel}$, $\omega_H = (e/m)B_0 = \eta B_0$ — гиромагнитная частота¹. Если выполнено условие синхронизма (1), то дисперсионное уравнение для поправок $\delta = (h - h_0)/h_0$ к постоянной распространения электромагнитной волны в волноводе, пронизываемом слабо релятивистским электронным потоком, в обычном приближении теории слабых сигналов (и без учета пространственного заряда) имеет, согласно [2, 5], вид

$$\delta = -\frac{I_0}{2U_0N} \frac{h_e}{h_0^3} \left\{ \frac{1}{(\delta - \varepsilon)^2} \left[|G_{xm}|^2 - \frac{1}{4} \beta_{\perp}^2 |i(G_{ym-1} - G_{ym+1}) + G_{zm+1} + G_{zm-1}|^2 \right] - \frac{1}{(\delta - \varepsilon)} \frac{h_0}{2\hbar_H} [4J_m(G_{zm}G_{ym}^*) + |G_{ym+1}|^2 - |G_{zm+1}|^2 - 2J_m(G_{zm-1}G_{ym+1}^*) - |G_{ym-1}|^2 - |G_{zm-1}|^2 - 2J_m(G_{zm-1}G_{ym-1}^*)] \right\}, \quad (2)$$

где I_0 — ток пучка, $U_0 = v_{\parallel}^2/2\eta$ — напряжение, соответствующее скорости дрейфа, $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$ (c — скорость света, $v_{\perp} = \omega_H a$ — поперечная скорость электронов), G_{xp} , G_{yp} , G_{zp} — коэффициенты Фурье высокочастотной лоренцовой силы, действующей на электрон, движущийся по стационарной траектории в поле невозмущенной нормальной волны, N — норма этой волны.

Коэффициенты G_{xp} , G_{yp} и G_{zp} определяются формой стационарной траектории электронов в пучке (для электронов, движущихся по трохоиде — продольной скоростью v_{\parallel} , амплитудой колебаний a и частотой ω_H) и структурой поля волны^{**}. Структуру поля собственных волн прямоугольного волновода с „импедансной“ стенкой, представляющих собой суперпозицию E - и H -волн, можно найти, воспользовавшись результатами работы [6]. Мы ограничимся здесь рассмотрением таких волн в волноводе с поперечно-ребристой структурой (рис. 1), которые переходят в H_{0n} -волны при стремлении высоты ребер (поверхностного импеданса) к нулю. Поле этих волн имеет компоненты

$$E_z = -i\gamma \cos(x_n x) \operatorname{sh}(\gamma y); \quad H_y = \frac{x_n \gamma}{kZ_0} \sin(x_n x) \operatorname{sh}(\gamma y);$$

* В отличие от [5], мы ограничиваемся сразу слабо релятивистскими электронными потоками ($\beta_{\perp}^2 = v_{\perp}^2/c^2 \ll 1$) и пользуемся практической системой единиц

** Подробнее об обозначениях см. работы [2].

$$E_y = h_n \cos(\chi_n x) \operatorname{ch}(\gamma y); H_z = -\frac{k^2 - \chi_n^2}{kZ_0} \cos(\chi_n x) \operatorname{ch}(\gamma y); \quad (3)$$

$$H_x = -i \frac{h_n \chi_n}{kZ_0} \sin(\chi_n x) \operatorname{ch}(\gamma y)$$

Здесь $\chi_n = n\pi/b_1$, $h_n^2 = k^2 - \chi_n^2 + \gamma^2$, $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$, ϵ_0 и μ_0 — диэлектрические проницаемости среды (вакуума), заполняющей волновод; поперечные волновые числа χ_n определяются уравнением $Z_0 k \gamma \operatorname{th}(\gamma a_1) = Z_{\text{пов}} (k^2 - \chi_n^2)$, где $Z_{\text{пов}}$ — поверхностный импеданс (продольная компонента) на верхней стенке волновода*. Волновой множитель $e^{(i\omega t - h_n z)}$ в компонентах поля (3) опущен.

Отметим, что волны рассматриваемого типа могут обладать как обычной, так и обратной дисперсией. Действительно, при $k > \chi_n$ и $Z_{\text{пов}} > 0$ фазовая и групповая скорости волны имеют одинаковые знаки ($v_\phi v_{rp} > 0$), а при $k < \chi_n$ и $Z_{\text{пов}} < 0$ — разные ($v_\phi v_{rp} < 0$). Соответственно и норма волны, равная в системе

мощности,

$$N = \frac{1}{2} \frac{(k^2 - \chi_n^2) h_n b_1}{k \gamma Z_0} \left[\gamma a_1 + \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2\gamma a_1) \right] \quad (4)$$

меняет при этом знак. Таким образом, на рассматриваемой модели могут быть выяснены особенности взаимодействия как с прямыми, так и с обратными волнами**.

Вычисляя коэффициенты G_{xp} , G_{yp} и G_{zp} для полей (3) по общим формулам (см., например, [2]), получим***:

$$G_{vp} = h_0 \cos(\chi X_0) \left[\left(1 - \frac{k^2 - \chi^2}{h_0 h_e} \right) J_p \operatorname{ch} q_p + \frac{k^2 - \chi^2}{2h_0 h_e} h_H a (J_{p-1} \operatorname{ch} q_{p-1} + J_{p+1} \operatorname{ch} q_{p+1}) \right]; \quad (5)$$

$$G_{yp} = h_0 \sin(\chi X_0) \left[\frac{\gamma}{h_0 h_e} J_p \operatorname{sh} q_p + \frac{h_H}{2h_e} \chi a (J_{p-1} \operatorname{ch} q_{p-1} - J_{p+1} \operatorname{ch} q_{p+1}) \right]$$

* Для ребристой структуры, изображенной на рис. 1,

$$Z_{\text{пов}} = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \sqrt{\frac{u_p}{\epsilon_p}} \left(1 - \frac{\chi_n^2}{\omega^2 \epsilon_p \mu_p} \right)^{-1/2} \operatorname{tg} \sqrt{\omega^2 \epsilon_p \mu_p - \chi_n^2} l_p,$$

где ϵ_p и μ_p — проницаемости среды, заполняющей пространство между ребрами.

** Мы будем классифицировать волны по дисперсионным свойствам — на прямые ($v_\phi v_{rp} > 0$, $N > 0$) и обратные ($v_\phi v_{rp} < 0$, $N < 0$), а также по направлениям распространения по отношению к электронному потоку — на попутные ($v_\parallel v_\phi > 0$) и встречные ($v_\parallel v_\phi < 0$). Соответствующие знаки h_0 , N и $h_0 h_e$ должны быть учтены при анализе дисперсионного уравнения.

*** Индекс, указывающий номер волны, в дальнейшем не выписывается

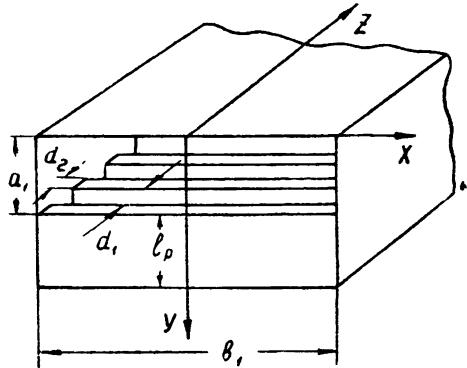


Рис. 1 Волновод с поперечно-ребристой структурой

без потерь учетверенному потоку

$$-\frac{\gamma^2}{2h_0h_e} h_H a (J_{p-1} \sin q_{p-1} + J_{p+1} \sin q_{p+1}) \Big];$$

$$G_{zp} = -ih_0 \cos(\kappa X_0) \left[\frac{\gamma}{h_0} J_p \sin q_p + \frac{k^2 - \gamma^2}{2h_0h_e} h_H a (J_{p-1} \sin q_{p-1} - J_{p+1} \sin q_{p+1}) \right], \quad (5)$$

где $q_p = \gamma Y_0 + \frac{1}{2} p \ln \frac{h_0 - \gamma}{h_0 + \gamma}$, X_0 и Y_0 — поперечные координаты прямой, по которой перемещается центр окружности, образующей трохоидальную траекторию электрона, a — радиус этой окружности (амплитуда колебаний), J_p — функция Бесселя первого рода с аргументом $a \sqrt{h_0^2 - \gamma^2}$.

Громоздкость выражений (5) для коэффициентов G_p не позволяет провести исследование корней дисперсионного уравнения (2) в общем виде. Поэтому ниже мы рассмотрим лишь некоторые наиболее характерные частные случаи, поясняющие описанные в [1,2] механизмы неустойчивости и дающие достаточно полное представление о характере взаимодействия трохоидального электронного пучка с электромагнитными волнами в прямоугольном волноводе.

2 ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТРОХОИДАЛЬНОГО ПУЧКА С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ РАЗЛИЧНОЙ СТРУКТУРЫ

1 Взаимодействие с H_{01} -волной в гладкостенном прямоугольном волноводе. Для перехода к H_{01} -волне в гладкостенном волноводе в формулах (3)–(5) надо положить $\gamma = 0$. После подстановки коэффициентов G_p в (3) и несложных преобразований получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} \delta = & -\frac{I_0}{8U_0N} \frac{h_e}{h_0} \left\langle \frac{1}{(\delta - \varepsilon)^2} \left\{ \left[\kappa a \frac{h_H}{h_e} \sin(\kappa X_0) \right]^2 - \beta_\perp^2 \cos^2(\kappa X_0) \times \right. \right. \\ & \times \left(1 - \frac{h_0}{h_e} \right)^2 \left\{ [J_{m+1}(h_0a) - J_{m+1}(h_0a)] + \frac{2h_0h_H}{(\delta - \varepsilon)h_e^2} [(h_0a)^2 - m^2] \cos^2(\kappa X_0) \times \right. \\ & \times \left. \left. [J_{m+1}^2(h_0a) - J_{m+1}^2(h_0a)] \right\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

При достаточно слабых токах пучка I_0 (расстройка ε тоже предполагается достаточно малой) в общих скобках (6) можно учитывать только первый член, пропорциональный $(\delta - \varepsilon)^{-2}$. Дисперсионное уравнение имеет в этом случае вид:

$$\begin{aligned} \delta(\delta - \varepsilon)^2 = & -\frac{I_0}{8U_0N} \frac{h_e}{h_0} \left\{ \left[\kappa a \frac{h_H}{h_e} \sin(\kappa X_0) \right]^2 - \beta_\perp^2 \cos^2(\kappa X_0) \left(1 - \frac{h_0}{h_e} \right)^2 \right\} \times \\ & \times |J_{m+1}(h_0a) - J_{m+1}(h_0a)|^2, \end{aligned} \quad (6a)$$

характерный для ламп с бегущей волной типа „0“ (взаимодействие типа „0“), и при малой ε всегда имеет комплексные корни. Таким

образом, взаимодействие типа „0“ обеспечивает нарастание* как быстрых ($v_{\perp} < v_{\phi}$, $m < 0$), так и медленных ($v_{\perp} > v_{\phi}$, $m > 0$) волн; фазовая скорость волны и средняя скорость пучка могут либо совпадать по направлению ($h_0 h_e > 0$ — попутная волна), либо быть направлены навстречу друг другу ($h_0 h_e < 0$ — встречная волна).

Два слагаемых в правой части (6а) соответствуют двум различным механизмам взаимодействия типа „0“. Первое слагаемое обусловлено пространственной рассортировкой возбужденных осцилляторов (вращающихся электронов) [1]. Этот механизм аналогичен действующему в так называемой лампе с поперечным полем [7]. Смещение электронов в поперечном направлении (вдоль постоянного магнитного поля B_0) осуществляется благодаря действию высокочастотного магнитного поля^{**} таким образом, что электроны, находящиеся в благоприятной фазе, оказываются в среднем в более сильном высокочастотном поле, а находящиеся в неблагоприятной фазе — в более слабом. Механизм пространственной рассортировки наиболее эффективен в том случае, если пучок находится в сильно неоднородном поле — в рассматриваемом примере в узле поля $E(\sin(\omega X_0) = 1)$. В квазиоднородном поле вблизи максимума $E(\sin(\omega X_0) \rightarrow 0)$ пространственной рассортировки не происходит.

Второе слагаемое в правой части (6а) соответствует фазовой группировке (автофазировке) вращающихся электронов в поле волны, которая имеет место благодаря неизохронности вращения релятивистской заряженной частицы в постоянном магнитном поле. Зависимость гиromагнитной частоты^{***} $\omega_H = (e/m_0) B_0 \sqrt{1 - (v_{\perp}^2 + v^2)/c^2}$ от скорости приводит к тому, что электроны, отдавшие энергию высокочастотному полю, вращаются быстрее, а снявшие энергию у поля — медленнее. Возникающая в результате группировка электронов подобна группировке в обычной ЛБВ типа „0“, но поскольку в рассматриваемом случае тормозящиеся электроны догоняют (по фазе) ускоряющиеся, знак соответствующего слагаемого в правой части (6а) противоположен знаку правой части в дисперсионном уравнении ЛБВ. Фазовая группировка, как и следовало ожидать, оказывается наиболее эффективной, если электронный поток проходит в области сильного электрического поля ($\cos(\omega X_0) \rightarrow 1$). Следует отметить, что, хотя фазовая группировка связана с существенно релятивистскими эффектами, оба слагаемых в правой части (6а) по порядку величины, вообще говоря, одинаковы ($\omega \sim \beta_{\perp}$ при $\omega \sim \omega/c$).

При достаточно сильных токах пучка I_0 и относительно небольших поперечных скоростях $v_{\perp} = \omega_H \alpha$ поправки δ , определяемые дисперсионным уравнением (6), могут оказаться настолько большими, что $\beta_{\perp}^2 \ll |\delta - \epsilon| h_0 / h_e = |\delta - \epsilon| v_{\perp} / v_{\phi}$. При этом условии в общих скобках (6) можно пренебречь слагаемым, пропорциональным $(\delta - \epsilon)^{-2}$, и уравнение (6) сводится к квадратному уравнению

* Вопрос об устойчивости системы конечной длины может быть решен только после того, как удовлетворены граничные условия на входном и выходном концах. Согласованная система обычно устойчива, если $v_{\perp} v_{1p} > 0$ (при этом либо $h_0 h_e > 0$, $N > 0$, либо $h_0 h_e < 0$, $N < 0$), и может оказаться неустойчивой, если $v_{\perp} v_{1p} < 0$ (при этом либо $h_0 h_e > 0$, $N < 0$, либо $h_0 h_e < 0$, $N > 0$) и длина ее достаточно велика

** В общем случае пространственная рассортировка может быть обусловлена и поперечной (параллельной B_0) компонентой высокочастотного электрического поля [2].

*** Строго говоря, речь идет о гиromагнитной частоте в сопровождающей (движущейся со скоростью v_{\parallel}) системе отсчета [5].

$$\delta(\delta - \varepsilon) = \frac{I_0}{4U_0N} \frac{h_H}{h_e} [(h_0a)^2 - m^2] [J_{m-1}^2(h_0a) - J_{m+1}^2(h_0a)] \cos^2(xX_0), \quad (66)$$

характерному для лами с бегущей волной типа „M“ (взаимодействие типа „M“).

Наличие комплексных корней у этого уравнения (т. е. возможность усиления или генерирования высокочастотных колебаний при взаимодействии типа „M“) определяется знаком функции $\Phi(h_0a, m) = [(h_0a)^2 - m^2] (J_{m-1}^2 - J_{m+1}^2)$. Если $h_0a \ll 1$ (в силу $\beta_\perp^2 \ll 1$ это имеет место при $h_0 \ll \omega/c$, в частности, для волновода без диэлектрического заполнения), то $\Phi > 0$ при $m < 0$ и $\Phi < 0$ при $m > 0$; отсюда следует, что (66) имеет комплексные корни только при $m > 0$ (т. е. при $v_\perp > v_\Phi$). Случай $h_0a \geq 1$ в силу условия $\beta_\perp^2 \ll 1$ может быть реализован только за счет заполнения волновода диэлектриком с достаточно большой диэлектрической проницаемостью; при этом правая часть (66) может быть отрицательной, как при $m > 0$, так и при $m < 0$ ($v_\perp \gtrless v_\Phi$). Отметим, однако, что поскольку $h_0a \sim v_\perp/v_\Phi$, то и в этом случае речь идет о взаимодействии с замедленными (по отношению к скорости света c) волнами. Таким образом, взаимодействие типа „M“ в волноводе с трохоидальным пучком может обеспечить нарастание только замедленных электромагнитных волн.

2 Взаимодействие с несимметричной волной в гребенчатом волноводе. Если трохоидальный электронный пучок лежит в плоскости, где напряженность электрического поля волны обращается в нуль (узел поля E), то $G_{yp} = G_{zp} = 0$ (см. (5)), и взаимодействие пучка с волной обеспечивается только благодаря пространственной рассортировке электронов высокочастотным магнитным полем. В результате подстановки (5) в дисперсионное уравнение (2) получим:

$$\begin{aligned} \delta(\delta - \varepsilon)^2 - C_m^3 = & - \frac{I_0}{4U_0N} \frac{h_e}{h_0 h_e} \left\{ \frac{2\gamma z}{h_0 h_e} J_m \sinh q_m + \frac{h_H}{h_e} \alpha (J_{m-1} \cosh q_{m-1} - \right. \\ & \left. - J_{m+1} \cosh q_{m+1}) - \frac{\gamma h_H}{h_0 h_e} \alpha (J_{m-1} \sinh q_{m-1} + J_{m+1} \sinh q_{m+1}) \right\}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

В том практически интересном случае, когда скорость электронов много меньше фазовой скорости волны: $v_\perp, v_z \ll v_\Phi$ ($h_e < h_0$; $h_0a \sim \alpha a \ll 1$), уравнение (7) принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta(\delta - \varepsilon)^2 \equiv C_m^3 = & - \frac{I_0}{4U_0N} \frac{h_H^2}{h_0 h_e} (\alpha a)^2 J_{m+1}^2 \left(a \sqrt{h_0^2 - \gamma^2} \right) \times \\ & \times \left(\cosh q_{m+1} + \frac{\gamma}{h_0} \sinh q_{m+1} \right)^2. \end{aligned} \quad (7a)$$

В частности, при $m = -1$ ($h_0(1 + \varepsilon) = h_e - h_H$)

$$\delta(\delta - \varepsilon)^2 \equiv C_{-1}^3 = - \frac{I_0}{4U_0N} \frac{h_H^2}{h_0 h_e} (\alpha a)^2 \left(\cosh \gamma Y_0 + \frac{\gamma}{h_0} \sinh \gamma Y_0 \right)^2 \quad (7b)$$

Таким образом, в рассматриваемой системе (так же, как и в гладкостенном волноводе) взаимодействие типа „0“ обеспечивает нарастание и быстрых, и медленных волн. Следует, однако, заметить, что уравнения (7)–(7b) остаются справедливыми, вообще говоря, при больших токах I_0 , чем (6a).

Весьма интересной особенностью взаимодействия трохоидального пучка с волнами в гребенчатом волноводе (как, впрочем, с E -или EH -волнами в любой линии передачи) является различная эффективность взаимодействия с попутными и встречными волнами [1]. Эта особенность обусловлена эллиптической поляризацией поля волны: направление вращения вектора напряженности электрического поля при изменении знака h_0 меняется на противоположное, а средние значения силы, действующей на вращающийся электрон, оказываются существенно разными. Соответственно и параметры усиления C_m для попутной и встречной волн различны (см., например, (7а) и (7б)) и зависят от знака γ/h_0 . На рис. 2 приведены системы с благоприятной поляризацией для усиления на попутной волне (2а) и генерирования на встречной (2б). Нетрудно видеть, что при должном выборе параметров волноводной системы (коэффициент усиления $G_{y0} = (\gamma/h_0) \operatorname{sh} q_{m=1}$) взаимодействие со встречной волной может быть полностью подавлено. Это позволяет избежать самовозбуждения усилителя на встречной волне при достаточно больших значениях коэффициента усиления*.

3. Взаимодействие с симметричной ($\chi = 0$) волной гребенчатого полоскового волновода. В симметричной волне поле имеет компоненты E_y, E_z, H_x и не зависит от поперечной координаты x . Поэтому $G_{xp} = 0$, и взаимодействие типа „0“ обеспечивается автофазировкой вращающихся электронов (релятивистский эффект); взаимодействие типа „M“ также имеет место. Ввиду громоздкости дисперсионного уравнения (2) ограничимся квазистационарным приближением ($v_\phi \ll c, \gamma = h_0$). В этом приближении

$$\begin{aligned} G_{y0} &= h_0 \operatorname{ch}(h_0 Y_0), \quad G_{z0} = -h_0 \operatorname{sh}(h_0 Y_0) \quad (m = 0); \\ G_{ym} &= G_{zm} = \frac{1}{2} h_0 e^{-h_0 Y_0} (h_0 a)^m / m! \quad (m > 0); \\ G_{ym} &= -G_{zm} = \frac{1}{2} (-1)^m h_0 e^{h_0 Y_0} (h_0 a)^{|m|} / |m|! \quad (m < 0). \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение для нормы симметричной волны получается из (3) умножением на 2 и подстановкой $\chi = 0$: В квазистационарном приближении нужно, кроме того, положить $\gamma = h_0$.

Рассмотрим отдельные частные случаи.

* Если $v \ll v_\phi$, то генерация и усиление происходят на близких частотах: $\omega_{\text{ген}} - \omega_{\text{усил}} \sim 2m \frac{v}{v_\phi}$, поэтому параметры для попутной и встречной волн с линейной поляризацией приближенно равны (см., например, (6а)). При этих условиях, как известно, предельно достижимое усиление на попутной волне в системе без потерь равно, примерно, 5 дБ.

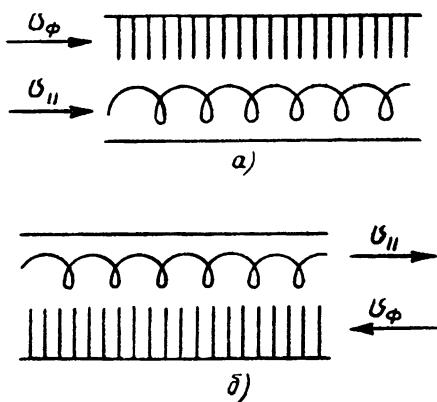


Рис. 2 Системы с эллиптической поляризацией поля волны
а) усилитель на попутной волне б) генератор на встречной волне

а) *Магнетронный усилитель с трохоидальным пучком.* Магнетронный усилитель работает при синхронизме $h_e = h_0(1 + \varepsilon)$, $|\varepsilon| \ll 1$, $m = 0$. Подставляя G_{y0} и G_{z0} в (2), получим дисперсионное уравнение

$$\delta(\delta - \varepsilon) = -\frac{I_0}{U_0 N} \frac{h_e}{h_H} \operatorname{sh}(h_0 Y_0) \operatorname{ch}(h_0 Y_0), \quad (9)$$

совпадающее с дисперсионным уравнением для магнетронного усилителя с прямолинейным пучком [7]. Таким образом, в квазистационарном приближении на работу магнетронного усилителя не влияют ни отклонения электронов от прямолинейных траекторий, ни релятивистские эффекты.

б) *Взаимодействие с быстрой ($v_\phi > v$) электромагнитной волной на частоте $\omega = \omega_H(1 - v/v_\phi)^{-1}$ ($m = -1$).* Для прямолинейного электронного потока этот режим рассмотрен в [7]. Учет трохоидальности траектории и релятивистских эффектов (неизохронности вращения электронов) приводит к появлению новых членов в дисперсионном уравнении, существенно меняющих характер взаимодействия: появляется взаимодействие типа „0“, обусловленное автофазировкой вращающихся электронов. Уравнение (2) приобретает вид:

$$\delta = \frac{I_0}{8U_0 N} \frac{h_e}{h_0} \left\{ \frac{\beta_\perp^2}{(\delta - \varepsilon)^2} + \frac{2[1 - (h_0 a)^2]}{\delta - \varepsilon} \frac{h_0}{h_H} \right\} e^{2h_0 Y_0}. \quad (10)$$

Зависимость абсолютной величины мнимой части комплексных корней этого уравнения от параметра $C = \left(\frac{I_0}{8U_0 N} \frac{h_e}{h_0} \beta_\perp^2 e^{2h_0 Y_0} \right)^{1/3}$ изображена на рис. 3 для $h_H/h_0 = 30$, $v_\phi c = 1.3$, $\varepsilon = 0$ и двух значений параметра $h_0 a = v_\perp (v_\phi - v_\perp)^{-1}$.

При малых C преобладает взаимодействие типа „0“, дающее $|\operatorname{Im} \delta| \approx \sqrt{3/2} (C)$; для больших C начинает сказываться взаимодействие типа „M“, которое либо увеличивает (при $h_0 a > 1$), либо уменьшает (при $h_0 a < 1$) коэффициент нарастания волны. В системе с прямолинейным пучком ($\beta_\perp = 0$) $\operatorname{Im} \delta \equiv 0$.

в) *Взаимодействие с медленной ($v_\phi < v_\perp$) электромагнитной волной на частоте $\omega = \omega_H(v_\perp/v_\phi - 1)^{-1}$ ($m = 1$)* описывается уравнением (10), но с заменой $h_H \rightarrow -h_H$ (знак — перед вторым слагаемым в фигурной скобке). Характер зависимости $|\operatorname{Im} \delta|$ от C сохраняется; теперь, однако, взаимодействие типа „M“ обеспечивает нарастание волны при $h_0 a < 1$. Нарастание волны сохраняется и при $\beta_\perp = 0$, что соответствует неустойчивости, связанной с аномальным эффектом Допплера [8,9].

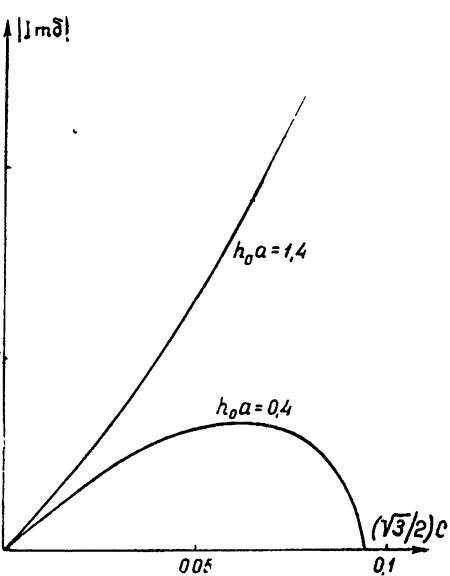


Рис. 3 Зависимость $|\operatorname{Im} \delta|$ от параметра C для полоскового гребенчатого волновода с трохоидальным электронным пучком

неустойчивости, связанной с аномальным эффектом Допплера [8,9].

г) *Взаимодействие с быстрой электромагнитной волной на ча-*

стоте $\omega = |m| \omega_H (1 - v_{\perp}/v_{\Phi})^{-1}$ ($m < 0$). Дисперсионное уравнение в этом случае записывается в виде, аналогичном (9):

$$\delta(\delta - \varepsilon)^2 = C_m^2 = \frac{I_0}{8U_0N} \frac{h_e}{h_0} \left\{ \frac{\beta_{\perp}^2}{(\delta - \varepsilon)^2} + \frac{2}{\delta - \varepsilon} \left[1 - \frac{(h_0a)^2}{m^2} \right] \frac{h_0}{h_H} \right\} \times \\ \times \left[\frac{(h_0a)^{|m|-1}}{(|m|-1)!} \right]^2 e^{2h_{\perp}}, \quad (11)$$

Эффективность взаимодействия падает с ростом $|m|$, но при $v_{\perp}/v_{\Phi} \sim 1$ спадание достаточно медленное.

В заключение отметим, что в симметричной волне ($z = 0$) в гребенчатом полосковом волноводе вектор напряженности электрического поля также поляризован по эллипсу. Эффективность взаимодействия типа „0“ с попутными и встречными волнами различна, благодаря чему в усилителе (см. рис. 2а) может быть подавлена генерация на встречной волне.

3. ЭКСПЕРИМЕНТ

С целью экспериментального исследования описанных выше механизмов взаимодействия трохоидального электронного пучка с электромагнитными волнами были сконструированы и испытаны две модели усилителей с гребенчатой замедляющей системой (типа, схематически изображенного на рис. 4). Обе модели были рассчитаны для работы в трехсантиметровом диапазоне волн. В обеих использовались трохоидальные электронные пучки, направляемые скрещенными E_0 - и H_0 - полями, с отношением поперечной ($v_{\perp} = a \omega_H$) и продольной ($v_{\parallel} = E_0/B_0$) скоростей больше единицы: $f = v_{\perp}/v_{\parallel} \approx 3 \div 5$ при $U_0 = v_{\parallel}^2/2\eta \approx 200$ в. Формирование таких пучков осуществлялось при помощи неоднородного магнитного поля с перепадом от $500 \div 1000$ эрстед в области катода до $3000 \div 3500$ эрстед в рабочем участке лампы. Согласование гребенки (замедление $1,5 \div 3$) с внешним трактом — стандартным прямоугольным волноводом — осуществлялось посредством плавных переходов.

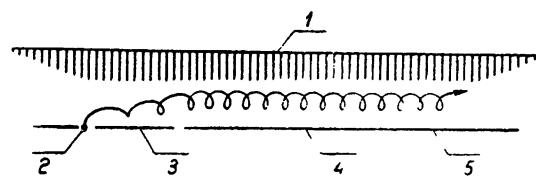


Рис. 4 Модель усилителя с гребенчатой линией замедления.

1—гребенчатый анод, 2 — катод, 3 — фокусирующий электрод, 4 — электронный луч, 5 — катодная пластина.

1. Первая модель предназначалась для исследования взаимодействия типа „0“ (усиления) в режиме автофазировки вращающихся электронов. Как было показано в предыдущем разделе, автофазировка обусловлена неизохронностью вращения электронов в магнитном поле, т. е. является релятивистским эффектом. В усилителе была использована основная (симметричная, $z = 0$) волна гребенчатого полоскового волновода; как было показано в разделах 2 и 3, нарастание волн в такой системе обеспечивается только автофазировкой, так как пространственная рассортировка отсутствует, а взаимодействие типа „M“ на частоте $\omega \approx \omega_H (1 - v_{\parallel}/v_{\Phi})^{-1}$ не приводит к усилению. Специальное внимание уделялось исключению возможности отбора ускоряющихся электронов на катодную пластину или анод, так как обусловленное таким отбором усиление [3] могло исказить исследуемый эффект.

Пользуясь дисперсионным уравнением (10), нетрудно оценить воз-

можный коэффициент усиления лампы на частоте $\omega \approx \omega_H (1 - v_1/v_F)^{-1}$. Для $\beta_{\perp} \approx 0,1$, $h_e/h_0 = 30$, $I_0 Z_0 / 8U_0 = 10^{-3}$ получим $|Im \delta| = 5 \cdot 10^{-2}$. Отсюда видно, что рабочая длина пространства взаимодействия порядка десяти длин волн (при замедлении $S = 3$, $L = 110 \text{ мм}$) обеспечивает коэффициент усиления $G = 9.54 \div 47.3 \text{ CN} \approx 10 \text{ дБ}$. В соответствии с этим расчетом и была изготовлена лампа, по конструкции аналогичная использовавшейся ранее для изучения усиления в режиме с отбором ускоряющих электронов [9].

Поскольку такая система может работать как в режиме автофазировки, так и в режиме с отбором, наибольший (с точки зрения разделения этих режимов) интерес представляет зависимость коэффициента усиления от напряжения на катодной пластине V_{kp} , изменение которого меняет положение луча между анодом и катодной пластиной. Типичная зависимость $G(V_{kp})$ приведена на рис. 5 для двух значений мощности

на входе усилителя; там же приведены значения тока на катодную пластину в отсутствие (сплошная кривая) и при наличии (пунктирные кривые) высокочастотного сигнала. Из графика видно, что при $V_{kp} < 500 \text{ в}$ отбор электронов на катодную пластину отсутствует и взаимодействие пучка с полем происходит только за счет автофазировки вращающихся электронов (отбор на анод при этом также отсутствует, так как амплитуда колебаний электронов мала по сравнению с зазором между катодной пластиной и анодом). При $V_{kp} > 500 \text{ в}$ электронный луч, приподнятый над фокусирующим электродом (подъем происходит из-за движения в неоднородном магнитном поле), снижается к катодной пластине и появляется ток отбора. Из графика для коэффициента усиления видно, что при этом происходит наложение двух механизмов взаимодействия, нарушающее монотонный ход кривой $G(V_{kp})$.

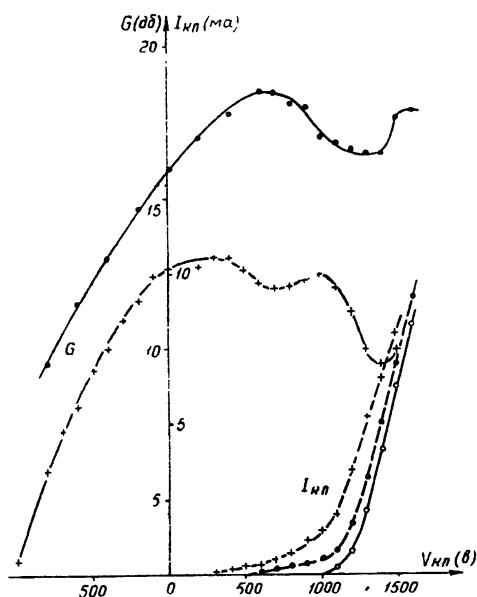


Рис. 5. Зависимость коэффициента усиления и тока на катодную пластину от напряжения на катодной пластине для двух значений величины входной мощности.

— · — · — $P_{Bx} = 0,05 \text{ вт}$, — × — × — $P_{Bx} = 0,5 \text{ вт}$ ($U_a = 4800 \text{ в}$, $I_a = 32 \text{ ма}$), —○—○— ток на катодную пластину при $P_{Bx} = 0$.

Нарастание усиления в режиме автофазировки с увеличением V_{kp} может быть качественно объяснено уменьшением напряженности электростатического поля (напряжения U_0) в пространстве взаимодействия.

Мы не приводим здесь других характеристик усилителя такого типа; укажем только, что с некоторыми образцами ламп было получено усиление до $15 \div 17 \text{ дБ}$ в полосе 300 мгц при выходной мощности до 40 вт , токе пучка $I_0 \approx 60 \text{ ма}$ и анодном напряжении $U_a = 8000 \text{ в}$.

2. Взаимодействие типа „0“ в режиме пространственной рассортировки исследовалось на модели, в которой трохоидальный электронный пучок проходил в узле электрического поля несимметричной EH -волны гребенчатого волновода. В п. 2 второго раздела было показано, что в такой системе действует только пространственная рассортировка,

а) автоФазировка вращающихся электронов и взаимодействие типа „М“ отсутствуют. Добавим, что отбор электронов в этом случае также не приводит к нарастанию электромагнитных волн, если, конечно, пучок не слишком отклоняется от плоскости нулевого электромагнитного поля. Таким образом, в лампе такой конструкции уже сам факт усиления однозначно указывает на эффективность механизма пространственной рассортировки.

В испытывавшихся макетах с целью сокращения поперечных размеров волноведущий зазор был выполнен в виде буквы „П“ (рис. 6а).

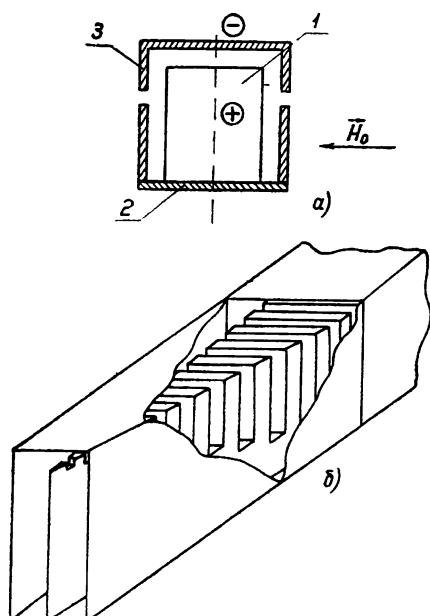


Рис. 6. а) Поперечный разрез усилителя с трохоидальным электронным пучком в узле электрического поля:

1 — гребенка, 2 — основание гребенки, 3 — катодная пластина

б) Клинообразный трансформатор.

том. Зависимость коэффициента усиления от напряжения на катодной пластине $G(V_{kp})$ качественно такая же, как в режиме автоФазировки вращающихся электронов (рис. 5), но без характерного излома при появлении тока на катодную пластину. В типичном режиме ($V_a \approx 1,5 - 2 \text{ кВ}$, $I_0 = 25 - 30 \text{ мА}$, $a = 0,5 \text{ мм}$) было получено усиление $G = 15 \div 17 \text{ дБ}$ в полосе $\Delta\omega/\omega \approx 1\%$ и с КПД $\approx 1\%$. (Следует, впрочем, отметить, что специальных мер для увеличения КПД не принималось.) Дальнейшее увеличение тока I_0 приводило к увеличению усиления, причем при $I_0 > 30 \div 35 \text{ мА}$ начиналась генерация как на встречной, так и на по-путной волне (из-за несовершенства поглотителя).

3. Наряду с усилением на частоте $\omega \approx \omega_H (1 - v_{\perp}/v_{\phi})^{-1}$ в более подробно обследованных моделях первого типа (усилитель с автоФазировкой вращающихся электронов) наблюдалось усиление на второй и третьей гармониках $\omega = |m| \omega_H (1 - v_{\perp}/v_{\phi})^{-1}$ ($m = -2, -3$). Ввиду меньшего параметра усиления C и относительно малой длины лампы полученное усиление не превышало $4 \div 5 \text{ дБ}$.

Катодная пластина (3) отделена от основания гребенки (2) продольным разрезом, расположенным в узле продольного высокочастотного магнитного поля. Антисимметричное (относительно плоскости симметрии системы и плоскости пучка) высокочастотное электрическое поле в таком П-образном гребенчатом волноводе создавалось при помощи клинообразного гребенчатого трансформатора (рис. 6б), преобразующего волну H_{01} стандартного прямоугольного волновода в волну требуемой структуры. На выходе лампы антисимметричная волна снова трансформировалась в волну H_{01} . Длина рабочего участка лампы $L = 170 \text{ мм}$ (около 11 длин волн при замедлении $S = 2$) была выбрана с таким расчетом (в соответствии с дисперсионным уравнением (7б)), чтобы обеспечить усиление порядка 20 дБ.

Эксперимент дал результаты, находящиеся в удовлетворительном согласии с расчетами

Исследование взаимодействия трохоидального электронного пучка с электромагнитными волнами в прямоугольном гребенчатом волноводе позволило проиллюстрировать на простейших моделях основные типы взаимодействия системы возбужденных осцилляторов с высокочастотным полем в волноводе. Результаты эксперимента, достаточно хорошо согласующиеся с расчетными данными, свидетельствуют, что для электронов, вращающихся в постоянном магнитном поле, оба механизма взаимодействия типа „О“ (автофазировка и пространственная рассортировка) одинаково эффективны и могут быть использованы в усилителях и генераторах микрорадиоволн.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- 1 А. В. Гапонов, ЖЭТФ, 39, 326 (1960).
- 2 А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 443 (1959); 2, 863 (1959).
- 3 В. М. Боков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 730 (1959).
- 4 Н. Рантелл, Proc. IRE, 47, 1146 (1959).
- 5 А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печаги).
- 6 М. А. Миллер. ЖТФ, 25, 1972 (1955).
7. Д. Р. Пирс, Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио,, М., 1952
8. В. Л. Гинзбург, УФН, 69, 537 (1959).
9. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 180 (1960).
10. И. И. Антаков, Р. П. Васильев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 741 (1959)

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
13 июля 1960 г.

КЛИСТРОН С ЭЛЕКТРОННЫМ ЛУЧОМ, УПРАВЛЯЕМЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ*

B. C. Ергаков, A. A. Шапошников

Рассматривается электронный прибор клистронного типа, принцип работы которого основан на модуляции электронов по скоростям, направленным перпендикулярно их статическим траекториям. Получены выражения для коэффициентов усиления и шума

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время особенно интенсивно проводится поиск новых методов усиления, обеспечивающих низкий уровень шумов. В этом направлении достигнуты большие успехи; тем не менее, рассмотрение любых вариантов малошумящих усилителей представляет несомненный интерес. В настоящей статье рассматривается клистрон с поперечным полем, т. е. прибор, в котором управление лучом осуществляется высокочастотным электрическим полем, перпендикулярным статическим траекториям электронов, в то время как энергетический эффект усиления имеет место благодаря взаимодействию электронов с продольным электрическим полем.

Работа клистрона с поперечным полем, который по своей конструктивной схеме в значительной степени аналогичен обычному двухконтурному клистрону, может быть пояснена на примере простейшего варианта лампы, изображенного на рис. 1. В качестве входного устройства, модулирующего электроны по скоростям, используется

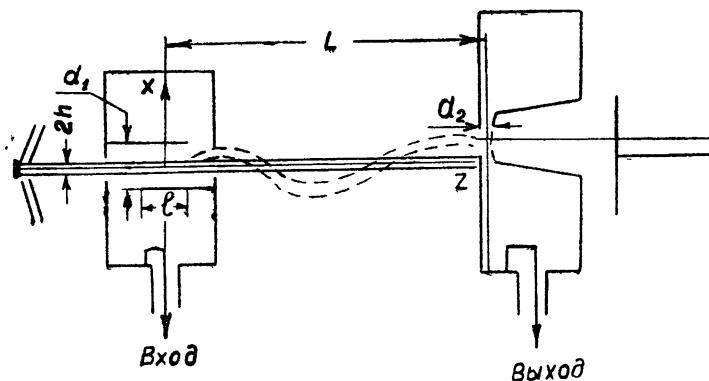


Рис. 1. Схема клистрона с поперечным полем.

резонатор с электрическим полем, сосредоточенным в узком зазоре и направленным перпендикулярно плоскости симметрии системы (вдоль оси x). Такой резонатор может иметь, например, форму цилиндрической полости, к торцевым стенкам которой прикреплены две пластины, образующие емкостной зазор (см. рисунок). Выходным устрой-

* Доклад на III Всесоюзной конференции МВО по электронике, Киев, 1959

ством служит тороидальный резонатор с электрическим полем, направленным параллельно оси z .

Электронный луч ленточной формы (с широкой стенкой, параллельной плоскости yz), попадая в первый резонатор, взаимодействует с электрическим полем входного сигнала. В результате этого электроны приобретают некоторую поперечную скорость и движутся в пространстве дрейфа по прямолинейным траекториям, образующим с плоскостью yz углы, величины которых зависят от фазы влета в зазор. После пространства дрейфа электронный луч, положение которого в плоскости $z = \text{const}$ изменяется во времени по закону изменения напряжения на первом контуре, попадает в выходное устройство и возбуждает его, если интенсивность продольного электрического поля $E = E_z$ в нем изменяется в направлении отклонения луча (по координате x).

В клистроне, изображенном на рис. 1, поле в пространстве взаимодействия можно считать однородным, но щель для входа электронного луча во второй резонатор расположена так, что луч проходит в резонатор только в некоторую часть периода и попадает на перехватывающий электрод (на стенку контура) в остальное время. Это соответствует взаимодействию электронного луча с электрическим полем, изменяющимся при $x = x_1$ скачком от нуля до конечной величины E . Таким образом, второй контур возбуждается импульсами конвекционного тока. Поэтому естественно, что характеристики усилителя зависят от формы и длительности этих импульсов, которые, в свою очередь, определяются величиной входного сигнала, а также распределением плотности тока по поперечному сечению луча и расположением луча относительно входной щели в статическом режиме. Ниже приведены результаты расчета коэффициента усиления клистрона как функции высокочастотного напряжения на первом контуре (или мощности входного сигнала) при различных распределениях плотности тока в луче и различных расположениях луча.

1. КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ

1. Рассмотрим движение электрона в клистроне, изображенном на рис. 1, и допустим, что средняя плоскость электронного луча совпадает с центральной плоскостью зазора входного резонатора, а ширина луча $2h$ и его отклонение в зазоре настолько малы (по сравнению с расстоянием между пластинами d_1), что влияние продольных составляющих краевых полей зазора можно не учитывать. Кроме того, будем считать, что пространственный заряд электронного луча невелик и создаваемым им электрическим полем можно пренебречь. При сделанных предположениях траектория каждого электрона совпадает с траекторией одиночной частицы, движущейся в зазоре первого резонатора в заданном поперечном высокочастотном поле $E = (U_1/d_1) \sin(\omega t)$ с постоянной (в z -направлении) скоростью. В результате взаимодействия с высокочастотным полем поперечная скорость электрона изменяется на величину

$$\dot{x} = \frac{2\eta U_1 \sin(\Theta_1/2)}{\omega d_1} \sin(\omega t_b), \quad (1)$$

где $\eta = e/m$, Θ_1 — угол пролета в зазоре, t_b — время влета электрона в зазор (в сечение $z = 0$), U_1 — амплитуда напряжения между пластинами.

Электрон, движущийся со скоростью (1) в пространстве дрейфа, отклоняется от своего первоначального положения на величину Δx ,

пропорциональную координате z . Поэтому при достаточно больших z зависимость Δx от времени с точностью до малой величины отклонения в зазоре выражается следующим образом:

$$\Delta x = x - x_0 = az \sin(\omega t_b), \quad (2)$$

где

$$a = \frac{V \bar{\eta} U'_1}{\omega d_1 V U_0} \sin(\Theta_1/2),$$

U_0 — постоянное ускоряющее напряжение, x_0 — первоначальное положение электрона при отсутствии входного сигнала $U_1 = 0$.

Допустим далее, что распределение плотности тока в луче при $U_1 = 0$ известно: $j(x_0) = j_0 \varphi(x_0)$. Тогда, используя соотношение (2), определяющее связь $x = x(z, x_0, U_1, t_b)$, распределение плотности тока в пространстве дрейфа при $U_1 \neq 0$ можно записать в виде:

$$j(x, z, t - \Delta t) = j_0 \varphi[x - az \sin(\omega t_b)], \quad (3)$$

где Δt — время пролета электронами пространства дрейфа.

При конечной ширине луча, равной $2h$, функция (3) отлична от нуля в точках с координатами, удовлетворяющими условию $(az + h) \geq x \geq -(az + h)$, в интервалах времени, ограниченные моментами прохождения данной точки пространства крайними электронами луча ($x_0 = \pm h$). Из соотношения (2) следует, что если $(az - h) \geq x \geq h$, то функция (3) отлична от нуля в интервале от $(\omega t_b)_1$ до $(\omega t_b)_2$ и от $(\omega t_b)_1^{(1)}$ до $(\omega t_b)_2^{(1)}$, где $(\omega t_b)_{1,2} = \arcsin[(x \mp h)/az]$ и $(\omega t_b)_{1,2}^{(1)} = \pi - (\omega t_b)_{1,2}$. Если $(az - h) < x < (az + h)$, то функция (3) не равна нулю в пределах от $(\omega t_b)_1$ до $(\omega t_b)_2^{(1)}$.

Разлагая периодическую функцию (3) в ряд Фурье, найдем спектр плотности тока в каждой точке x, z . В простейшем случае, когда плотность тока в луче постоянная, т. е.

$$\varphi(x_0) = \begin{cases} 1 & (h \geq x_0 \geq -h) \\ 0 & (h \leq x_0 \leq -h) \end{cases},$$

амплитуда первой гармоники равна

$$j_1(x, z) = \frac{2j_0}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{x-h}{az}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{x+h}{az}\right)^2} \quad (4)$$

$(az - h \geq x \geq h);$

$$j_1(x, z) = \frac{2j_0}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{x-h}{az}\right)^2} \quad (5)$$

$(az + h \geq x \geq az - h).$

Найденные соотношения (4) и (5) позволяют решить задачу о возбуждении выходных устройств клистронов. При выяснении основных особенностей клистронных усилителей с поперечным полем ограничимся, как уже отмечалось, рассмотрением клистронов, в которых в качестве выходных систем используются тороидальные резонаторы. В этом случае, пользуясь известными формулами возбуждения резонаторов заданными токами [1], найдем, что если граница перехватывающего электрода находится в точке $x_{tr} = h$ (см. рис. 1), а время пролета электронов в зазоре много меньше периода высокочастотных колебаний, то напряжение на выходном контуре определяется соотно-

шениями

$$U_2 = \frac{1}{\pi} \frac{\chi}{G_2} U_1 \left\{ \arcsin \left(\frac{2h}{aL} \right) + \left(\frac{2h}{aL} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2h}{aL} \right)^2} \right\} \quad (6)$$

(при достаточно больших входных сигналах, когда амплитуда отклонения луча больше его толщины $aL \geq 2h$, но меньше ширины входной щели) и

$$U_2 = \frac{\chi U_1}{2G_2}; \quad (7)$$

$$\chi = \frac{I_0 L \sqrt{2\eta}}{2h\omega d_1 \sqrt{U_0}}, \sin(\Theta_1/2)$$

(при малом входном сигнале, когда $aL \leq 2h$). В (6) и (7) введены следующие обозначения: L — расстояние между зазорами первого и второго резонаторов, I_0 — ток луча. G_2 — приведенная к зазору эквивалентная проводимость нагруженного второго резонатора.

Соотношения (6) и (7) позволяют написать выражения для коэффициентов усиления по мощности:

$$N = \frac{\chi^2}{2\pi^2 G_2 G_{1k}} \left\{ \arcsin \left(\frac{2h}{aL} \right) + \left(\frac{2h}{aL} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2h}{aL} \right)^2} \right\}^2 \quad (8)$$

$$(aL \geq 2h);$$

$$N = \frac{\chi^2}{8G_2 G_{1k}} \quad (aL \leq 2h) \quad (9)$$

(G_{1k} — приведенная к зазору проводимость ненагруженного первого контура). При выводе (8) и (9) предполагалось, что нагрузка оптимальна по величине, т. е. проводимость нагрузки $G_n = 0,5 G_2$ *.

Сравнивая (8) и (9), можно видеть, что при малых входных сигналах, когда отклонение луча в плоскости зазора второго резонатора меньше его ширины, коэффициент усиления имеет наибольшую величину и остается постоянным с ростом амплитуды подаваемого сигнала. Для клистрона, имеющего, например, следующие параметры:

$$G_2 = 2G_{1k} = 10^{-5} \text{ ом}^{-1}, \quad d_1 = 0,5 \text{ мм}, \quad L = 30 \text{ мм},$$

$$(I_0/2h) = 7,5 \text{ а.м}^{-2}, \quad \omega = 2\pi 3 \cdot 10^9 \text{ гц}, \quad \Theta_1 = \pi,$$

коэффициент усиления имеет максимальное значение $N = N_0 = 30 \text{ дБ}$ и изменяется в зависимости от мощности входного сигнала так, как показано на рис. 2. По оси абсцисс на этом рисунке отложена величина $\sqrt{P_{\text{вх}}/P_{0\text{вх}}}$, где $P_{0\text{вх}} = h^2 \omega^2 d_1^2 G_{1k} U_0 / \gamma L^2 \sin^2(\Theta_1/2)$; при $P_{\text{вх}} = P_{0\text{вх}}$ отклонение луча $aL = 2h$.

2. Полученные выражения для коэффициента усиления справедливы при постоянной плотности тока в луче ($\varphi(x_0) = 1$ при $h \gg x_0 \gg -h$). Однако такое распределение тока при большой длине пространства

* Если время пролета электронов в зазоре второго резонатора соизмеримо с периодом колебаний, то коэффициент усиления при малых входных сигналах равен

$$N = \frac{\chi^2}{8G_2 G_{1k}} \left\{ M_2^2 \left(1 + \frac{\Theta_2}{\Theta_0} + \frac{1}{\Theta_0^2} \right) - \frac{1}{\Theta_0^2} (1 - 2M_2 \cos \Theta_2/2) \right\}^2,$$

где $M_2 = (\Theta_2/2)^{-1} \sin(\Theta_2/2)$ (Θ_2 и Θ_0 — углы пролета электронов в зазоре второго резонатора и в пространстве дрейфа)

дрейфа и значительной плотности тока в луче может служить лишь некоторым приближением к реализуемому на практике распределению. Ввиду того, что статические траектории электронов в клистроне зависят не только от величины пространственного заряда в луче, но и от ряда других факторов, учет которых не всегда возможен, целесообразно при расчете коэффициента усиления считать распределение

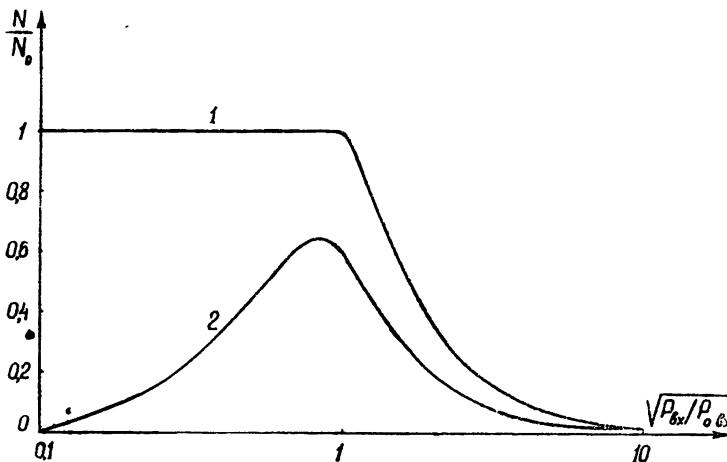


Рис. 2 Зависимость коэффициента усиления от мощности входного сигнала при $x_{rp} = h$:

$$1) \varphi(x_0) = 1; \quad 2) \varphi(x_0) = 1 - x_0^2 h^{-2}$$

плотности тока $\varphi(x_0)$ известным из опыта. В некоторых случаях распределение плотности тока в луче с достаточной степенью точности можно аппроксимировать функцией $\varphi(x_0) = 1 - x_0^2 h^{-2}$ ($x_0 \ll h$). При таком распределении тока коэффициент усиления клистрона при малом времени пролета электронов в зазоре второго резонатора получается равным

$$N = \frac{2x^2}{\pi^2 G_2 G_{1k}} \left(\frac{aL}{2h} \right)^2 \left\{ \frac{4}{3} - \frac{aL}{2h} \arcsin \frac{2h}{aL} + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{3} \left(\frac{2h}{aL} \right)^2 - \frac{5}{6} \right] \sqrt{1 - \left(\frac{2h}{aL} \right)^2} \right\}^2 \quad (10)$$

при большом входном сигнале ($aL \gg 2h$) и равным

$$N = \frac{2x^2}{\pi^2 G_2 G_{1k}} \left(\frac{aL}{2h} \right)^2 \left\{ \frac{4}{3} - \frac{\pi}{4} \frac{aL}{2h} \right\}^2 \quad (11)$$

при малом входном сигнале.

Зависимость коэффициента усиления (10) и (11) от мощности входного сигнала для клистрона с указанными выше параметрами изображена на рис. 2 (кривая 2). Из графика видно, что такая зависимость для усилителя малых сигналов не всегда приемлема; однако она может быть изменена путем смещения границы перехватывающего электрода.

3. Из описания механизма работы клистрона с поперечным полем следует, что в случае неравномерного распределения тока в луче коэффициент усиления имеет наибольшую величину при малой величине входного сигнала тогда, когда граница перехватывающего электрода (граница входной щели второго резонатора) расположена в точке

максимального значения плотности тока в луче при $U_1 = 0$. Если распределение плотности тока в луче аппроксимируется параболической функцией $\varphi(x_0) = 1 - x_0^2 h^{-2}$, то, располагая границу перехватывающего электрода в точке $x_{\text{гр}} = 0$, получим следующие выражения для коэффициента усиления кластирона:

$$N = \frac{x^2}{2G_2 G_{1K}} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{aL}{h} \right)^2 \right\}^2 \quad (aL \ll h); \quad (12)$$

$$N = \frac{2x^2}{\pi^2 G_2 G_{1K}} \left\{ \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{aL}{h} \right)^2 \right] \arcsin \frac{h}{aL} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{h}{aL} + \frac{1}{2} \frac{aL}{h} \right] \sqrt{1 - \left(\frac{h}{aL} \right)^2} \right\}^2 \quad (aL \gg h). \quad (13)$$

Из соотношений (12) и (13), (см. рис. 3, кривая 2) видно, что коэффициент усиления имеет максимальную величину при $P_{\text{вх}} \rightarrow 0^*$. Для сравнения на рис. 3 (кривая 1) приведен график $N = N(P_{\text{вх}})$

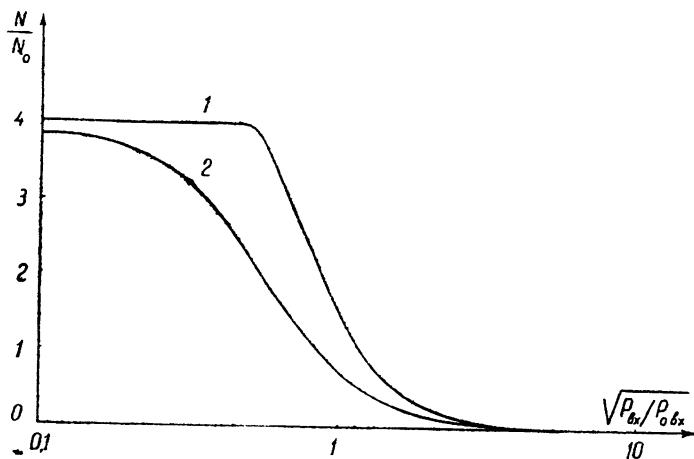


Рис. 3. Зависимость коэффициента усиления от мощности входного сигнала при $x_{\text{гр}} = 0$:

1) $\varphi(x_0) = 1$; 2) $\varphi(x_0) = 1 - x_0^2 h^{-2}$.

для кластирона с электронным лучом постоянной плотности $\varphi(x_0) = 1$. Коэффициент усиления при малых входных сигналах в этом случае в четыре раза больше величины, определяемой соотношением (4).

2 ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ КОЭФФИЦИЕНТА ШУМА

В кластироне с поперечным полем, так же как и в обычном прямопролетном кластиронном усилителе, шумы обусловлены главным образом дробовым эффектом и тепловыми шумами. Оценим влияние этих двух факторов на величину коэффициента шума кластирона.

* Соотношение (12) справедливо также для кластиронов с электронными лучами, плотность тока в которых распределена по закону $\varphi(x_0) = 1 - x_0^2 h^{-2}$ только в небольших пределах $aL \geq x_0 \geq -aL$. Это позволяет путем подбора величины h достигнуть большей точности описания электронных пучков, реализуемых на практике

1. Импульс тока, наведенного в первом резонаторе единичным электроном при отсутствии входного сигнала, можно записать следующим образом:

$$i_v(t) = \begin{cases} 0 & (t_v \geq t \geq t_v + \Delta t) \\ e\dot{x}_v/d_1 & (t_v \leq t \leq t_v + \Delta t) \end{cases}, \quad (14)$$

где t_v и Δt — момент влета и время пребывания электрона в зазоре*.

Поперечная скорость электрона x , в общем случае (если учитывать обратное влияние наведенного лучом поля) является функцией времени. Ввиду того, что точное определение этой функциональной зависимости и, следовательно, величины коэффициента шума путем решения самосогласованной задачи сопряжено с значительными математическими трудностями, проведем расчет приближенным методом, считая, что скорости электронов за время пролета в зазоре входного резонатора клистрона не меняются и остаются равными тепловым скоростям.

Импульс тока (14) при постоянном значении \dot{x}_v создает на контуре с малыми потерями напряжение

$$U_v(t - t_v) = \beta \dot{x}_v F(t - t_v), \quad (15)$$

где

$$\beta = e/d_1 G_1 \Theta_1;$$

$$F(t - t_v) = e^{-\alpha(t-t_v)} \sin [\omega_0(t - t_v)] - e^{-\alpha(t-t_v-\Delta t)} \times \\ \times \sin [\omega_0(t - t_v - \Delta t)];$$

$$\alpha = \omega_0/2Q_1,$$

где ω_0 , Q_1 и G_1 — соответственно резонансная частота, добротность и приведенная проводимость нагруженного первого резонатора.

Напряжение на контуре, наводимое электронным лучом $V(t)$, получаем путем суммирования $U_v(t - t_v)$ по всем электронам, пролетевшим контур за интервал времени τ , больший времени затухания контура. Разложив $V(t)$ на интервале τ в ряд Фурье и усреднив по ансамблю (принимая во внимание, что отдельные импульсы некоррелированы и $x_v \approx 0$), находим средний квадрат напряжения на контуре в полосе частот Δf

$$\bar{V}^2 = 2\beta^2 n_1 \bar{x}^2 |\gamma^{(0)}| \Delta f = g(f) \Delta f, \quad (16)$$

где n_1 — среднее число электронов, пролетевших в единицу времени, и

$$\gamma^{(0)} = \int_0^\infty F(\xi) e^{-j\omega\xi} d\xi. \quad (17)$$

Эмиттированные катодом элекгроны обладают максвелловским распределением скоростей: следовательно, средний квадрат скорости

$$\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \left(\frac{m}{2\pi k T_c} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{mx^2}{2k T_c} \right) dx = \frac{k T_c}{m} \quad (18)$$

(T_c — температура катода; k — постоянная Больцмана).

* Интервалы времени Δt для всех электронов в первом приближении можно считать одинаковыми, так как $\Delta t = b(z_0 + z_T)^{-1}$ ($z_0 \gg z_T$): z_0 — скорость, соответствующая ускоряющему напряжению, z_T — тепловая скорость электронов.

Таким образом, из (15) и (16) получаем следующее выражение для спектральной интенсивности флюктуаций напряжения вблизи резонансной частоты контура:

$$g_1(f) = \frac{8I_0\gamma k T_c \sin^2(\Theta_1/2)}{d_1^2 \omega_0^2 G_1^2}. \quad (19)$$

2. Спектральная интенсивность флюктуаций напряжения, наведенного электронным лучом во втором резонаторе клистрона, в соответствии с известными формулами для дробового эффекта равна

$$g_2(f) = 2eI_2G_2^{-2} \left[\frac{\sin(\Theta_2/2)}{\Theta_2/2} \right]^2, \quad (20)$$

где I_2 — средний конвекционный ток, протекающий через резонатор в отсутствие входного сигнала.

3. Флюктуационные наведенные напряжения на контурах, так же как и тепловые шумы, между собой некоррелированы; поэтому из (19) и (20) получаем следующее выражение для коэффициента шума клистрона:

$$F = 1 + \frac{2I_0\gamma k T_c \sin^2(\Theta_1/2)}{\omega_0^2 d_1^2 G_1 T} + \frac{eI_2}{2kTG_2N} \left[\frac{\sin(\Theta_2/2)}{\Theta_2/2} \right]^2, \quad (21)$$

где T — комнатная температура.

Отметим, что третий член правой части выражения (21), характеризующий дробовой шум в выходном резонаторе, пересчитанный ко входу усилителя, вследствие малой мощности шумов во входном резонаторе может быть по величине того же порядка, что и первые два члена даже при больших значениях коэффициента усиления N .

Из (21) следует, что если клистрон имеет, например, параметры, указанные выше, то при полном токе пучка $I_0=2$ мА, среднем токе через второй резонатор $I_2=1$ мА (граница перехватывающего электрода в точке $x_{tr}=0$) и малых углах пролета электронов $(\Theta_2/2)^{-1} \sin(\Theta_2/2) \approx 1$ коэффициент шума $F \approx 4$.

Таким образом, приведенные выше оценки показывают, что в клистроне с поперечным управлением может быть получено усиление, близкое по порядку величины к усилинию прямопролетного двухрезонаторного клистрона, но при значительно меньшем коэффициенте шума. Низкий уровень шумов в клистроне с поперечным полем объясняется тем, что при поперечном электрическом поле в зазоре первого резонатора напряжение, наводимое электронным лучом во входной цепи усилителя, обусловлено только тепловыми скоростями электронов (в отличие от обычных клистронов, где это напряжение возникает благодаря движению электронов с большими скоростями, параллельными высокочастотному полю)*. В связи с этим следует заметить, что в клистроне с поперечным полем коэффициент шума может быть уменьшен путем коллимирования электронного луча, т. е. путем уменьшения среднего квадрата поперечных скоростей электронов \bar{x}^2 , величине которого пропорционален второй член правой части выражения (21). Уменьшение третьего члена в (21) достигается соответствующим подбором оптимальных параметров клистрона и использова-

* В обычном клистроне импульс тока, наводимый одним электроном, в отличие от (14), равен $i_s = ev/d$ (где $v = v_0 + v_u$), причем тепловая скорость v_u много меньше постоянной скорости v_0 , соответствующей ускоряющему напряжению.

нием электронной оптики, обеспечивающей большие плотности тока в луче.

В заключение обратим внимание на возможность использования рассмотренного принципа модуляции электронов по скоростям для построения двухконтурных клистронов без перехвата электронов, а также многоконтурных и отражательных клистронов. В выходном резонаторе двухконтурного клистрона без перехвата интенсивность продольной компоненты электрического поля должна достаточно резко изменяться на величине отклонения луча. В многоконтурных клистронах в качестве промежуточных контуров, а в отражательных клистронах в качестве основных контуров могут быть использованы резонаторы, в пространстве взаимодействия которых имеются как продольная, так и поперечная составляющие электрического поля, распределенные по величине. Например, так, как показано на рис. 4 (квадрупольное поле). Интересно отметить, что многорезонаторный клистрон с такими контурами можно рассматривать (при соответствующей связи между контурами) как дискретную модель лампы бегущей волны с поперечным полем [2].

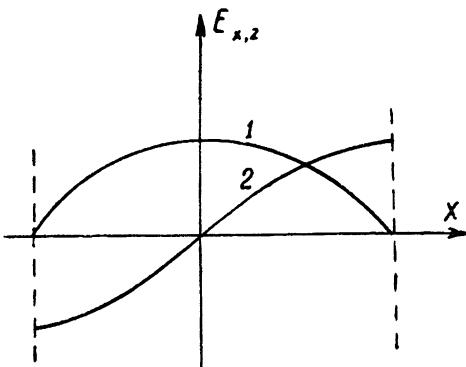


Рис. 4 Распределение компонент электрического поля в пространстве взаимодействия:
1) $E = E_x(x)$, 2) $E = E_z(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
2. R. Adler, Proc IRE, 44, 82 (1956).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
12 июля 1966 г.

ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ НА ВЕЛИЧИНУ ЭЛЕКТРОННОГО СМЕЩЕНИЯ ЧАСТОТЫ МАГНЕТРОНА*

А. И. Терещенко, М. Я. Минц

На основании представлений об электронном смещении частоты многорезонаторного магнетрона, развитых в работах С. И. Бычкова, получена общая зависимость величины коэффициента смещения частоты от различных факторов. Эта зависимость позволяет оценить относительное влияние геометрических параметров лампы и электрического режима ее работы на величину электронного смещения частоты. Результаты работы позволяют сделать выводы о геометрии и режимах работы магнетрона, необходимых для получения как минимального, так и максимального электронного смещения частоты. Теоретические материалы иллюстрируются расчетными данными для нескольких типов магнетронов, описанных в литературе.

Из рассмотрения эквивалентной схемы магнетронного генератора можно получить соотношение, связывающее изменение генерируемой частоты с углом сдвига фаз между высокочастотной составляющей анодного тока и высокочастотным напряжением на резонаторах [1,2]:

$$f = f_0 (1 + \operatorname{tg} \Theta / 2Q_{\text{u}}). \quad (1)$$

Здесь Θ — угол сдвига фаз между высокочастотной составляющей анодного тока и высокочастотным напряжением, f — генерируемая частота, f_0 — частота при отсутствии сдвига фаз, Q_{u} — добротность нагруженной колебательной системы.

Это изменение частоты, вызванное изменением анодного тока магнетрона, называют электронным смещением частоты.

Обычно при определении электронного смещения частоты пользуются формулой:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial I_0} \Delta I_0, \quad (2)$$

где I_0 — постоянная составляющая анодного тока. Формула (2), очевидно, неприменима для тех значений I_0 , при которых $\partial f / \partial I_0$ обращается в нуль или в бесконечность. Здесь величина Δf не определяется величиной $\partial f / \partial I_0$ и не пропорциональна изменению тока ΔI_0 . Эти точки являются, однако, чрезвычайно существенными, поскольку в первой достигается максимальная стабильность частоты, а во второй — максимальная перестройка частоты.

Как видно из формулы (1), изменение частоты определяется углом рассогласования Θ . При определении угла рассогласования мы будем исходить из теории, предложенной Бычковым [1]. Этим автором была также вычислена величина $\partial f / \partial I_0$; однако в выкладках была допущена неточность, и окончательные результаты для $\partial f / \partial I_0$ (формулы (4.37) — (4.39) работы [1]) неверны. Помимо этого, кривая электронного смещения частоты получена в [1] в неявном виде и определяется излишне большим количеством громоздких параметров, так что анализ формы кривой в зависимости от параметров невозможен.

* Доклад на научно-технической конференции ГКРЭ (ноябрь, 1959).

Попытаемся свести число параметров, определяющих форму кривой электронного смещения частоты, к минимуму. Это позволит получить кривую электронного смещения частоты в явном виде и проанализировать ее зависимость от параметров, определяемых геометрией магнетрона и рабочим режимом.

Будем исходить из основных формул работы [1], определяющих угол рассогласования Θ :

$$\Theta = \Theta_s - \Theta_r; \quad (3)$$

$$\Theta_r = \arctg (K_2 \sqrt{I_0} \cos \Theta_s) \quad (4)$$

(Θ_s — угол сдвига фаз между наведенным током и напряжением на резонаторе, Θ_r — угол сдвига фаз между тангенциальной составляющей наведенного тока и наведенным током). Угол Θ_s определяется уравнениями (4.6) и (4.20) работы [1]:

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \Theta_s / 2Q_n)^{\frac{1}{2}} F_0(\bar{a}) = -2,275 R_2 \sqrt{I_0} \sin \Theta_s; \quad (5)$$

$$\bar{a} = \arctg (L_2 \sqrt{I_0} \cos \Theta_s), \quad (6)$$

а функция $F_0(\bar{a})$ — формулой (3.30) работы [1]:

$$F_0(\bar{a}) = \left(4 - 2,87 \sqrt{\frac{4}{\bar{a}}} \right) (1 - \operatorname{tg}^2 \bar{a}) - 3,6 (e^{-9\bar{a}} - e^{-100\bar{a}}) \operatorname{tg} \bar{a}. \quad (7)$$

График этой функции приведен в [1] на рис. 3.8.

Коэффициенты L_2 , R_2 и K_2 , не зависящие от постоянной составляющей тока I_0 , определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{10r_a^2} \frac{\sin \beta n}{\beta n} \sqrt{\frac{2N^3(r_a^2 - r_1^2)}{\pi^3 BY_k f_0}}; \\ R_2 &= \frac{0,44}{8\pi^3} \frac{e}{m} \frac{r_a - r_k}{r_a^3} \frac{N^3}{f_0^{\frac{1}{2}}} \frac{\sin \beta n}{\beta n} \left(1 + \frac{2\pi f_0}{n \omega_u}\right)^2 \times \\ &\times F_2(r_a) \sqrt{\frac{2\pi B(r_a^2 - r_1^2)}{NY_k}}; \\ K_2 &= \frac{0,8}{\pi} \frac{\sin \beta n}{\beta n} \Psi_{p_1}(r_a, r_1) \sqrt{\frac{N}{2\pi f_0 B(r_a^2 - r_1^2) Y_k}}. \end{aligned}$$

Здесь

$$F_2(r_a) = \frac{1 + (r_k/r_a)^N}{1 - (r_k/r_a)^N};$$

$$\Psi_{p_1}(r_a, r_1) = 1 - \frac{(r_1/r_k)^n - (r_k/r_1)^n}{(r_a/r_k)^n - (r_k/r_a)^n};$$

f_0 — частота генерации, B — магнитная индукция, $\omega_u = eB/m$ — циклотронная частота, Y_k — проводимость нагруженной колебательной системы, $n = N/2$ — число пар резонаторов (рис. 1), r_a — радиус анода, r_k — радиус катода, $r_1 = r_k / \sqrt{1 - 8\pi f_0/N\omega_u}$ — радиус электронной „втулки“, β — угловой размер щели резонатора.

Отметим, что так как обычно выполняются условия

$$(r_a/r_k)^N \ll 1; \quad r_1/r_k \sim 1; \quad (r_1/r_a)^N \ll 1,$$

то

$$F_2(r_a) \approx 1; \quad \Psi_{p_1}(r_1, r_a) \approx 1.$$

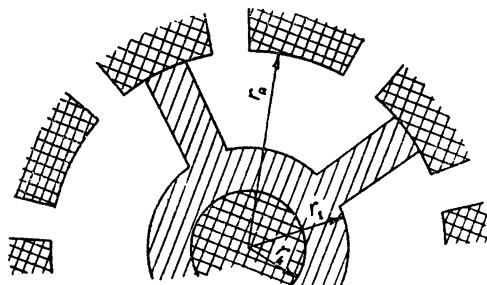


Рис. 1.

Рассмотрим далее величины $\alpha = L_2/R_2$, $\gamma = K_2/R_2$. Как будет показано ниже, при некоторых условиях кривая электронного смещения частоты определяется только этими параметрами. При этом параметр σ определяет изменение частоты в точке наибольшей перестройки, а параметр γ — в точке наибольшей стабильности:

$$\alpha = \frac{0,46r_a}{(r_a - r_k) F_2(r_a)} \frac{2\pi f_0/n \omega_u}{(1 + 2\pi f_0/n \omega_u)^2}; \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{1,82 r_a^3 \Psi_{p_1}(r_a, r_1)}{(r_a - r_k) (r_a^2 - r_1^2) F_2(r_a)} \frac{2\pi f_0/n \omega_u}{N (1 + 2\pi f_0/n \omega_u)^2}. \quad (9)$$

Для реальных конструкций магнетронов выполняется соотношение

$$\nu (1 + \nu)^{-2} \ll 1, \quad (10)$$

где $\nu = 2\pi f_0/n \omega_u$ (поскольку обычно синхронная частота $\omega_c = 2\pi f_0/n$ много меньше циклотронной частоты $\omega_u = eB/m$). В таком случае

$$\alpha \ll 1; \quad \gamma \ll 1; \quad \sqrt{L_2^2 + R_2^2} \approx R_2. \quad (11)$$

Кроме того, при $\nu \ll 1$ радиус „втулки“ весьма близок к радиусу катода ($r_1 \approx r_k$). При этом для параметров α и γ получим выражения.

$$\alpha = \frac{0,46}{(1 - \sigma) F_2(r_a)} \frac{\nu}{(1 + \nu)^2}; \quad (12)$$

$$\gamma = \frac{1,82}{(1 - \sigma) (1 - \sigma^2) F_2(r_a) N} \frac{\nu}{(1 + \nu)^2}, \quad (13)$$

где $\sigma = r_k/r_a$. Первые множители в формулах (12) и (13) определяются геометрией магнетрона (величинами σ и N); зависимость параметров α и γ от магнитного поля B и частоты f_0 определяется величиной ν .

Если соотношения (11) выполнены, то кривая электронного смещения частоты определяется только двумя параметрами α и γ и может быть найдена в явном виде.

Обратимся теперь к уравнениям (3)–(7), определяющим зависимость $\Theta = \Theta(I_0)$. Как будет показано в дальнейшем, во всей исследуемой области, начиная от тока I_{01} , при котором достигается наибольшая перестройка частоты, до тока I_{02} , при котором достигается наибольшая стабильность частоты, выполняются следующие соотношения:

$$\operatorname{tg} \Theta/2Q_u \ll 1; \quad (14)$$

$$K_2 \sqrt{I_0} \cos \Theta_s \ll 1. \quad (15)$$

Помимо этого, в области токов, близких к току I_{01} , имеет место неравенство

$$L_2 \sqrt{I_0} \cos \Theta_s \ll 1. \quad (16)$$

Вводя безразмерную величину $x = I_0 R_2^2$ и учитывая (14) и (15), получим из (3) -- (7) соотношения, определяющие зависимость Θ от x :

$$\Theta = \Theta_s - \gamma \sqrt{x} \cos \Theta_s; \quad (17)$$

$$F_0(\bar{\alpha}) = -2,275 \sqrt{x} \sin \Theta_s; \quad (18)$$

$$\bar{\alpha} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sigma \sqrt{x} \cos \Theta_s). \quad (19)$$

Рассмотрим область малых значений $\bar{\alpha}$ ($\bar{\alpha} \ll 5^\circ$). Как следует из (7), в этой области функция $F_0(\bar{\alpha})$ может быть с достаточной точностью представлена в виде:

$$F_0(\bar{\alpha}) = 4 - 2,87 \sqrt[4]{\bar{\alpha}}. \quad (20)$$

Из (16) следует, что здесь величина $\bar{\alpha} = \alpha \sqrt{x} \cos \Theta_s$. Таким образом, в этой области значений $\bar{\alpha}$ получаем (совместно с (20)) уравнения для определения зависимости Θ_s от x :

$$F_0(\bar{\alpha}) = -2,275 \sqrt{x} \sin \Theta_s; \quad (21)$$

$$\bar{\alpha} = \alpha \sqrt{x} \cos \Theta_s. \quad (22)$$

Эти уравнения могут быть решены графически. Для этого необходимо построить кривую $\eta = F_0(\alpha\xi)/2,275$ и определить точку ее пересечения с окружностью $\xi^2 + \eta^2 = x$ при заданном x . Тогда угол между лучом, проведенным из начала координат в точку пересечения, и осью ξ будет равен $-\Theta_s$. Из графика кривой $F_0(\bar{\alpha})$ (рис. 3.8 работы [1]) видно, что пересечение возможно только при значениях x , превышающих некоторое предельное значение x_1 . Это предельное значение равно квадрату радиуса окружности с центром в начале координат, касающейся кривой $\eta = F_0(\alpha\xi)/2,275$. Предельному значению x_1 соответствует минимальное значение анодного тока $I_{01} = x_1 R_2^2$.

Покажем, как можно получить аналитическое выражение для величины x_1 и соответствующего значения угла Θ_{s1} . Кроме того, найдем зависимость $\operatorname{tg} \Theta = f(x)$ вблизи $x = x_1$, что даст возможность определить перестройку частоты вблизи минимального значения тока I_{01} .

Определив $\xi = \bar{\alpha}/\alpha$ из уравнения (20):

$$\xi = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{4 - 2,275\eta}{2,87} \right)^{\frac{1}{4}} = 0,4 \frac{1}{\sigma} (1,76 - \eta)^{\frac{1}{4}} \quad (23)$$

и подставив в соотношение $\xi^2 + \eta^2 = x$, получим уравнение, связывающее η и x :

$$(1,76 - \eta)^8 + (2,5\sigma)^2 \eta^2 = (2,5\alpha)^2 x. \quad (24)$$

В точке x_1 величина $d\eta/dx$ обращается в бесконечность. Это условие дает уравнение для определения величины η_1 :

$$-4(1,76 - \eta_1)^7 + (2,5\alpha)^2 \eta_1 = 0. \quad (25)$$

Данное уравнение можно решить последовательными приближениями,

принимая в качестве первого приближения $\eta_1 = 1,76$. Проводя три приближения, получим с достаточной точностью (около 5%):

$$\eta_1 = 1,76 - 1,16x^{2/7} + 0,11x^{4/7}.$$

Подставляя это значение η_1 в формулу (24), получим выражение для x_1 :

$$x_1 \approx 3,1 - 3,6x^{2/7} + 1,29x^{4/7}. \quad (26)$$

Формула (26) дает возможность вычислить ток отсечки $I_{01} = x_1 R_2^2$. Для величины $\operatorname{tg} \Theta_1$ в точке x_1 имеем:

$$\operatorname{tg} \Theta_1 \approx 2,48x^{-1/7} (1 - 0,284x^{2/7} - 0,17x^{4/7}) \quad (27)$$

Используя значения σ , приведенные в таблице 1 (см. ниже), получаем, что для рассматриваемых типов магнетронов $\operatorname{tg} \Theta_1 \leq 3,2$. При токах, больших I_{01} , величина $\operatorname{tg} \Theta < \operatorname{tg} \Theta_1$, что доказывает справедливость формулы (14). Величина $\sigma = x \sqrt{x} \cos \Theta_s$ в области токов, близких к I_{01} ($\Theta \sim \Theta_s$), составляет около $2,5^\circ$ (0,04). Это доказывает справедливость формулы (16).

Разложим теперь величину $x(\eta)$ вблизи точки $\eta = \eta_1$ в ряд по степеням $\eta_1 - \eta$. Так как величина $dx/d\eta$ в этой точке равна нулю, то

$$x \approx x_1 + [(1/2) (d^2x/d\eta^2)]_{\eta_1} (\eta_1 - \eta)^2.$$

Отсюда

$$\eta = \eta_1 - \left[\left(\frac{1}{2} \frac{d^2x}{d\eta^2} \right)_{\eta_1} \right]^{-1/2} (\eta - \eta_1)^{1/2}. \quad (28)$$

Для величины $\operatorname{tg} \Theta$ вблизи точки $\Theta = \Theta_1$ получаем:

$$\operatorname{tg} \Theta \approx \operatorname{tg} \Theta_1 + \frac{1}{\cos^2 \Theta_1} \left(\frac{\partial \Theta_s}{\partial \eta} - \frac{\partial \Theta_r}{\partial \eta} \right)_{\eta_1} (\eta - \eta_1). \quad (29)$$

Из формулы (4) видно, что вблизи точки $\Theta = \Theta_1$ величина $|\partial \Theta_r / \partial \eta| \ll \ll |\partial \Theta_s / \partial \eta|$, а из формулы (21) получаем: $|\partial \Theta_s / \partial \eta|_{\eta_1} = -1/\sqrt{x_1} \cos \Theta_{s1}$. Поэтому согласно (28) и (29)

$$\operatorname{tg} \Theta = \operatorname{tg} \Theta_1 + \frac{1}{\cos^3 \Theta_{s1}} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{d^2x}{d\eta^2} \right)_{\eta_1} \right]^{-1/2} \left(\frac{x - x_1}{x_1} \right)^{1/2}. \quad (30)$$

Вводя обозначение

$$k_1 = \frac{1}{2Q_h \cos^3 \Theta_{s1}} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{d^2x}{d\eta^2} \right)_{\eta_1} \right]^{-1/2}, \quad (31)$$

получим для смещения частоты вблизи точки I_{01} выражение

$$\frac{\Delta f_1}{f_0} = \frac{f(I_0) - f(I_{01})}{f_0} \approx k_1 \left(\frac{I_0 - I_{01}}{I_{01}} \right)^{1/2}. \quad (32)$$

Вычисления дают для величины k_1 следующее значение:

$$k_1 \approx \frac{1}{2Q_h} 4,4x^{-2/7} (1 - 0,32x^{2/7} + 0,14x^{4/7}). \quad (33)$$

При углах наклона траектории $7^\circ < \bar{\alpha} < 50^\circ$ для функции $F_0(\bar{\alpha})$ может быть использовано следующее приближенное выражение: $F_0(\bar{\alpha}) = 2,275 (1 - \operatorname{tg} \bar{\alpha})$ (формула (4.17) работы [1]). В этой области для угла рассогласования Θ в работе [1] найдено выражение:

$$\Theta = \Theta_s - \Theta_r,$$

где

$$\Theta_s = \arcsin \frac{L_2}{\sqrt{L_2^2 + R_2^2}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{I_0} \sqrt{L_2^2 + R_2^2}};$$

$$\Theta_r = \arctg (K_2 \sqrt{I_0} \cos \Theta_s).$$

Принимая во внимание определение величин σ и γ (формулы (8) и (9)) и соотношения (11), получаем

$$\Theta_s \approx \alpha - \arcsin (1/\sqrt{x}); \quad (34)$$

$$\Theta_r \approx \gamma (x + \sqrt{x-1}); \quad (35)$$

$$\Theta \approx \sigma - \gamma \sqrt{x-1} - \arcsin (1/\sqrt{x}). \quad (36)$$

Далее, для $\operatorname{tg} \Theta$ нетрудно найти:

$$\operatorname{tg} \Theta \approx \frac{-1 + \alpha \sqrt{x-1} - \gamma (x-1)}{\sqrt{x-1} + \sigma}. \quad (37)$$

Производя деление с точностью до величины второго порядка малости, получим:

$$\operatorname{tg} \Theta \approx -\gamma \sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sigma} + \sigma. \quad (38)$$

Формулы (34)–(38) справедливы при значениях $\bar{\alpha} \geq 7^\circ$. Это дает для величины x условие $x \geq 1 + (\bar{\alpha}/\alpha)^2$. Используя приведенные в помещенной ниже таблице значения величины α , получаем для тока I_0 условие: $I_0 \geq (1,4 - 2,9) I_{01}$ (в зависимости от типа магнетрона).

Будем отсчитывать частоту от того значения, при котором ток I_0 равен минимальному току I_{01} . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f_1}{f_0} &= \frac{f(I_0) - f(I_{01})}{f_0} \approx \frac{1}{2Q_n} \left(-\gamma \sqrt{x-1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sigma} + \operatorname{tg} \Theta_{s1} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

На рис. 2 приведен график функции $\Delta f_1/f_0$. Коэффициент электронного смещения частоты

$$\varepsilon_1(I_0) = \frac{\partial f}{\partial I_0} = \frac{1}{4} \frac{f_0}{I_{01} Q_n} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \left[-\gamma + \frac{1}{(\sqrt{x-1} + \sigma)^2} \right]. \quad (40)$$

Рассмотрим точку $x = (1/\sqrt{\gamma} - \sigma)^2 + 1 \approx 1/\gamma$. Величина тока в этой точке равна $I_{02} = (1/\gamma) R_2^2$. При этом значении тока величина $\varepsilon_1(I_{02})$ обращается в нуль, и, следовательно, достигается максимальная стабильность частоты. Вблизи этой точки изменение частоты $\Delta f_2 = f(I_0) - f(I_{02})$ выражается не через коэффициент электронного смещения частоты $\varepsilon_1 = \partial f / \partial I_0$, а через коэффициент $\varepsilon_2 = \partial^2 f / \partial I_0^2$.

Для изменения частоты вблизи точки I_{02} получим:

$$\frac{\Delta f_2}{f_0} \simeq \frac{1}{2f_0} \varepsilon_2 (I_{02}) (I_0 - I_{02})^2 = - \frac{1}{8Q_n} \gamma^{1/2} \left(\frac{I_0 - I_{02}}{I_{02}} \right)^2. \quad (41)$$

В точке I_{02} частота f максимальна. Отметим, что вплоть до I_{02} величина тока $I_0 < (1/\gamma) R_2^2$, что оправдывает неравенство (15).

Представляет также интерес полное изменение частоты δf , т. е. разность между максимальной частотой $f(I_{02})$ и минимальной частотой $f(I_{01})$. Для величины δf из формулы (39) получим выражение:

$$\frac{\delta f}{f_0} \simeq \frac{1}{2Q_n} \operatorname{tg} \Theta_{91}. \quad (42)$$

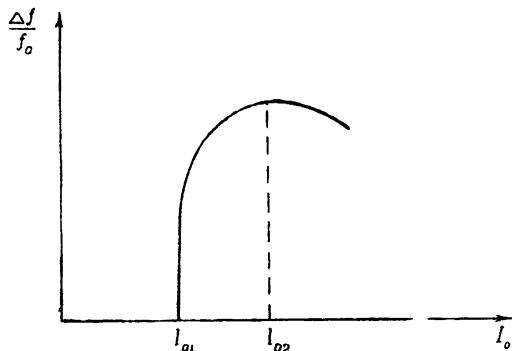


Рис. 2

а) Область токов, близких к минимальному току I_{01} :

$$0 < \frac{I_0 - I_{01}}{I_{01}} < \frac{1}{4k_1^2} \left(\frac{\delta f}{f_0} \right)^2.$$

В этой области происходит очень быстрое изменение частоты. На эту область приходится половина полного изменения частоты.

б) Остальная область токов. В этой области, в особенности вблизи точки I_{02} , происходит очень медленное изменение частоты. На эту область приходится также половина полного изменения частоты.

Расчетные значения величин α , γ , I_{01} , I_{02} , $k_1 = (1/2Q_n) 4,4\alpha^{-2/7} \times (1 - 0,32\alpha^{2/7} + 0,14\alpha^{4/7})$, $k_2 = \gamma^{1/2}/8Q_n$, $\delta f/f_0$ и γ для нескольких типов магнетронов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Тип лампы	α	γ	I_{01} (a)	I_{02} (a)	$k_1 \cdot 10^{-2}$	$k_2 \cdot 10^{-3}$	$\delta f/f_0$ (%)	γ
2J32	0,09	0,05	2,46	28,4	6,0	0,46	2,3	0,18
725A	0,08	0,03	0,89	15,8	2,4	0,32	0,9	0,10
4J50	0,07	0,03	1,31	22,3	1,9	0,10	0,7	0,06
LCW	0,05	0,03	0,12	2,37 ^a	4,5	0,25	1,7	0,08
CM16B	0,06	0,02	0,03	0,93 ^a	3,6	0,16	1,3	0,06
2J33—39	0,09	0,05	0,61	6,96	3,0	0,23	1,2	0,17
HP10V	0,11	0,06	5,5	62,8	3,3	0,27	1,2	0,15
2J42	0,09	0,04	0,22	3,17	1,7	0,11	0,6	0,12
3J31	0,11	0,04	0,65	10,6	1,1	0,08	0,4	0,13

Отметим, что в режиме максимальной перестройки частоты мощность магнетрона минимальна, так как он работает в этом режиме с минимальным анодным током I_{01} .

* Приведенные в таблице расчетные значения тока I_{02} для магнетронов LCW и CM16B сильно превышают номинальные токи. По-видимому, режим наибольшей стабильности у этих ламп не может быть достигнут.

1. Наибольшая стабильность генерируемой частоты достигается в рабочей точке, выбранной при анодном токе I_{02} . Смещение частоты вблизи этой точки дается формулой (41). Для повышения стабильности вблизи этой точки следует стремиться к уменьшению величины γ . Как ясно из формулы (13), это может быть достигнуто уменьшением отношения синхронной частоты генерации к циклотронной частоте, увеличением числа резонаторов, увеличением величины Q_n и уменьшением величины $\sigma = r_k / r_a$.

2. Максимальная перестройка частоты достигается в области минимального тока I_{01} . Смещение частоты при токах, близких к I_{01} , дается формулами (32) и (33). При работе в этой области увеличение перестройки может быть получено уменьшением величины α . Как следует из формулы (12), это может быть достигнуто уменьшением отношения синхронной частоты генерирования к циклотронной частоте, уменьшением величины Q_n и уменьшением величины $\sigma = r_k / r_a$.

Таким образом, уменьшение величин $\gamma = \omega_c / \omega_n$ и $\sigma = r_k / r_a$ приводит к увеличению стабильности вблизи точки I_{02} и к увеличению перестройки вблизи точки I_{01} .

3. Так как высокочастотная мощность пропорциональна анодному току I_0 , то кривая электронного смещения частоты (рис. 2) дает одновременно в другом масштабе зависимость частоты от мощности. При работе вблизи минимального тока I_{01} минимальной оказывается также и мощность.

Для увеличения мощности необходимо выйти из области минимальных токов, не получая, конечно, максимально возможной для данной конструкции перестройки. При работе в таком режиме для увеличения перестройки следует стремиться к увеличению γ . Это может быть достигнуто увеличением отношения синхронной частоты генерирования к циклотронной частоте, уменьшением числа резонаторов, уменьшением величины Q_n и увеличением $\sigma = r_k / r_a$.

ЛИТЕРАТУРА

- С. И. Бычков, Вопросы теории и практического применения многорезонаторных магнетронов, изд. ЛКВВИА им. Жуковского, Л., 1958.
- С. Я. Ицхоки, Нелинейная радиотехника, изд. Сов. радио, М., 1955.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
1 марта 1960 г.

ТОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ В СИСТЕМЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ КОММУТАТОРА

E. Ю. Бенуа

Получены условия существования и локальной устойчивости автоколебаний около экстремума для релейной экстремальной системы с запаздыванием при наличии коммутатора [1]. Действие коммутатора выражается в периодическом поверочном реверсе входа исполнительного устройства с постоянным периодом. В экстремальных системах колебательный режим является рабочим режимом, и если один из элементов схемы выйдет из строя, возможно отклонение регулирующего параметра в крайнее положение. При наличии в схеме коммутатора в этом случае регулирующий параметр начинает колебаться вокруг того положения, в котором его застала авария. Внешние возмущения в экстремальных системах сильно нарушают работу всей системы, присутствие же коммутатора в ней не позволяет системе потерять устойчивость.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Структурная схема рассматриваемой системы представлена на рис. 1. Характеристика нелинейного элемента объекта регулирования НЭ I вблизи экстремума имеет вид: $y = -kx^2$. Характеристика релейного

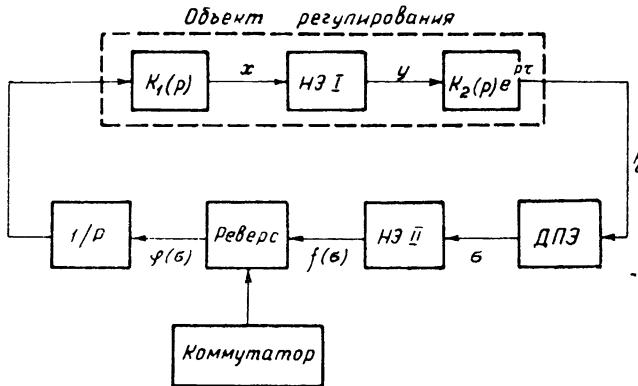


Рис. 1

управляющего устройства НЭ II предstawлена на рис. 2. Переключение НЭ II происходит при $\sigma = -\gamma_0$, $\sigma < 0$. Уравнения движения системы имеют вид:

$$y = -kx^2;$$

$$\dot{\gamma}_i = K_2(p) e^{-pt} y;$$

$$x = \frac{1}{p} K_1(p) \hat{\varphi}(\sigma);$$

$$(I) \quad \sigma = p \gamma_i; \quad (II) \quad \sigma = \gamma_i - \gamma_{\max},$$

где $K_1(p) = P_1(p)/Q_1(p)$, $K_2(p) = P_2(p)/Q_2(p)$ — дробнорациональные функции без нулевых и кратных полюсов, τ — постоянная звена запаздывания, $p = d/dt$.

Рассматриваются два случая: 1) датчик показателя экстремума регистрирует величину производной выходной переменной объекта (ДПЭ I типа), 2) датчик показателя экстремума регистрирует разницу между текущим значением выходной переменной объекта и экстремальным значением этой переменной (ДПЭ II типа).

Сведем систему (1) к каноническому виду [2]:

$$\dot{S}_\mu = p_\mu S_\mu + y \quad (\mu = 1, \dots, m);$$

$$\dot{z}_v = p_v z_v + \varphi(\sigma) \quad (v = 1, \dots, n);$$

$$\dot{z}_{n+1} = \varphi(\sigma);$$

$$x = B_0 z_{n+1} + \sum_{v=1}^n B_v z_v; \\ y = -kx^2; \quad (2)$$

$$\gamma_i = \sum_{\mu=1}^m R_\mu S_\mu (t - \tau);$$

$$(I) \quad \sigma = \dot{\gamma}; \quad (II) \quad \sigma = \gamma_i - \gamma_{\max},$$

где

$$B_0 = P_1(0)/Q_1(0); \quad B_v = P_1(p_v)/p_v Q_1(p_v);$$

$$R_\mu = P_2(p_\mu)/\dot{Q}_2(p_\mu),$$

p_v — простые корни полинома $Q_1(p)$, p_μ — простые корни полинома $Q_2(p)$.

Определим условия, при которых в системе имеют место автоколебания. Предположим, что в системе установился автоколебательный режим. Пусть при $t=0$ $f(\sigma)$ меняется с $-f_0$ на $+f_0$, причем период колебаний переменной $f(\sigma)$ равен $2T$. Таким образом, $f(\sigma)$ является нечетной периодической функцией времени. При изучении работы системы нужно учитывать, что после каждого очередного срабатывания реле происходит взвод коммутатора. Пусть Δ — период коммутатора; тогда функция $\varphi(\sigma)$ меняет свой знак следующим образом: первый после $t=0$ реверс с $+f_0$ на $-f_0$ происходит за счет коммутатора через $t=\Delta$; затем, как только $\sigma = -\gamma_0$, $\dot{\sigma} < 0$, происходит реверс с $-f_0$ на $+f_0$ за счет реле и т. д. График функции $\varphi(t)$ представлен на рис. 3. Итак, считаем, что

$$\varphi(\sigma) = +f_0 \quad (\text{при } 0 < t < \Delta); \quad (3)$$

$$\varphi(\sigma) = -f_0 \quad (\text{при } \Delta < t < T).$$

Подставим каждое из условий (3) по очереди в третье уравнение системы (2) и проинтегрируем его для обоих случаев. Используя условия сопряжения и периодичности решений

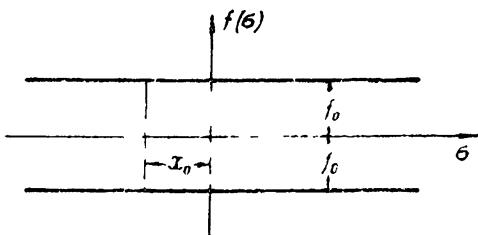


Рис. 2.

$$z_{1,n+1}(\Delta) = z_{2,n+1}(\Delta);$$

$$z_{1,n+1}(0) = z_{2,n+1}(T)$$

(индекс 1 означает, что решение справедливо для промежутка $0 < t < \Delta$, а индекс 2 — для промежутка $\Delta < t < T$). определим произвольные постоянные интегрирования C_1 и C_2 из уравнений

$$C_1 - C_2 = -2f_0\Delta;$$

$$C_1 + C_2 = -f_0T.$$

Очевидно, что необходимым условием существования автоколебаний является условие

$$\Delta = T/2. \quad (4)$$

Рассмотрим несимметричные колебания вокруг экстремума. При этом пусть T будет периодом колебаний для переменных $z_{n+1}, z_n, x, y, \varphi(\sigma)$ и ε . Итак, предполагаем, что

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) &= +f_0 \quad (\text{при } 0 < t < T/2); \\ \varphi(\sigma) &= -f_0 \quad (\text{при } T/2 < t < T). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставим (5) во второе и третье уравнение системы (2), проинтегрируем их и определим произвольные постоянные из условий

$$z_1(T/2) = z_2(T/2); \quad z_1(0) = z_2(T).$$

Теперь индекс 1 будет означать, что решение справедливо при $0 < t < T/2$, а индекс 2 — при $T/2 < t < T$.

Подставив решения $z_{n+1,1}, z_{n+1,2}, z_{y1}$ и z_{y2} в четвертое уравнение системы (2), а полученные от этой подстановки x_1 и x_2 — в пятое уравнение системы (2), получим выражения для $y_1(t)$ при $0 < t < T/2$ и для $y_2(t)$ при $T/2 < t < T$. Используя полученные выражения для y , проинтегрируем первое уравнение системы (2). Произвольные постоянные интегрирования определяются из условий сопряжения и периодичности решений:

$$S_{p1}(T/2) = S_{p2}(T/2);$$

$$S_{p1}(0) = S_{p2}(T).$$

Нужно рассмотреть два случая соотношений величин τ и T .

Случай 1. Если $T/2 > \tau > 0$, то на основании рис. 4 имеем ($\tau_1 = \tau$):

$$S_p(t-\tau) = \begin{cases} S_{y2}(t+T-\tau) & (0 < t < \tau) \\ S_{p1}(t-\tau) & (\tau < t < \tau+T/2) \\ S_{y2}(t-\tau) & (\tau+T/2 < t < T) \end{cases}$$

Случай 2. Если $T > \tau > T/2$, то на основании рис. 4 имеем ($\tau_2 = \tau$):

$$S_p(t-\tau) = \begin{cases} S_{p1}(t+T-\tau) & (0 < t < \tau-T/2) \\ S_{p2}(t+T-\tau) & (\tau-T/2 < t < \tau) \\ S_{p1}(t-\tau) & (\tau < t < T) \end{cases}$$

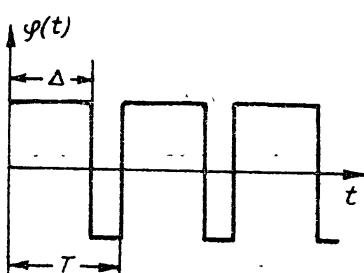


Рис. 3

2. ВЫВОД УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ В СИСТЕМЕ С ДПЭ I

Последнее уравнение системы (2) в этом случае имеет вид:

$$\sigma(t) = \sum_{\mu} R_{\mu} \dot{S}_{\mu}(t - \tau).$$

По предположению T — период автоколебаний переменной σ ; следовательно, при $t = T$ происходит переключение реле, т. е. в этот момент должны выполняться условия

$$\sigma(T) = \sum_{\mu} R_{\mu} S_{\mu}(T - \tau) = -x_0;$$

$$\dot{\sigma}(T) < 0$$

(условия существования автоколебаний).

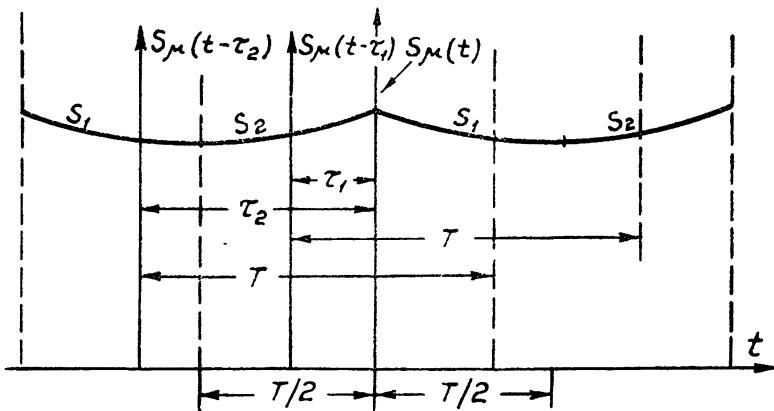


Рис. 4

Случай 1 ($0 < \tau < T/2$) Условия существования автоколебаний тогда принимают вид:

$$\sum_{\mu} R_{\mu} \dot{S}_{\mu 2}(T - \tau) = -x_0;$$

$$\sum_{\mu} R_{\mu} \ddot{S}_{\mu 2}(T - \tau) < 0.$$

В развернутом виде уравнение периодов автоколебаний

$$\begin{aligned}
 & -k f_0^2 \sum_{\mu} \frac{R_{\mu}}{e^{p_{\mu} T} - 1} \left\{ \frac{2B_0^2}{p_{\mu}^2} \left[e^{p_{\mu}(T-\tau)} \left(T p_{\mu} + \frac{1}{2} T^2 p_{\mu}^2 \right) - (e^{p_{\mu} T} - 1) \times \right. \right. \\
 & \times (1 + p_{\mu}(T - \tau)) \Big] + B_0 (2G + B_0 T) \left(2 \frac{C_2}{f_0} - T \right) e^{p_{\mu}(T/2-\tau)} (e^{p_{\mu} T/2} - 1) + \\
 & + 4 \sum_{\nu} \sum_{q} \frac{G_{\nu} G_q}{(1 + e^{p_{\nu} T/2}) (1 + e^{p_q T/2})} \\
 & \times \left[\frac{p_{\mu} e^{p_{\mu}(T/2-\tau)} (1 + e^{p_{\mu} T/2}) (1 - e^{(p_{\nu} - p_q) T/2})}{(p_{\nu} + p_q - p_{\mu})} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[- \frac{(p_v + p_q) (e^{p_v T} - 1) e^{(p_v - p_q)(T/2-\tau)}}{(p_v + p_q - p_p)} \right] + \\
& + 2B_0 \left(G + B_0 \frac{C_2}{f_0} \right) \frac{e^{p_p T} - 1 - T p_p e^{p_p(T-\tau)}}{p_p} - 2B_0^2 \left(2 \frac{C_2}{f_0} - T \right) \times \\
& \times \frac{e^{p_p(T/2-\tau)} (e^{p_p T/2} - 1 - T p_p/2)}{p_p} + 4 \left(G + B_0 \frac{C_2}{f_0} \right) \times \\
& \times \sum_v G_v p_v e^{p_v(T/2-\tau)} \frac{(e^{(p_v - p_p) T/2} - 1) - p_v e^{p_v(T/2-\tau)} (e^{p_p T} - 1)}{(1 + e^{p_v T/2}) (p_v - p_p)} - \\
& - 4 \left[B_0 \left(\frac{C_2}{f_0} - T \right) - G \right] \times \\
& \times \sum_v G_v \frac{p_p e^{p_p(T/2-\tau)} (e^{p_v T/2} - e^{p_p T/2})}{e^{p_v T/2} (1 + e^{p_v T/2}) (p_v - p_p)} + 4B_0 \sum_v \frac{G_v}{1 + e^{p_v T/2}} \times \\
& \times \left[\frac{p_p e^{p_p(T/2-\tau)} \left\{ (1 - e^{p_v T/2}) [T(p_v - p_p)/2 - 1] - e^{p_p T/2} \right\}}{(p_v - p_p)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\{ e^{(p_v - p_p) T/2} |T(p_v - p_p) - 1| \} p_v e^{p_v(T/2-\tau)}}{(p_v - p_p)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{e^{-p_v} (e^{p_p T} - 1) [(T - \tau) p_v (p_v - p_p) - p_p]}{(p_v - p_p)^2} \right] = - z_0,
\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$G_v = B_v / p_v, \quad G = \sum_v G_v.$$

Условие переключения в надлежащую сторону:

$$\begin{aligned}
& - k f_0^2 \sum_p \frac{R_p}{e^{p_p T} - 1} \left\{ \frac{2B_0^2}{p_p} \left[e^{p_p(T-\tau)} \left(T p_p + \frac{T^2 p_p^2}{2} \right) - e^{p_p T} + 1 \right] + \right. \\
& + B_0 (2G + B_0 T) \left(2 \frac{C_2}{f_0} - T \right) p_p e^{p_p(T/2-\tau)} (e^{p_p T/2} - 1) - \\
& - 2B_0 \left(G + B_0 \frac{C_2}{f_0} \right) T p_p e^{p_p(T-\tau)} + \\
& + 4 \sum_v \sum_q G_v G_q \left[\frac{p_p^2 e^{p_p(T/2-\tau)} (1 + e^{p_q T/2}) (1 - e^{(p_v + p_q) T/2})}{(1 + e^{p_q T/2}) (1 + e^{p_v T/2}) (p_v + p_q - p_p)} + \right. \\
& + \frac{(p_v + p_q)^2 (e^{p_p T} - 1) e^{(p_v - p_q)(T/2-\tau)}}{(1 + e^{p_q T/2}) (1 + e^{p_v T/2}) (p_v + p_q - p_p)} \left. \right] - \\
& - 2B_0^2 \left(2 \frac{C_2}{f_0} - T \right) e^{p_p(T/2-\tau)} \left(e^{p_p T/2} - 1 - \frac{1}{2} T p_p \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \left(G + B_0 \frac{C_2}{f_0} \right) \sum_v G_v \left[\frac{p_{\mu}^2 e^{p_{\mu} (T/2-\tau)} (e^{(p_{\mu} - p_v) T/2} - 1)}{(p_v - p_{\mu}) (e^{p_v T/2} - 1)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{p_{\mu}^2 e^{p_v (T/2-\tau)} (e^{p_{\mu} T} - 1)}{(p_v - p_{\mu}) (e^{p_v T/2} - 1)} \right] - \\
& - 4 \left[B_0 \left(\frac{C_2}{f_0} - T \right) - G \right] \sum_v G_v \frac{p_{\mu}^2 e^{p_{\mu} (T/2-\tau)} (e^{p_v T/2} - e^{p_v T/2})}{e^{p_v T/2} (1 + e^{p_v T/2}) (p_v - p_{\mu})} + \\
& + 4B_0 \sum_v \frac{G_v}{(1 + e^{p_v T/2}) (p_v - p_{\mu})^2} \left[p_{\mu}^2 e^{p_{\mu} (T/2-\tau)} \left\{ (1 - e^{p_v T/2}) \times \right. \right. \quad (7) \\
& \times \left. \left. \left(\frac{T}{2} (p_v - p_{\mu}) - 1 \right) - e^{p_{\mu} T/2} + e^{(p_v + p_{\mu}) T/2} (1 - T (p_v - p_{\mu})) \right\} + \right. \\
& \left. + e^{p_v (T/2-\tau)} (e^{p_{\mu} T} - 1) \left\{ (T - \tau) p_v^2 (p_v - p_{\mu}) + p_v (p_v - 2p_{\mu}) \right\} \right] < 0.
\end{aligned}$$

Случай 2 ($T > \tau > T/2$). Условия существования автоколебаний имеют вид:

$$\sum_v R_v S_{v1} (T - \tau) = - z_0;$$

$$\sum_v R_v S_{v1} (T - \tau) < 0.$$

Уравнение периодов автоколебаний:

$$\begin{aligned}
& - k f_0^2 \sum_v \frac{R_v}{e^{p_v T} - 1} \left[\frac{2B_0^2}{p_v^2} \left[e^{p_v (T-\tau)} \left(T p_v + \frac{1}{2} T^2 p_{\mu}^2 \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - (e^{p_v T} - 1) (p_v (T - \tau) + 1) \right] - B_0 \left(\frac{2C_2}{f_0} - T \right) \times \right. \\
& \times (2G + B_0 T) e^{p_v (T-\tau)} (e^{p_v T/2} - 1) + 4 \sum_v \sum_q \frac{G_v G_q}{(1 + e^{p_v T/2}) (1 + e^{p_q T/2})} \times \\
& \times \left[\frac{p_{\mu} e^{p_v (T-\tau)} (1 + e^{p_{\mu} T/2}) (1 - e^{(p_v + p_q) T/2})}{(p_v + p_q - p_{\mu})} + \right. \\
& + \frac{(p_v + p_q) (e^{p_v T} - 1) e^{(p_v - p_q) (T-\tau)}}{(p_v + p_q - p_{\mu})} \left. \right] - 2B_0 \left(G + B_0 \frac{C_2}{f_0} \right) \frac{1}{p_{\mu}} \times \\
& \times e^{p_v (T-\tau)} \left(1 + T p_{\mu} - e^{p_{\mu} T/2} \left(1 + \frac{1}{2} T p_{\mu} \right) \right) - 2B_0 \left[B_0 \left(\frac{C_2}{f_0} - T \right) - \right. \\
& \left. - G \right] \frac{1}{p_{\mu}} \left[e^{p_v (T-\tau)} \left(1 - e^{p_{\mu} T/2} \left(1 + \frac{1}{2} T p_{\mu} \right) \right) + e^{p_v T} - 1 \right] \\
& - 4 \left(G + B_0 \frac{C_2}{f_0} \right) \sum_v G_v \frac{p_v e^{p_v (T-\tau)} (e^{p_v T/2} - e^{p_v T/2})}{(1 + e^{p_v T/2}) (p_v - p_{\mu})} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 4B_0 \sum_v \frac{G_v}{e^{p_v T/2} (1 + e^{p_v T/2}) (p_v - p_\mu)^2} \left[p_\mu e^{p_\mu (T-\tau)} \times \right. \\
 & \times \left(-T (p_v - p_\mu) e^{p_v T} + e^{p_v T} + e^{(p_v + p_\mu) T/2} (1 - e^{p_v T/2}) \times \right. \\
 & \times \left. \left. \left. - e^{p_\mu (T-\tau)} + p_v (p_v - p_\mu) e^{p_v (T-\tau)} (T - \tau) \right) \right] = -z_0.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Условие переключения в надлежащую сторону:

$$\begin{aligned}
 & -kf_0^2 \sum_\mu \frac{R_\mu}{e^{p_\mu T} - 1} \left\{ \frac{2B_0^2}{p_\mu} \left[e^{p_\mu (T-\tau)} \left(Tp_\mu + \frac{1}{2} T^2 p_\mu^2 \right) - e^{p_\mu T} + 1 \right] - \right. \\
 & - B_0 \left(\frac{2C_2}{f_0} - T \right) (2G + B_0 T) p_\mu e^{p_\mu (T-\tau)} (e^{p_\mu T/2} - 1) + \\
 & + 4 \sum_v \sum_q G_v G_q \left[\frac{p_\mu^2 e^{p_\mu (T-\tau)} (1 + e^{p_\mu T/2}) (1 - e^{(p_v + p_q) T/2})}{(1 + e^{p_v T/2}) (1 + e^{p_q T/2}) (p_v + p_q - p_\mu)} + \right. \\
 & \left. - \frac{(p_v + p_q)^2 e^{(p_v + p_q) (T-\tau)} (e^{p_\mu T} - 1)}{(1 + e^{p_v T/2}) (1 + e^{p_q T/2}) (p_v + p_q - p_\mu)} \right] - \\
 & - 2B_0 \left(G + B_0 \frac{C_2}{f_0} \right) e^{p_\mu (T-\tau)} \left[1 + Tp_\mu - e^{p_\mu T/2} \left(1 + \frac{1}{2} Tp_\mu \right) \right] - \\
 & - 2B_0 \left[B_0 \left(\frac{C_2}{f_0} - T \right) - G \right] e^{p_\mu (T-\tau)} \left[1 - e^{p_\mu T/2} \left(1 + \frac{1}{2} Tp_\mu \right) \right] - \\
 & - 4 \left(G + B_0 \frac{C_2}{f_0} \right) \sum_v G_v \frac{p_\mu^2 e^{p_\mu (T-\tau)} (e^{p_\mu T/2} - e^{p_v T/2})}{(1 + e^{p_v T/2}) (p_v - p_\mu)} - 4 \left[B_0 \left(\frac{C_2}{f_0} - T \right) - G \right] \times \\
 & \times \sum_v G_v \frac{p_\mu^2 e^{p_\mu (T-\tau)} (e^{(p_v - p_\mu) T/2} - 1) - p_\mu^2 e^{p_\mu (T-\tau)} (e^{p_\mu T} - 1)}{(1 + e^{p_v T/2}) (p_v - p_\mu)} + \\
 & + 4B_0 \sum_v \frac{G_v}{e^{p_v T/2} (1 + e^{p_v T/2}) (p_v - p_\mu)^2} \left[p_\mu^2 e^{p_\mu (T-\tau)} (-T (p_v - p_\mu) e^{p_v T} - \right. \\
 & + e^{p_v T} + e^{(p_v + p_\mu) T/2} (1 - e^{p_v T/2}) \left(\frac{T}{2} (p_v - p_\mu) - 1 \right) - e^{p_\mu T} e^{p_v T/2}) + \\
 & + (e^{p_\mu T} - 1) [p_\mu^2 e^{p_\mu (T-\tau)} + p_v e^{p_v (T-\tau)} (p_v - 2p_\mu + \\
 & \left. + p_v (p_v - p_\mu) (T - \tau))] \right] \Big\} < 0.
 \end{aligned} \quad (9)$$

В обоих случаях получено по одному трансцендентному уравнению (6) и (8) и по одному неравенству (7) и (9). Неизвестными переменными являются период автоколебаний T и величина C_2/f_0 . Последняя величина определяет ту точку на нелинейной характеристике объекта, вокруг которой происходят автоколебания. Причем можно показать, что при выполнении одного из следующих неравенств:

$$1) T + \frac{1}{B_0} \sum_v R_v \frac{e^{p_v T/2} - 1}{e^{p_v T/2} + 1} \geq \frac{C_2}{f_0} \geq \frac{T}{2} - \frac{1}{B_0} \sum_v R_v \frac{e^{p_v T/2} - 1}{e^{p_v T/2} + 1},$$

если

$$T + \frac{1}{B_0} \sum_v R_v \frac{e^{p_v T/2} - 1}{e^{p_v T/2} + 1} > \frac{T}{2} - \frac{1}{B_0} \sum_v R_v \frac{e^{p_v T/2} - 1}{e^{p_v T/2} + 1},$$

или

$$2) \frac{T}{2} - \frac{1}{B_0} \sum_v R_v \frac{e^{p_v T/2} - 1}{e^{p_v T/2} + 1} \geq \frac{C_2}{f_0} \geq T + \frac{1}{B_0} \sum_v R_v \frac{e^{p_v T/2} - 1}{e^{p_v T/2} + 1},$$

если

$$\frac{T}{2} - \frac{1}{B_0} \sum_v R_v \frac{e^{p_v T/2} - 1}{e^{p_v T/2} + 1} > T + \frac{1}{B_0} \sum_v R_v \frac{e^{p_v T/2} - 1}{e^{p_v T/2} + 1},$$

автоколебания происходят с захватом экстремума $x = 0, y = 0$. При невыполнении этого условия колебания происходят на одной из ветвей нелинейной характеристики объекта.

Последние неравенства легко выводятся из условий, при которых входная переменная x нелинейного элемента объекта в течение всего периода колебаний T отрицательна, и из условий, при которых эта переменная все время положительна.

Величина C_2/f_0 связана с потерей на рыхкание

$$D = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} y_1 dt + \int_{T/2}^T y_2 dt \right]$$

и периодом автоколебаний T следующим соотношением:

$$D = -k f_0^2 \left\{ B_0^2 \frac{C_2^2}{f_0^2} - \frac{3}{2} B_0 \frac{C_2}{f_0} T + G^2 + \frac{7}{12} B_0^2 T^2 + \right. \\ + 8 \sum_v \sum_q G_v G_q \frac{p_v (e^{p_q T/2} - e^{-p_q T/2}) - p_q (1 + e^{p_q T/2}) (e^{p_v T/2} - 1)}{(1 + e^{p_q T/2}) (1 + e^{p_q T/2}) p_v (p_v + p_q)} + \\ \left. + 4 B_0 \sum_v G_v \frac{e^{p_v T/2} (Tp_v/2 - 2) + 2 + Tp_v/2}{p_v^2 (1 + e^{p_v T/2})} \right\}. \quad (10)$$

Предположим, что период коммутатора Δ и параметры системы известны. Тогда, согласно (4), известен также период возможных в этой системе автоколебаний. Из уравнения периодов определяем величину C_2/f_0 , подставляем ее в соотношение (10) и определяем потерю на рыхкание D . Величины T и C_2/f_0 должны удовлетворять неравенствам (7) или (9), причем в первом случае $0 < \tau < T/2$, а во втором $T/2 < \tau < T$.

3 ВЫВОД УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ В СИСТЕМЕ С ДПЭ II

Последнее уравнение в (2) для системы с ДПЭ II имеет вид:

$$\sigma(t) = \sum_{\mu} R_{\mu} S_{\mu} (t - \tau) - \gamma_{\max}.$$

Используя условия переключения $\sigma(T) = -z_0$, $\sigma(T) < 0$, получим уравнения периодов автоколебаний и условие переключения в надлежащую сторону. Предположим, что момент, когда переменная γ достигает экстремального значения γ_{\max} , известен и равен t_{\max} .

В случае I при $0 < \tau < T/2$ из рис. 4 ясно, что

$$\sigma(T) = \sum_{\mu} R_{\mu} S_{\mu 2}(T - \tau) - \gamma_{\max}^{(1)} = -z_0.$$

Нужно рассмотреть три варианта расположения момента t_{\max} по отношению к τ и T :

I. $\tau > t_{\max} > 0$; тогда

$$\gamma_{\max}^{(1)} = \sum_{\mu} R_{\mu} S_{\mu 2}(t_{\max} + T - \tau);$$

II. $\tau + T/2 > t_{\max} > \tau$; тогда

$$\gamma_{\max}^{(1)} = \sum_{\mu} R_{\mu} S_{\mu 1}(t_{\max} - \tau);$$

III. $T > t_{\max} > \tau + T/2$; тогда

$$\gamma_{\max}^{(1)} = \sum_{\mu} R_{\mu} S_{\mu 2}(t_{\max} - \tau).$$

I. В соответствии с вышеизложенным уравнение периодов автоколебаний для $\tau > t_{\max} > 0$ имеет вид:

$$\sum_{\mu} R_{\mu} [S_{\mu 2}(T - \tau) - S_{\mu 2}(t_{\max} + T - \tau)] = -z_0. \quad (11)$$

Условием переключения в надлежащую сторону является в этом случае условие максимума величины γ (t_{\max})

$$\sum_{\mu} R_{\mu} \dot{S}_{\mu 2}(t - \tau + T) \Big|_{t=t_{\max}} < 0. \quad (12)$$

Величина t_{\max} определяется из уравнения

$$\dot{\gamma}(t) \Big|_{t=t_{\max}} = \sum_{\mu} R_{\mu} \dot{S}_{\mu 2}(t - \tau + T) \Big|_{t=t_{\max}} = 0. \quad (13)$$

В трансцендентных уравнениях (11) и (13), полученных для определения автоколебательного режима, неизвестными являются период T , момент достижения γ (t) максимального значения t_{\max} и величина C_2/f_0 . Уравнение (10) связывает величины T и C_2/f_0 с потерей на рыхкание D . Если известны параметры системы и период коммутатора Δ , то, следовательно, известен и период T автоколебаний, которые могут возникнуть в данной системе. Из уравнений (11) и (13) находим t_{\max} и C_2/f_0 . Полученные t_{\max} , C_2/f_0 и T должны удовлетворять неравенству (13), причем $0 < \tau < T/2$, $t_{\max} < \tau$. Подставив полученное отношение C_2/f_0

з (10), находим потерю на рыскание. Изменяя период коммутатора, можно найти возможный в данной системе автоколебательный режим с наименьшей потерей на рыскание.

II. В случае $\tau + T/2 > t_{\max} > \tau$ уравнение периодов автоколебаний имеет вид:

$$\sum_{\mu} R_{\mu} \{ S_{\mu 2}(T - \tau) - S_{\mu 1}(t_{\max} - \tau) \} = -z_0. \quad (14)$$

Величина t_{\max} определяется из условия

$$\sum_{\mu} R_{\mu} \dot{S}_{\mu 1}(t - \tau) \Big|_{t=t_{\max}} = 0. \quad (15)$$

Условие переключения в надлежащую сторону

$$\sum_{\mu} R_{\mu} \ddot{S}_{\mu 1}(t - \tau) \Big|_{t=t_{\max}} < 0. \quad (16)$$

III. Для $T > t_{\max} > \tau + T/2$ уравнение периодов автоколебаний

$$\sum_{\mu} R_{\mu} [S_{\mu 2}(T - \tau) - S_{\mu 2}(t_{\max} - \tau)] = -z_0. \quad (17)$$

Уравнение для определения t_{\max}

$$\sum_{\mu} R_{\mu} \dot{S}_{\mu 2}(t - \tau) \Big|_{t=t_{\max}} = 0. \quad (18)$$

Уравнение переключения в надлежащую сторону

$$\sum_{\mu} R_{\mu} \ddot{S}_{\mu 2}(t - \tau) \Big|_{t=t_{\max}} < 0. \quad (19)$$

В II и III для определения автоколебательного режима, возможного в системе, должны быть проведены те же операции, что и в I варианте.

Случай 2 ($T/2 < \tau < T$).

На основании рис. 4 получаем, что условия существования автоколебаний в этом случае примут вид:

$$\sigma(T) = \sum_{\mu} R_{\mu} S_{\mu 1}(T - \tau) - \gamma_{\max}^{(2)} = -z_0;$$

$$\sigma(T) < 0.$$

Рассмотрим три варианта расположения t_{\max} по отношению к τ и T :

I. $0 < t_{\max} < \tau - T/2$; тогда

$$\gamma_{\max}^{(2)} = \sum_{\mu} R_{\mu} S_{\mu 1}(t_{\max} - \tau + T);$$

II. $\tau - T/2 < t_{\max} < \tau$; тогда

$$\gamma_{\max}^{(2)} = \sum_{\mu} R_{\mu} S_{\mu 2}(t_{\max} - \tau + T);$$

III. $\tau < t_{\max} < T$; тогда

$$\gamma_{\max}^{(2)} = \sum_{\mu} R_{\mu} S_{\mu 1}(t_{\max} - \tau).$$

I. Для $0 < t_{\max} < \tau - T/2$ уравнение периодов автоколебаний

$$\sum_{\mu} R_{\mu} \{ S_{\mu 1} (T - \tau) - S_{\mu 1} (t_{\max} - \tau + T) \} = - z_0; \quad (20)$$

уравнение для определения t_{\max}

$$\sum_{\mu} R_{\mu} \dot{S}_{\mu 1} (t - \tau + T) \Big|_{t=t_{\max}} = 0. \quad (21)$$

Условием переключения в надлежащую сторону является условие максимума величины $\gamma_t (t_{\max})$:

$$\sum_{\mu} R_{\mu} \ddot{S}_{\mu 1} (t - \tau + T) \Big|_{t=t_{\max}} < 0. \quad (22)$$

II. Для $\tau - T/2 < t_{\max} < \tau$ уравнение периодов автоколебаний

$$\sum_{\mu} R_{\mu} \{ S_{\mu 1} (T - \tau) - S_{\mu 2} (t_{\max} - \tau + T) \} = - z_0; \quad (23)$$

уравнение для определения t_{\max} совпадает с (13). Условие переключения в надлежащую сторону выражается неравенством (12)

III. Для $\tau < t_{\max} < T$ уравнение периодов автоколебаний

$$\sum_{\mu} R_{\mu} \{ S_{\mu 1} (T - \tau) - S_{\mu 1} (t_{\max} - \tau) \} = - z_0 \quad (24)$$

Уравнение для определения t_{\max} совпадает с (15). Условие переключения в надлежащую сторону выражается неравенством (16). Определение автоколебательного режима проводится в этих трех вариантах так же, как и в случае I.

В этом разделе условия существования автоколебаний и условия переключения в надлежащую сторону не даны в развернутом виде в связи с недостатком места.

4. ВЫВОД УСЛОВИЙ ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ В СИСТЕМЕ С ДПЭ I

Рассмотрим непериодический режим, отличающийся от периодического малыми отклонениями в начальных условиях, и найдем условия, при которых непериодический режим стремится к периодическому.

Пусть $(m+1)$ -ый этап непериодического движения имеет продолжительность T_{m+1} ; во время этого этапа

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= +f_0 \quad (\text{при } T/2 > t > 0); \\ \dot{z}(t) &= -f_0 \quad (\text{при } T_{m+1} > t > T/2). \end{aligned}$$

Тогда для непериодического режима, интегрируя третье уравнение системы (2) и используя начальные и конечные условия $m+1$ этапа

$$\begin{aligned} z_{n+1,1}^*(0) &= z_{n+1,1}(0) + \Delta z_n^m; \\ z_{n+1,2}^*(T_{m+1}) &= z_{n+1,2}(T) + \Delta z_n^{m+1} \end{aligned} \quad (25)$$

(звездочкой обозначаются переменные непериодического режима), получим решения этого уравнения $z_{n+1,1}$ и $z_{n+1,2}^*$ и разностное уравнение

$$\Delta z_n^{m+1} = -f_0 \delta T^{m+1} + \Delta z_n^m, \quad (26)$$

где $\delta T^{m+1} = T_{m+1} - T$. Интегрируя второе уравнение системы (2) для непериодического режима и вводя разности

$$\begin{aligned}\Delta z_v^m &= z_{v_1}(0) - z_{v_1}^*(0); \\ \Delta z_v^{m+1} &= z_{v_2}^*(T_{m-1}) - z_{v_2}(T),\end{aligned}\quad (27)$$

получим еще одно разностное уравнение:

$$\Delta z_v^{m+1} = \Delta z_v^m e^{p_v T} - 2f_0 \frac{e^{p_v T/2}}{1 + e^{p_v T/2}} \delta T^{m+1}. \quad (28)$$

Используя полученные решения для непериодического режима $z_{v_1}^*, z_{v_2}^*, z_{n+1,1}^*, z_{n-1,2}^*$ и четвертое уравнение системы (2), из пятого уравнения этой системы получим выражение для $y_1^*(t)$ при $0 < t < T/2$ и $y_2^*(t)$ при $T/2 < t < T_{m-1}$. Далее интегрируем первое уравнение системы (2) для $(m+1)$ -го этапа, причем произвольные постоянные интегрирования определяются из следующих условий:

$$\begin{aligned}S_{\mu 1}(T/2) &= S_{\mu 2}(T/2); \\ S_{\mu 1}^*(0) &= S_{\mu 1}(0) + \Delta S_{\mu}^m; \\ S_{\mu 2}^*(T_{m+1}) &= S_{\mu 2}(T) + \Delta S_{\mu}^{m+1}.\end{aligned}\quad (29)$$

Будем считать δT^{m+1} , Δz_v^m , Δz_{n+1}^m и ΔS_{μ}^m малыми и пренебрежем малыми величинами второго порядка выше. Используя решение первого уравнения системы (2), условие его периодичности $S_{\mu 1}(0) = S_{\mu 2}(T)$ и выражение (29), получим разностное уравнение:

$$\begin{aligned}\Delta S_{\mu}^{m+1} &= \Delta S_{\mu}^m e^{p_{\mu} T} - kf_0 A_{\mu} \Delta z_n^m - kf_0 \sum B_{\nu \mu} \Delta z_{\nu}^m - \\ &- kf_0^2 Q_{\mu} \delta T^{m+1}.\end{aligned}\quad (30)$$

Четвертое разностное уравнение имеет различный вид в зависимости от соотношения величин τ и $T/2$.

Случай I ($0 < \tau < T/2$). В этом случае в конце $(m+1)$ -го этапа непериодического режима (см. рис. 5) имеем ($\tau_1 = \tau$):

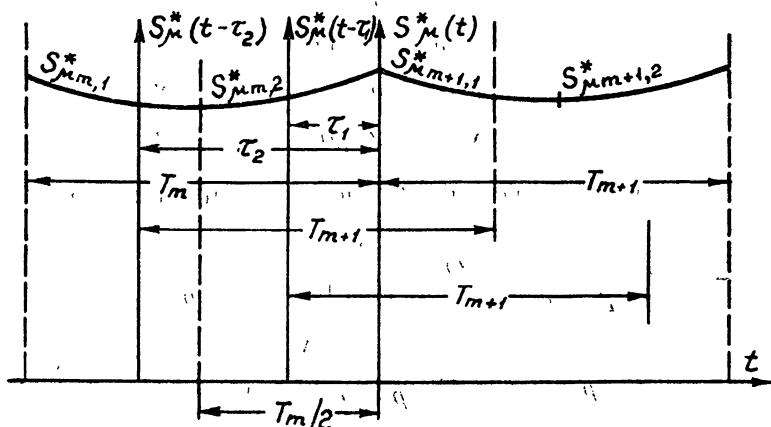


Рис. 5

$$\sigma^* (T_{m+1}) = \sum_p R_p S_p^* (T_{m+1} - \tau) = -z_0.$$

Пренебрегая малыми величинами второго порядка и выше, из последнего выражения получим разностное уравнение:

$$\begin{aligned} \sum_p R_p p_p e^{p_p(T-\tau)} \Delta S_p^m - kf_0 M \Delta z_n^m - kf_0 \sum_v N_v \Delta z_v^m - \\ - kf_0^2 K \delta T^{m+1} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Случай 2 ($T > \tau > T/2$). На этот раз в конце $(m+1)$ -го этапа не-периодического режима (см. рис. 5) получим

$$\sigma^* (T_{m+1}) = \sum_p R_p S_p (T_{m+1} - \tau) = -z_0.$$

Пренебрегая малыми величинами второго порядка и выше, из последнего выражения получим разностное уравнение того же вида, что и (31):

$$\begin{aligned} \sum_p R_p e^{p_p(T-\tau)} p_p \Delta S_p^m - kf_0 M_1 \Delta z_n^m - \\ - kf_0 \sum_v N_v \Delta z_v^m - kf_0^2 K_1 \delta T^{m+1} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Выражения для коэффициентов $A_p, B_{vp}, Q_p, M, N_v, K, M_1, N_{v1}, K_1$ здесь не даются ввиду их сложности.

Таким образом, для $(m+1)$ -го этапа получена следующая система разностных уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta z_n^{m+1} = -f_0 \delta T^{m+1} + \Delta z_n^m; \\ \Delta z_v^m e^{p_v T} - 2f_0 \frac{e^{p_v T/2}}{1 + e^{p_v T/2}} \delta T^{m+1} = \Delta z_v^{m+1}; \\ \Delta S_p^{m+1} = \Delta S_p^m e^{p_p T} - kf_0 A_p \Delta z_n^m - kf_0 \sum_v B_{vp} \Delta z_v^m - kf_0^2 Q_p \delta T^{m+1}; \\ \sum_p R_p p_p e^{p_p(T-\tau)} \Delta S_p^m - kf_0 M \Delta z_n^m - kf_0 \sum_v N_v \Delta z_v^m - \\ - kf_0^2 K \delta T^{m+1} = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Решение системы (33) ищем в виде:

$$\begin{aligned} \Delta z_n^m = Z_n p^m; \quad \delta T^{m+1} = U p^{m+1}; \\ \Delta z_v^m = Z_v p^m; \quad \Delta S_p^m = H p^m. \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя (34) в систему (33), получим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \sum_p R_p p_p \frac{e^{p_p(T-\tau)}}{p - e^{p_p T}} \left\{ Q_p - \frac{A_p}{p-1} - 2 \sum_v \frac{B_{vp} e^{p_v T/2}}{(p - e^{p_v T})(1 + e^{p_v T/2})} \right\} - \\ - \frac{M}{p-1} - 2 \sum_v \frac{N_v e^{p_v T}}{(p - e^{p_v T})(1 + e^{p_v T})} + K = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Автоколебательный режим устойчив, если корни характеристического уравнения (35) удовлетворяют условию

$$|p_i| < 1 \quad (i = 1, \dots, n+m+1).$$

В связи с недостатком места вывод условий локальной устойчивости автоколебаний в системе с ДПЭ II типа мы опускаем.

Пример. В качестве примера рассмотрим систему экстремального регулирования с ДПЭ I типа, в которой

$$K_1 = 1, \quad K_2 = \frac{1}{T_1 p + 1}.$$

Для системы без запаздывания ($\tau = 0$) и для системы с запаздыванием ($\tau/T_1 = 0,5$) были построены следующие семейства кривых: 1) зависимость $x_0/kf_0^2 T_1$ от $z = T_1/T$ при разных значениях $g = C_2/f_0 T_1$ (рис. 6); 2) зависимость $-D/kf_0^2 T_1^2$ от $z = T_1/T$ при тех же значениях $g = C_2/f_0 T_1$ (рис. 7). Пользуясь этими кривыми, по известному отношению пара-

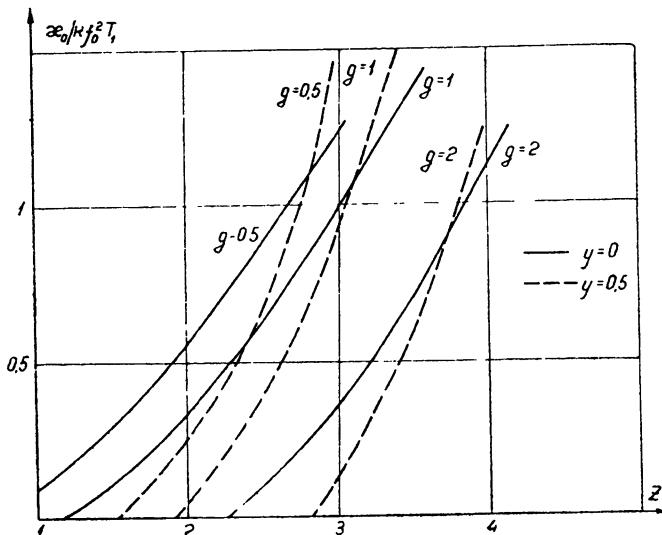


Рис. 6.

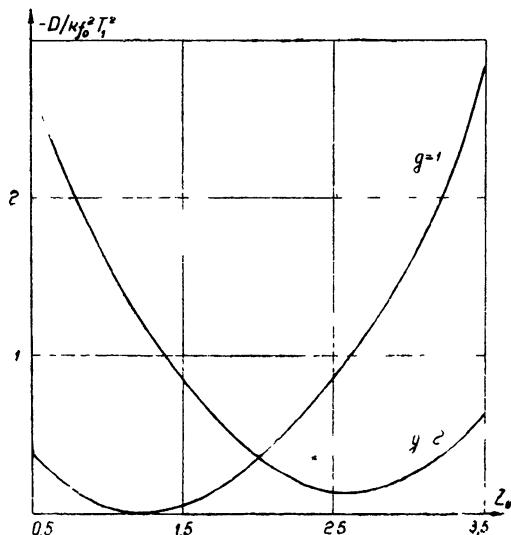


Рис. 7.

метров $x_0/kf_0^2T_1$ и периоду коммутатора $\Delta = T/2$ можно определить потерю на рыхкание D при данном автоколебательном режиме.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ю. В. Долголенко за руководство при выполнении этой работы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- 1 В. В. Казакевич, Системы экстремального регулирования и некоторые способы улучшения их качества и устойчивости, Доклад на конференции по теории и применению дискретных автоматических систем, 1958.
- 2 А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, М—Л., 1951.
- 3 Ю. В. Долголенко, О точности определения автоколебательных режимов в релейных системах экстремального регулирования, Доклад на конференции по теории и применению дискретных автоматических систем, 1958.

Ленинградский педагогический институт
им А. И. Герцена

Поступила в редакцию
23 июня 1960 г

ДЕТАЛИЗИРОВАННЫЕ ДИАГРАММЫ И. А. ВЫШНЕГРАДСКОГО И ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕПРЯМОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С КОРРЕКТИРУЮЩИМ ДИФФЕРЕНЦИATORОМ

П. В. Сергеев

Построены диаграммы И. А. Вышнеградского для системы непрямого регулирования с корректирующим дифференциатором. Для этого четырехпараметрическое гиперпространство редуцировалось на две плоскости, что позволило получить полное представление о корневой структуре системы. Установлены зоны оптимальных параметров по критерию минимума времени регулирования, для чего использовалась моделирующая установка МН-7.

Эффективность введения производной в закон регулирования известна давно. Имеется большое число исследований, оценивающих влияние импульса по производной на устойчивость, на критический коэффициент усиления, на стабилизацию структурно-неустойчивых систем и т. д. Однако вопросы качества для этого случая изучены с меньшей полнотой и касаются только систем, порядок дифференциальных уравнений которых не превышает трех. Настоящая работа расширяет рамки исследования, оперируя в первой части системой четвертого порядка, а во второй – системой четвертого и пятого порядков. Таким путем удается получить решение вопросов, связанных с качественными характеристиками переходного процесса и указать зоны оптимальных параметров по критерию времени регулирования.

Принятый в работе метод исследования базируется на совместном применении дискриминантной кривой, введенной Булгаковым [1], и операции D_s -разбиения, предложенной Неймарком [2, 3]. Оставаясь в линейной области, анализируемая система приводится к четырехпараметрическому виду, что геометрически интерпретируется четырехмерным гиперпространством. Связанные с этим трудности устраняются редуцированием на две плоскости, каждая из которых служит для представления двух параметров. Благодаря этому удается получить полное описание корневой структуры системы.

Для выполнения второй части работы использовалась моделирующая установка типа МН-7.

В настоящей статье развиваются исследования, описанные в работах [4, 5].

1. ДЕТАЛИЗИРОВАННЫЕ ДИАГРАММЫ И. А. ВЫШНЕГРАДСКОГО

Виды областей устойчивости. На рис. 1 представлена структурная схема типовой системы непрямого регулирования, в которую включены дифференцирующее и усилительное звенья. Передаточная функция по возмущающему воздействию, при составлении которой было введено безразмерное время $\bar{t} = t/\delta T_a$, равна

$$Y(p) = \frac{\delta (rp^2 + kp + 1) (sp + 1) (\tau_1 p + 1)}{p(rp^2 + kp + 1)(sp + 1)(\tau_1 p + 1) + ck_0 (\tau p + 1)}, \quad (1.1)$$

а параметры имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} r &= T_r^2/\delta^3 T_a^2; \quad k = T_k/\delta^2 T_a; \quad s = T_s/\delta T_a; \\ \tau &= T/\delta T_a; \quad \tau_1 = T_1/\delta T_a. \end{aligned} \quad (1.2)$$

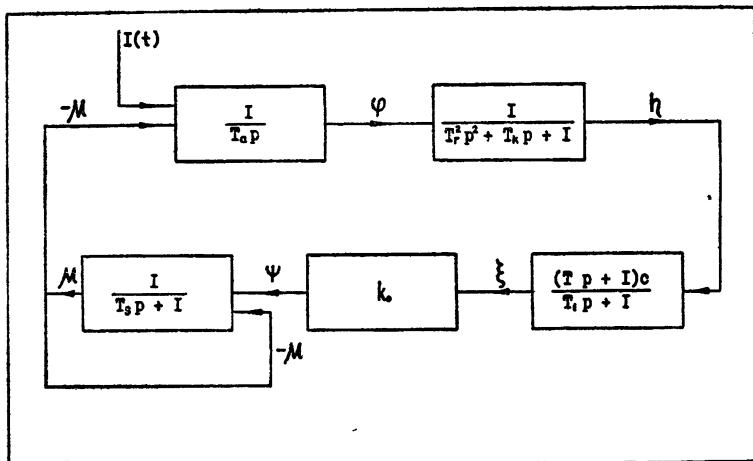


Рис. 1. Структурная схема непрямого регулирования с воздействием по производной.

При оценке эффекта воздействия по производной естественно потребовать сохранения статической погрешности, для чего полагается $ck_0 = 1$. Ограничивааясь сперва идеальным дифференциатором $\tau_1 = 0$, получим четырехпараметрическое нормированное характеристическое уравнение

$$D(p) = rsp^4 + (r + ks)p^3 + (k + s)p^2 + (\tau + 1)p + 1 = 0. \quad (1.3)$$

Операция D -разбиения приводит к параметрическим уравнениям границной кривой:

$$k = \frac{s\tau\omega^2 + 1}{\omega^2(1 + s^2\omega^2)}, \quad r = \frac{s^2\omega^2 + (\tau + 1) - s}{\omega^2(1 + s^2\omega^2)}, \quad (1.4)$$

которая совместно с особой прямой $r = 0$ выделяет на плоскости параметров чувствительного элемента область устойчивости.

На рис. 2 показаны виды областей устойчивости в зависимости от расположения figurативной точки по отношению к прямым $s = \tau + 1$, $s = \tau$ и $s = 0$. Если $s < \tau + 1$, то, согласно (1.4), при $\omega^2 = 0$ параметры k и r равны бесконечности, и область устойчивости оказывается открытой. При этом получается различное направление вогнутости границной кривой по разные стороны от прямой $s = \tau$. При $s > \tau + 1$ области устойчивости оказываются закрытыми.

Основные случаи. На рис. 3 плоскость τ , s разделена на десять областей, характеризуемых различным поведением дискриминантной кривой на плоскости k , r ; здесь же показаны все основные виды дискриминанты. Рассмотрим их подробнее.

Поступая в соответствии с [1,3], получим параметрические уравнения дискриминанты:

$$k = \frac{2\gamma(1 - s\gamma)^2 - \tau\gamma(3s\gamma - 2) + 4s\gamma - 3}{\gamma^2(1 - s\gamma)^2},$$

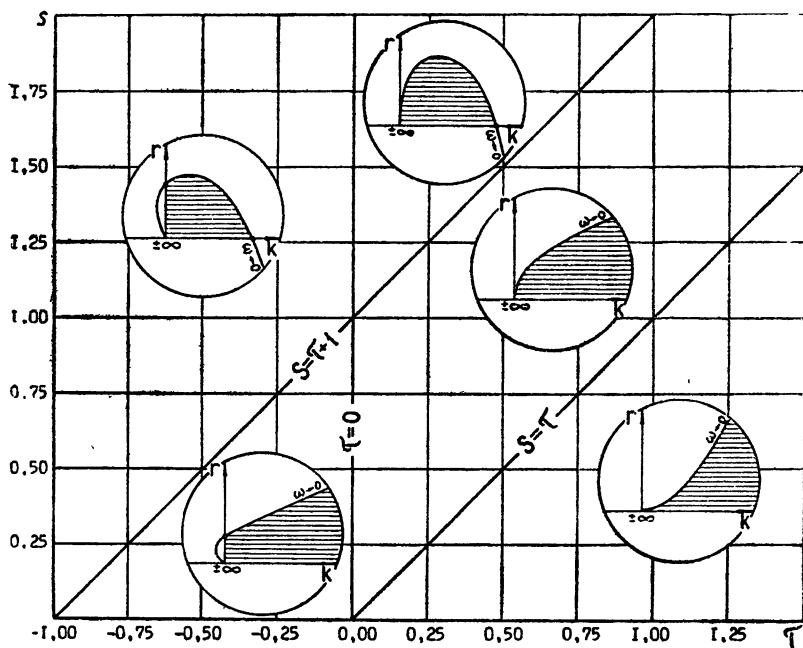


Рис. 2. Возможные виды областей устойчивости.

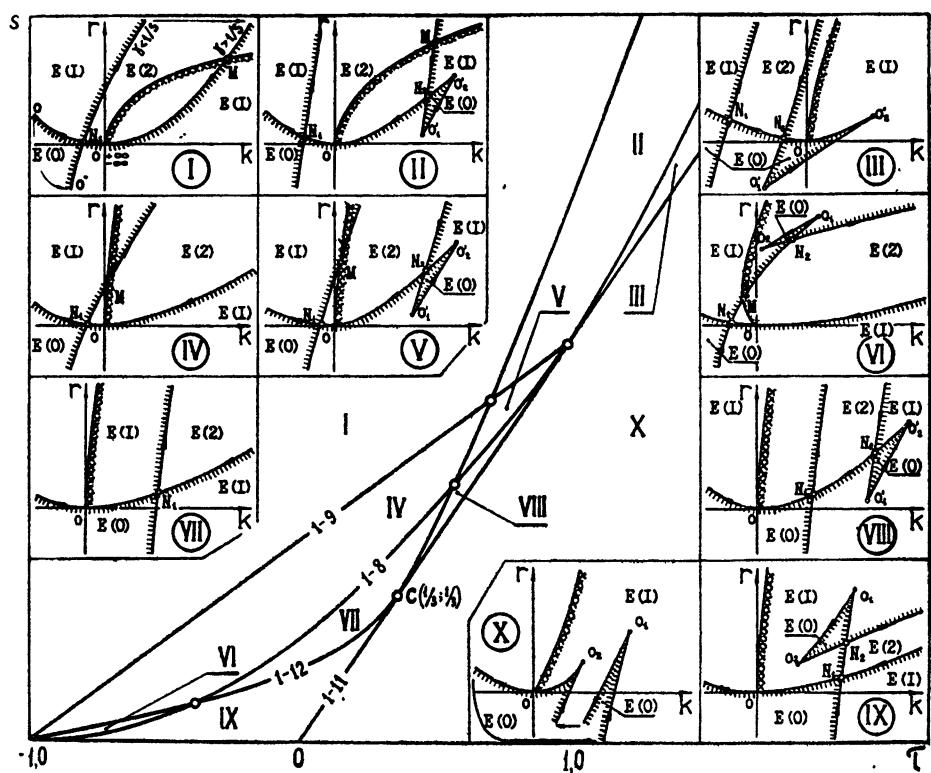


Рис. 3. Типовые случаи протекания дискриминантной кривой.

$$r = \frac{\gamma(1 - s\gamma)^2 - \tau\gamma(2s\gamma - 1) + 3s\gamma - 2}{\gamma^3(1 - s\gamma)^2}, \quad (1.5)$$

которая выделяет подобласти $E(q)$, отвечающие различному числу пар комплексных корней q . Кривая (1.5) уходит в бесконечность при $\gamma=0$ и $\gamma=1/s$, а при $\gamma=\pm\infty$ совпадает с началом координат (рис. 4). Направление движения по кривой, отвечающее росту параметра γ , отмечено на рисунке стрелками; это позволяет выполнить штриховку дискриминанты. Плоскость k, r разбивается дискриминантой на четыре области, две из которых имеют отметку q , а другие $q \pm 1$. Это позволяет установить значение q в каждой области, не прибегая к вычислениям, и произвести их разметку (рис. 4).

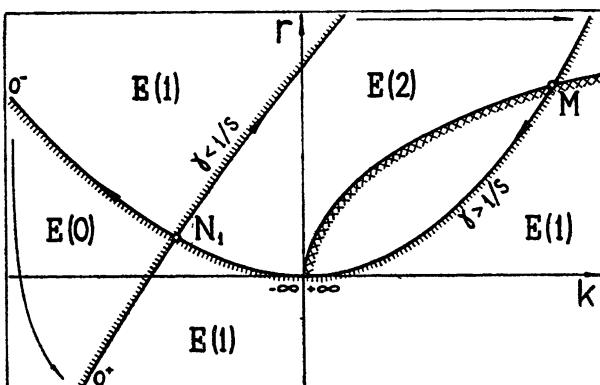


Рис. 4 Один из вариантов расположения ветвей дискриминанты.

Ветвь дискриминантной кривой, проходящую через начало координат, будем считать первой. Для ее точек, лежащих в первом квадранте, справедливо неравенство

$$\gamma > 1/s. \quad (1.6)$$

Для последующего нужно знать, как мигрируют точки M и N_1 при изменении τ и s (рис. 4).

В точке M уравнение (1.3) имеет корни $p_{1,2} = \pm j\omega$ и $p_{3,4} = -\gamma$, что по теореме Виета дает:

$$\omega^2 = \frac{[2s - (\tau + 1)]^2}{s^2[4s - (\tau + 1)^2]}; \quad (1.7)$$

$$\gamma = \frac{2}{\tau + 1}. \quad (1.7a)$$

Следовательно, точка M существует, если

$$s > \left(\frac{\tau + 1}{2}\right)^2. \quad (1.8)$$

Поэтому дискриминанта пересекает граничную кривую, когда фигурационные точки располагаются на плоскости τ, s выше параболы $s = (\tau + 1)^2/4$. Эта кривая на рис. 3 имеет шифр 1 — 8.

Точка M образуется первой ветвью дискриминанты, если дополнительно

$$s > \frac{\tau + 1}{2}, \quad (1.9)$$

что следует из сопоставления (1.6) – (1.7а). Прямая $s = (\tau + 1)/2$, имеющая шифр 1–9 на рис. 3, проведена только в интервале $-1 \leq \tau \leq 1$, где условие (1.9) оказывается более сильным, чем (1.8). Как должно быть ясно, для фигуративных точек, лежащих между линиями 1–8 и 1–9, точка M образуется второй ветвью дискриминантной кривой.

В точке самопересечения N_1 уравнение (1.3) имеет корни $p_{1,2} = -\gamma_1$ и $p_{3,4} = -\gamma_2$, что по теореме Виета дает:

$$\gamma_{1,2} = \frac{\tau + 1 \pm \sqrt{(4s - \tau - 1)^2 + 16s\sqrt{s(s - \tau)}}}{2s[\tau + 1 - 2s - 2\sqrt{s(s - \tau)}]}, \quad (1.10)$$

$$\gamma'_{1,2} = \frac{\tau + 1 \pm \sqrt{(4s - \tau - 1)^2 - 16s\sqrt{s(s - \tau)}}}{2s[\tau + 1 - 2s + 2\sqrt{s(s - \tau)}]}. \quad (1.10a)$$

Отсюда следует, что могут быть одна или две точки самопересечения или ни одной. Последнее будет, если

$$s < \tau. \quad (1.11)$$

Поэтому ниже прямой $s = \tau$, имеющей на рис. 3 номер 1–11, образуется область X, где дискриминанта не дает самопересечений.

Выше прямой 1–11, согласно (1.10), $\gamma_{1,2}$ вещественно и появляется одна точка самопересечения N_1 . Вторая точка N_2 образуется, если, помимо указанного, соблюдается неравенство

$$(4s - \tau - 1)^2 > 16s\sqrt{s(s - \tau)}, \quad (1.12)$$

что следует из (1.10а). На рис. 3 кривая, соответствующая обращению (1.12) в равенство, несет шифр 1–12; ниже этой кривой соблюдается условие (1.12). Поэтому в области между линиями 1–11 и 1–12 имеются обе точки самопересечения N_1 и N_2 , а выше 1–12 только точка N_1 . В таблице 1 указаны квадранты, в которых располагаются точки N_1 и N_2 в зависимости от расположения фигуративной точки по отношению к линии 1–8.

Таблица 1

	$-1 < \tau < 1$		$\tau > 1$	
	$s > (\tau + 1)^2/4$	$s < (\tau + 1)^2/4$	$s > (\tau + 1)^2/4$	$s < (\tau + 1)^2/4$
положение точки N_1	II квадрант	I квадрант	II квадрант	II квадрант
положение точки N_2	I квадрант	I квадрант	I квадрант	II квадрант

Заметим, что линия 1–12 строилась на основе ее уравнения, записанного в параметрическом виде:

$$s = \frac{1}{(1 - \lambda)^4 + 4\lambda - 1}, \quad \tau = 4s\lambda - 1, \quad (1.13)$$

где λ — свободный параметр.

Введенные в рассмотрение четыре линии выделяют на плоскости τ, s десять областей, определяющих типовые случаи поведения дискриминантной кривой (пересекает ли одна из ветвей граничную кривую

и сколько имеется точек самопересечения). Все случаи представлены на рис. 3, где указаны подобласти с тем или иным числом пар комплексных корней. Только в случае Х для этого нужно было производить вычисление корней при выбранном расположении фигуративной точки.

Построение детализированных диаграмм И. А. Вышнеградского. Для выделения подобластей с различными классами распределения корней и неодинаковыми качественными характеристиками переходного процесса, а также для оценки степени устойчивости η , в дополнение к выполненному выше нужно воспользоваться еще операцией D_α - разбиения.

Полагая в (1.3) $p = -\alpha + j\omega$, согласно [2], получим параметрические уравнения α -кривой:

$$k = \frac{(2s^2\alpha + \tau s)z^2 + [1 - 4s\alpha + 2\tau(\tau+1)(1-2s\alpha)]z - 4\alpha^2(1-2s\alpha)}{(1-2s\alpha + s^2z)z^2}; \quad (1.14)$$

$$r = \frac{s^2z^2 + [(\tau+1)(1-2s\alpha) - s]z - 2\alpha(1-2s\alpha)}{(1-2s\alpha + s^2z)z^2}, \quad (1.14a)$$

где $z = \alpha^2 + \omega^2$ — свободный параметр. Нетрудно видеть, что α -кривые уходят в бесконечность при $z_1 = 0$ и $z_2 = (2s\alpha - 1)/s^2$, а при $z = \infty$ совпадают с началом координат. Так как z_2 больше нуля, то второй разрыв возможен, если $\alpha > 1/2s$. Можно убедиться, что знак числителя (1.14a) при $z=z_2$ зависит только от разности $(s-\tau)$, а также, что r обращается в нуль (при конечном значении z): один раз, если $\alpha < 1/2s$, и дважды или ни разу, если $\alpha > 1/2s$. Это приводит к характерным α -кривым, представленным на рис. 5.

Применяя правила штриховки α -кривых, установленные в работе [2], и строя γ -прямые, играющие роль особых прямых, вдоль которых вещественный корень имеет заданную величину, можно выделить области с фиксированной степенью устойчивости. Последующую детализацию удобно вести применительно к основным случаям.

Случай I. Для этого случая — первого из десяти основных — прохождение α -кривых, попадающих в область устойчивости, показано на рис. 6. По мере увеличения α они изменяются в соответствии с рис. 5 а, б и в. Наибольшая достижимая степень устойчивости η_{\max} отвечает α -кривой, когда замкнутая область, образуемая ею, стягивается в точку N . В этой предельной точке самопересечения α -кривой уравнение (1.3) имеет двухкратные комплексные корни и теорема Виета дает:

$$\eta_{\max} = \alpha = \frac{(\tau+1)[2s - \tau - 1 + 2\sqrt{s(s-\tau)}]}{2s[4s - (\tau+1)^2]}, \quad (1.15)$$

а координаты точки N определяются соотношениями

$$k = \frac{2(\tau+1) - [4s - (\tau+1)^2]\eta_{\max}}{4\eta_{\max}^2}; \quad r = \frac{(\tau+1)^2}{16s\eta_{\max}^2}. \quad (1.16)$$

Когда $\alpha > \eta_{\max}$, кривые $\alpha = \text{const}$ не выделяют замкнутых областей. Характеристическое уравнение при $k = r = 0$ имеет корни, вещественная часть которых равна $(\tau+1)/2s$; поэтому α -кривая при $\alpha = (\tau+1)/2s$ проходит через начало координат.

Этих фактов достаточно для установления классов распределения корней в соответствии с классификацией, введенной в [6,7]. Действи-

тельно, подобласть $E(1)$ заполнена α -кривыми при $\sigma < (\tau + 1)/2s$ и γ -пряммыми, касающимися дискриминанты, для которых $\gamma > 1/s$. Такое распределение корней относится к классу $1A$ и для возмущения типа мгновенного сброса нагрузки отвечает колебательной устойчивости K_1 (рис. 6). Подобласть $E(2)$ заполнена только α -кривыми, что характеризуется классом $2A$ и также колебательной устойчивостью K_2 .

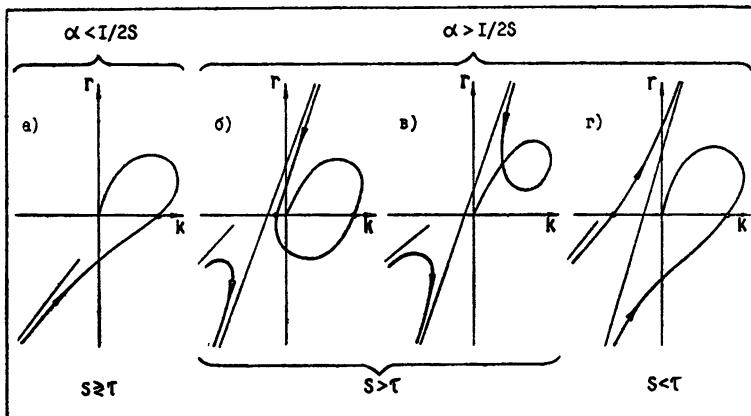
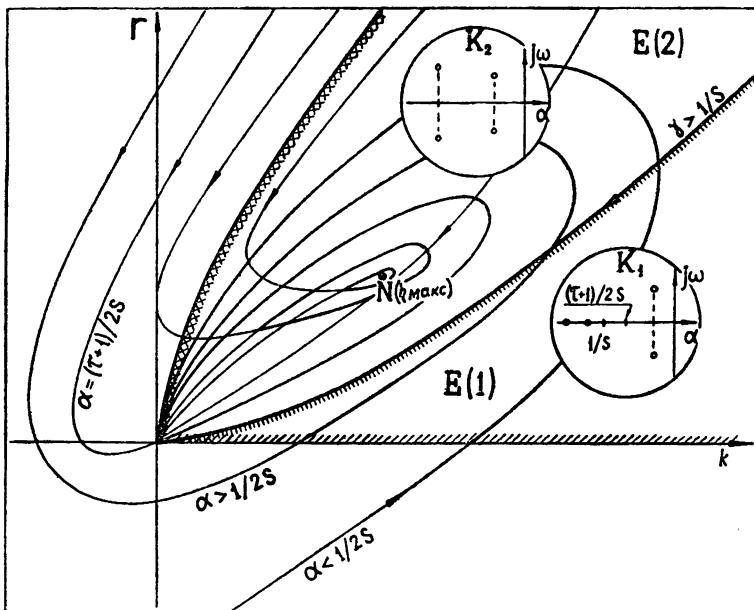
Рис 5 Характерные виды α -кривых

Рис 6 Детализированная диаграмма И. А. Вышнеградского для случая I

Разрешая (1.15) относительно τ , получим:

$$\tau = \frac{4s\eta_{\max} [\sqrt{s^2 + s(2s\eta_{\max} - 1)^2} - s]}{(2s\eta_{\max} - 1)^2} - 1, \quad (1.17)$$

что позволяет построить в области I кривые $\eta_{\max} = \text{const}$.

Случай II. Для большей ясности классы корней указаны на рис. 7, а α -кривые и γ -прямые, выделяющие области с фиксированной степенью устойчивости, даны на рис. 8. Используя теорему Виета, можно получить параметрические уравнения кривых, вдоль которых $\sigma = \tilde{\tau}_{1,2}$ и $\sigma_1 = \alpha_2$ (эти кривые показаны пунктиром на рис. 7, а их уравнения ради экономии места не приводятся).

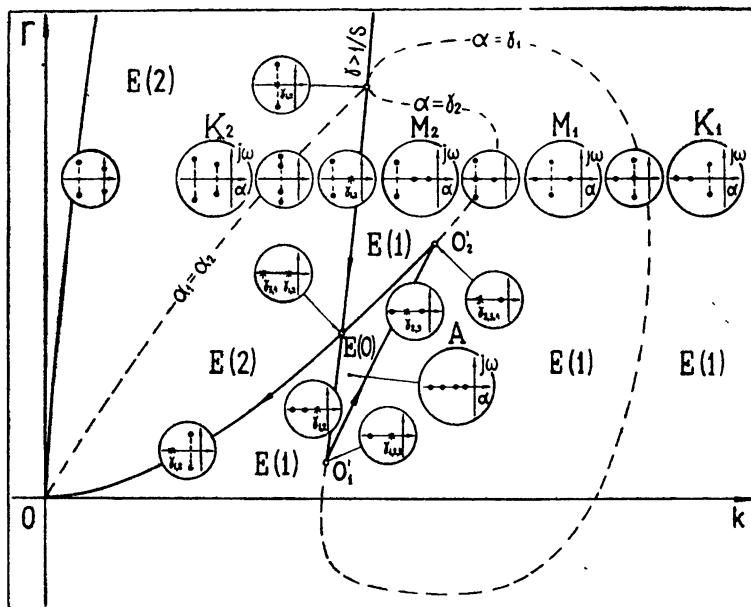


Рис. 7. Классы распределения корней в случае II.

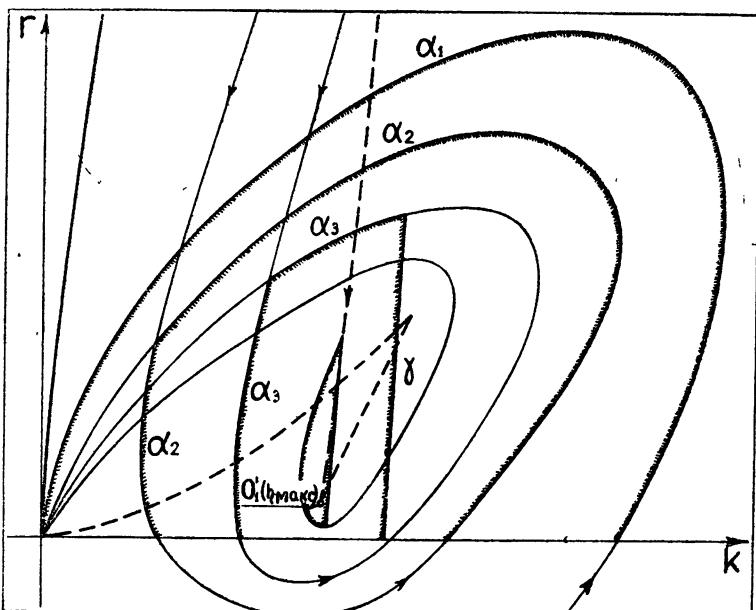


Рис. 8. Деформация областей с фиксированной степенью устойчивости для случая II.

При значениях σ , меньших $1/2 s$, γ -кривая пройдет в подобласти $E(1)$, не пересекая кривой $\alpha = \gamma_{1,2}$, ибо $\gamma > 1/s$. Поэтому правее дискриминанты и кривой $\alpha = \gamma_1$ класс распределения корней — $1A$ и колебательная устойчивость — K_1 . Этот факт открывает путь к нахождению класса корней для любого расположения фигуративной точки. Например, в подобласти M_1 (рис. 7), ограниченной дискриминантой и кривой $\alpha = \gamma_{1,2}$, один вещественный корень располагается ближе к мнимой оси, чем пара комплексных корней, что соответствует классу $1B$ и монотонному переходному процессу [8]. В подобласти $E(0)$ — нулевой класс распределения корней и апериодическая устойчивость и т. д.

Как видно из рис. 8, в начале область фиксированной степени устойчивости выделяется γ_1 -кривой, которая не дает самопересечений. Повышение σ до значений, больших $(\tau + 1)/2s$, приводит к тому, что образуется точка самопересечения (кривая α_2). Затем σ -кривые заходят в подобласть, где γ оказывается меньше σ и нужно нанести особую прямую в виде γ -прямой. В итоге оказывается, что область $\gamma = \text{const}$ выделяется α_2 -кривой и γ -прямой.

Опуская некоторые детали, ограничимся указанием на то, что максимальная степень устойчивости определяется отметкой точки заострения O'_1 , если она располагается выше оси k . Когда O'_1 лежит ниже этой оси, наибольшая степень устойчивости отвечает точке, где ветвь дискриминанты пересекает ось k . Поэтому область II по критерию γ_{\max} может быть разделена на две подобласти. Граница, отделяющая их, находится из условия, что в точке заострения имеется трехкратный вещественный корень (рис. 7) и, кроме того, $r = 0$. По одну сторону от этой границы уравнение семейства γ_{\max} -кривых получается, если из уравнения дискриминанты вычислить $dr/d\gamma$ и приравнять это выражение нулю. Для другой стороны нужно в уравнении дискриминанты положить $r = 0$. Таким путем область II может быть заполнена семейством γ_{\max} -кривых.

Исследование остальных восьми случаев, иллюстрируемых на рис. 9, проводится аналогично. Они содержат решение задачи И. А. Вышнеградского для системы непрямого регулирования с идеальным дифференциатором. На рис. 10 часть плоскости параметров τ, s , для которой $s > 0$ и $\tau > 0$, заполнена γ_{\max} -кривыми. Эта диаграмма комментируется в следующем разделе.

2. ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ

В первом разделе построением детализированных диаграмм И. А. Вышнеградского для системы непрямого регулирования с корректирующим дифференциатором была установлена корневая структура четырехпараметрического гиперпространства. Это позволило дать качественные характеристики переходного процесса в функции параметров системы и указать, будет ли он протекать монотонно, апериодически или колебательно. В этом разделе рассматривается практически важная задача об установлении зоны оптимальных параметров по критерию времени регулирования.

Выбор критерия для оптимизации параметров. На рис. 11 представлены переходные кривые для трех значений параметра k , характеризующего вязкое трение чувствительного элемента, при фиксированных значениях его массы r , времени сервомотора s и импульса по производной τ в предположении идеальности дифференциатора

$(\tau_1 = 0)$. Зона нечувствительности $\pm \varepsilon$ оценивается пятью процентами от статической погрешности.

Как известно, типичная реакция авторегулируемой системы на ступенчатое воздействие, которое принято в работе, характеризуется тремя величинами: перерегулированием, временем нарастания (быстро-

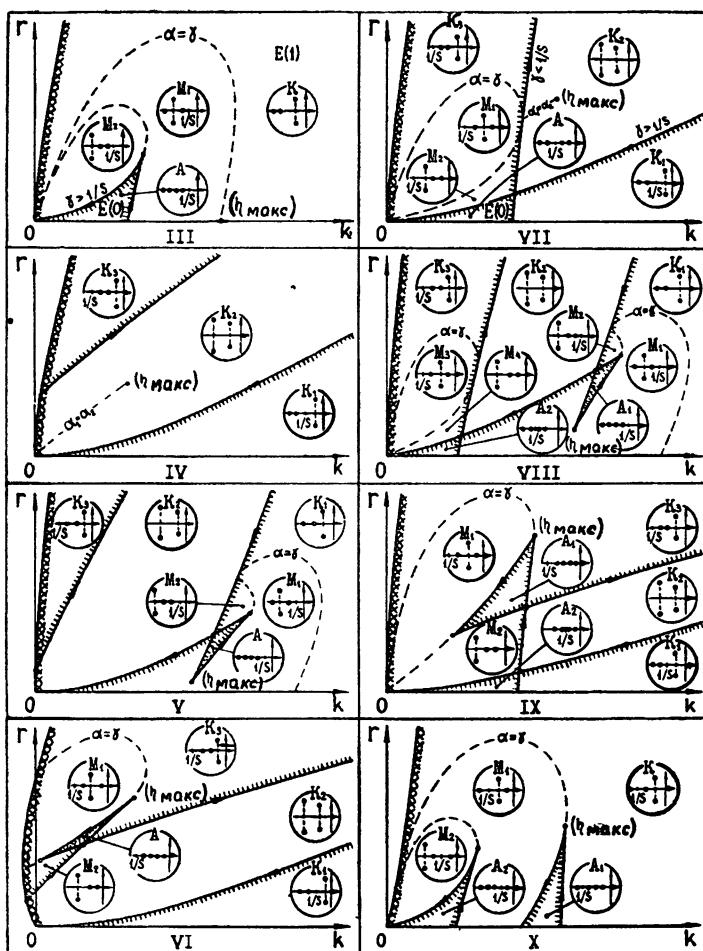


Рис. 9 Диаграммы И. А. Вышнеградского для случаев III—X

действием) и временем переходного процесса. Из этих трех характеристик критерием для отбора оптимальных параметров выбрано время регулирования по следующим соображениям. Уменьшение времени нарастания приводит к увеличению первого всплеска, числа перерегулирований, к затягиванию общей длительности переходного процесса и к росту инерционных воздействий. С другой стороны, увеличение времени нарастания, снимая многие нежелательные динамические явления, тоже затягивает общее время переходного процесса. Как видно (рис. 11), требование минимизировать время регулирования $T_{\text{пер}}$ приводит к компромиссному решению, которое, по-видимому, наиболее приемлемо. Кроме того, при работе на моделирующей установке МН-7 этот показатель легко определяется при помощи пикового вольтметра.

Оптимальные параметры для системы с идеальным дифференциатором. В соответствии с диаграммой на рис. 3 диапазон измене-

ния параметра s был принят от нуля до 1,5, с шагом аргумента $\Delta s = 0,25$ (т. е. $i = 6$). Параметр τ считался положительным и изменялся в диапазоне от нуля до 2,0, с шагом $\Delta \tau = 0,4$ (т. е. $j = 5$). Для каждой пары фиксированных значений τ_j , s_i (для узловых точек на плоскости τ , s) строилось семейство кривых (рис. 12), показывающее, как изменяется время переходного процесса $T_{\text{пер}}$ при различных значениях параметра r в функции параметра k .

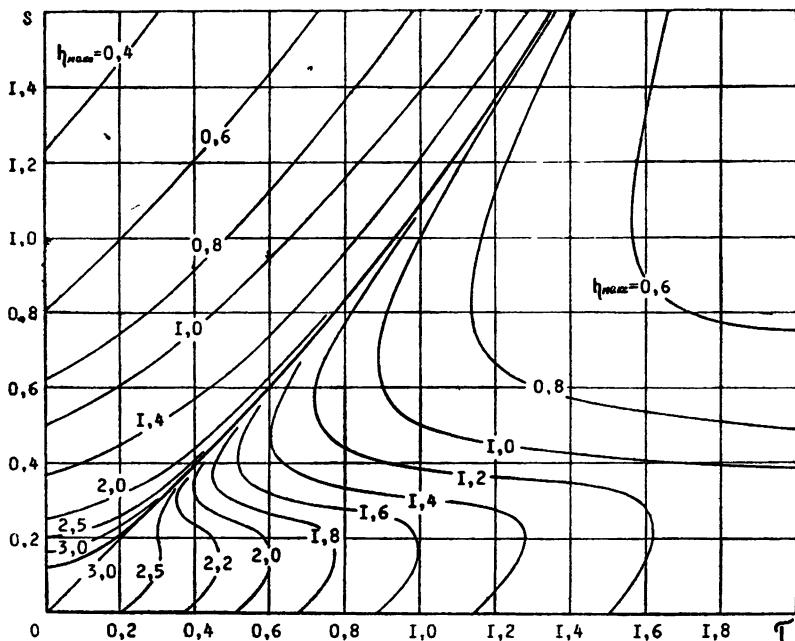


Рис. 10 К выбору параметров τ и s по критерию $\tau_{\text{ макс}}$

Отбирая для каждого $r = \text{const}$ минимальную величину времени регулирования, обозначенную через $T_{\text{опт}}$, строилась кривая $T_{\text{опт}} = f(r, \tau_j, s_i)$ (см. кривую в правом верхнем углу рис. 12). Очевидно, минимум минимorum на кривой оптимального времени регулирования определяет $(T_{\text{опт}})_{\min}$ для выбранной узловой точки и указывает оптимальную точку на плоскости k , r . Важно, что значениях $r < r_{\text{опт}}$

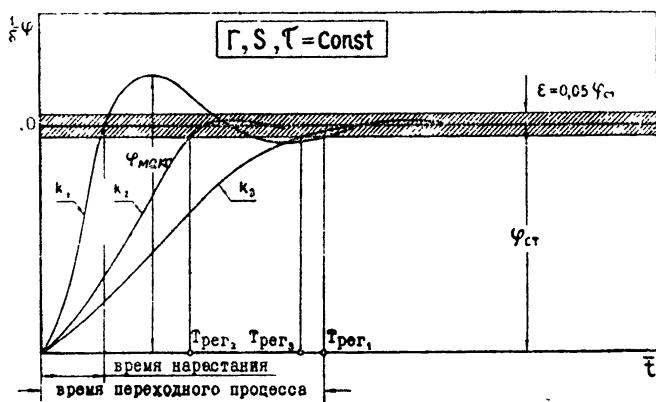


Рис. 11 Кривые переходного процесса

оптимальное время лишь незначительно отличается от возможного минимума для времени регулирования. Кроме того, нужно помнить о некоторой условности, допускаемой при определении ординат кривой $T_{\text{рег}} = f(k)$, связанной с нелинейностью этой функции. Поэтому „провалы“ кривой в районе оптимума оказываются зависящими от выбранной зоны нечувствительности.

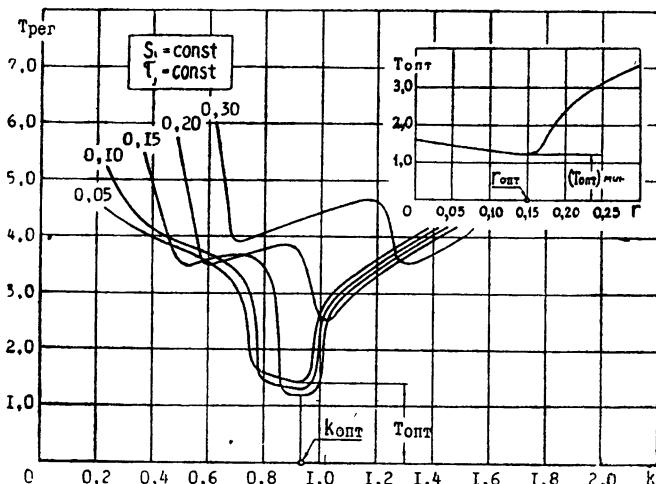


Рис. 12. Кривые изменения времени регулирования $T_{\text{рег}}$ в функции регулировочного параметра k при фиксированных t и s .

Располагая оптимальными характеристиками для узловых точек, нетрудно построить графики, представленные на рис. 13. Как видно, ни при каком сочетании параметров, если они положительны, не удается опустить $(T_{\text{опт}})_{\text{мин}}$ ниже величины порядка 1, 2. В частности, при $s = 0, 0$ и оптимальной настройке воздействие по производной не улучшает временной характеристики. Однако, вводя дифференциатор, можно работать с большими приведенными массами чувствительного элемента, ибо $r_{\text{опт}}$ растет вместе с увеличением τ . Таким образом, введение производной оказывается в этом случае полезным с точки зрения статических характеристик, а не времени регулирования.

С увеличением s интервал оптимальных настроек, где $(T_{\text{опт}})_{\text{мин}}$ сохраняет предельное значение, сужается. Так, например, при $s = 1,0$ наилучшее время можно получить с дифференцирующим контуром только при $\tau \approx 0,8-1,2$. Кроме того, теперь накладываются более жесткие ограничения на параметр r .

Располагая диаграммами вида, представленного на рис. 13, удается заполнить плоскость τ, s кривыми $(T_{\text{опт}})_{\text{мин}} = \text{const}$ и выделить область, где этот показатель равен 1,2 (на рис. 14 заштрихована). На рис. 15 и 16 та же плоскость заполнена соответственно кривыми $r_{\text{опт}} = \text{const}$ и $k_{\text{опт}} = \text{const}$. Совокупность этих трех диаграмм дает исчерпывающие данные для выбора параметров по критерию времени регулирования при условии оптимизации настройки системы. Они настолько очевидны, что можно ограничиться одним примером. При $s = 0$ и $\tau = 0$ время регулирования не превышает 1,2, если $r_{\text{опт}} < 0,150$ (рис. 15). Используя же импульс по производной $\tau = 1,2$, удается поднять предел для $r_{\text{опт}}$ до 0,7. Когда $s = 1,0$ и $\tau = 0$, время $(T_{\text{опт}})_{\text{мин}}$ порядка 5,0 и $r_{\text{опт}} < 0,2$. Однако, вводя импульс по производной $\tau = 1,3$, можно уменьшить время до 1,2 (рис. 14), если только $r_{\text{опт}}$ сделать

меньше 0,075 (рис. 15), а вязкое трение чувствительного элемента увеличить в несколько раз (рис. 16).

Основные выводы по исследуемой авторегулируемой системе сводятся к следующему.

1) Параметры, характеризующие сервомотор (s) и импульс по производной для идеального дифференциатора (τ), надо рассматривать как главные параметры, определяющие качество переходного процесса в системе.

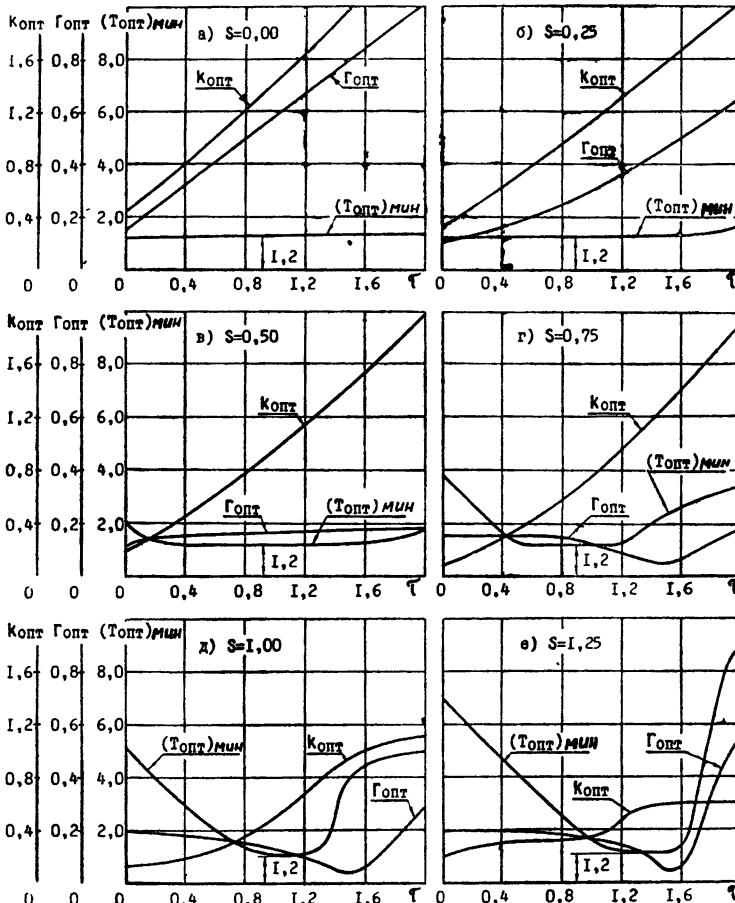


Рис. 13 Кривые оптимальных параметров чувствительного элемента и времени регулирования $|(T_{опт})_{мин}|$ в функции импульса по производной τ при фиксированных значениях s

2) При работе с медленными сервомоторами (большие s) использование воздействия по производной существенно улучшает качество регулирования (рис. 14).

3) При быстрых сервомоторах ($s < 0,5$) основные достоинства введения производной в закон регулирования связаны с увеличением значения $r_{опт}$, а не с временем регулирования.

4) Оптимальная настройка при использовании производной во всех случаях требует значительного увеличения демпфирования (рис. 16).

Учет неидеальности дифференциатора. До сих пор все исследование велось применительно к четырехпараметрической системе. Теперь

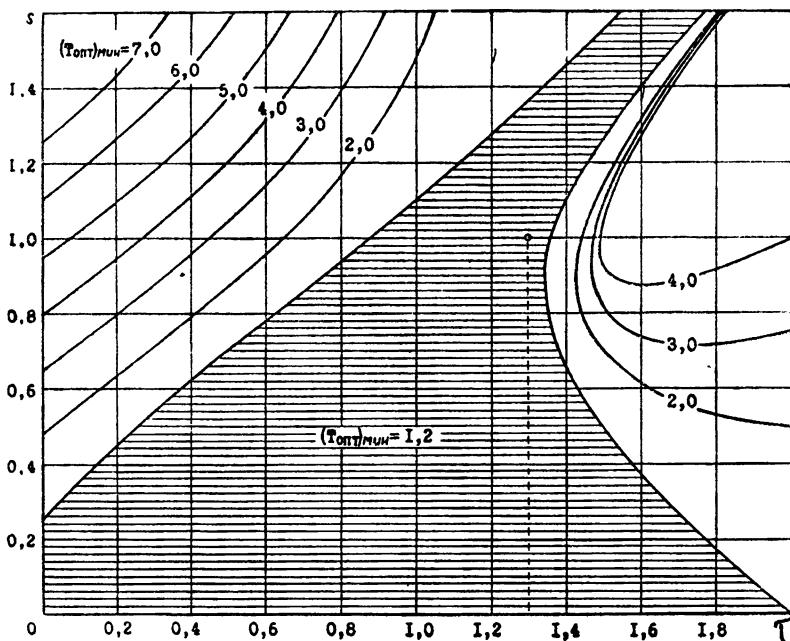


Рис. 14. К выбору оптимальных параметров τ и s по критерию $(T_{\text{опт}})_{\text{мин}}$

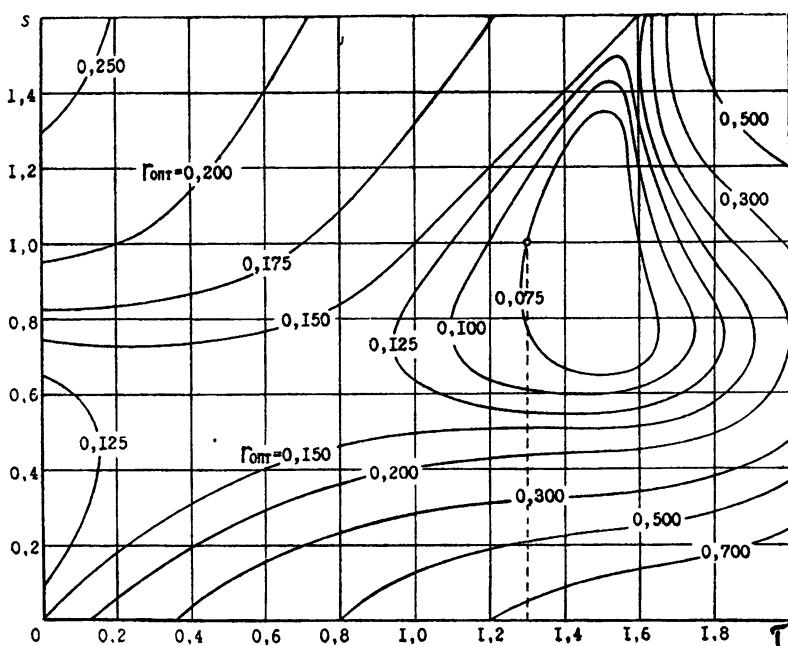


Рис. 15. К выбору конструктивного параметра чувствительного элемента $r_{\text{опт}}$.

надлежит оценить изменения, вносимые ошибкой дифференцирования, пропорциональной пятому параметру τ_1 . Наиболее простым путем это можно осуществить следующим образом. Передаточная функция системы без корректирующего дифференциатора ($\tau = \tau_1 = 0$), согласно (1.1), записывается так:

$$Y(p) = \frac{\delta(rp^2 + kp + 1)(sp + 1)}{p(rp^2 + kp + 1)(sp + 1) + 1}. \quad (2.1)$$

Такой же вид сохраняет передаточная функция для реального дифференциатора, если $\tau = s$:

$$Y(p) = \frac{\delta(rp^2 + kp + 1)(\tau_1 p + 1)}{p(rp^2 + kp + 1)(\tau_1 p + 1) + 1} \quad (2.2)$$

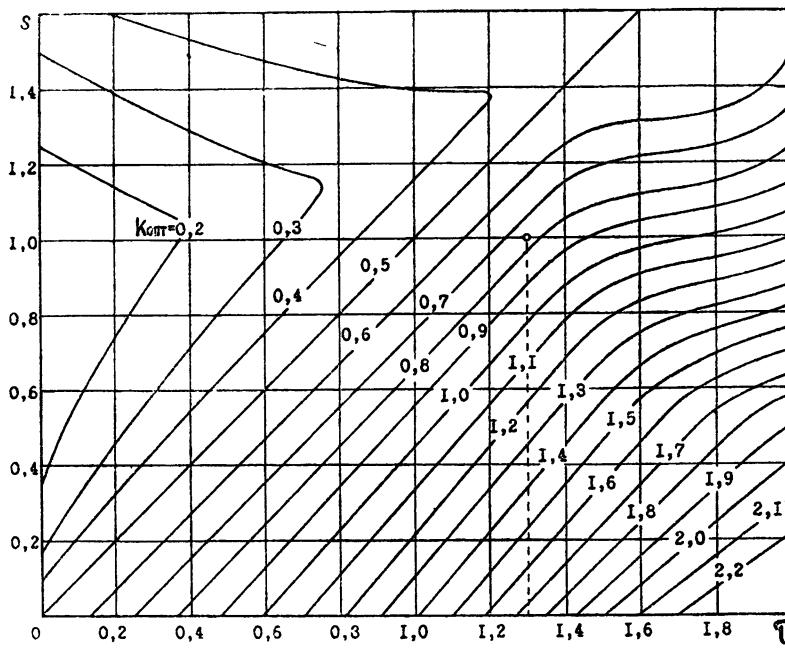


Рис. 16. К выбору регулировочного параметра чувствительного элемента $k_{\text{опт}}$.

Отсюда следует, что в этом случае параметр τ_1 играет ту же роль, какую в обычной системе непрямого регулирования играет параметр s . Это позволяет проследить влияние неидеальности дифференциатора, иллюстрируемое кривыми, представленными на рис. 17. Для построения этих кривых использовались данные диаграмм на рис. 13, снимаемые при $\tau = 0$. Как видно, для $\tau_1 < 0,25$ можно сохранить минимальную длительность переходного процесса на прежнем уровне 1,2, если несколько уменьшить значение параметра r .

Более детальное исследование, выполненное на машине МН-7, показывает, что основные диаграммы (рис. 14–16) не изменяются сколько-нибудь заметно для реального дифференциатора, если $\tau_1 < 0,15$. Затем область, где $(T_{\text{опт}})_{\min} = 1,2$, начинает заметно сужаться, а при $\tau_1 > 0,25$ исчезает совсем. Таким образом, практические выводы, сформулированные ранее для идеального контура, сохраняют свое значение при умеренных значениях τ_1 .

В заключение заметим, что кривые постоянных значений максимальной степени устойчивости, полученные в первой части работы (рис. 10), четко вырисовывают область оптимальных параметров, которая хорошо согласуется с областью, выделенной на рис. 14.

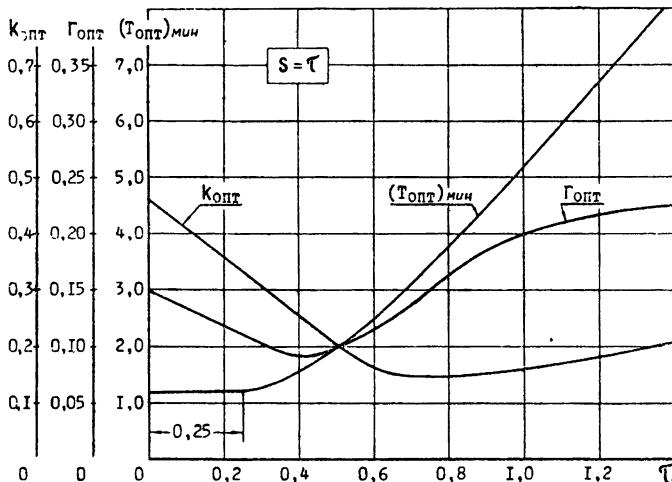


Рис. 17. Влияние неидеальности дифференциатора на длительность переходного процесса $(T_{\text{опт}})_{\text{мин}}$ и параметры чувствительного элемента

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Б. В. Булгаков, Колебания, Гостехиздат, М., 1954.
- 2 Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, 9, 190 (1948).
- 3 Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных), ЛКБВИА, Л., 1949.
- 4 Ю. А. Голл, Тр ин-та машиноведения, 14, 63 (1954).
- 5 И. А. Антонов, Изв. выш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 292 (1959).
- 6 А. А. Фельдбаум, Автоматика и телемеханика, 9, 253 (1948).
- 7 А. М. Рубинчик, Устройства и элементы теории автоматики и телемеханики, Машгиз, М., 1952, стр. 197.
- 8 З. Ш. Блох, Динамика линейных систем автоматического регулирования машин, ГИТТЛ, М., 1952.

Омский машиностроительный
институт

Поступила в редакцию
3 мая 1960 г.

МЕТОДИКА ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ КОРРЕКТИРУЮЩИХ КОНТУРОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ НОМОГРАММ

Б. С. Яковлев

Рассмотрены численный метод расчета корректирующих контуров и предлагаемый метод, основанный на использовании специальных номограмм. Дается методика выбора параметров корректирующих контуров второго порядка при заданных динамических свойствах системы автоматического регулирования. Применение номограмм позволяет создавать системы автоматического регулирования с большими запасами устойчивости и значительно сократить объем расчетных работ.

При создании систем автоматического управления часто используются корректирующие контуры. Выбор параметров таких контуров (методика выбора и числовые результаты) зависит от требований, предъявляемых к системе регулирования. Одним из основных требований является наличие определенных запасов устойчивости системы по амплитуде и фазе. В сложных быстродействующих системах с большой точностью указанное требование имеет большое значение, и удовлетворительное решение его создает предпосылки для дальнейшего расчета систем. Поэтому разработка и усовершенствование инженерных методов выбора параметров корректирующих контуров представляет интерес как с точки зрения качества создаваемых систем, так и с точки зрения экономии времени, затрачиваемого на расчет данных систем.

В настоящей работе рассматривается метод выбора параметров корректирующих контуров, основанный на частотных представлениях свойств систем регулирования. Первоначальные идеи метода основываются на работе Кислова [1].

Рассмотрим несколько подробнее требование устойчивости систем. Величина требуемых запасов устойчивости может изменяться в зависимости от свойств элементов системы регулирования. Очевидно, что достаточно общей постановкой вопроса является требование максимально возможных запасов устойчивости при некоторых заданных условиях (например, величине статического коэффициента усиления системы, помехоустойчивости и т. д.). Излагаемая методика применима для выбора параметров корректирующих контуров первого и второго порядков для получения максимально возможных запасов устойчивости при задании всех остальных элементов системы регулирования.

1. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ КОРРЕКТИРУЮЩИХ КОНТУРОВ

Структурную схему многих систем регулирования можно привести к виду, представленному на рис. 1. Отдельные элементы имеют следующие передаточные функции: чувствительный элемент — W_1 , корректирующий контур — W_k , объект регулирования — W_{op} , усилительный элемент — W_y , исполнительный орган — W_{no} .

При любом способе включения корректирующего контура в систему регулирования можно так преобразовать структурную схему, чтобы

передаточная функция состояла из двух сомножителей: W_k — передаточной функции корректирующего контура и W_o — передаточной функции остальной части системы, которую можно назвать неизменной частью. В этом случае характеристическое уравнение системы имеет следующий вид:

$$W_k(p) W_o(p) + 1 = 0. \quad (1)$$

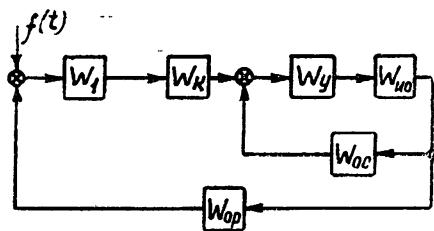


Рис. 1

Если приравнять нулю действительную и мнимую части уравнения (1), то при выполнении этого условия система будет находиться на границе устойчивости. Подставив $W_k = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$ в (1), получим:

$$W_o(p) \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1} + 1 = 0$$

или

$$W_o(p) (T_1 p + 1) = - (T_2 p + 1).$$

Положив далее $W_o(p) = E + pF$, причем $E = E(p)$ и $F = F(p)$, найдем: $(E + pF)(T_1 p + 1) = - T_2 p - 1$; $pET_1 + E + p^2FT_1 + pF = - T_2 p - 1$.

Приравнивая нулю действительную и мнимую части, имеем:

$$pET_1 + pF = - T_2 p; \quad (2)$$

$$E + p^2FT_1 = - 1, \quad (3)$$

откуда

$$T_1 = - \frac{E + 1}{p^2 F}; \quad (4)$$

$$T_2 = - F - ET_1. \quad (5)$$

Подставляя $j\omega$ вместо p и изменяя ω от 0 до ∞ , получим границу устойчивости в плоскости параметров корректирующего контура T_1 и T_2 .

Часто при выборе величин T_1 и T_2 решается следующая задача. Имеется система регулирования, в которой можно варьировать параметры корректирующего контура; требуется так определить величины T_1 и T_2 , чтобы система имела максимально возможные запасы устойчивости на увеличение и уменьшение статического коэффициента усиления при запасе по фазе не менее φ .

Поясним сказанное на примере. Пусть кривые на рис. 2 представляют амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики замкнутой системы регулирования при $T_2 = \text{const}$ и $T'_1 < T''_1 < T'_1$. При этом запас на увеличение общего статического коэффициента усиления системы K_0 изменяется при изменении T_1 , а именно: $A_1 > A_2$, $A_1 > A_3$. Следовательно, при $T_2 = \text{const}$ существует такое значение T_1 , при котором система регулирования имеет максимальный запас устойчивости на увеличение K_0 . Задача состоит в нахождении данного значения T_1 . Ее можно решить методом разбиения плоскости параметров $T_1 T_2$ на области устойчивости.

Построим области устойчивости для различных значений K_0 , например, для K_0 , $0,5 K_0$ и $2K_0$. В заштрихованной области на рис. 3 система обладает более чем двукратными запасами по K_0 . Построив области для $2,5 K_0$ и $0,4 K_0$, можно сузить указанную область. Проделав последовательными приближениями эту операцию несколько раз, можно практически получить точку, в которой система обладает наибольшими запасами устойчивости при данных T_1 и T_2 .

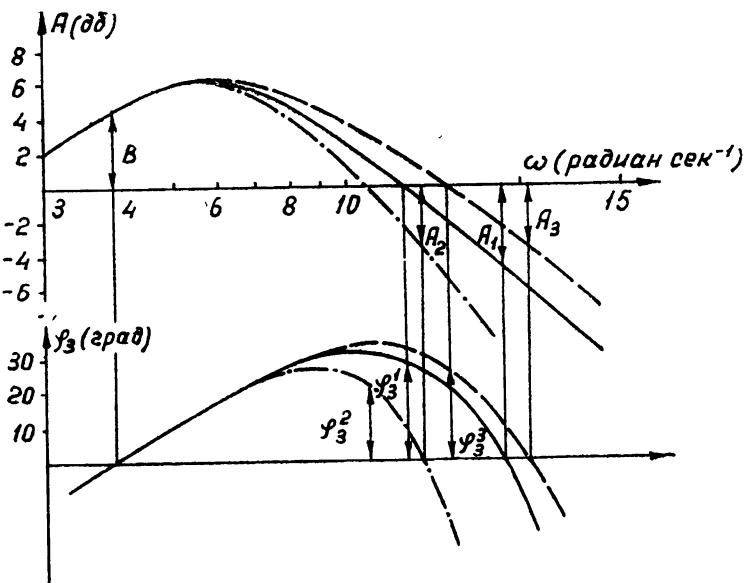


Рис. 2.

Аналогичная задача может возникнуть при выборе параметров корректирующего контура второго порядка. Для решения этой задачи также можно использовать метод разбиения плоскости параметров контура на области устойчивости.

Передаточная функция корректирующего контура второго порядка может быть записана в виде:

$$W_k = \frac{l_2 p^2 + l_1 p + 1}{\sigma_2 p^2 + \alpha_1 p + 1} l_0. \quad (6)$$

Как следует из (6), выбору подлежат четыре параметра: l_1 , l_2 , α_1 , α_2 . Коэффициент l_0 (затухание корректирующего контура) входит в общий статический коэффициент усиления K_0 . Область устойчивости — четырехмерная. Для наглядного изображения ее приходится строить в двухмерном пространстве, задаваясь любыми двумя параметрами и варьируя два остальных. Допустим, задаемся значениями параметров σ_2 и l_1 . Выбору подлежат α_1 и l_2 , и передаточную функцию контура можно записать так:

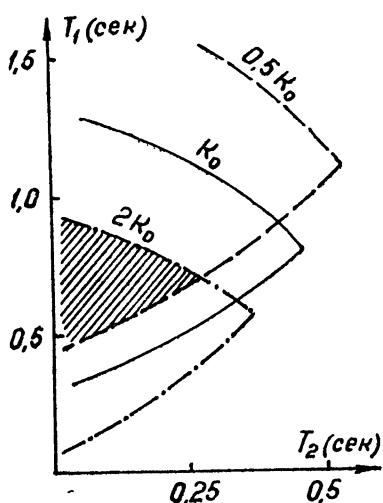


Рис. 3.

$$W_k = l_0 \frac{l + l_1 p}{\sigma + \alpha_1 p},$$

где $l = 1 + l_2 p^2$ и $\sigma = 1 + \alpha_2 p^2$. Характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$1 + (E + pF) K_0 \frac{l + l_1 p}{\sigma + \alpha_1 p} = 0. \quad (7)$$

Приравнивая нулю действительную и мнимую части (7), получим:

$$\alpha + EI K_0 + p^2 F l_1 K_0 = 0;$$

$$\sigma_1 + E l_1 K_0 + F l K_0 = 0$$

или

$$l_1 = - \frac{\sigma + EI K_0}{p^2 F K_0}; \quad (8)$$

$$\alpha_1 = - K_0 (E l_1 + F l). \quad (9)$$

Таким образом, задавшись значениями l_2 и α_2 , при изменении σ получим область устойчивости в плоскости параметров $l_1 \alpha_1$ (рис. 4). Далее эту область можно исследовать, например, изменением K_0 и новым построением области устойчивости, как изображено на рис. 3.

С целью сокращения расчетов можно применить и другую методику, взяв по определенной системе из области $l_1 \alpha_1$ параметры контура (например, в точках 1, 2, 3, 2', 3', 2'', 3'') на рис. 4). Для каждой из указанных точек строятся амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики системы и определяются запасы устойчивости. После нескольких таких приближений можно выбрать контур, обладающий максимальными запасами устойчивости при произвольно выбранных значениях l_2 и α_2 . Для более полного исследования влияния параметров корректирующего контура на запасы устойчивости системы нужно строить

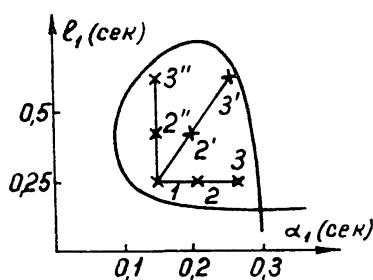


Рис. 4.

другие области (например, $l_1 l_2$ или $l_1 \alpha_2$) и контур выбирать при совместном рассмотрении нескольких областей.

При высоких порядках характеристического уравнения, как следует из изложенного, неизбежны трудоемкие расчеты. Кроме того, в областях устойчивости $l_1 l_2$, $l_1 \alpha_1$ и т. д. нет критерия для выбора параметров корректирующего контура. Приходится в каждой области брать несколько контуров и для каждого из них строить частотные характеристики всей системы, чтобы определить получающиеся запасы устойчивости. Кроме того, изложенная методика не дает непрерывных зависимостей запасов устойчивости системы от параметров контура. Поэтому, если выбран какой-нибудь контур, нет уверенности, что не существует другой контур, дающий большие запасы устойчивости.

2. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ КОРРЕКТИРУЮЩИХ КОНТУРОВ С ПОМОЩЬЮ НОМОГРАММ

a) Корректирующий контур первого порядка. Передаточная функция контура первого порядка может быть записана в виде:

$W_k = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$. Для выбора параметров T_1 и T_2 строится следующая номограмма. Положив $\omega T_2 = \text{const}$, меняем ωT_1 от 0 до ∞ . Проделав эту операцию для ряда значений ωT_2 , можно построить ряд кривых, в которых $\omega T_1 = \text{var}$ и $\omega T_2 = \text{const}$. Соединив кривыми точки с равными значениями ωT_1 , получим сетку кривых — номограмму. Для $\omega T_1 \leq 0$ и $\omega T_2 \leq 0$ такая номограмма приведена в [1] на рис. 2.

Для получения области устойчивости нужно в масштабе номограммы построить характеристику неизменной части W_o . В точках пересечения кривых номограммы и кривой W_o выполняется условие (1), причем в каждой точке известны значения ω (по кривой W_o) и ωT_1 , ωT_2 (по кривым номограммы). Разделив ωT_1 и ωT_2 на ω , получим значения T_1 и T_2 , соответствующие границе устойчивости. Идя с требуемым по точности шагом по кривой W_o , получим ряд значений ωT_1 , ωT_2 и далее T_1 , T_2 , т. е. область устойчивости. Для получения области устойчивости при применении номограмм требуется значительно меньший объем работы, чем при применении численного метода разбиения плоскости параметров T_1 , T_2 на область устойчивости.

Для различных значений K_0 области устойчивости можно получить сдвигом характеристики неизменной части на число децибел, соответствующее изменению K_0 . Например, при увеличении K_0 в два раза характеристику неизменной части нужно переместить на 6 дБ и т. д.

Получив таким образом области устойчивости для ряда значений K_0 (рис. 3), можно выбрать корректирующий контур с максимальными запасами устойчивости по K_0 . Кроме

того, пользуясь изложенной методикой, можно построить линии равных запасов по фазе и вести выбор корректирующего контура с учетом запаса по фазе φ_3 . Характеристическое уравнение для системы с φ_3 будет иметь вид:

$$W_o(p) e^{-j\varphi_3} \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1} = 0.$$

Рис. 5.

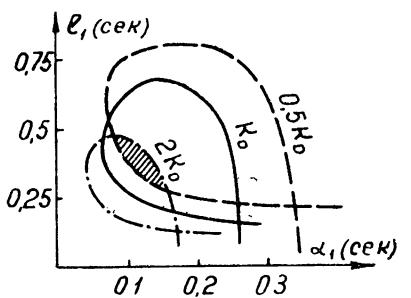
Следовательно, для получения линий равных запасов по фазе нуж-

но характеристику неизменной части переместить по оси фаз в направлении отрицательных значений на φ_3 и далее обычным путем снять область устойчивости, которой является линия равного запаса по фазе для φ_3 . Приведенная методика позволяет получить и другие области устойчивости, например, в плоскости параметров K_0 , T_1 при известном T_2 . Член $(1 + j\omega T_2)$ вносим в W_o и производим обычное снятие области устойчивости. После анализа таких областей можно выбрать контур с максимальными запасами по K_0 и T_1 .

Таким образом, применение метода номограмм значительно сокращает объем вычислительных работ и позволяет более полно выбирать параметры контура даже при применении контура первого порядка.

б) Корректирующий контур второго порядка. Передаточная функция такого контура может быть представлена функцией вида

$$W_k = \frac{l_2 p^2 + l_1 p + 1}{\sigma_2 p^2 + \alpha_1 p + 1} = \frac{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}{(T_{\text{вн}} p + 1)(T_1 p + 1)},$$



где $l_2 = T^2$, $l_1 = 2\xi T$, $\sigma_2 = T_{\text{ви}} T_1$, $\alpha_2 = T_1 + T_{\text{ви}}$. Величина $T_{\text{ви}}$ обычно задается из условий физической осуществимости контура, так как при очень малых значениях $T_{\text{ви}}$ затухание контура резко возрастает. Для затуханий порядка 10^{-5} , как показывает практика, $T_{\text{ви}}$ имеет величину порядка $0,005 \div 0,01$. Тогда при $\omega = 20 \div 25 \text{ сек}^{-1}$ амплитуда члена $(1 + j\omega T_{\text{ви}})$ равна $A = \sqrt{(\omega T_{\text{ви}})^2 + 1} \approx 1,02$, а фаза $\varphi \approx 11^\circ$. Отсюда следует, что $(1 + j\omega T_{\text{ви}})$ незначительно изменяет амплитудную характеристику контура, но вносит существенный сдвиг по фазе. Поэтому следует уменьшать $T_{\text{ви}}$, чтобы увеличить запас по фазе и по амплитуде на увеличение K_0 .

Таким образом, считая $T_{\text{ви}}$ известным, относим член $(1 + j\omega T_{\text{ви}})$ к неизменной части системы W_o . Передаточная функция контура будет иметь вид:

$$W_k = \frac{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}{T_1 p + 1}. \quad (10)$$

Для многих случаев практического применения величина ξ изменяется в узком диапазоне значений от 0,3 до $1,5 \div 2$. При $\xi < 0,3$ в амплитудно-частотной характеристике контура появляется провал на частоте $\omega = 1/T$, а при $\xi > 1,5 \div 2$ эта характеристика контура быстро растет с ростом частоты, а поэтому запас устойчивости на увеличение по амплитуде падает. Итак, из четырех неизвестных ($l_1, l_2, \sigma_1, \alpha_2$), меняющихся в широком диапазоне значений, осталось два неизвестных (T и T_1), меняющихся в широком диапазоне значений, и ξ , изменяющаяся от 0,3 до 2. Характеристическое уравнение для данного случая имеет вид:

$$W_o(p) W_k(p) + 1 = 0$$

или

$$W_o(p) = - \frac{T_1 p + 1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}. \quad (11)$$

Положив $\xi = \text{const}$, можно построить области устойчивости в плоскости параметров TT_1 . Для сокращения расчетных работ применяется следующая номограмма. Положим $\omega T_1 = \text{const}$, $\omega T = \text{var}$. По формуле (11) подсчитаем амплитуду и фазу — $1/W_k$ для каждого значения ωT_1 и ωT . Отложим амплитуду в децибелях по оси ординат, а фазу в градусах — по оси абсцисс. Тогда для $\omega T_1 = \text{const}$ получим кривую 1, для ωT_1 — кривую 2 и т. д. На рис. 6 приведен примерный вид номограммы для $\xi = 1,5$.

Построение области устойчивости производится следующим образом. В координатной сетке номограммы строится характеристика неизменной части (кривая B рис. 6), на которой нанесены частоты. Точки пересечения указанной кривой и кривых номограммы, являясь решениями характеристического уравнения, лежат на границе устойчивости. В каждой точке известны ωT , ωT_1 и ω . Пройдя последовательно по всем частотам характеристики неизменной части, получим область устойчивости в плоскости параметров TT_1 .

Большим преимуществом номограммы является то, что без дополнительных пересчетов неизменной части можно получить линии равных запасов по амплитуде и фазе. При изменении статического коэффициента K_0 кривая $W_o(p)$, построенная в логарифмическом масштабе, только сдвигается по оси ординат. Сдвинув кривую W_o относительно номограммы на 6 дБ вверх, можно получить линии равных запасов при $K_0' = 2K_0$, на 6 дБ вниз — при $K_0'' = 0,5K_0$. Построив получившиеся об-

ласти на одном листе в координатах $T T_1$, можно получить область, в которой система устойчива при изменении K_0 от 0,5 до 2.

С помощью номограммы можно также получить линии равных запасов по фазе, уравнение которых имеет вид:

$$W_o(p) e^{-j\varphi_3} W_k(p) + 1 = 0.$$

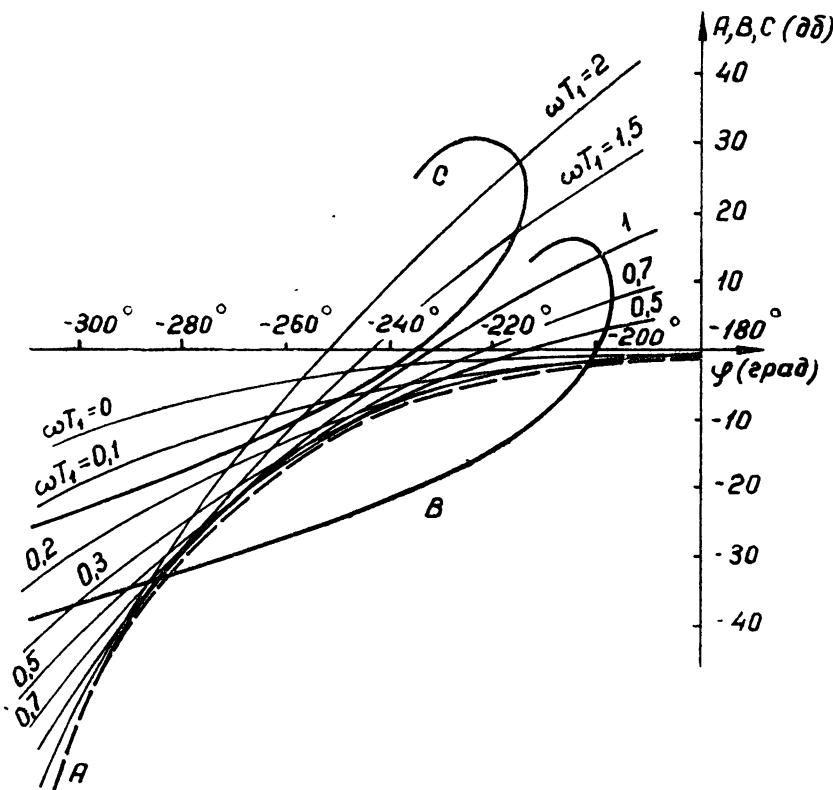


Рис. 6.

Поэтому для получения указанных линий достаточно сдвинуть характеристику неизменной части влево по оси фаз и при этом положении неизменной части относительно номограммы снять область устойчивости. В зависимости от взаимного расположения неизменной части и сетки номограммы области устойчивости могут быть двух видов — непрерывные по всем значениям T_1 и разделенные на две части. Отметим, что все кривые номограммы касаются одной общей кривой A на рис. 6. Если характеристика неизменной части имеет с указанной выше кривой две общих точки (кривая B на рис. 6), то область устойчивости непрерывна в плоскости TT_1 (область $a-a$ на рис. 7). Если же характеристика неизменной части

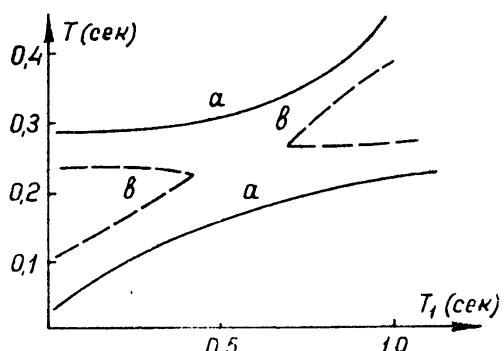


Рис. 7.

(кривая C рис. 6) не имеет общих точек с кривой A , то область устойчивости распадается на две отдельные подобласти ($\vartheta \frac{+}{-} \vartheta$ рис. 7).

Рассмотрим случай, когда область устойчивости разделена на две подобласти (малые значения T_1 и большие значения T_1).

При малых значениях T_1 (см. ниже рис. 14) максимальные запасы устойчивости возможны при $T_1 = 0$. Анализ запасов устойчивости можно провести, например, так, как это сделано далее на рис. 15. Если есть возможность осуществить корректирующий контур без членов смещения σ_2 и σ_1 , то передаточная функция его будет иметь вид: $W_k = l_2 p^2 + l_1 p + 1$. Номограмма для такого контура, очевидно, строится проще, чем для (10). Иногда, однако, не удается получить $T_1 = 0$. Так, например, члены смещения, существенно влияющие на устойчивость, имеют место при работе контура, схема которого представлена на рис. 8, на индуктивную нагрузку. Можно показать, что в этом случае величины членов смещения зависят от допустимого затухания,

вносимого контуром в систему регулирования. Если задана величина допустимого затухания, то в плоскости TT_1 можно учесть эту величину. Для контура, приведенного на рис. 8, величина затухания определяется сопротивлением R_2 , определяемом в первом приближении соотношением

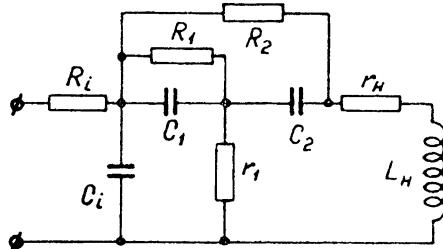


Рис. 8

$$R_2 = \frac{l_2(R_h + r_h) + l_1 L_h}{\alpha_2 - l_1 R_i C_i}.$$

При выборе корректирующих контуров вблизи $T_1 = 0$ величина l_1 изменяется незначительно, и величина R_2 практически определяется от соотношением l_2/α_2 или $T^2/T_1 T_{\text{ви}}$. Если $l_2/\alpha_2 = 50$, $T_{\text{ви}} = 0,01$ и $R_{2\min} = 100 \text{ к}\omega$ то $l_2/\alpha_2 = T^2/T_1 T_{\text{ви}}$ и $T^2/T_1 = 0,5$, $T \approx 0,7 \sqrt{T_1}$. Для контуров, лежащих выше этой кривой, $R_{2\min} > 200 \text{ к}\omega$. Если ряд подобных кривых наложить на плоскость TT_1 , то этим сразу определится область, в которой лежат параметры реальных контуров, дающих максимальные запасы устойчивости.

Если при выборе контуров ставится задача получить заданные запасы устойчивости при минимальном затухании контура, то выбор последнего можно провести следующим образом. Допустим, требуются равные запасы устойчивости на увеличение и уменьшение K_0 , равные 6 дБ. Снимаются области устойчивости и линии равных запасов для ряда значений ξ (например, так, как на рис. 9). Требование минимального затухания контура в области TT_1 означает требование максимального значения T_1 . Если при каждом значении ξ определить из графиков, подобных рис. 9, максимальное значение T_1 , при которых еще существуют требуемые запасы 6 дБ, то можно построить графики $T_1 = f(\xi)$ и $T = f'(\xi)$, где T и T_1 — координаты точек пересечения линий требуемых запасов по амплитуде. Из этих графиков можно рассчитать кривую $l_2/\alpha_2 = f''(\xi)$ и взять контур при том значении ξ , где кривая $l_2/\alpha_2 = f''(\xi)$ имеет минимум. В нашем примере (рис. 10) контур с минимальным затуханием нужно брать при $\xi = 1,1$ в точке пересечения линий равных запасов в 6 дБ. Следует заметить, что графики $T = f'(\xi)$ и $l_2/\alpha_2 = f''(\xi)$ строить всегда нет необходимости: если ордината точки пересечения линий равных запасов в 6 дБ меняется при изменении ξ несущественно (так, как в нашем примере на рис. 10), то достаточно определить ξ , при которой величина принимает максимальное значение.

При выборе контура в подобласти больших значений T_1 существенное значение приобретает условие физической осуществимости контура. Примерный вид области устойчивости и линий равных запасов по K_0 приведен на рис. 11. Если принять для примера схему корректирующего контура, приведенную на рис. 8, то можно показать, что при $T_1 \gg T_{\text{ви}}$ (это всегда имеет место) величина емкости C_1 определяется по формуле: $C_1 \approx l_2/(l_1 - \tau_1) R_1$. Поскольку C_1 — величина су-

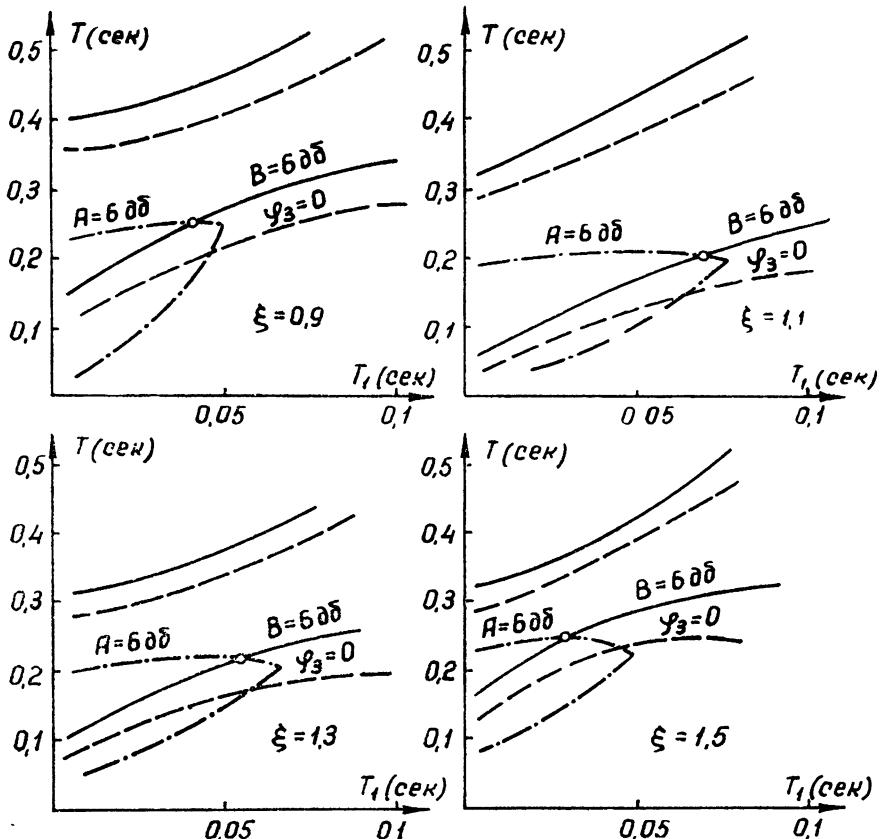


Рис. 9.

щественно положительная, условие физической осуществимости контура можно выразить так: $l_1 - \tau_1 > 0$, $l_1 > \tau_1$. Так как $l_1 = 2\xi T$, а $\tau_1 \approx T_1$, то

$$2\xi T > T_1. \quad (12)$$

Формуле (12) на рис. 11 соответствует линия $0 \vdash 0$. Значит, контуры можно выбирать из области, лежащей выше прямой $0 \vdash 0$. В примере на рис. 11 данная область заштрихована.

Рассмотренные номограммы имеют существенный недостаток, сказывающийся и на точности вычислений, и на объеме работы, затрачиваемой на выбор параметров корректирующего контура. Дело в том, что в области, близкой к общей касательной кривых номограммы (кривая A рис. 6), последние расположены близко друг от друга и образуют весьма густую сетку, в которой очень трудно точно определить значения ωT и ωT_1 . Поэтому номограммы были видоизменены следующим образом. При построении номограммы для $\xi = \text{const}$ основной является кривая $T^2 p^2 + 2\xi T p + 1$, отвечающая значению $\omega T_1 = 0$.

При введении члена $(1 + j\omega T_1)$ амплитуда и фаза каждой точки кривой $T^2 p^2 + 2\xi T p + 1$ увеличивается на значения, соответствующие величине ωT_1 . Кривая $T^2 p^2 + 2\xi T p + 1$ для каждого ωT_1 сдвигается относительно неизменной части. Следовательно, можно сдвигать и характеристику неизменной части относительно кривой $T^2 p^2 + 2\xi T p + 1$ соответственно величине ωT_1 . Это смещение можно рассчитать заранее и построить шаблон члена $(1 + j\omega T_1)$, примерный вид которого приведен на рис. 12.

В данном случае номограммы для ряда значений ξ можно поместить на одном листе и снимать области устойчивости сразу для всех требуемых значений ξ , чем значительно сокращается затрачиваемое время. Кроме того, при снятии областей устойчивости в данном случае может быть достигнута любая требуемая точность.

Получение области устойчивости производится в следу-

ющем порядке. Сначала строится на миллиметровой бумаге в масштабах номограммы характеристика неизменной части; с одной стороны кривой (например, слева) бумага вырезается. Точка шаблона $(1 + j\omega T_1)$, где $\omega T_1 = 0$, совмещается с любой точкой характеристики неизменной части или вообще с любой точкой листа, на котором нанесена характеристика неизменной части. В точке пересечения кривой номограммы с характеристикой неизменной части считаются значения ω и ωT ; далее выбранная точка (точка B на рис. 13) совмещается со следующим за $\omega T_1 = 0$ значением ωT_1 ; в точках пересечения считаются новые значения ω и ωT и т. д. После получения всех точек пересечения вычисляются значения T и T_1 для границ областей устойчивости и линий равных запасов по амплитуде и фазе и производится выбор требуемых параметров корректирующих контуров.

Если, например, требуется выбрать корректирующий контур, дающий максимальные запасы устойчивости, то для этого нужно снять несколько линий равных запасов на увеличение (A) и уменьшение (B) статического коэффициента усиления K_0 . На рис. 14 приведены для примера линии $A = 7,9 \text{ дБ}$ и $B = 6,7 \text{ дБ}$. Положив $T_1 = \text{const}$ (на рис. 14 этому соответствуют вертикальные прямые 1, 2, 3), можно построить кривые $A = f(T)$ и $B = f'(T)$. В точке, соответствующей

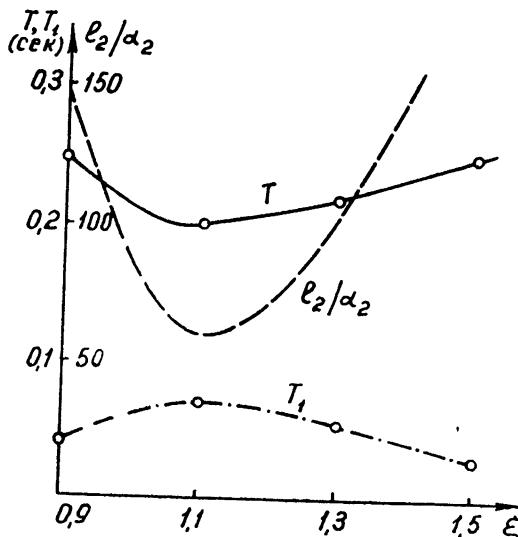


Рис. 10.

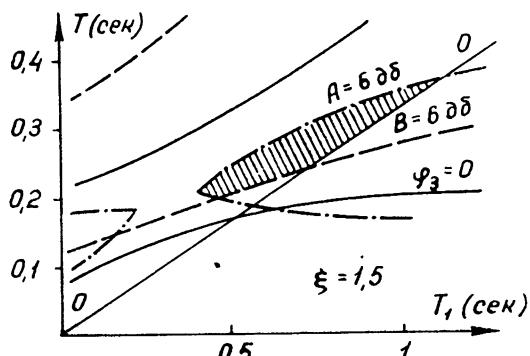
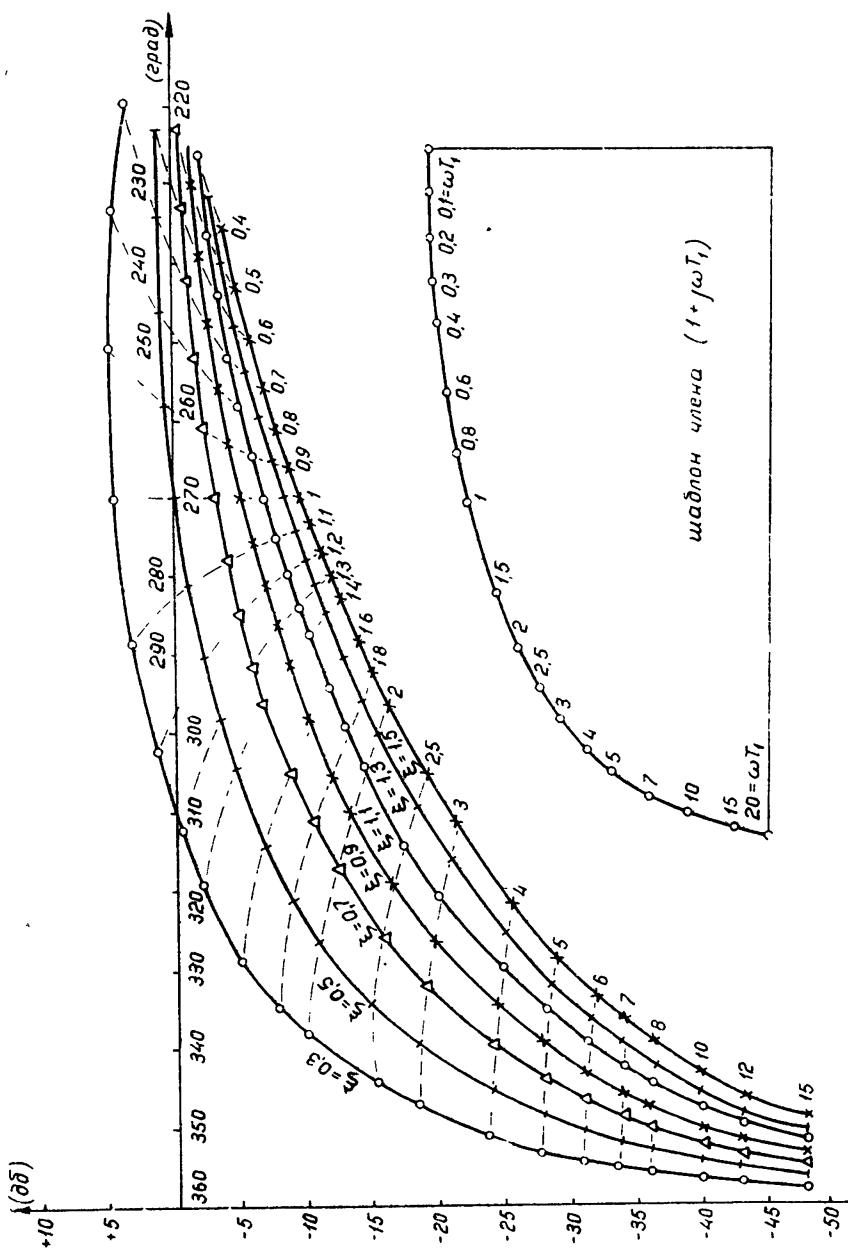


Рис. 11.



Pic. 12.

максимуму суммы A и B , получаем значение T , дающее максимальные запасы. Проделав такие построения для ряда значений T_1 , можно выбрать все параметры контура, при которых достигаются максимальные запасы устойчивости. В приведенном на рис. 15 примере наибольшие запасы получаются при $T_1 = 0$, $T = 0,1 - 0,075$.

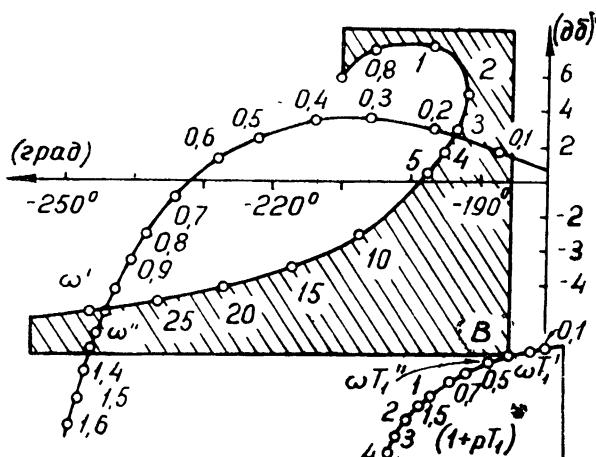


Рис. 13

3. УПРОЩЕННЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ξ

Основная трудность при выборе корректирующего контура методом номограмм состоит в том, что для выбора величины ξ , обеспечивающей максимальные запасы устойчивости, приходится строить области устойчивости и линии равных запасов по амплитуде и фазе для ряда значений ξ . Укажем метод, позволяющий при помощи вспомогательных построений приближенно определять величину ξ без полного построения областей устойчивости для ряда ее значений.

При выборе параметров контура второго порядка было показано, что при оптимальном значении ξ область, где $A \geq 6$ и $B \geq 6$, имеет наибольшую ширину в плоскости параметров T и T_1 . Следовательно, положив $T_1 = \text{const}$ и определив значения величин T , при которых $A = B = 6$, можно построить кривую $T = f(\xi)$ для $A \geq 6$ и такую же кривую для $B \geq 6$. По ширине общей области между ними выбирается значение величины ξ . Указанные кривые приведены для примера на рис. 16.

Построение кривых $T = f(\xi)$ можно провести следующим образом. Допустим, требуется построить $T = f(\xi)$ при $T_1 = 0,75$, т. е. в области больших значений T_1 . Задаемся требуе-

мыми запасами устойчивости (например, $A = 6$ дБ), обычным образом совмещаем номограмму для $\xi = \text{const}$ и характеристику неизменной части системы, устанавливаем шаблон члена $(1 + j\omega T_1)$. Для построе-

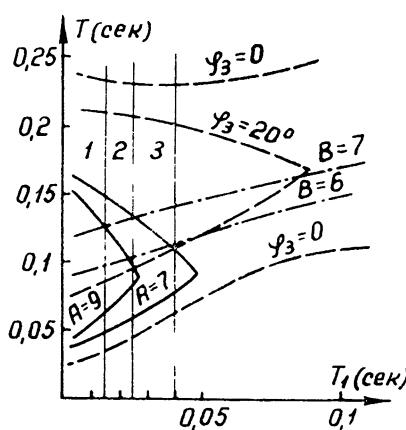


Рис. 14

ния используется обычная логарифмическая линейка, конец движка которой устанавливается на выбранное значение $T_1 = 0,75$. В этом случае величина 0,75 есть результат деления непрерывного ряда величин, например, 3 : 4, 4,5 : 6 и т. д. Установив характеристику неизменной части на какое-нибудь значение $\omega T_1'$ (см. рис. 13), считываем в точке пересечения с кривой номограммы частоту ω' . Требуется найти такое значение ωT_1 , чтобы отношение $\omega T_1 / \omega'$ равнялось 0,75. Против

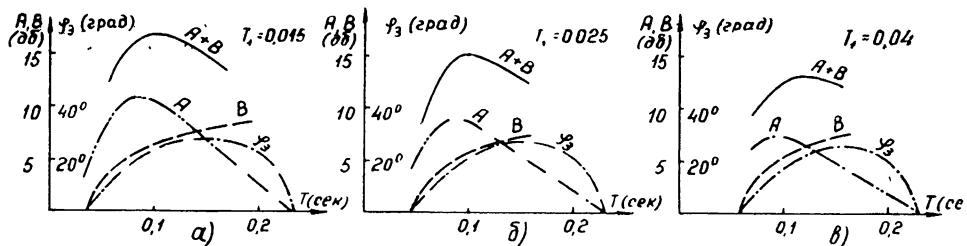


Рис. 15

значения $\omega T_1'$ по шкале корпуса линейки на движке считываем значение ω , соответствующее $T_1 = 0,75$. Если это значение ω больше ω' , то характеристику неизменной части нужно сдвинуть в сторону больших значений ωT_1 (например, в $\omega T_1'$ на рис. 13). Данному значению $\omega T_1'$ соответствует точка пересечения при $\omega'', \omega T_1'$. Если $\omega T_1'' / \omega'' = 0,75$, то точка $\omega T_1'' / \omega'' = T''$ будет точкой требуемой кривой $T = f(\xi)$. Процедуру построения для ряда значений ξ (например, для $\xi = 0,9$;

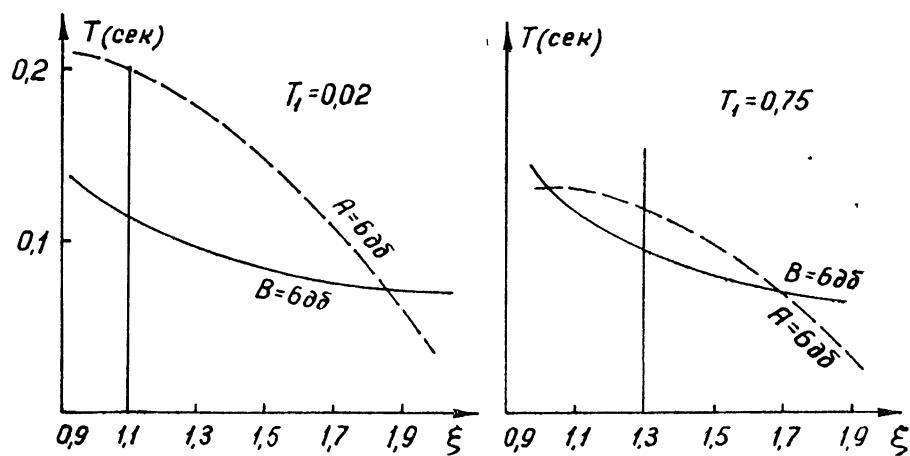


Рис. 16.

1,1; 1,3; 1,5; 1,7; 2,0, как на рис. 16) и повторив такое же построение для $B = 6 \text{ дБ}$, можно выбрать оптимальное значение величины ξ . На рис. 16 наибольшая ширина общей области $A \geq 6$ и $B \geq 6$ находится при $\xi = 1,3 - 1,4$. Для выбора остальных параметров корректирующего контура нужно построить области устойчивости и линии равных запасов по амплитуде и фазе при выбранном значении ξ . Огметим, что в области малых значений T_1 оптимальная величина ξ

может быть иной, чем в области больших значений T_1 . На рис. 16 приведены кривые $T = f(\xi)$ при $T_1 = 0,02$ и $T_1 = 0,75$ для одной и той же неизменной части системы. При $T_1 = 0,02$ $\xi_{\text{опт}} = 1,1$ и при $T_1 = 0,75$ $\xi_{\text{опт}} = 1,3 \div 1,4$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б. Д. Кислов, Научно-технич. сборник НИИ МРТП, 2, 34 (1955).

Уральский политехнический
институт

Поступила в редакцию
24 мая 1960 г.

КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ ПО КОНЦЕНТРАЦИИ ДЛЯ РЕАКЦИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В РАСПРЕДЕЛЕННОМ ХИМИЧЕСКОМ РЕАКТОРЕ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ

B. A. Дозоров

Получен коэффициент передачи по концентрации для одномерного распределенного реактора непрерывного действия, в котором идет химическая реакция первого порядка. Дано асимптотическое разложение коэффициента передачи.

Химический промышленный реактор непрерывного действия характерен тем, что реакция протекает в нем при конечных скоростях перемешивания в большом объеме, а динамика происходящих в реакторе процессов определяется не только кинетическими, но и диффузионными уравнениями. В большинстве имеющихся работ из-за сложности рассмотрения распределенных задач предполагается идеально быстрое перемешивание смеси в реакторе, т. е. предполагается значительное превышение скоростей диффузионных процессов над кинетическими скоростями. Для простейшей мономолекулярной реакции первого порядка это предположение, как хорошо известно [1], приводит к тому, что динамика процессов в реакторе описывается дифференциальным уравнением первого порядка в полных производных, а коэффициент передачи по концентрации для линеаризованной задачи имеет вид:

$$K(p) = \frac{\bar{c}_2(p)}{\bar{c}_1(p)} = \frac{1}{a + Tp}. \quad (1)$$

Сравнение экспериментальных данных для реакторов с конечной скоростью перемешивания и полученных в предположении идеально быстрого перемешивания теоретических кривых показывает, что однокомпактная идеализация (1) является лишь первым приближением. При расчете систем автоматического регулирования для реальных реакторов первое приближение (1) недостаточно, так как в реальном реакторе всегда имеется запаздывание, из-за которого система автоматического регулирования остаточной (выходной) концентрации, рассчитанная на устойчивость с коэффициентом передачи объекта (1), как правило, оказывается неустойчивой для реального объекта. Отсюда возникает задача нахождения коэффициента передачи на основе данных о геометрии, гидродинамике и кинетике химического реактора. Этому вопросу и посвящена настоящая работа.

1. На рис. 1а изображен реактор непрерывного действия, на вход которого поступает исходный продукт с концентрацией c_1 . Найдем коэффициент передачи по концентрации при следующих предположениях:

1) в любом поперечном сечении реактора мгновенно устанавливается однородное распределение концентрации, т. е. расчет ведется для некоторой средней по сечению реактора концентрации;

2) в реакторе происходит турбулентное перемешивание смеси, причем коэффициент турбулентной диффузии D и скорость переноса фронта v постоянны по сечению и от сечения к сечению (обоснование этого предположения можно найти в целом ряде работ [2-5]);

3) температура во всем объеме реактора одинакова и постоянна.

При этих предположениях реактор можно представить в виде модели, изображенной на рис. 1б, а задача отыскания выходной концентрации сводится к решению уравнения диффузии

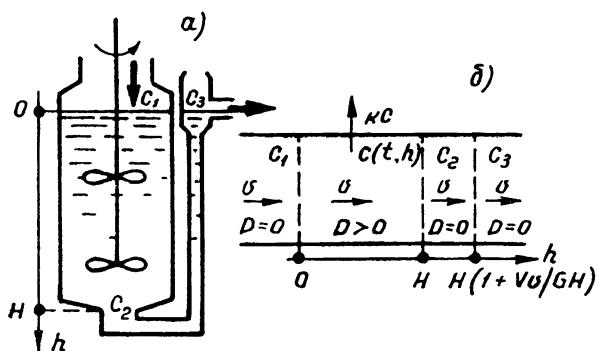


Рис. 1.

для движущейся среды с потерями и граничными условиями

$$\left(c - \frac{1}{2\sigma} \frac{dc}{dx} \right)_{x=0} = c_1(t); \quad \left(\frac{dc}{dx} \right)_{x=1} = 0, \quad (3)$$

где $1/2\sigma = D/Hv$ — приведенный безразмерный коэффициент турбулентной диффузии, $x = h/H$ — приведенная безразмерная координата (глубина) реактора, $t = t_{ct}/T$ — приведенное безразмерное время, $T = H/v$ — время заполнения реактора в рабочем режиме, $\gamma = Tk$ — приведенная безразмерная скорость химической реакции, k — кинетическая постоянная скорости химической реакции.

Так как в реакторе предполагается мономолекулярная реакция первого порядка, то для нахождения коэффициента передачи достаточно рассмотреть уравнение (4) с граничными условиями (5) при нулевых начальных условиях.

Переходя к изображениям по времени, из (2) и (3) получим:

$$\frac{1}{2\sigma} \frac{d^2 \bar{c}}{dx^2} - \frac{d\bar{c}}{dx} (p + \gamma) \bar{c} = 0; \quad (4)$$

$$\left(\bar{c} - \frac{1}{2\sigma} \frac{d\bar{c}}{dx} \right)_{x=0} = \bar{c}_1(p); \quad \left(\frac{d\bar{c}}{dx} \right)_{x=1} = 0. \quad (5)$$

Решая уравнение (4), найдем выражение для \bar{c} :

$$\bar{c}(p, x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, \quad (6)$$

где $\lambda_{1,2} = \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 2\sigma(p + \gamma)}$ — корни характеристического уравнения для (4), а постоянные A и B определяются из (5):

$$A = - \frac{\bar{c}_1 \lambda_2 e^{\lambda_1}}{(\lambda_1 + p + \gamma)e^{\lambda_1} - (\lambda_2 + p + \gamma)e^{\lambda_2}};$$

$$B = - \frac{\bar{c}_1 \lambda_1 e^{\lambda_1}}{(\lambda_1 + p + \gamma)e^{\lambda_1} - (\lambda_2 + p + \gamma)e^{\lambda_2}}.$$

Подставляя эти значения A и B в (6), получим для коэффициента передачи от входа реактора до любого его сечения выражение

$$K(p, x) = \frac{\bar{c}(p, x)}{\bar{c}_1(p)} = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 + \lambda_2 r} - \lambda_2 e^{\lambda_2 + \lambda_1 x}}{(\lambda_1 + p + \gamma) e^{\lambda_1} - (\lambda_2 + p + \gamma) e^{\lambda_2}}. \quad (7)$$

Из (7) можно получить как частный случай коэффициент передачи для сосредоточенного реактора (идеальное перемешивание соответствует $\alpha = 0$):

$$K(p, \alpha = 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} K(p, x) = \frac{1}{p+1+\gamma}. \quad (8)$$

В случае полного отсутствия перемешивания ($\alpha = \infty$) уравнение (2) с граничными условиями (3) вырождается в уравнение первого порядка:

$$\frac{dc}{dt} + \frac{dc}{dx} + \gamma c = 0 \quad (9)$$

с граничным условием $c(t, x=0) = c_1(t)$. Решая это уравнение, найдем:

$$K(p, x)_{\alpha=\infty} = \frac{\bar{c}(p, x)}{\bar{c}_1(p)} = e^{-\gamma x} e^{-px}, \quad (10)$$

т. е. в случае $\alpha = \infty$ реактор представляет собой запаздывающее звено с ослаблением. При $\alpha = \infty$ будет минимальная стационарная концентрация на выходе реактора, и с этой точки зрения реактор с малым продольным коэффициентом диффузии является наилучшим. Положив $\gamma = 0$, получим как частный случай результаты работы [6].

В общем случае особый интерес представляет коэффициент передачи от входа реактора до его выхода, так как обычно регулирование ведется по остаточной концентрации на выходе реактора и средний коэффициент турбулентной диффузии в продольном направлении находится для реактора в целом. Подставляя в (7) значение $x=1$, после преобразований получим:

$$K(p, 1) = \frac{\bar{c}_2(p)}{\bar{c}_1(p)} = \frac{e^\alpha}{(u/2\alpha + \alpha/2u) \operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u}, \quad (11)$$

где $u = \sqrt{\omega^2 + 2\alpha p}$, $\omega = \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\gamma}$.

В тех случаях, когда по конструктивным соображениям нельзя ставить датчик выходной концентрации на выходе реактора и его приходится располагать у выходной горловины уравнительной трубы (c_3), при принятых нами предположениях в объекте будет дополнительное запаздывание $\tau_0 = V/G$, где V —заполненный смесью объем уравнительной трубы, G —расход смеси в рабочем режиме.

2. Непосредственное использование точного выражения для коэффициента передачи (11) при расчетах систем автоматического регулирования приводит к сравнительно сложным выкладкам. Расчеты значительно упрощаются, если представить коэффициент передачи в виде:

$$K(p, 1) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{c_t}{p - p_t}. \quad (12)$$

Для такого представления необходимо знать нули знаменателя коэффициента передачи (11). Разделяя мнимую и действительную части и приравнивая их к нулю, получим два уравнения для определения корней p_i :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f(p) &= \frac{\operatorname{tg} B(1 - \operatorname{th}^2 A)}{1 + \operatorname{th}^2 A \operatorname{tg}^2 B} + \frac{2\alpha [(r + \alpha^2)B - vA]}{(r + \alpha^2)^2 + v^2} = 0; \\ \operatorname{Re} f(p) &= \frac{\operatorname{th} A(1 + \operatorname{tg}^2 B)}{1 + \operatorname{th}^2 A \operatorname{tg}^2 B} + \frac{2\alpha [(r + \alpha^2)A + vB]}{(r + \alpha^2)^2 + v^2} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} f(p) &= \left(\frac{u}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2u} \right) \operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u; \\ p = a + jb; \quad v &= 2vb; \quad r = z^2 + 2v(\gamma + a); \\ 2AB &= v; \quad A^2 - B^2 = r; \\ A &= \pm \sqrt{\frac{\sqrt{r^2 + v^2} + r}{2}}; \quad B = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{r^2 + v^2} - r}{2}}. \end{aligned}$$

Каждая из кривых (13) имеет на плоскости r, v по две ветви, симметричных относительно оси r . Непосредственно можно проверить, что одна пара кривых вырождается в прямую $v = 0$, т. е. все корни знаменателя коэффициента передачи вещественны. Подставляя $v = 0$ в (13), получим следующие уравнения для определения p_i :

$$\frac{\operatorname{th} \sqrt{r}}{\sqrt{r}} = -\frac{2\alpha}{r + \alpha^2} \quad (r > 0); \quad (14)$$

$$\frac{\operatorname{tg} \sqrt{-r}}{\sqrt{-r}} = -\frac{2\alpha}{r + \alpha^2} \quad (r < 0). \quad (15)$$

Из (14) видно, что при $r > 0$ функция $f(p)$ не имеет нулей, т. е. все $p_i \leq -(\gamma + \alpha/2)$. Из (15) можно найти значения p_i , для чего лучше всего воспользоваться графическим способом: построить графики функций tgy/y и $2\alpha/(y^2 - \alpha^2)$, по точкам их пересечений (y_i) найти значения $p_i = -(\gamma + \alpha/2 + y_i^2/2\alpha)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), причем $p_{i+1} \rightarrow -[\gamma + \alpha/2 + \lim_{i \rightarrow \infty} (i\pi)^2/2\alpha]$.

На основании теоремы 15 о разложении [7], являющейся обобщением теоремы Хевисайда, теперь можно найти с требуемой степенью точности, например, реакцию системы на единичный входной скачок.

При малых α хороший эффект дает приближенное представление коэффициента передачи (13), аналогичное полученному в работе [6]. Разлагая знаменатель (13) в ряд по p в окрестности точки $p = 0$ (сходящийся при любых значениях p) и ограничиваясь конечным числом членов, получим:

$$K(p, 1) \approx K_n(p, 1) = \frac{1}{e^{-\alpha} [f(0) + f'(0)p + \dots + f^{(n)}(0)p^n/n!]}, \quad (16)$$

причем

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha} f(0) = 1 + \gamma, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha} f'(0) = 1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{-\alpha} f^{(m)}(0)}{m!} = 0 \quad (m = 2, 3, \dots).$$

В практических расчетах обычно ограничиваются несколькими первыми членами разложения, для которых ниже приводятся развернутые формулы:

$$\begin{aligned}
 e^{-\alpha} f(0) &= \frac{e^{\omega-\alpha}}{4\omega\sigma} [(\omega + z)^2 - e^{-2\omega} (\omega - z)^2]; \\
 e^{-\alpha} f'(0) &= \frac{e^{\omega-\alpha}}{4\omega} \left[\frac{\omega^2 - \alpha^2}{\omega^2} + \frac{(\omega + \alpha)^2}{\omega} - e^{-2\omega} \left(\frac{\omega^2 - \alpha^2}{\omega^2} - \frac{(\omega - z)^2}{\omega} \right) \right]; \\
 e^{-\alpha} f''(0) &= \frac{z^2 e^{\omega-\alpha}}{2\omega^2} \left\{ \frac{(\omega + z)^2}{2\omega\sigma} \left(1 - \frac{1}{\omega} \right) + \frac{\omega^2 - \alpha^2}{z\omega^2} \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) + \frac{z}{\omega^3} - \right. \\
 &\quad \left. - e^{-2\omega} \left[\frac{(\omega - \alpha)^2}{2\omega\sigma} \left(1 + \frac{1}{\omega} \right) - \frac{\omega^2 - \alpha^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{1}{2\omega} \right) : \frac{\sigma}{\omega^3} \right] \right\}; \\
 e^{-\alpha} f'''(0) &= \frac{\sigma^2 e^{\omega-\alpha}}{2\omega^3} \left\{ \frac{(\omega + z)^2}{2\omega\alpha} \left(1 - \frac{3}{\omega} + \frac{3}{\omega^2} \right) + \frac{3(\omega^2 - z^2)}{2\omega^2\alpha} \right. \\
 &\quad \times \left(1 - \frac{2}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} \right) + \frac{3\alpha}{\omega^3} \left(1 - \frac{2}{\omega} \right) - e^{-2\omega} \left[\frac{3(\omega^2 - z^2)}{2\omega^2\alpha} \left(1 + \frac{2}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{(\omega - \alpha)^2}{2\omega\sigma} \left(1 + \frac{3}{\omega} + \frac{3}{\omega^2} \right) - \frac{3\alpha}{\omega^3} \left(1 + \frac{2}{\omega} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned} \quad (17)$$

3. Остановимся подробнее на определении параметров объекта, от которых при принятых нами идеализациях зависит коэффициент передачи. Высота реактора H и скорость его заполнения в рабочем режиме v — величины, известные из выбранного технологического режима. Кинетическая постоянная скорости химической реакции k определяется лабораторным способом, так как не зависит от величины объема, в котором идет реакция. Средний коэффициент турбулентной диффузии в продольном направлении D зависит от конструкции мешалки и реактора, свойств перемешиваемой среды и скорости перемешивания. Измерение D можно сравнительно просто произвести на лабораторной установке, удовлетворяющей условиям геометрического и гидродинамического подобия [3]. Значительным облегчением здесь является то обстоятельство, что для расчета системы автоматического регулирования на устойчивость не требуется знание D с большой степенью точности (обычно достаточно знать одну или две значащие цифры). Поэтому можно воспользоваться представлением D в виде $D = \beta \omega l$ (ω — характерная скорость вихря, l — характерный размер вихря) и считать при этом коэффициент пропорциональности β постоянным для различных скоростей перемешивания.

В качестве примера найдем коэффициент передачи по концентрации для химического реактора объемом $V = 20 \text{ м}^3$, высотою $H = 5 \text{ м}$ и производительностью $G = 8 \text{ м}^3 \cdot \text{час}^{-1}$, в котором идет мономолекулярная реакция в растворе с кинетической постоянной $k = 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$; перемешивание обеспечивается двухлопастной мешалкой размерами $1 \text{ м} \times 1 \text{ м}$, вращающейся со скоростью 30 оборотов в минуту, а величина β в формуле для коэффициента турбулентной диффузии в продольном направлении равна 0,00884.

На основании этих данных получим: $\alpha = 0,1$, $\gamma = 9$, $T = 150$ минут.

По теореме разложения с учетом (15) получим:

$$K(p, 1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f'(p_i)} \frac{1}{p - p_i} = 0,1 \left(\frac{1,02}{0,1 p + 1} - \frac{0,363}{0,0166 p + 1} + \right. \\ \left. + \frac{0,11}{0,005 p + 1} - \frac{0,044}{0,002 p + 1} + \dots \right). \quad (18)$$

Таким образом, с ошибкой, не превышающей 2%, данный распределенный реактор можно представить в виде суммы четырех полустепенных звеньев. Если по (18) построить функцию переходной проводимости, то легко получить приближенное представление для $K(p, 1)$ в виде полустепенного звена с запаздыванием.

В заключение выражаю благодарность Н. А. Железзову и А. С. Алексееву за обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник химика, 3, Госхимиздат, М.—Л., 1952.
2. Ю. И. Трубчиков, Труды ЦАГИ, вып. 372 (1938).
3. В. Г. Левин, Физико-химическая гидродинамика, изд. АН СССР, М., 1952
4. R. Liévge, C. r. Acad. sci., **244**, 1453, 1611 (1957).
5. J. Bonin, H. Dumais, R. Liévge, C. r. Acad. sci., **244**, 2278 (1957).
6. В. А. Дозоров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **3**, 328 (1960).
7. В. А. Диткин и П. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 апреля 1960 г.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНУСОИДАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К. Г. Валеев

Предлагается метод исследования и решения систем линейных дифференциальных уравнений с синусоидальными коэффициентами. Для изображения решения (по Лапласу) строится система линейных разностных уравнений, которая решается с помощью матричных цепных дробей. Указан практически удобный способ обратного перехода к оригиналу, дающий возможность построения численного решения дифференциальных уравнений с заданными начальными данными. Для определения характеристических показателей решений строится уравнение, выраженное непосредственно через коэффициенты системы дифференциальных уравнений (без интегрирования). С его помощью исследуется динамическая устойчивость упругих колебаний электрических и механических систем, которые описываются дифференциальными уравнениями с синусоидальными коэффициентами

Из всех систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами системы с синусоидальными коэффициентами имеют наибольшее практическое значение. В настоящей статье дается метод решения подобных систем, являющийся обобщением известного метода Айнса (см. [1], стр. 32) для решения уравнения Матьё и метода Патри [2] для решения одного дифференциального уравнения с синусоидальными коэффициентами. С помощью матричных непрерывных дробей строится изображение по Лапласу [3] решения системы линейных дифференциальных уравнений с синусоидальными коэффициентами. Удобный метод обратного перехода к оригиналу позволяет строить решение системы дифференциальных уравнений, непосредственно учитывая начальные данные. Даётся уравнение для определения характеристических показателей решений. В качестве примеров исследуется динамическая устойчивость некоторых упругих систем.

Везде в дальнейшем прописные буквы, как правило, обозначают матрицы или векторы, строчные — скаляры. Будем говорить, что матрица, зависящая от некоторого аргумента, голоморфна (ограничена и т. д.) в некоторой области изменения аргумента, если все элементы матриц голоморфны (ограничены и т. д.) в той же области. Норму матрицы A станем обозначать через $|A|$. Под преобразованием Лапласа [3] матрицы $Y(t)$ ($t \geq 0$) ниже понимается применение преобразования Лапласа к элементам матрицы $Y(t)$ ($t \geq 0$), причем соответствие между оригиналом $Y(t)$ ($t \geq 0$) и изображением $F(p)$ обозначается символом

$$Y(t) \leftarrow F(p).$$

1. В этом разделе система линейных дифференциальных уравнений с синусоидальными коэффициентами приводится к системе линейных разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{k=0}^n (A_{0k} + e^{\omega t} A_{-1k} + e^{-\omega t} A_{1k}) \frac{d^k Y}{dt^k} = \Phi(t), \quad (1.1)$$

где A_{jk} — постоянные комплексные $m \times m$ матрицы, $\omega = i\Theta$ (Θ — вещественное число). Предположим, что выполнены условия

$$A_{0n} \equiv E, \quad |A_{-1n}| + |A_{1n}| < 1, \quad (1.2)$$

где E — единичная матрица. Будем искать при $t \geq 0$ решение системы уравнений (1.1) — вектор $Y(t)$ с начальными данными при $t = 0$

$$Y(0) = Y_0^{(0)}, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1} Y}{dt^{n-1}}(0) = Y_0^{(n-1)}. \quad (1.3)$$

Пусть изображением вектора $\Phi(t)$ ($t \geq 0$) является вектор $Q(p)$, компоненты которого регулярны и ограничены при $\operatorname{Re} p \geq b$. В частном случае будем предполагать, что

$$\Phi(t) = \sum_{j=1}^{\lambda} C_j t^j e^{\omega_j t} \Leftrightarrow Q(p) = \sum_{j=1}^{\lambda} C_j v_j! (p - \omega_j)^{-j-1}, \quad (1.4)$$

где C_j — постоянные комплексные векторы, v_j — целые неотрицательные числа, ω_j — комплексные числа. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} L_q(p) &= \sum_{k=0}^n A_{qk} p^k; \quad \Psi_q(p) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n A_{qj} Y_0^{(k)} p^{j-k-1} \quad (q = 0, \pm 1); \\ R(p) &= Q(p) + \sum_{q=-1}^1 \Psi_q(p + q\omega). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Пусть $F(p)$ является изображением по Лапласу решения системы (1.1) с начальными данными (1.3). Умножая систему уравнений (1.1) на e^{-pt} и интегрируя по t от 0 до $+\infty$, получим систему линейных разностных уравнений для компонент вектора $F(p)$ *:

$$\sum_{q=-1}^1 L_q(p + q\omega) F(p + q\omega) = R(p). \quad (1.7)$$

2. Исследуем теперь сходимость некоторых непрерывных матричных дробей, с помощью которых будет построено нужное решение системы линейных разностных уравнений (1.7).

Введем основные матрицы-функции $H(p)$, $T(p)$, определяемые рекуррентными соотношениями (разностными уравнениями)

$$\begin{aligned} T(p) &= L_1(p + \omega) (L_0(p + \omega) - T(p + \omega))^{-1} L_{-1}(p); \\ H(p) &= L_{-1}(p - \omega) (L_0(p - \omega) - H(p - \omega))^{-1} L_1(p), \end{aligned} \quad (2.1)$$

* Если искать решение однородной системы уравнений (1.1) в виде ряда

$$Y(t) = e^{pt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k e^{k\omega t}, \quad (1.6)$$

то соотношения между коэффициентами B_k аналогичны уравнению (1.7). Именно так отыскивается решение в [1, 2]. Излагаемый ниже метод решения системы уравнений (1.7) можно легко превратить в метод нахождения коэффициентов B_k ; однако связь с преобразованием Лапласа позволяет сразу строить решение, удовлетворяющее начальным данным, а также искать решение в резонансных случаях.

где $L_q(p)$ — матрицы, введенные в (1.5). Здесь и далее рассматриваем только свойства матрицы $T(p)$, так как для матрицы $H(p)$ все рассуждения аналогичны.

Подставляя в (2.1) $p+k\omega$ вместо p , получим выражение $T(p+k\omega)$ через $T(p+(k+1)\omega)$. Выразив в соотношении (2.1) $T(p+\omega)$ через $T(p+2\omega)$, затем $T(p+2\omega)$ через $T(p+3\omega)$ и т. д., получим для $T(p)$ выражение, напоминающее обычную непрерывную дробь, но в матричной форме.

Пусть Σ — конечная замкнутая область комплексного переменного p . Выразим $T(p)$ через $T(p+k\omega)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) и положим $T(p+k\omega) \equiv 0$. При этом значение $T(p)$ обозначим $T_k(p)$. Если последовательность $T_k(p)$ сходится при $p \in \Sigma$ и $k \rightarrow \infty$, то говорим, что непрерывная дробь (матричная) сходится при $p \in \Sigma$. Для рассмотрения сходимости непрерывных дробей для $T(p)$, $H(p)$ докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. Пусть S_1, S_2 — матрицы, $|S_1| \leq \chi$, $|S_2| \leq \chi$, $\chi < 1/2$. Если $|S_1 - S_2| \leq \delta$, то выполнено неравенство

$$|(E - S_1)^{-1} - (E - S_2)^{-1}| \leq \delta(1 - \chi)^{-2} < 4\delta. \quad (2.2)$$

Доказательство. Оценим норму матрицы $(E - S_2)^{-1}$:

$$|(E - S_2)^{-1}| = |E + S_2 + S_2^2 + S_2^3 + \dots| \leq 1 + \chi + \chi^2 + \chi^3 + \dots = (1 - \chi)^{-1}. \quad (2.3)$$

Пусть $\delta \leq \varepsilon < 1/2$, при этом справедливо разложение

$$\begin{aligned} (E - S_1)^{-1} &= (E - S_2 + (S_2 - S_1))^{-1} = (E + (E - S_2)^{-1}(S_2 - S_1))^{-1}(E - S_2)^{-1} = \\ &= (E - S_2)^{-1} + (E - S_2)^{-1}(S_2 - S_1)(E - S_2)^{-1} + \\ &\quad + [(E - S_2)^{-1}(S_2 - S_1)]^2(E - S_2)^{-1} + \dots. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Учитывая, что $|(E - S_2)^{-1}(S_2 - S_1)| \leq \delta(1 - \chi)^{-1} < 1$, получим:

$$|(E - S_1)^{-1} - (E - S_2)^{-1}| \leq \delta(1 - \chi - \varepsilon)^{-1}(1 - \chi)^{-1}. \quad (2.5)$$

Пусть теперь δ — произвольное число, меньшее единицы. Рассмотрим совокупность матриц $S_{j,k}$:

$$S_{j,k} = S_1 + \frac{j}{k}(S_2 - S_1) \quad (k = 1, 2, 3, \dots; j = 0, 1, \dots, k). \quad (2.6)$$

Из соотношений $|S_1| \leq \chi$, $|S_2| \leq \chi$ следует, что $|S_{j,k}| \leq \chi$ ($k = 1, 2, 3, \dots$; $j = 0, 1, \dots, k$). Применяя формулу (2.5), найдем, что при $\delta/k < 1/2$

$$\begin{aligned} |(E - S_1)^{-1} - (E - S_2)^{-1}| &\leq \sum_{j=0}^{k-1} |(E - S_{j,k})^{-1} - \\ &\quad - (E - S_{j+1,k})^{-1}| \leq k \frac{\delta}{k} \left(1 - \chi - \frac{1}{k}\right)^{-1}(1 - \chi)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Переходя в неравенстве (2.7) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим оценку (2.2).

Теорема 1. При выполнении условий (1.2) матричная непрерывная дробь для $T(p)$ (2.1) сходится на всей плоскости комплексного переменного p к мероморфной однозначной матриц-функции от p .

Доказательство. Пусть Σ — произвольная ограниченная замкнутая область комплексного переменного p . Введем обозначение

$$K_q(p) \equiv -L_0^{-1}(p)L_q(p + q\omega) \quad (q = \pm 1). \quad (2.8)$$

Из (1.5) следует, что $K_q(p + k\omega) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -A_q$ при $p \in \Sigma$. Следовательно, найдется такое k_0 , что при $k > k_0$ (k, k_0 — целые числа) и для некоторого $\chi < 1/2$ ($\gamma > 0$) будет выполнено (см. (1.2)):

$$|K_1(p + k\omega)| + |K_{-1}(p + k\omega)| \leq 2\chi < 1. \quad (2.9)$$

Так как $\text{Det } L_0(p) \neq 0$, то для доказательства сходимости непрерывной дроби, определяющей $T(p)$, достаточно доказать сходимость непрерывной дроби для матрицы-функции $S(p)$, где

$$S(p) \equiv L_0^{-1}(p)T(p). \quad (2.10)$$

Из (2.1), (2.8), (2.10) следует, что

$$S(p) = K_1(p)(E - S(p + \omega))^{-1}K_{-1}(p + \omega). \quad (2.11)$$

Предположим, что при $k \geq k_0$ и $p \in \Sigma$ имеет место неравенство $|S(p + (k+1)\omega)| < 1/2$. Тогда из (2.3), (2.9), (2.11) следует, что при $p \in \Sigma$, $k \geq k_0$

$$|S(p + k\omega)| \leq 2\chi^2 < 1/2. \quad (2.12)$$

За первое приближение берем при некотором k^* значение $S(p + k^*\omega) \equiv 0$; затем из рекурентной формулы (2.11) находим последовательно $S(p + k\omega)$ для $k < k^*$. Тогда из (2.12) следует, что непрерывная дробь для $S(p + k\omega)$ ограничена при всех $k \geq k_0$. Если у нас известны приближенные значения $S_j(p + k^*\omega)$ ($j = 1, 2$) при $k^* > k_0$, то из оценки (2.12) ясно, что

$$\sup_{p \in \Sigma} |S_1(p + k^*\omega) - S_2(p + k^*\omega)| \leq \delta < 1. \quad (2.13)$$

Из леммы 1, неравенства (2.9) и формулы (2.11) следует при $k^* > k_0$:

$$\begin{aligned} & |S_1(p + (k^* - 1)\omega) - S_2(p + (k^* - 1)\omega)| = \\ & = |K_1(p + (k^* - 1)\omega)(E - S_1(p + k^*\omega))^{-1}K_{-1}(p + k^*\omega) - \\ & - K_1(p + (k^* - 1)\omega)(E - S_2(p + k^*\omega))^{-1}K_{-1}(p + k^*\omega)| \leq \chi^2(1 - \chi)^{-2}\delta. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Поскольку $\chi^2(1 - \chi)^{-2} < 1$ для $\chi < 1/2$, при достаточно большом $k^* \geq k_0$ величина $|S_1(p + k_0\omega) - S_2(p + k_0\omega)|$ будет сколь угодно мала при $p \in \Sigma$. Сказанное означает, что непрерывная дробь для $S(p + k_0\omega)$ сходится при $p \in \Sigma$ к регулярной матрице от p . В свою очередь, $S(p)$ можно получить конечным числом операций из $S(p + k_0\omega)$ с помощью формулы (2.11). Окончательно имеем, что непрерывная дробь для $T(p)$ сходится при $p \in \Sigma$ к мероморфной матрице, а отсюда (в силу произвольности области) следует теорема 1*.

3. Построим решение системы линейных разностных уравнений (1.6) с помощью матриц $T(p)$, $H(p)$. Для этого введем вспомогательные матрицы-функции

$$T_+(p) = -(L_0(p + \omega) - T(p + \omega))^{-1}L_{-1}(p);$$

$$T_-(p) = -L_1(p + \omega)(L_0(p + \omega) - T(p + \omega))^{-1};$$

* Условие (2.9) будет выполнено, если $|\text{Re } p| > b$, где b достаточно велико. Следовательно, при $|\text{Re } p| > b$ непрерывные дроби для $T(p)$, $H(p)$ сходятся к регулярным матрицам (считаем, что вектор $Q(p)$ в 1 разделе ограничен при $\text{Re } p > b$)

$$\begin{aligned} H_+(p) &= -(L_0(p-\omega) - H(p-\omega))^{-1} L_1(p); \\ H_-(p) &= -L_{-1}(p-\omega)(L_0(p-\omega) - H(p-\omega))^{-1}; \\ D(p) &= L_0(p) - T(p) - H(p), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где матрицы $L_q(p)$ определены в (1.5), а матрицы $T(p)$, $H(p)$ в (2.1).

Теорема 2. При выполнении условий (1.2) матричный ряд

$$\begin{aligned} F(p) = \dots + H_+(p+\omega)H_+(p+2\omega)\dots H_+(p+r\omega)D^{-1}(p+r\omega)R(p+r\omega) + \dots \\ \dots + H_+(p+\omega)D^{-1}(p+\omega)R(p+\omega)+D^{-1}(p)R(p)+T_+(p-\omega)\times \\ \times D^{-1}(p-\omega)R(p-\omega)+\dots+T_+(p-\omega)T_+(p-2\omega)\dots T_+(p-r\omega)\times \\ \times D^{-1}(p-r\omega)R(p-r\omega)+\dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

сходится при $\operatorname{Re} p > b$ и является решением системы линейных разностных уравнений (1.6).

Доказательство. Используя обозначения (2.8), (2.10), можно записать:

$$T_+(p) = (E - S(p + \omega))^{-1} K_{-1}(p + \omega). \quad (3.3)$$

С помощью неравенства (2.3) и формулы (2.11) легко показать, что $\sup_{\operatorname{Re} p > b} |T_+(p + r\omega)| < 1$ (см. сноску на стр. 1116) и аналогично $\sup_{\operatorname{Re} p > b} |H_+(p - r\omega)| < 1$ ($r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Из (3.1), (1.5) следует, что

$$|D^{-1}(p + r\omega)R(p + r\omega)| \xrightarrow[\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (3.4)$$

равномерно по r . Считая число b достаточно большим, получим сходимость матричного ряда (3.2) при $\operatorname{Re} p > b$. Подставляя ряд (3.2) в уравнение (1.6), найдем, что оно будет тождественно удовлетворено при выполнении условий:

$$L_{-1}(p-\omega)H_+(p) + L_0(p) + L_1(p+\omega)T_+(p) \equiv D(p); \quad (3.5)$$

$$L_{-1}(p-\omega)H_+(p)H_+(p+\omega) + L_0(p)H_+(p+\omega) + L_1(p+\omega) \equiv 0; \quad (3.6)$$

$$L_{-1}(p-\omega) + L_0(p)T_+(p-\omega) + L_1(p+\omega)T_+(p)T_+(p-\omega) \equiv 0. \quad (3.7)$$

Справедливость же условий (3.5)–(3.7) следует из самого определения матриц-функций $T(p), \dots, D(p)$ (2.1), (3.1).

Заметим, что, как можно показать, система линейных разностных уравнений (1.6) при выполнении условий (1.2) — единственное ограниченное при $\operatorname{Re} p > b$ решение.

Изображение $F(p)$ решения $Y(t)$ ($t \geq 0$) системы (1.1) с начальными данными (1.3) ограничено при большой $\operatorname{Re} p$ и поэтому дается рядом (3.2).

Непосредственно из представления решения $Y(t)$ в виде (1.7) можно показать, что в ряде (3.2) матричные коэффициенты при $R(p+r\omega)$ ($r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) могут иметь полюсы лишь в точках

$$p_{sk} = p_s + k\omega \quad (s = 1, \dots, m; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (3.8)$$

где p_s — характеристические показатели решений системы (1.1). При этом порядок полюсов не выше кратности соответствующего характеристического показателя.

Соотношения (3.6), (3.7) можно рассматривать как разностные

уравнения (рекурентные формулы) для определения $T_+(p)$, $H_+(p)$. Например, из (3.7) имеем:

$$T_+(p - \omega) = -(L_0(p) + L_1(p + \omega) T_+(p))^{-1} L_{-1}(p - \omega). \quad (3.9)$$

Если $\lim_{k \rightarrow +\infty} |T_+(p + k\omega)| < 1$, то $T_+(p)$ единственным способом определяется формулой (3.1).

Лемма 2. Справедливы соотношения (см. (3.1)):

$$\begin{aligned} H_+(p + \omega) D^{-1}(p + \omega) &\equiv D^{-1}(p) T_-(p); \\ T_+(p - \omega) D^{-1}(p - \omega) &\equiv D^{-1}(p) H_-(p). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Доказательство. Рассмотрим первое из соотношений (3.10). Умножая его слева на $D(p)$ и справа на $D(p + \omega)$, получим из (3.1):

$$\begin{aligned} &-(L_0(p) - T(p) - H(p))(L_0(p) - H(p))^{-1} L_1(p + \omega) \equiv \\ &\equiv -L_1(p + \omega)(L_0(p + \omega) - T(p + \omega))^{-1}(L_0(p + \omega) - T(p + \omega) - H(p + \omega)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Раскрывая скобки и сокращая подобные члены, найдем

$$\begin{aligned} T(p)(L_0(p) - H(p))^{-1} L_1(p + \omega) &\equiv L_1(p + \omega)(L_0(p + \omega) - \\ &- T(p + \omega))^{-1} H(p + \omega). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Последнее тождество следует из (2.1). Обратный переход от (3.12) к (3.10) справедлив, так как $\text{Det } D(p) \neq 0$ (3.1).

Последовательно применяя лемму 2 к членам ряда (3.2), получим другую форму решения системы уравнений (1.6):

$$\begin{aligned} F(p) &= \dots + D^{-1}(p) T_-(p) T_-(p + \omega) \dots T_-(p + (r-1)\omega) R(p + r\omega) + \dots \\ &\dots + D^{-1}(p) T_-(p) R(p + \omega) + D^{-1}(p) R(p) + D^{-1}(p) H_-(p) R(p - \omega) + \dots \\ &\dots + D^{-1}(p) H_-(p) H_-(p - \omega) \dots H_-(p - (r-1)\omega) R(p - r\omega) + \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

При практических расчетах удобно одновременно применять обе формы представления изображения — и (3.2), и (3.13).

4. В этом разделе указаны методы построения частного решения неоднородной системы уравнений (1.1) в случае, когда $\Phi(t)$ имеет вид (1.4), а также дано уравнение для определения характеристических показателей решений системы уравнений (1.1).

В частном случае, когда неоднородная часть $\Phi(t)$ системы уравнений (1.1) имеет вид (1.4), формулу обратного перехода от изображения к оригиналу можно записать следующим образом:

$$Y(t) = \sum_j \text{res } F(p_j^*) e^{p_j^* t}, \quad (4.1)$$

где p_j^* — полюсы вектора $F(p)$. Эти полюсы могут находиться лишь в точках p_{sk} (3.8) и точках (см. (1.4))

$$\omega_{jk} = \omega_j + k\omega \quad (j = 1, \dots, r; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.2)$$

При выполнении условий (1.2) можно легко показать, что ряд (4.1) сходится абсолютно в некоторой полосе вдоль вещественной оси t . При вещественных конечных значениях t ряд (4.1) сходится абсолютно и равномерно,

Для построения решения $Y(t)$ достаточно найти полюсы вектора

$F(p)$ и главные части лорановского разложения $F(p)$ в полюсах. Во многих практических задачах интересно знать лишь вынужденное (частное) решение, так как часто заранее известно, что свободные колебания затухают. Для нахождения частного решения достаточно в формуле (4.2) взять сумму по полюсам $F(p)$ лишь в точках ω_{jk} (4.2).

Пример 1. Найдем частное решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + 2y_1 + 0,2 \cos t y_2 = a; \quad \frac{d^2y_2}{dt^2} + 3y_2 + 0,2 \cos t y_1 = b. \quad (4.3)$$

В обозначениях раздела 1 имеем: $\omega = i$, $m = 2$, $n = 2$,

$$L_0(p) = \begin{pmatrix} p^2 + 2 & 0 \\ 0 & p^2 + 3 \end{pmatrix}; \quad L_1(p) = L_{-1}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Из (1.4) следует, что

$$\lambda = 1, \quad \omega_1 = 0, \quad \nu = 0, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad Q(p) = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Предположим, что в данном примере характеристические показатели отличны от точек $\omega_{1k} = ki$. Из ряда (3.2) получим, что полюс в точке $p = 0$ может иметь лишь член $D^{-1}(p) R(p)$ (см. замечания к теореме 2). При этом $\text{res } F(0) = D^{-1}(0) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Полагая $T(4i) = H(-4i) = 0$, находим из рекуррентной формулы (2.1) $T(0)$, $H(0)$ и затем из формулы (3.1) $D(0)$. Далее, из разложения (3.2) следует, что

$$\text{res } F(i) = T_+(0) \text{res } F(0); \quad \text{res } F(2i) = T_+(i) \text{res } F(i) \quad (4.6)$$

и т. д.; $T_+(0)$, $T_+(i), \dots, H_+(0)$, $H_+(-i), \dots$ вычисляются по формуле (3.1). Практически они находятся в процессе вычисления $D(0)$.

После несложных вычислений получим, записав результат в вещественной форме:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}(t) &= 0,5025062 - 0,0025084 \cos(2t) - 0,0000003 \cos(4t); \\ a_{12}(t) &= 0,0664442 \cos t - 0,0000950 \cos(3t); \\ a_{21}(t) &= -0,9501252 \cos t - 0,0000418 \cos(3t); \\ a_{22}(t) &= 0,3355481 - 0,00666540 \cos(2t) - 0,0000006 \cos(4t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Все вычисления велись с точностью, не превышающей 7 значащих цифр. Непосредственная подстановка решения (4.7), (4.8) в уравнения (4.3) показывает, что ошибка не превышает 1–2 единицы в последней значащей цифре.

Из замечаний к теореме 2 и ряда (3.2) следует

Теорема 3. Нули уравнения (см. (3.1))

$$\text{Det } D(p) = \text{Det } (L_0(p) - T(p) - H(p)) = 0 \quad (4.9)$$

являются характеристическими показателями решений системы уравнений (1.1).

При этом характеристические показатели определены с точностью до слагаемого $k\omega$, где k – целое число.

Пример 2. Составим уравнение (4.9) для характеристических показателей решений уравнения Матье (см. [1], стр. 28–32):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\lambda - 2h^2 \cos 2t) y = 0. \quad (4.10)$$

В обозначениях раздела 1 имеем: $\omega = 2i$,

$$L_0(p) \equiv p^2 + \lambda; \quad L_1(p) \equiv L_{-1}(p) \equiv -h^2. \quad (4.11)$$

Из (2.1), (3.1) получаем уравнение (4.9):

$$D(p) \equiv p^2 + \lambda - \frac{h^4}{(p+2i)^2 + \lambda} - \frac{h^4}{(p+4i)^2 + \lambda} - \frac{h^4}{(p+6i)^2 + \lambda} - \dots - \frac{h^4}{(p-2i)^2 + \lambda} - \frac{h^4}{(p-4i)^2 + \lambda} - \frac{h^4}{(p-6i)^2 + \lambda} - \dots = 0. \quad (4.12)$$

В (4.11), (4.12) $L_q(p)$, $D(p)$ – скалярные функции. Заметим, что функция $D^{-1}(p)$ является коэффициентом в центральном члене разложений (3.2), (3.12) изображения решения.

Уравнение (4.12) фактически совпадает с уравнением Айнса [1], которое служило ему для вычисления таблиц функций Матье. Подставляя $p = ki$, где k – целое число, получим уравнение для собственных значений λ уравнения (4.10).

Уравнение, подобное (4.9) (но для одного дифференциального уравнения с синусоидальными коэффициентами), было получено в [2].

Пример 3. Найдем с точностью до μ^2 характеристические показатели решений системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \omega_1^2 y_1 + 2\mu \cos \Theta t y_2 = 0; \quad \frac{d^2y_2}{dt^2} + \omega_2^2 y_2 + 2\mu \sin \Theta t y_1 = 0. \quad (4.13)$$

Считаем $\omega_1 > \omega_2$. В обозначениях разделов 1,2 имеем: $\omega = \Theta i$,

$$L_0(p) = \begin{pmatrix} p^2 + \omega_1^2 & 0 \\ 0 & p^2 + \omega_2^2 \end{pmatrix}; \quad L_1(p) = \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad L_{-1}(p) = \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Уравнение (4.9) при этом принимает вид:

$$\text{Det} \left| \begin{array}{cc} p^2 + \omega_1^2 + \frac{\mu^2 i}{(p+\Theta i)^2 + \omega_2^2} - \frac{\mu^2 i}{(p-\Theta i)^2 + \omega_2^2} + \dots & 0 \\ 0 & p^2 + \omega_2^2 - \frac{\mu^2 i}{(p+\Theta i)^2 + \omega_1^2} + \frac{\mu^2 i}{(p-\Theta i)^2 + \omega_1^2} \end{array} \right| = 0. \quad (4.15)$$

Найдем корень уравнения (4.15), близкий к $i\omega_1$ при малых значениях μ . Предполагая выполненным условие

$$\pm \omega_j \pm \omega_h \neq k\Theta \quad (j, R = 1, 2; k = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (4.16)$$

можно установить, что непрерывные дроби для $T(p)$, $H(p)$ (2.1) сходятся при $p \approx i\omega_1$, $\mu \approx 0$ к регулярным от p , μ матрицам. Первые члены их разложения по μ с точностью до μ^2 выписаны в формуле (4.15). Решая уравнение (4.15) при $p \approx i\omega_1$, $\mu \approx 0$, а затем при $p \approx -i\omega_1$, $\mu \approx \pm i\omega_2$, получим приближенные значения характеристических показателей:

$$p_1(\mu) = i\omega_1 - \mu^2 d + \dots; \quad p_2(\mu) = -i\omega_1 - \mu^2 d + \dots;$$

$$\begin{aligned} p_3 &= i\omega_2 + \mu^2 d + \dots; \quad p_4(\mu) = -i\omega_2 + \mu^2 d + \dots; \\ d &= 2\Theta [(\omega_1^2 - \omega_2^2 - \Theta^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Формулы (4.17) наглядно показывают резкое различие векторного дифференциального уравнения вида

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + [P_0 + \mu P(\Theta t)] Y = 0 \quad (4.18)$$

(где P_0 , $P(\Theta t)$ — вещественные матрицы, $P(\tau + 2\pi) \equiv P(\tau)$) от скалярного случая (4.18). При выполнении условия (4.16) и малых значениях $\mu \neq 0$ характеристические показатели попарно сходят с мнимой оси и имеет место параметрический резонанс. Области неустойчивости на плоскости параметров $\{\Theta, \mu\}$ примыкают ко всей оси $\mu = 0$, за исключением, быть может, счетного числа точек, где для Θ не выполнено условие (4.16). В скалярном случае уравнения (4.18) области неустойчивости на плоскости $\{\Theta, \mu\}$ могут примыкать к оси $\mu = 0$ лишь к счетному числу точек.

5. В этом разделе рассматривается способ построения, удовлетворяющего начальным данным (1.3) решения $Y(t)$ неоднородной системы уравнений (1.1) с неоднородной частью $\Phi(t)$ вида (1.4).

Главную часть лорановского разложения мероморфной вектор-функции (матрицы) $F(p)$ в точке $p = p_0$ будем обозначать через $\Gamma\{F(p_0)\}$. Чтобы воспользоваться формулой (4.1), достаточно знать $\Gamma\{F(p_j^*)\}$, где p_j^* — полюсы $F(p)$. Ряды (3.2), (3.12) позволяют, как это указано в разделе 4, найти $\Gamma\{F(\omega_{jk})\}$ в точках ω_{jk} (4.2).

Положение других полюсов, точек p_{sk} (3.8), отыщем с помощью уравнения (4.9). Пусть найден какой-либо характеристический показатель p_s . Предположим, что все характеристические показатели p_s отличны от чисел ω_{jk} (4.2). Ряд (3.12) позволяет вычислить $\Gamma\{F(p_s)\}$; практически, однако, ряды (3.2), (3.12) пригодны для вычисления $\Gamma\{F(p_{sk})\}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) лишь для немногих значений k .

Из доказательства теоремы 1 следует, что лишь конечное число общих множителей в членах ряда (3.12) могут иметь полюсы в конечной области Σ . Как правило, полюс в точках $p = p_{sk}$ имеет лишь матрица $D^{-1}(p)$. Матрицы $T_{-}(p_s + r\omega)$, $H_{-}(p_s - r\omega)$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) вычисляются в процессе вычисления характеристического показателя p_s .

Для удобства установим некоторые вспомогательные соотношения между $\Gamma\{F(p_{sk})\}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), которые позволяют находить $\Gamma\{F(p_{sk})\}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), зная $\Gamma\{F(p_s)\}$.

Выберем m линейно независимых решений $Y_1(t), \dots, Y_m(t)$ системы уравнений (1.1) и образуем из них матрицу

$$Y_0(t) = (Y_1(t), \dots, Y_m(t)), \quad \text{Det } Y_0(t) \neq 0. \quad (5.1)$$

Аналогично образуем матрицу $R_0(p)$, которую составим из векторов $R_1(p), \dots, R_m(p)$, полученных по формуле (1.5) для решений $Y_1(t), \dots, Y_m(t)$. Пусть $F_0(p)$ является изображением матрицы $Y_0(t)$ ($t \geq 0$) и $\text{Det } F_0(p) \neq 0$.

Используя обозначение

$$G(p) \equiv F_0(p + \omega) F_0^{-1}(p), \quad (5.2)$$

уравнение (1.6) можно переписать в виде:

$$[L_{-}(p - \omega) + L_0(p) G(p - \omega) + L_1(p + \omega) G(p) G(p - \omega)] F_0(p - \omega) = R_0(p). \quad (5.3)$$

По предположению, матрица $R_0(p)$ (1.5) не имеет полюсов в точках p_{sk} , а $F_0(p-\omega)$ может иметь полюса в точках p_{sk} кратности ρ_s , которая не выше кратности характеристического показателя p_s . Обозначая

$$\Psi(p) \equiv L_{-1}(p-\omega) + L_0(p) G(p-\omega) + L_1(p+\omega) G(p) G(p-\omega), \quad (5.4)$$

мы сможем удовлетворить уравнение (5.3) при $p_{sk}=p_s+k\omega$ (3.8) ($k=1, 2, 3, \dots$), положив

$$\Psi(p_{sk}) = 0, \frac{d\Psi}{dp}(p_{sk}) = 0, \dots, \frac{d^{\rho_s-1}\Psi}{dp^{\rho_s-1}}(p_{sk}) = 0 \quad (k=1, 2, \dots). \quad (5.5)$$

В свою очередь (см. (3.7) и замечание к теореме 2), мы сможем удовлетворить соотношения (5.5), положив

$$G(p_{sk}) = T_+(p_{sk}), \dots, \frac{d^{\rho_s-1}G}{dp^{\rho_s-1}}(p_{sk}) = \frac{d^{\rho_s-1}T_+}{dp^{\rho_s-1}}(p_{sk}) \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (5.6)$$

Из соотношений (5.6) и (5.2) получаем:

$$\Gamma\{F_0(p_{sk} + \omega)\} = \Gamma\{T_+(p_{sk}) F_0(p_{sk})\} \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (5.7)$$

Переходя к исследуемому вектору $F(p)$, найдем из (5.7):

$$\Gamma\{F(p_{sk} + \omega)\} = \Gamma\{T_+(p_{sk}) F(p_{sk})\} \quad (5.8)$$

и аналогично

$$\Gamma\{F(p_{sk} - \omega)\} = \Gamma\{H_+(p_{sk}) F(p_{sk})\} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5.9)$$

Здесь $T_+(p)$, $H_+(p)$ — величины, определенные в (3.1). Формулы (5.8), (5.9) позволяют последовательно находить $\Gamma\{F(p_{sk})\}$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$).

Заметим, что при отыскании решения в виде (1.7) (не переходя к изображениям) для B_k получаются формулы, аналогичные (5.8), (5.9). При этом особые трудности возникают в случае кратных характеристических показателей. Формулы (5.8), (5.9) позволяют исследовать и этот случай.

Пример 4. Для простоты рассмотрим скалярное уравнение, так как способ решения является новым и для скалярного случая:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (2 + 0,2 \cos 2t)y = 1; \quad y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = 0. \quad (5.10)$$

В обозначениях раздела 1 имеем: $\omega=2i$, $\Phi(t)=1$,

$$Q(p) = 1/p, \quad \omega = 0, \quad L_0(p) \equiv p^2 + 2, \quad L_1(p) \equiv L_{-1}(p) = 0, 1.$$

Уравнение в разностях принимает вид:

$$0,1 F(p - 2i) + (p^2 + 2) F(p) + 0,1 F(p + 2i) = 1/p. \quad (5.11)$$

Прежде всего из ряда (3.2) найдем $\Gamma\{F(p)\}$ в точках $p=0, \pm 2i, \pm 4i, \dots$. Для этого вычислим $D(0)$ (3.1). Положив $T(6i)=H(-6i)=0$, из (2.1) найдем: $H(0)=T(0)=0,005002$, $D(0)=2,010004$, $\text{res } F(0)=D^{-1}(0)=0,497511$, $\text{res } F(2i)=T_+(0)$ $\text{res } F(0)=0,024885$, $\text{res } F(4i)=0,000177$. Окончательно из формулы (4.1) получаем частное решение y_1 , соответствующее полюсам, расположенным в точках $p=\omega_{1k}=\omega_1+2ki$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$y_1=0,497511+0,024885 (e^{2it} + e^{-2it}) + 0,000177 (e^{4it} + e^{-4it}). \quad (5.12)$$

Затем отыскиваем характеристические показатели из уравнения (4.9), которое в данном примере имеет вид:

$$D(p) = p^2 + 2 - \frac{0,01}{(p+2i)^2+2} - \frac{0,01}{(p+4i)^2+2} - \dots \\ - \frac{0,01}{(p-2i)^2+2} - \frac{0,01}{(p-4i)^2+2} - \dots = 0. \quad (5.13)$$

Согласно (5.13), $p_1 \approx \sqrt{2}i$. Методом итераций находим более точное значение $p_1 = 1,41244i$.

Чтобы найти $\text{res } D^{-1}(p_1)$, вычислим сначала

$$\frac{dD}{dp}(p) = 2p + \frac{0,01}{[(p+2i)^2+2-T(p+2i)]^2} \{ 2(p+2i) + \dots \} + \\ + \frac{0,01}{[(p-2i)^2+2-H(p-2i)]^2} \{ 2(p-2i) + \dots \}. \quad (5.14)$$

Подставляя в формулу (5.14) $p_1 = 1,41244i$, найдем $(dD/dp)(p_1) = 2,82132i$. Тогда из ряда (3.12) получим: $\text{res } F(p_1) = -0,71424i/2,32132i = -0,28860$.

Из формул (5.8), (5.9) следует, что

$$\begin{aligned} \text{res } F(p_1+2i) &= T_{\perp}(p_1) \text{res } F(p_1) = -0,00299; \\ \text{res } F(p_1+4i) &= T_{+}(p_1+2i) \text{res } F(p_1+2i) = -0,00001; \\ \text{res } F(p_1-2i) &= H_{+}(p_1) \text{res } F(p_1) = 0,01742; \\ \text{res } F(p_1-4i) &= H_{+}(p_1-2i) \text{res } F(p_1-2i) = 0,00037. \end{aligned}$$

Так как решение уравнения (5.10) будет вещественным, то $\text{res } F(p_1+2ki) = \text{res } F(-p_1-2ki)$. Записывая окончательное решение в вещественной форме и округляя, получаем:

$$y(t) = 0,49751 + 0,04977 \cos 2t + 0,00035 \cos 4t - 0,00002 \cos 5,41244t - \\ - 0,00598 \cos 3,41244t - 0,57720 \cos 1,41244t + 0,03484 \cos 0,58756t + \\ + 0,00074 \cos 2,5875t. \quad (5.15)$$

При подстановке решения (5.15) в уравнение (5.10) убеждаемся, что допущена ошибка лишь в последней значащей цифре.

6. Рассмотрим пример определения областей параметрического резонанса в упругих системах, описываемых уравнениями ([4], стр. 311 и [5]):*

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + [P_0 - (\alpha + 2\beta \cos \theta t) N] Y = 0, \quad (6.1)$$

где $P_0 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, α, β — малые величины одного порядка.

Система уравнений (6.1) не меняет своего вида при замене t на $-t$. Поэтому характеристические показатели p_s ($s = 1, \dots, 4$) расположены

* Эта система уравнений была подробно рассмотрена Якубовичем [6].

жены симметрично относительно мнимой оси $\operatorname{Re} p = 0$. Пользуясь уравнением (4.9), можно определить характеристические показатели и, тем самым, границы областей неустойчивости в пространстве параметров $\{\Theta, \alpha, \beta\}$. При этом следует использовать тот факт, что на границе областей неустойчивости система уравнений (6.1) имеет кратные характеристические показатели. Напомним, что в данном примере характеристические показатели определены с точностью до слагаемого Θki , где k — целое число. Из теоремы Ляпунова следует, что если характеристический показатель $p_1 = (k/2)\Theta i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то он кратный. Соответствующие области неустойчивости называются областями простого резонанса. Если на границе области неустойчивости кратный характеристический показатель $p_1 \neq (k/2)\Theta i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то соответствующие области неустойчивости называются областями комбинированного резонанса ([7], стр. 341).

В обозначениях раздела 1 имеем:

$$L_0(p) = \begin{pmatrix} p^2 + \omega_1^2 & -\alpha \\ -\alpha & p^2 + \omega_2^2 \end{pmatrix}; \quad L_1(p) \equiv L_{-1}(p) = -\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\beta N. \quad (6.2)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} B(p) &\equiv \begin{pmatrix} b_1(p) & b_2(p) \\ b_2(p) & b_3(p) \end{pmatrix} \equiv (L_0(p) - T(p)); \\ C(p) &\equiv \begin{pmatrix} c_1(p) & c_2(p) \\ c_2(p) & c_3(p) \end{pmatrix} \equiv (L_0(p - \Theta i) - H(p - \Theta i)). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Из (2.1), (6.2) получим с точностью до величин порядка $(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$:

$$\begin{aligned} b_1(p) &= p^2 + \omega_1^2 - \frac{\beta^2}{(p + \Theta i)^2 + \omega_2^2} + \dots; \quad b_2(p) = -\alpha + \dots; \\ b_3(p) &= p^2 + \omega_2^2 - \frac{\beta^2}{(p + \Theta i)^2 + \omega_1^2} + \dots; \\ c_1(p) &= (p - \Theta i)^2 + \omega_1^2 - \frac{\beta^2}{(p - 2\Theta i)^2 + \omega_2^2} + \dots; \quad c_2(p) = -\alpha + \dots; \\ c_3(p) &= (p - \Theta i)^2 + \omega_2^2 - \frac{\beta^2}{(p - 2\Theta i)^2 + \omega_1^2} + \dots. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Уравнение (4.9) принимает в обозначениях (6.3) следующий вид:

$$\operatorname{Det} D(p) \equiv \operatorname{Det}(B(p) - \beta^2 NC^{-1}(p) N) = 0. \quad (6.5)$$

Положив в уравнении (6.5) $p = (k/2)\Theta i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), получим уравнения границ простого параметрического резонанса.

Для примера рассмотрим случай $k=1$, $p=\Theta i/2$. Уравнение (6.5) с помощью обозначений (6.3) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} (b_1(p)b_3(p) - b_2^2(p))(c_1(p)c_3(p) - c_2^2(p)) - \beta^2(b_1(p)c_3(p) + \\ + 2b_2(p)c_2(p) + b_3(p)c_1(p)) + \beta^4 = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Из (2.1), (6.2) следует, что $B(\Theta i/2) \equiv C(\Theta i/2)$; разрешая уравнение (6.6), при $p=(i/2)\Theta$ получаем два уравнения:

$$b_1 \left(\frac{i}{2} \Theta \right) b_3 \left(\frac{i}{2} \Theta \right) = \left(b_2 \left(\frac{i}{2} \Theta \right) \pm \beta \right)^2. \quad (6.7)$$

I. Пусть $\omega_1 = \omega_2$; тогда $b_1 \left(\frac{i}{2} \Theta \right) = b_3 \left(\frac{i}{2} \Theta \right)$. Если $\Theta \approx 2\omega_1$, $\alpha, \beta \approx 0$, то из (6.7), (6.4) сразу следует:

$$\frac{\Theta^2}{4} = \omega_1^2 + \sigma \pm \beta + \frac{\beta^2}{8\omega_1^2} + O(|\sigma|^3 + |\beta|^3). \quad (6.8)$$

Здесь знаки \pm берутся независимо; при этом получаем 4 границы областей неустойчивости.

II. Пусть $\omega_1 \neq \omega_2 \neq k\Theta$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) Из (6.7) следует, если $\Theta^2 \approx 4\omega_1^2$ или $\Theta^2 \approx 4\omega_2^2$, $\alpha, \beta \approx 0$, что

$$\begin{aligned} \frac{\Theta^2}{4} &= \omega_1^2 + \frac{\beta^2}{9\omega_1^2 - \omega_2^2} + \frac{(\alpha \pm \beta)^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} + O(|\sigma|^3 + |\beta|^3); \\ \frac{\Theta^2}{4} &= \omega_2^2 + \frac{\beta^2}{9\omega_2^2 - \omega_1^2} + \frac{(\alpha \pm \beta)^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} + O(|\sigma|^3 + |\beta|^3). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Соотношения (6.9) являются уравнениями границ областей неустойчивости простого резонанса. Для системы (6.1) они были получены в [6].

Отметим, что уравнение (6.7) позволяет найти границы всех нечетных областей неустойчивости. Наиболее простым оказывается при этом случай I ($\omega_1 = \omega_2$). Если вычисления вести методом малого параметра ([6], стр. 341), то случай I оказывается значительно сложнее, чем случай II.

III. Рассмотрим пример определения области комбинационного резонанса [1] при $p \approx i\omega_1$, $\Theta \approx \omega_1 + \omega_2 = \Theta_0$, $\omega_1 > \omega_2 > 0$. При $p = i\omega_1$, $\Theta = \Theta_0$, $\alpha = \beta = 0$ получим: $b_3(i\omega_1) \neq 0$, $c_1(i\omega_1) \neq 0$,

$$b_1(i\omega_1) = c_3(i\omega_1) = b_2(i\omega_1) = c_2(i\omega_1) = 0.$$

Подставляя (6.4) в (6.6) и требуя, чтобы уравнение (6.6) имело кратный корень p_1 , близкий к $i\omega_1$, получим:

$$\Theta = \omega_1 + \omega_2 \pm \frac{\beta}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} + \frac{2\alpha^2 + \beta^2}{4\omega_1 \omega_2 \Theta_0} + O(|\alpha|^3 + |\beta|^3); \quad (6.10)$$

$$p_1 = i(\omega_1 \pm \frac{\beta}{2\sqrt{\omega_1 \omega_2}} - \frac{\beta^2}{8\omega_1 \omega_2 \Theta_0} + \frac{\alpha^2}{\omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} + O(|\alpha|^3 + |\beta|^3)). \quad (6.11)$$

Из (6.11) видно, что если изменить Θ, α, β так, чтобы удовлетворилось соотношение (6.10), т. е. двигаться по границе области неустойчивости, то кратные характеристические показатели перемещаются вдоль мнимой оси.

В заключение благодарю А. И. Лурье за внимание и помочь в работе, а также А. И. Захарову.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Д. О. Стретт, Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. ОНТИ, Харьков, 1935.
2. J. Patry, Über die linearen Differentialgleichungen mit sinusförmigen Koeffizienten, Prom Nr. 2618, Julis—Verlag—Zürich, 1957.
3. Б. А. Фукс и В. И. Левин, Функции комплексного переменного и некоторые их приложения (специальные главы), ГИТЛ, М.—Л., 1951.
4. В. В. Болотин, Динамическая устойчивость упругих систем, ГИТЛ, М., 1956
5. В. А. Якубович, ПММ, 23, 15 (1959).
6. В. А. Якубович, Автореферат диссертации, Ленинград. ун-т, 1959.
7. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, ГИТЛ, М., 1956.

Ленинградский политехнический
институт

Поступила в редакцию
30 мая 1960 г.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ ЛУННОЙ ПОРОДЫ

B. C. Троицкий, H. M. Цейтлин

Диэлектрическая постоянная лунной породы определена лишь для оптических волн по наблюдению угла Брюстера при отражении солнечного света. Вследствие большой нерегулярности поверхности для световых волн угол определяется неточно и дает значения ϵ от 2 до 2,5.

Нам представляется, что в настоящее время с помощью больших радиотелескопов весьма целесообразно исследование поляризационных характеристик радиоизлучения Луны. Такое исследование может оказаться средством измерения ряда характеристик лунной поверхности. Одним из примеров этого может служить обсуждаемая ниже возможность прямого измерения диэлектрической постоянной лунной среды на радиочастотах с помощью радиотелескопа с диаграммой направленности порядка угловой минуты.

Предположим пока, что рассматриваемая часть поверхности Луны достаточно гладкая и обеспечивает примерно зеркальное отражение рассматриваемого диапазона радиоволн. Выбирая исследуемый участок на лунных морях, можно рассчитывать на наибольшее приближение к этому условию.

Метод состоит в измерении радиояркости для горизонтально и вертикально поляризованного излучения выбранного участка лунной поверхности. Если φ, ψ —сelenографические координаты этого участка, то [1]

$$T_{\uparrow} = T_{cp}(\varphi, \psi) [1 - R_{\uparrow}(\epsilon, \alpha)];$$

$$T_{\rightarrow} = T_{cp}(\varphi, \psi) [1 - R_{\rightarrow}(\epsilon, \alpha)],$$

где T_{\uparrow} и T_{\rightarrow} — яркостные температуры поверхности для вертикально и горизонтально поляризованного излучения, $R(\epsilon, \alpha)$ —коэффициент отражения для соответствующей поляризации, α —угол между направлением излучения и нормалью к поверхности, $T_{cp}(\varphi, \psi)$ —усредненная по глубине радиотемпература поверхностного слоя.

Так как угол потерь породы достаточно мал [1], то при вычислении $R(\epsilon, \alpha)$ можно пользоваться формулами Френеля. Если приемная антенна установлена так, что она принимает либо вертикальную, либо горизонтальную поляризацию по отношению к плоскости горизонта Земли, то участки лунной поверхности должны быть выбраны лишь на линиях кругов высоты или азимута, проходящих через центр диска Луны.

Находя отношение T_{\uparrow} и T_{\rightarrow} или их разность, нетрудно при заданном α найти ϵ . Во втором случае необходимо знание $T_{cp}(\varphi, \psi)$ и проведение абсолютных измерений интенсивности T_{\uparrow} и T_{\rightarrow} .

Следует заметить, что в случае рыхлого, пористого материала оптические измерения дают значение ϵ для плотных зерен разрыхленной породы, т. е. ϵ соответствует плотности кристаллического состояния d_0 . Радиоизмерения дают среднее значение ϵ_{cp} самой рыхлой породы, соответствующее средней плотности d рыхлого материала.

Так как на Луне верхний слой породы находится в сильно пористом или разрыхленном состоянии, то ϵ_{cp} может быть близко к единице. Это приведет к сближению величин интенсивностей T_{\uparrow} и T_{\rightarrow} . На рис. 1 приведены расчетные кривые для $T_{\rightarrow}/T_{\uparrow}$ в зависимости от α при разных ϵ_{cp} от 1,2 до 5. На оси абсцисс отложено также соответствующее расстояние используемого участка от края диска Луны β . Из кривых видно, что при измерении целесообразно выбирать площадку, достаточно близкую к краю лунного диска.

Подобный метод измерения ϵ был применен для земных пород и дал довольно хорошие результаты.

Если дисперсия ϵ от оптических частот до радиочастот незначительна, то, определив ϵ_{cp} и сравнив его с оптическим значением, можно сделать определенные заключения о плотности вещества на поверхности. Так как $\epsilon - 1/\epsilon + 2 \approx d_0$, а $\epsilon_{cp} - 1/\epsilon_{cp} + 2 \approx d$, то

$$\epsilon_{cp} - 1/\epsilon - 1 = d/d_0.$$

Все сказанное строго справедливо лишь при зеркальном отражении; в действительности для лунной поверхности следует ожидать значительные отклонения от этого. В таком случае разница между излучением различных поляризаций будет дополнительно зависеть от характера и степени шероховатости поверхности. Естественно, что с укорочением волны влияние шероховатостей будет возрастать. Однако экспериментальное исследование радиоизлучения Луны на 8 мкм [2] показало, что даже в этом диапазоне заметен эффект зеркального отражения. Таким образом, обсуждаемый нами метод, по-видимому, может оказаться полезным для измерения диэлектрической постоянной лунной поверхности.

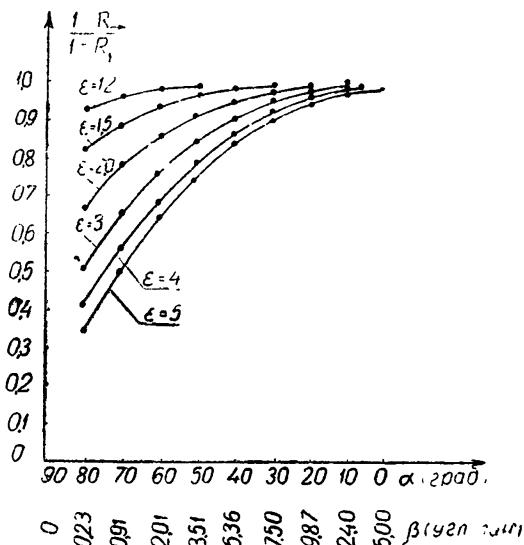


Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Труды 5-го совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М., 1956.
2. Н. А. Аменицкий, Р. И. Носкова, А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 37, 185 (1960)

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 июля 1960 г.

МОЛЕКУЛЯРНЫЙ ГЕНЕРАТОР БЕЗ СИСТЕМЫ ВЫМОРАЖИВАНИЯ

B. A. Скворцов, A. Ф. Крупнов, A. И. Наумов:

Разработан и испытан молекулярный генератор на пучке молекул аммиака, работающий без вымораживания аммиака жидким азотом. Откачка генератора производится одним диффузионным насосом типа Н-5.

Непосредственно над насосом Н-5, снабженным маслуюловителем, размещены детали молекулярного генератора: источник молекулярного пучка диаметром 3,5 м.м., состоящий из каналов диаметром 0,2 м.м. и длиной 2 м.м., сортирующая система из 4-х тонких стержней длиной 100 м.м. и резонатор длиной 100 м.м. и толщиною 7000. Детали закрывались стеклянным колпаком с резервным люаром, который использовался для вымораживания при патаживании установки.

При работе без жидкого азота в вакуум в системе без пучка был равен $2 \cdot 10^{-6}$ м.м.

* Источник изготовлен А. И. Наумовым методом вытравливания меди из пучка эмальированной проволоки, пропитанного лаком. Второй раз молекулярный генератор был запущен с источником, изготовленным по технологии Финнашиа [1].

рт. ст., при оптимальном пучке снижался до $3,3 \cdot 10^{-5}$, расход аммиака при этом был $2,8 \cdot 10^{17} \text{ мол. сек}^{-1}$, что соответствует скорости откачки 250 л. сек^{-1} . Напряжение на сортирующей системе равнялось 35 кв. Генератор работал устойчиво, отношение сигнал/шум, оцененное по экрану осциллографа, было порядка 5. Была сделана попытка запустить генератор с источником пучка—одним отверстием диаметром 1 м.м. Генератор был очень близок к самовозбуждению, но генерации получено не было.

При работе обычных молекулярных генераторов с вымораживанием на их стабильность отрицательно влияют изменения режима вымороза пучка и температуры контура, происходящие при выкипании и последующем доливании жидкого азота. Генератор без вымораживания, естественно, свободен от этих недостатков.

Следует отметить удобство такого генератора для ряда применений и практически неограниченный срок его непрерывной работы.

Авторы благодарят А. А. Мельникова за большую помощь в эксперименте.

ЛИТЕРАТУРА

1 И С Финашин, Вопросы радиоэлектроники, серия 1, Электроника, 2, 140 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 июля 1960 г.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИЗМЕРЕНИЯ АМПЛИТУДНЫХ ФЛЮКТУАЦИЙ ГЕНЕРАТОРА

В. Н. Никонов

В недавно опубликованной работе Хэгблома [1] предложена методика измерения спектральной плотности амплитудных флюктуаций $w_\alpha(\Omega)$ кристаллического генератора в низкочастотном диапазоне. Блок-схема измерительной аппаратуры приведена на рис. 1. Исследуемый генератор 1 модулируется по частоте колебанием генератора 7 с частотой $f_1 = 15 \text{ мгц}$. Модулирование колебание генератора подается на обычный кристаллический детектор 2, на выходе которого выделяются колебания удвоенной частоты модуляции с прилегающим к ней спектром амплитудных флюктуаций $a(t)$ исследуемого генератора. После усиления и повторного детектирования с помощью вакуумного диода 4 производится исследование спектра амплитудных флюктуаций $a(t)$ с помощью спектр-анализатора 5. Для градуировки измерительной аппаратуры в [1] предусмотрен калибровочный генератор 8 ($f_2 = 15 \text{ кгц}$), создающий на входе анализатора калибровочный сигнал за счет модуляции исследуемого генератора одновременно с модуляцией его колебанием генератора 7.

Эта методика преследует цель сдвинуть по частоте низкочастотный участок спектра амплитудных флюктуаций на частоту f_1 и тем самым исключить влияние фликкер-шума первого детектора на чувствительность аппарата при измерении вышеупомянутого спектра. Предложенная методика вызывает существенное возражение и, как будет показано ниже, не позволяет измерять низкочастотную часть w_α .

При рассмотрении работы установки автор [1] допускает ошибку в расчете сигнала на выходе первого детектора и приходит к абсурдному утверждению, согласно которому обычный детектор реагирует на частотную модуляцию. Однако хорошо известно, что детектор независимо от вида характеристики выделяет только амплитудную модуляцию. Это приводит автора к ошибочному пониманию принципа работы аппарата и к неверному толкованию результатов эксперимента.

В действительности при модуляции кристаллического генератора колебанием $A_1 \sin(\omega_1 t)$ паряду с частотной модуляцией имеется неучитываемая автором [1] амплитудная модуляция с удвоенной частотой ω_1 . Поэтому исследуемое колебание имеет вид

$$A(t) = A_0 [1 - \gamma(t) + a_{2\omega_1} \sin(2\omega_1 t)] \cos(\omega_1 t - \varphi), \quad (1)$$

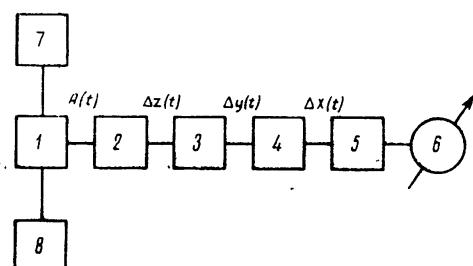


Рис. 1

где $\alpha(t)$ —случайная глубина модуляции амплитуды, $a_{2\omega_1}$ —глубина амплитудной модуляции с частотой $2\omega_1$. При написании (1) предполагается, что кластрон работает в режиме, соответствующем максимуму области генерации. Вследствие этого амплитуда колебания (1) не содержит основной гармоники модуляции.

Легко показать, что благодаря этой модуляции на входе второго детектора будет переменная составляющая вида

$$\Delta y(t) = k [a_{2\omega_1} (1 + \alpha_1(t)) \sin(2\omega_1 t) + \alpha_2(t)], \quad (2)$$

которая после детектирования подвергается исследованию с помощью спектр-анализатора. В (2) k —коэффициент пропорциональности, определяемый амплитудой колебания исследуемого генератора A_0 и коэффициентом усиления аппаратуры, α_1 и α_2 —случайные функции времени, порождаемые флюктуациями α . Спектры этих функций после прохождения спинала через фильтр З представляют собой различные участки спектра w_α . Спектр α_1 представляет собой низкочастотную часть, а спектр α_2 —расположенную около частоты $2f_1$ ($\omega_1 - 2\pi f_1$) часть спектра $w_\alpha(\Omega)$.

Из (2), учитывая, что за вторым детектором стоит узкополосный фильтр и что $\bar{\alpha}^2 \ll 1$, нетрудно получить выражение для спектра шумовой составляющей на выходе второго детектора. Полагая для простоты его характеристику квадратичной, получим

$$w_{\Delta x} \sim k^4 [a_{2\omega_1}^4 w_{\alpha_1}(\Omega) + 2a_{2\omega_1}^2 w_{\alpha_2}(\Omega)]. \quad (3)$$

При написании (3) ввиду малости α , α_1 , α_2 опущены низкочастотные спектральные составляющие, представляющие собой свертки спектров α_1 и α_2 .

Спектр $w_{\alpha_1}(\Omega)$ после вторичного детектирования расположен так же, как и: спектр $w_{\alpha_2}(\Omega)$ в диапазоне частот от 0 до F_{\max} . Сравнивая между собой спектральные составляющие $w_{\Delta x}$, стоящие в квадратных скобках в (3), получим для отношения первой составляющей ко второй выражение

$$n = a_{2\omega_1}^2 w_{\alpha_1}(\Omega) / 2w_{\alpha_2}(\Omega). \quad (4)$$

Глубина модуляции амплитуды $a_{2\omega_1}$ может быть легко измерена; ее также нетрудно вычислить на основании упрощенной теории кластронного генератора [2]. Обычно для кластрона трехсанитметрового диапазона $a_{2\omega_1}$ не превышает значения $5 \cdot 10^{-3}$.

Таким образом, подставляя указанное выше значение $a_{2\omega_1}$ в (4), легко видеть, что если низкочастотные составляющие спектральной плотности $w_\alpha(\Omega)$ не превосходят намного ($\sim 10^5$ раз) составляющей плотности на частотах 30 мгц, то в (3) $a_{2\omega_1}^4 w_{\alpha_1}(\Omega) \ll 2a_{2\omega_1}^2 w_{\alpha_2}(\Omega)$. О справедливости этого можно косвенно заключить из измерений, проведенных в [1] (по экспериментальной кривой спектральной плотности $w_\alpha(\Omega)$, не меняющейся в диапазоне частот F от 1 кгц до 100 кгц). Известно (см., например, [3]), что спектр амплитудных флюктуаций на частотах около $F = 100$ кгц может превышать спектр амплитудных флюктуаций на частотах около 30 мгц не более чем в 10 раз.

Учитывая все сказанное, можно заключить, что в экспериментах Хэгблома измерялась фактически спектральная плотность флюктуаций амплитуды колебания $w_\alpha(\Omega)$ кластронного генератора в диапазоне частот от 30,001 до 30,1 мгц вместо предполагаемого измерения в диапазоне частот от 0,001 до 0,1 мгц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Haggblom Proc. IEE, 106, 30, 39 (1959).
2. И. Л. Берштейн, ДАН СССР, 106, 453 (1956).
3. В. Н. Никонов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 2, 916 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 апреля 1960 г.

О ФЛЮКТУАЦИЯХ ГЕНЕРАТОРА, КОНТУР КОТОРОГО СОДЕРЖИТ ИНДУКТИВНОСТЬ С ФЕРРИТОВЫМ СЕРДЕЧНИКОМ

Ю. А. Абрамов

Известно, что при периодическом перемагничивании ферромагнитного сердечника в катушке, охватывающей такой сердечник, возникает флюктуационная ЭДС шу-

мов циклического перемагничивания. Эти шумы были всесторонне исследованы в ряде работ (см., например, [1]).

Естественно ожидать, что при работе генератора, содержащего феррит в качестве сердечника катушки колебательного контура, шумы циклического перемагничивания должны вызвать дополнительные флюктуации колебаний генератора.

Нами было проведено изучение флюктуаций генератора, индуктивность колебательного контура которого в основном состояла из катушки, намотанной на ферритовый образец. Режим работы генератора (частота и амплитуда колебаний) выбирался таким, чтобы феррит находился в условиях, для которых известен уровень шумов циклического перемагничивания (частота генератора 60 кГц, амплитуда переменного поля в сердечнике 0,4 эрстед). Использовалась схема генератора с колебательным контуром в цепи анода; для исключения постоянного подмагничивания применялось параллельное питание.

Для определения воздействия на флюктуации колебаний генератора шумов циклического перемагничивания был применен метод сравнения: исследовались флюктуации генератора как при включении индуктивности с ферритом, так и при замене ее на эквивалент — индуктивность с последовательно включенным сопротивлением; параметры эквивалента подбирались так, чтобы замена не изменяла динамический режим работы генератора.

Для исследования амплитудных флюктуаций был использован метод, примененный в [2]: напряжение с генератора через катушку связи подавалось на ламповый детектор; напряжение на выходе детектора анализировалось при помощи анализатора с полосой 4 гц.

Спектр амплитудных флюктуаций изучался в диапазоне частот от 130 до 2000 гц.

Результаты эксперимента приведены на рис. 1, где по оси абсцисс отложена частота наблюдения спектра, а по оси ординат — спектральная плотность коэффициента глубины хаотической модуляции $m_F^2 \cdot 10^{10}$. Кривая 1 соответствует включению индуктивности с ферритом, кривая 2 — включению эквивалента.

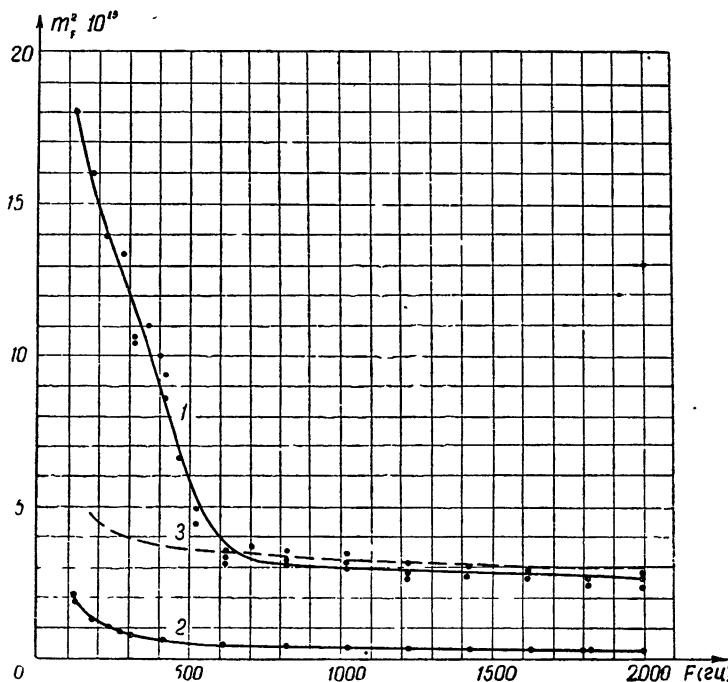


Рис. 1.

Шумы циклического перемагничивания эквиваленты введению в контур шумовой ЭДС со спектральной плотностью $\bar{e_f^2}$. Согласно [2], величина $\bar{m_F^2}$, вызываемая действием в контуре такой шумовой ЭДС, равна

$$\bar{m_F^2} = \frac{\omega^2}{R_0^2 [p^2 + (2\pi F)^2]} \bar{e_f^2}, \quad (1)$$

где $\omega = 2\pi f$ — круговая частота генератора, F — частота наблюдения спектра, p — прочность предельного цикла, R_0 — амплитуда колебаний.

Величина p была измерена, как и в [2], по изменению амплитуды колебаний при внесении в контур небольшого омического сопротивления и оказалась равной $3,5 \cdot 10^4$ сек $^{-1}$ ($R_0 = 140$ вольт). Величина e_f^2 была известна и равна $5,4 \cdot 10^{-13} \text{ в}^2 \cdot \text{гц}^{-1}$.

Кривая 3 на рис. 1 (пунктир) показывает значения m_F^2 при включении индуктивности с ферритом, полученные как сумма значений, рассчитанных по (1), и значений по кривой 2.

Как видно из рисунка 1, совпадение в диапазоне от 600 до 2000 гц вполне удовлетворительное; расхождения не выходят за пределы точности измерений. Значительный рост экспериментальных значений m_F^2 при частотах, меньших 600 гц, говорит о наличии при перемагничивании феррита дополнительных флюктуаций, имеющих более низкочастотный спектр.

Были проведены опыты по изучению частотных флюктуаций при помощи аппаратуры, аналогичной описанной в [3]. Было обнаружено увеличение уровня флюктуаций при замене эквивалента на индуктивность с ферритом; однако из-за недостаточной чувствительности аппаратуре количественные измерения провести не удалось.

В качестве контрольного опыта были измерены флюктуации генератора при подаче на феррит большого постоянного поля. При этом амплитудные флюктуации уменьшились до уровня флюктуаций при соответствующем эквиваленте.

Таким образом, экспериментально показано, что шумы циклического перемагничивания приводят к существенному увеличению флюктуаций ламнового генератора.

Автор благодарен А. А. Грачеву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Городина, А. А. Грачев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 2, 581 (1959).
2. И. Л. Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., 14, 2, 145 (1950).
3. Ю. А. Дрягин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 1, 5—6, 93 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 сентября 1960 г.



Памяти Венедикта Ивановича Калинина

Советская радиофизика понесла большую утрату 15 октября 1960 года скоропостижно скончался член редколлегии нашего журнала, заслуженный деятель наук РСФСР, доктор физико-математических наук, профессор Венедикт Иванович Калинин.

Почти вся сознательная жизнь Венедикта Ивановича была связана с Саратовским университетом, где он прошел путь от студента до заведующего созданной им кафедры радиофизики. Имя В.И. Калинина было хорошо известно советским радиофизикам по его книгам и активной деятельности в Радиосовете АН СССР и редакции нашего журнала.

Венедикт Иванович Калинин родился 16 марта 1907 года в семье служащего. В 1925 году он поступил на физико-математический факультет Саратовского университета. Еще студентом он начал под руководством профессора К.А. Леонтьева исследовательскую работу в области генерирования сверхвысоких частот и в 1929 году опубликовал свою первую статью, посвященную областям колебаний генератора схемы тормозящего поля.

После окончания университета В.И. Калинин работал в ЦРЛ в Ленинграде, где он организовал группу по исследованию дециметровых волн. В этот период он выполнил ряд важных исследований по генерированию сверхвысоких частот, в частности разработал широко распространенную в то время лампу с апериодической сеткой.

С 1933 года В.И. Калинин непрерывно работал в Саратовском университете. Здесь особенно плодотворно развернулась его творческая деятельность. Широкий кругозор и большая эрудиция позволили Венедикту Ивановичу создать ряд ценных монографий по сверхвысоким частотам, таких как «Дециметровые волны» (1935 г.), «Дециметровые и сантиметровые волны» (1939 г.) и «Генерирование дециметровых и сантиметровых волн» (1948 г.). Он явился автором более 50 научных работ, посвященных главным образом, вопросам кинематической теории генераторов сверхвысоких частот. Обобщение этих исследований было сделано в его докторской диссертации, защищенной в 1944 г.

Научные интересы В.И. Калинина были тесно связаны с запросами практики. Под его руководством был выполнен ряд тем, имеющих большое народно-хозяйственное значение.

Исключительно серьезное внимание уделял профессор Калинин учебному процессу. Им был разработан ряд профилирующих радиофизических курсов. Яркие и увлекательные лекции Венедикта Ивановича пользовались большим успехом в аудитории. Много сил он затратил на подготовку учебных пособий («Введение в радиофизику», 1957 г., «Радиофизический практикум», 1960 г.).

Придавая большое значение проведению творческих научных дискуссий, Венедикт Иванович организовал в 1944 г. в Саратовском университете постоянно действующий радиофизический семинар. Этот семинар содействовал вовлечению молодежи в исследовательскую работу и созданию творческой атмосферы научных дискуссий. Особое внимание Венедикт Иванович уделял воспитанию научных кадров высокой квалификации. Под его руководством более 10 человек защитили кандидатские диссертации.

Не замыкаясь в рамках своей научно-педагогической деятельности, проф. Калинин принимал активное участие в общественных мероприятиях, часто выступал с интересными лекциями перед населением.

Плодотворная деятельность В.И. Калинина была высоко оценена в 1959 г. ему было присвоено звание заслуженного деятеля науки РСФСР.

Скружающие знали Венедикта Ивановича как человека высокой культуры, прямого и принципиального. Круг его интересов был очень широк. Он живо интересовался литературой и искусством, с горячностью любил русскую природу.

Образ Венедикта Ивановича Калинина всегда будет являться примером честного служения советской науке.

Редакционная коллегия

Кафедра радиофизики
Саратовского университета.