

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Бенедиктов Е. А., Митяков Н. А. Определение относительных флюктуаций электронной концентрации в ионосфере	733
Рапопорт В. О. О нарастании электромагнитных волн в потоке, движущемся в плазме, при наличии магнитного поля	737
Ковнер М. С. Кинетическое рассмотрение взаимодействия потока заряженных частиц с неподвижной плазмой в магнитном поле. II	746
Голицын Г. С. Влияние магнитного поля земли на турбулентность в нижней ионосфере	758
Станкевич К. С. Об эффекте насыщения в парамагнитной системе с тремя и четырьмя уровнями	75
Луговой В. Н. О параметрическом возбуждении осциллятора в термостате	774
Приймак Г. И. Корреляционная функция сигнала, прошедшего среду с хаотически движущимися неоднородностями	778
Садеков Р. Х. Мультивибратор под действием случайных сил	789
Садеков Р. Х. К вопросу о флюктуациях в кусочно-линейных автоколебательных системах	796
Таланов В. И. К вопросу об излучении антенн поверхностных волн с периодически изменяющимся поверхностным импедансом	802
Аверков С. И., Хронопуло Ю. Г. Электромагнитные волны в диспергирующих системах с параметрами, зависящими от времени	818
Боков В. М., Гапонов А. В. К теории строботрона с бегущей волной	826
Миллер М. А. Некоторые характеристики электронных промежутков с большими углами пролета	837
Миллер М. А. Электронные промежутки с большими углами пролета в автоколебательных системах	848
Жислин Г. М. К задаче об оценке произведения продолжительности сигнала на ширину его спектра	860
Ашбель Н. И. К теории генератора на точечном транзисторе	866
Леонов Н. Н. К теории разрывного преобразования прямой в прямую	872
Мамонов Е. И. Бессумматорные схемы однокантного преобразования параллельных двоичных кодов из прямой формы в дополнение и обратно	887
Нечаев А. М. Ферритодиодные импедансные схемы для логических операций и их синтез	892
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Докучаев В. П. О влиянии геомагнитных возмущений на дрейф ионизированного газа в верхней атмосфере	901
Зверев В. А. Рассеяние модулированных волн на случайных неоднородностях	903
Колоскова Н. Г., Копвиллем У. Х. О возможности возбуждения свободной ядерной индукции ультразвуковым импульсом	904
Штыров А. И., Медокс А. Г. Исследование электрической однородности периодических структур интерференционным методом	906
Тверской В. И. Некоторые вопросы прохождения одиночных радиосигналов через замедляющие системы с нелинейной фазовой характеристикой	907
Белюстина Л. Н. О возбуждении автоколебаний в нелинейной системе фазовой автоподстройки частоты с запаздывающим аргументом	909
Иванова И. М., Кетков Ю. Л., Ямпольская Т. С. О существовании кодов баркера	911

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ФЛЮКТУАЦИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В ИОНОСФЕРЕ

Е. А. Бенедиктов, Н. А. Митяков

Приводятся результаты определения относительной дисперсии электронной плотности в ионосфере как по данным импульсного зондирования, так и радиоастрономическим методом осенью 1959 г. Методом импульсного зондирования получено, что для слоя $F \delta N < 4 \cdot 10^{-3}$, а для слоя $E \delta N < 10^{-2}$. Результаты обработки записей флюктуаций дискретных источников приводят к величине $\delta N \sim 3 \cdot 10^{-3}$.

Одним из основных параметров ионосферных неоднородностей является относительная дисперсия электронной концентрации $\delta N = \sqrt{(\Delta N/N)^2}$. В статье [1] предложена методика определения этой величины из данных о флюктуациях отраженного от ионосферы сигнала. В работе [2] изложены результаты определения δN по этому способу. Следует, однако, отметить, что авторы работ [1,2] пренебрегали рефракцией радиоволн, учет которой, как показано в [3], является существенным обстоятельством. В работе [3] рассматривалась также возможность определения δN из данных радиоастрономических наблюдений дискретных источников радиоизлучения. Значительный интерес представляет одновременное определение δN как импульсным, так и радиоастрономическим методами. Ниже излагаются результаты такой работы, проведенной в НИРФИ осенью 1959 г.

Если предположить, что неоднородности электронной концентрации со средними линейными размерами ξ распределены равномерно по всему ионосферному слою, то относительная дисперсия электронной концентрации δN при радиоастрономических наблюдениях может быть определена из формулы:

$$\delta N = 0,34 \frac{\lambda_c^2}{\lambda_0 \sqrt{\xi z_m}} \sqrt{\ln \left(\frac{P_s}{P} + 1 \right)}, \quad (1)$$

а при импульсном зондировании — оценена из неравенства

$$\delta N < 0,17 \frac{\lambda_0}{\sqrt{\xi I}} \sqrt{\ln \left(\frac{P_s}{P} + 1 \right)}, \quad (2)$$

где λ_0 и λ_c — соответственно рабочая и критическая длины волн, z_m — эффективная толщина ионосферы, P_s/P — отношение рассеянной энергии сигнала к нерассеянной, а I — некоторый интеграл, зависящий от параметров слоя. Выражение (2) справедливо для сигнала, однократно отраженного от ионосферы. При двукратном отражении

$$\delta N < 0,17 \frac{\lambda_0}{\sqrt{\xi I}} \sqrt{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{P_s}{P} + 1 \right)}. \quad (3)$$

Формулы (1)–(3) выведены в предположении, что а) относительные флуктуации диэлектрической постоянной малы (т. е. $|\Delta\epsilon| \ll \epsilon$), б) углы рассеяния ϑ достаточно малы (т. е. $\vartheta \ll 1$), в) выполняется приближение геометрической оптики $\left(\frac{\lambda_0}{2\pi} \left| \frac{d\epsilon}{dz} \epsilon^{-3/2} \right| \ll 1\right)$, г) точка наблюдения расположена достаточно далеко от рассеивающего объема (т. е. $\sqrt{\lambda_0 R} \ll \xi$).

При выводе (1)–(3) предположено также, что распределение электронной концентрации с высотой следует закону

$$N = \begin{cases} N_0 \left[1 - \left(\frac{z - z_0}{z_m} \right)^2 \right] & (z < z_0) \\ N_0 \exp [-\alpha (z - z_0)] & (z > z_0) \end{cases}, \quad (4)$$

где z_0 — высота максимума слоя, N_0 — значение электронной концентрации в точке $z = z_0$. В этом случае эффективная толщина ионосферы $\bar{z}_m = z_m + 1/\alpha$.

При расчетах z_m принималась равной 400 км. Размер неоднородностей ξ оценивался по формуле $\xi = VT$, где T — средний период флуктуаций, V — скорость движения неоднородностей. При вычислении ξ предполагалось, что неоднородности перемещаются со средней скоростью 100 м·сек⁻¹.

Интеграл I , входящий в выражение (2), имеет вид [3]:

$$I = \frac{z_m}{b} \left[\frac{1}{b^2 - 1} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon'}} \frac{\sqrt{b^2 - 1} + \sqrt{b^2 - 1 + \epsilon'}}{\sqrt{b^2 - 1} + b^2} \right) - \right. \\ \left. - (1 - b^2) (b - \sqrt{b^2 - 1 + \epsilon'}) + \frac{1}{3} (b^3 - \sqrt{(b^2 - 1 + \epsilon')^3}) \right], \quad (5)$$

где $b = \lambda_0/\lambda_c$, а величина ϵ' определяется из написанных выше условий а) — в). Отношение P_s/P находилось по величине флуктуаций сигнала согласно методике, изложенной в [4]. Знак неравенства в (2, 3) обусловлен тем, что при обработке результатов импульсного зондирования не учитывается область вблизи точки отражения, где не выполняются условия а) — в).

Радиоастрономические наблюдения за флуктуациями дискретного источника Кассиопеи-А проводились вблизи его верхней кульминации на частотах 25 и 18,6 мГц. Аппаратура была идентичной на каждой из частот и состояла из синфазной многодипольной антенны с шириной диаграммы направленности порядка 30° (по половине мощности), приемника с полосой 3 кГц и записывающего устройства. Во время прохождения Кассиопеи через диаграмму направленности (верхняя кульминация Кассиопеи близка к зениту) на записях фона галактического радиоизлучения появлялись характерные флуктуации интенсивности.

Для исключения фона галактического радиоизлучения при вычислении величины P_s/P было определено отношение интенсивности сигнала Кассиопеи к интенсивности фона с помощью интерферометра, элементы которого имели такое же устройство, как и описанные выше антенны. Указанное отношение определялось в периоды, когда флуктуации интенсивности почти отсутствовали, и оказалось равным 0,11 на частоте 18,6 мГц и 0,14 на частоте 25 мГц.

Для наблюдений дискретного источника Лебедь-А на частоте 29,7 *мгц* был использован радиоинтерферометр с качающейся диаграммой направленности. Элементами интерферометра являлись горизонтальные ромбические антенны с диаграммой направленности порядка 12°. Ширина интерференционного лепестка составляла 3°. Наблюдения проводились в периоды, когда источник находился вблизи нижней кульминации и его высота над горизонтом была порядка $\varphi = 10^\circ$, что соответствует максимуму диаграммы направленности антенны в вертикальной плоскости.

При обработке записей учитывалось, что величина $\bar{z}_m$ в выражении (1) в $\sin^{-1}\varphi$ раз больше, чем в случае нормального падения. Импульсное зондирование ионосферы осуществлялось на частоте 2,2 *мгц* с помощью ионосферной станции, имеющей мощность в импульсе около 20 *квт* и длительность импульса 130 *мксек*. При наблюдениях производилась одновременная запись однократно и двукратно отраженного сигнала на киноплёнку, движущуюся со скоростью 1,82 *мм·сек⁻¹*. Наблюдения проводились как в дневные (слой *E*), так и в ночные (слой *F*) часы при отсутствии диффузных отражений сеансами по 5 *мин*.

Результаты обработки записей сигналов показали, что средние размеры неоднородностей ξ при радиоастрономических наблюдениях составляли 1–2 *км*, а при импульсных наблюдениях — около 1 *км*. Величина δN по наблюдениям дискретного источника Кассиопея 19 и 20 октября изменялась от $0,7 \cdot 10^{-3}$ до $4,5 \cdot 10^{-3}$ со средним значением $\delta N \sim 2,5 \cdot 10^{-3}$ (наблюдения проводились с 19 до 23 *час* местного времени). Величины δN , определенные на частотах 18,6 и 25 *мгц*, совпадают с точностью до ошибок измерений.

Наблюдения дискретного источника Лебедь охватывают утренние и дневные часы в течение августа — ноября месяцев. Величины δN лежат в пределах $0,7 \div 7 \cdot 10^{-3}$, заметно понижаясь в дневные часы. Среднее значение составляет $2,2 \cdot 10^{-3}$. Данные импульсного зондирования в период 12 — 21 октября приводят к верхней границе $\delta N \sim 10^{-2}$ для слоя *E* (днем) и $\delta N \sim 3,8 \cdot 10^{-3}$ для слоя *F* (ночью). Величины δN , определенные по однократно и двукратно отраженным сигналам, практически совпадают. В ряде случаев измерения δN в слое *F* импульсным методом проводились почти одновременно с наблюдениями дискретного источника Кассиопея.

Обращает на себя внимание тот факт, что величины δN , измеренные обоими методами, согласуются между собой. Совпадение будет более полным, если учесть следующее обстоятельство. Имеются некоторые основания полагать [5], что неоднородности, вызывающие мерцания дискретных источников радиоизлучения, расположены ниже 300 *км*. Поэтому толщина рассеивающего слоя, входящая в выражение (1), может быть порядка $100 \div 200$ *км*, и действительное значение δN по радиоастрономическим данным для неоднородностей с размерами $1 \div 2$ *км* может составлять $3 \div 4 \cdot 10^{-3}$. Совпадение этой величины с результатами импульсного зондирования ($\delta N < 3,8 \cdot 10^{-3}$) показывает, что неравенство (2) является достаточно слабым.

Сравнительно малое количество обработанных данных не позволяет сделать убедительных выводов о связи относительных флуктуаций электронной концентрации с различными геофизическими явлениями и об изменениях δN во времени. В то же время приведенные результаты свидетельствуют о значительной ценности одновременных измерений δN как импульсным, так и радиоастрономическим методами.

В заключение авторы пользуются случаем поблагодарить В. Л. Гинзбурга и Г. Г. Гетманцева за внимание к работе и ценные замечания.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Я. Л. Альперт, УФН, **61**, 423 (1957).
2. Е. Г. Прошкин, Б. Л. Кашеев, ЖЭТФ, **33**, 1062 (1057).
3. Е. А. Бенедиктов, Н. А. Митяков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **2**, 344 (1959).
4. Я. Л. Альперт, УФН, **49**, 49 (1953).
5. K. C. Jen, G. W. Swenson, J. Geophys. Res., **64**, 2281 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 июня 1960 г.

О НАРАСТАНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПОТОКЕ, ДВИЖУЩЕМСЯ В ПЛАЗМЕ, ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. О. Рапопорт

Рассматривается задача о нарастании электромагнитных волн в плазме, через которую вдоль силовых линий постоянного магнитного поля движется поток плазмы. Предполагается, что тепловой разброс скоростей в потоке отсутствует. Найдены коэффициенты нарастания электромагнитных волн в случае черенковского излучения.

В ряде работ, опубликованных за последнее время, рассматривался вопрос о нарастании электромагнитных волн в движущихся взаимопроницающих средах. В работах [1,2] феноменологическим методом была решена задача о нарастании электромагнитных волн в случае движения потока плазмы в недиспергирующей среде. В настоящей статье, являющейся, по существу, продолжением этих работ, приводится решение задачи о нарастании электромагнитных волн в плазме, через которую вдоль силовых линий постоянного магнитного поля движется поток плазмы.

Дисперсионное уравнение для двух анизотропных гиротропных взаимопроницающих сред, полученное в [2], имеет вид:

$$\begin{aligned} & (\epsilon_{11} + \epsilon'_{11} - 1) [(\epsilon_{22} + \epsilon_{22}^* \gamma^2 - n^2 \cos^2 \vartheta) (\epsilon_{33} + \epsilon_{33}^* \gamma^2 - n^2) + \\ & + (\epsilon_{23} + \epsilon_{23}^* \gamma^2)^2] - n^2 \sin^2 \vartheta [(\epsilon_{22} + \epsilon_{22}^* - \beta^2 \epsilon_{22}^* \epsilon_{22}^*) \times \\ & \times (\epsilon_{33} + \epsilon_{33}^* \gamma^2 - n^2) + (\epsilon_{23} + \epsilon_{23}^* \gamma^2)^2 - \beta^2 (\epsilon_{22}^* \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{22} \epsilon_{23}^* \gamma^2)] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где ϵ_{ij} , ϵ'_{ij} — тензоры диэлектрической проницаемости неподвижной и движущейся сред, $\epsilon_{ii} = (\epsilon_{ii} - 1) (1 - \beta^2)^{-1}$, $\epsilon_{23} = \epsilon_{23} (1 - \beta^2)^{-1}$, $\gamma = 1 - n \beta \cos \vartheta$, n — показатель преломления, $\beta = V/c$ — отношение скорости движения потока к скорости света в вакууме, ϑ — угол между направлением распространения электромагнитных волн и вектором скорости потока. Компоненты тензоров диэлектрической проницаемости ϵ_{ij} , ϵ'_{ij} для рассматриваемого случая плазмы в магнитном поле можно записать в виде [2,6]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}; \quad \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2}; \quad \epsilon_{23} = -i \frac{\omega_0^2 \omega_H}{\omega (\omega^2 - \omega_H^2)}; \\ \epsilon'_{11} &= 1 - \frac{\omega_{0s}^2 (1 - \beta^2)}{\omega^2 (1 - n \beta \cos \vartheta)^2}; \quad \epsilon'_{22} = \epsilon'_{33} = 1 - \frac{\omega_{0s}^2 (1 - \beta^2)}{\omega^2 (1 - n \beta \cos \vartheta)^2 - \omega_H^2 (1 - \beta^2)}; \\ \epsilon'_{23} &= -i \frac{\omega_{0s}^2 \omega_H (1 - \beta^2)^{3/2}}{\omega (1 - n \beta \cos \vartheta) [\omega^2 (1 - n \beta \cos \vartheta)^2 - \omega_H^2 (1 - \beta^2)]}, \end{aligned}$$

где ω_0 — ленгмюровская частота неподвижной плазмы, ω_{0s} — ленгмюровская частота движущейся плазмы, ω_H — гиромангнитная частота вращения электронов в магнитном поле.

Если при действительных волновых числах $k = \omega n/c$ существуют комплексные решения дисперсионного уравнения (1), то такие решения характеризуют плоские электромагнитные волны, нарастающие (затухающие) во времени. Задача сводится, таким образом, к нахождению таких областей в пространстве параметров $\omega_0, \omega_{0s}, \omega_H, \beta, \vartheta$, где существуют комплексные решения уравнения (1) относительно ω , и определению коэффициентов нарастания (затухания) электромагнитных волн, которые характеризуются мнимой частью ω .

В дальнейшем такие решения находятся при условии достаточной разреженности плазменного потока $\omega_{0s} \ll \omega, \omega_0, \omega_H$. В этом случае уравнение (1) можно записать в виде:

$$F(\omega, \omega_0, \omega_H, \vartheta) = \omega_{0s}^2 F_1, \quad (2)$$

где

$$F_1 = A + \frac{B}{\omega^2 (1 - n \beta \cos \vartheta)^2} + \frac{D}{\omega^2 (1 - n \beta \cos \vartheta)^2 - \omega_H^{*2}},$$

A, B, D — функции от $\omega, \omega_0, \omega_H, \beta, \vartheta$, а $\omega_H = \omega_H (1 - \beta^2)^{1/2}$. Уравнение

$$F = (\varepsilon_{11} \cos^2 \vartheta + \varepsilon_{22} \sin^2 \vartheta) n^4 - [\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} (1 + \cos^2 \vartheta) + (\varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{23}^2) \sin^2 \vartheta] n^2 + \varepsilon_{11} (\varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{23}^2) = 0 \quad (3)$$

совпадает с хорошо известным дисперсионным уравнением для плазмы, находящейся в магнитном поле [6].

Если в уравнении (2) левую и правую части поделить на F , получим

$$\Phi = \omega_{0s}^2 \left\{ \frac{A}{F} + \frac{B}{F(\omega - kV \cos \vartheta)^2} + \frac{D}{F[(\omega - kV \cos \vartheta)^2 - \omega_H^{*2}]} \right\} = 1. \quad (4)$$

Поскольку ω_{0s} — малая величина, то решения уравнения (4) могут иметь место в том случае, когда выражение, находящееся в квадратных скобках, велико. Решение уравнения (4) можно, таким образом,

искать в виде: $\omega = \tilde{\omega} + \xi$, где $\tilde{\omega}$ — значение частоты, при которой $\Phi \rightarrow \infty$ (рассматриваются те области, где $\tilde{\omega}$ — величина действительная), а ξ — малая величина ($\tilde{\omega} \gg \xi$). Коэффициенты нарастания (затухания) электромагнитных волн определяются мнимой частью ξ .

Функция Φ имеет полюс первого порядка при условии $F(\tilde{\omega}) = 0$ (легко показать, что выражение $F(\tilde{\omega} + \xi)$ при $\xi \rightarrow 0$ уменьшается пропорционально ξ) или $\tilde{\omega} - kV \cos \vartheta \pm \omega_H^* = 0$; полюс второго порядка в случае, когда $\tilde{\omega} = kV \cos \vartheta$ или $F(\tilde{\omega}) = 0$ и $\tilde{\omega} - kV \cos \vartheta \pm \omega_H^* = 0$, и полюс третьего порядка при условиях

$$\tilde{\omega} = kV \cos \vartheta; \quad (5)$$

$$F(\tilde{\omega}) = 0. \quad (5a)$$

Если Φ имеет полюс первого порядка, то выражение (4) представляет собой уравнение первой степени относительно ξ с действительными коэффициентами, т. е. ξ при этом будет величиной действительной. Поправка к частоте может быть комплексной, если Φ имеет

полос второго или третьего порядка, причем для полюса второго порядка $\xi \sim \omega_0$, а для полюса третьего порядка $\xi \sim \omega_{0s}^{2/3}$.

Рассмотрим случай, когда Φ имеет полюс третьего порядка. При этом коэффициенты нарастания будут иметь максимальные значения. Как видно из уравнения (5), нарастание электромагнитных волн в рассматриваемом случае происходит под теми же углами, что и черенковское излучение одиночной заряженной частицы, движущейся в неподвижной плазме, а из уравнения (5) следует, что в нулевом приближении наличие потока не приводит к изменению условий распространения электромагнитных волн в неподвижной плазме.

Из уравнений (4), (5), (5а), разлагая $F(\bar{\omega} + \xi)$ в ряд по ξ и отбрасывая члены порядка ω_{0s}^2/ξ , получим:

$$\Phi = \frac{\omega_{0s}^2 B}{(dF/d\omega) \xi^3} = 1, \quad (6)$$

где

$$B = -(1 - \beta^2) \varepsilon_{11}^{-1} [(\varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{23}^2) - \varepsilon_{22} n^2] n^2 \sin^2 \vartheta.$$

Рассмотрим условия, при которых может происходить нарастание электромагнитных волн*. Исключив из уравнений (5), (5а) n , получим соотношение между частотой электромагнитных волн ω и направлением их распространения ϑ :

$$\sec^2 \vartheta_{1,2} = \beta^2 \left[1 - \frac{\alpha}{X} \left(1 - \frac{1 + \beta^2 \pm \sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\beta^2(X - \alpha)}}{2\beta^2(1 - X + \alpha)} \right) \right], \quad (7)$$

где $\alpha = \omega_0^2/\omega_H^2$, $X = \omega^2/\omega_H^2$, причем знак „+“ соответствует индексу 1, знак „-“ — индексу 2. Из (7) видно, что в каждом направлении ϑ нарастание электромагнитных волн происходит на дискретных частотах**. Для наглядности дисперсионные кривые при $\alpha = 2$, $\beta^2 = 0,1$ приведены на рис. 1. Поскольку ϑ — угол между направлением распространения электромагнитных волн и скоростью потока, решения уравнения (7) имеют определенный физический смысл лишь в том случае, когда ϑ — величина действительная, т. е. $\sec^2 \vartheta_{1,2} > 1$. Кривая на рис. 1, соответствующая зависимости $\sec^2 \vartheta_1(X)$, имеет две ветви — низкочастотную (от 0 до $X = X_2$) и высокочастотную (от $X = X_3$ до $X = 1 + \alpha$). На кривой, соответствующей решению $\sec^2 \vartheta_2(X)$, условие $\sec^2 \vartheta > 1$ выполняется в области $X_1 > X > 0$.

Границы областей, в которых может иметь место нарастание электромагнитных волн, определяются значениями X , при которых $\sec^2 \vartheta \rightarrow \infty$ ($X = 0$ и $X = 1 + \alpha$), а также значениями X , при которых $\sec^2 \vartheta = 1$ (на рис. 1 эти точки обозначены как X_1 , X_2 , X_3 ; $X_3 = \alpha$, выражения для X_1 и X_2 будут приведены ниже).

Уравнение (7) отличается от рассмотренного в [6] дисперсионного уравнения для плазмы в магнитном поле: в [6] приводится семейство кривых $n^2(v)$ при фиксированных u и ϑ , а кривые $\vartheta(X)$, определяемые уравнением (7), получены при фиксированных значениях v/u и $n \cos \vartheta$. Это связано с тем, что в [6] рассматривается вопрос о распространении электромагнитных волн в плазме, концентрация которой меняется в одном из направлений, т. е. представляет интерес иссле-

* Границы областей, в которых возможно нарастание электромагнитных волн получены в [5], где показано, что на плоскости $\sec^2 \vartheta$, X кривая, определяющая границу, описывается уравнением $1 - v - u + uv \cos^2 \vartheta = 0$, где $u = \omega_H^2/\omega^2$, $v = \omega_0^2/\omega^2$.

** Это следует и из того, что соотношение $n(\omega) \beta \cos \vartheta = 1$ выполняется при фиксированном ϑ лишь для дискретного ряда частот.

дование зависимости $n^2(v)$. В рассматриваемом случае нас интересует зависимость угла, под которым происходит нарастание электромагнитных волн от частоты их колебаний, если скорость потока и свойства среды не зависят от координат.

Переход от одного семейства кривых к другому особенно легко получить при малых или равных нулю углах ϑ . При $\vartheta = 0$ дисперсионное уравнение (3) имеет вид:

$$n^2 = 1 - \frac{v}{1 \pm \sqrt{u}} = 1 - \frac{\alpha}{X \pm \sqrt{X}}. \quad (8)$$

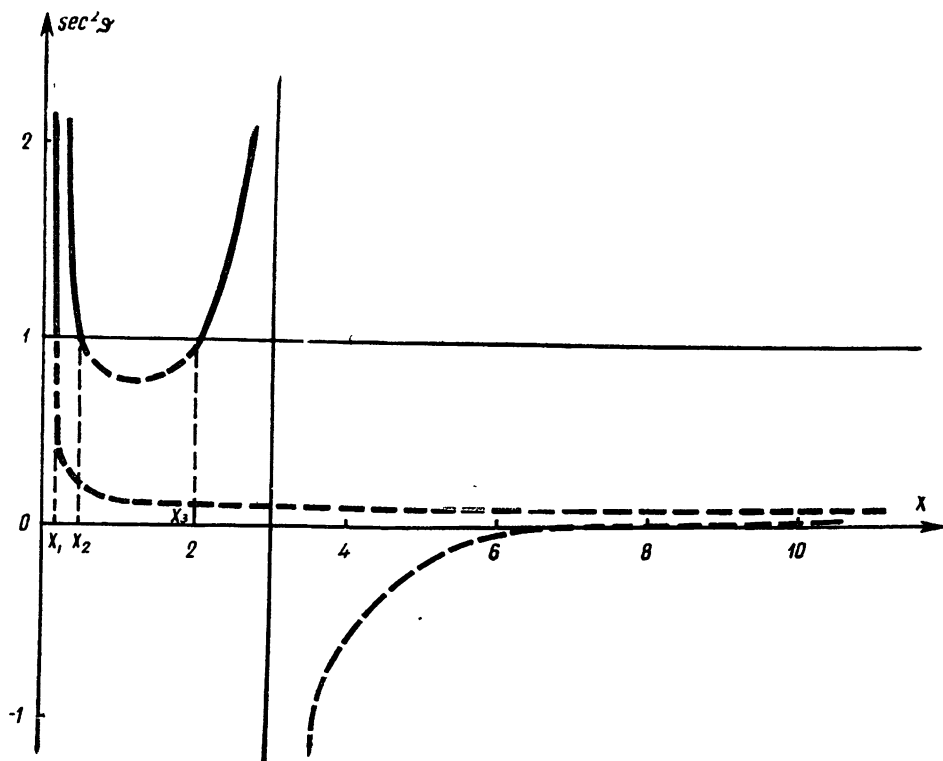


Рис. 1. Дисперсионная кривая в плоскости u, v ($n^2 = 10$).

На рис. 2, 3 приводятся дисперсионные кривые в плоскостях n^2, v и u, v в квазипродольном случае. Точки пересечения кривой в плоскости u, v прямыми $u = \text{const}$ соответствуют точкам пересечения кривой в плоскости n^2, v прямыми $n^2 = \text{const}$. Из рис. 2, 3 видно, что сплошная линия на рис. 2 характеризует распространение обыкновенной волны, пунктирная — необыкновенной. Точки пересечения дисперсионной кривой в плоскости u, v прямыми $v/u = \text{const}$ соответствуют сечению кривых в плоскости $\sec^2 \vartheta, X$ прямыми $\sec^2 \vartheta = \text{const}$. Из рис. 1 и 3 следует, что низкочастотные ветви рис. 1 определяют распространение обыкновенной волны, высокочастотная — необыкновенной.

Решив уравнение (8) относительно X , получим:

$$X_{1,3} = \frac{1}{2} \left(1 - 2\alpha \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \pm \sqrt{1 - 4\alpha \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}} \right). \quad (9)$$

Из уравнения (9) следует, что при $\beta \rightarrow 0$, если $\alpha < 1$ на частотах, соответствующих низкочастотной ветви дисперсионной кривой, определяемой уравнением (7), нарастание электромагнитных волн может происходить при $\alpha > X > 0$, а на частотах, соответствующих высокочастотной ветви—при $1 < X < 1 + \alpha$. Если же $\alpha > 1$, то низкочастотная ветвь дисперсионной кривой может находиться в интервале $1 > X > 0$,

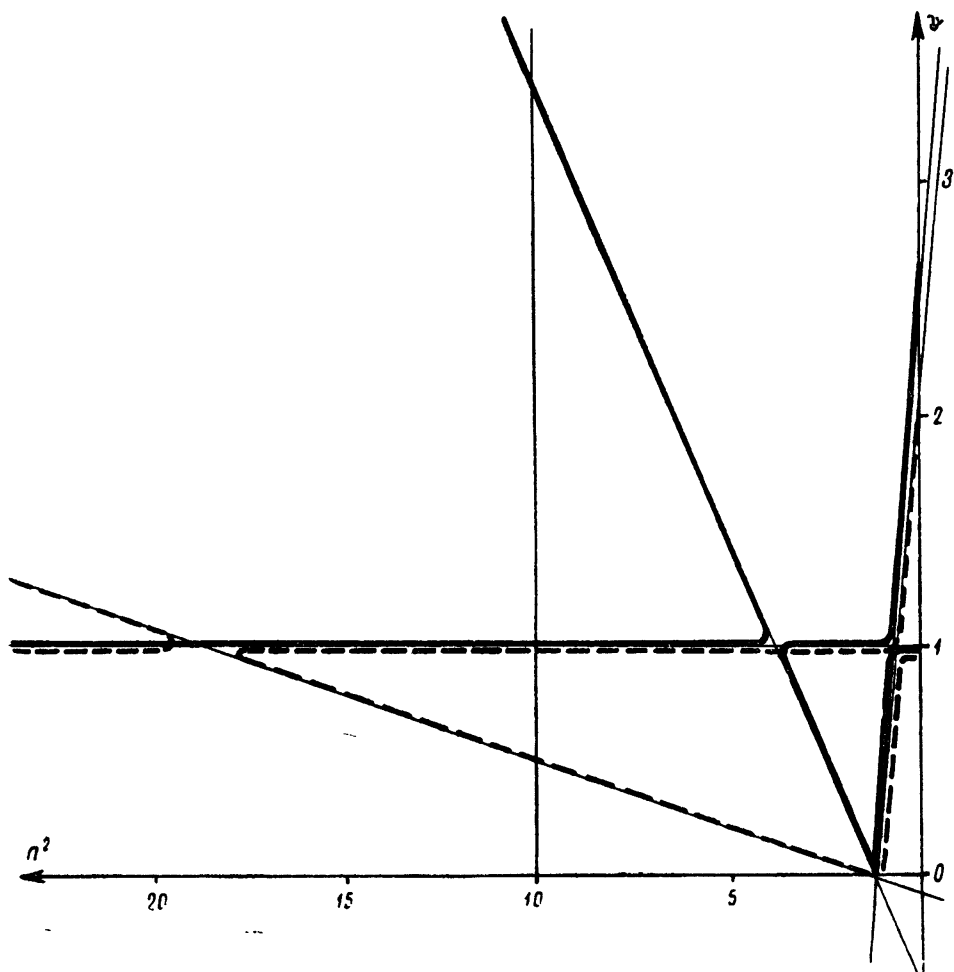


Рис. 2. Дисперсионные кривые в плоскости n^2, v . Сплошная линия соответствует значению $u = 1, 1$; пунктирная — $u = 2$.

высокочастотная—в интервале $\alpha < X < 1 + \alpha$. При значениях β , отличных от нуля, частотный диапазон, в котором может происходить нарастание электромагнитных волн, будет лишь сужаться, не выходя за пределы частотного диапазона, определяемого при $\beta \rightarrow 0$.

Используя (9), легко показать, что при $\alpha < (1 - \beta^2)^2$ значение $X = \alpha$ является границей низкочастотной ветви дисперсионной кривой, а при $\alpha > (1 - \beta^2)^2$ — границей высокочастотной ветви. На высокочастотной ветви нарастание электромагнитных волн может происходить в конусе $\pi/2 > \vartheta > 0$. Из (7) следует, что при $\alpha > (1 - \beta^2)^3/4\beta^2$ для значений $X < \alpha - (1 - \beta^2)^2/4\beta^2$ действительных решений не существует, т. е. нарастание волн на частотах, соответствующих низкочастотной ветви,

в этом случае может происходить лишь в конусе от 0 до $\vartheta_{\text{макс}} < \pi/2$. С помощью выражения (9) легко также показать, что при $\alpha > (1 - \beta^2)/4\beta^2$ низкочастотная ветвь отсутствует.

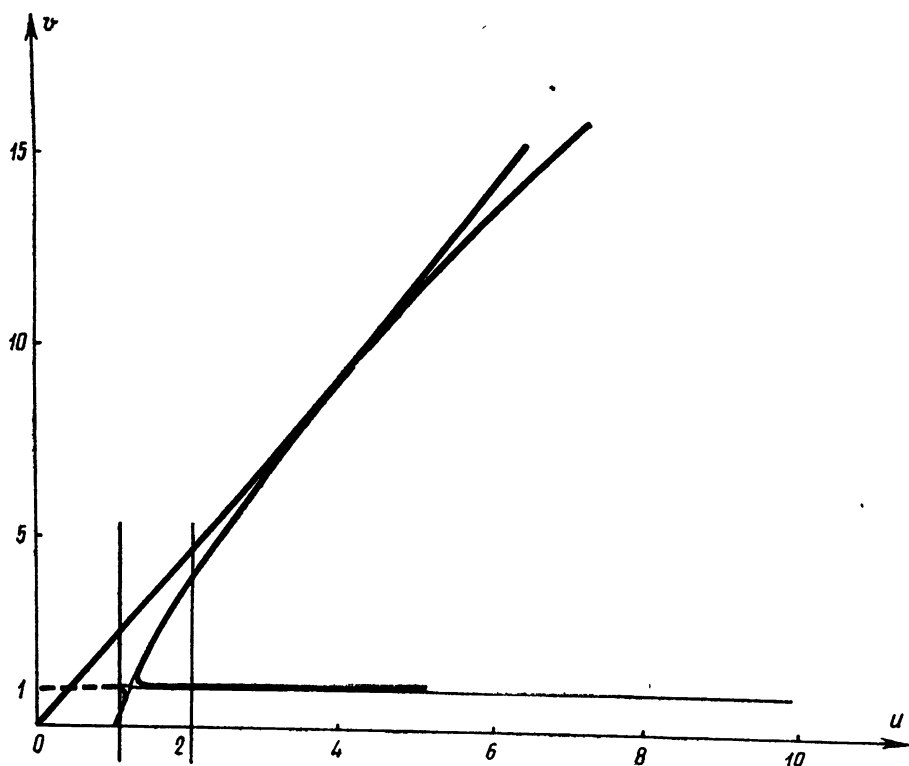


Рис. 3.

Определение коэффициентов нарастания может производиться по формуле (6). Обычно при решении дисперсионного уравнения (2) методом последовательных приближений (т. е. при определении поправки к частоте ξ) ω и n разлагаются в ряд по малому параметру при фиксированных k и ϑ . Это означает, что находятся такие решения, для которых k в случае отсутствия потока имеет то же значение, что и при наличии потока. Условие $(\omega n \beta)_0 = (\omega n \beta)_1$ (где индекс „0“ характеризует решение в нулевом приближении, индекс „1“ — решение первого приближения) определяет связь между поправкой к частоте $\Delta\omega$ и поправкой к показателю преломления $\Delta n = -\frac{n}{\omega} \Delta\omega$. Используя это соотношение, для $dF/d\omega$ получим соотношение

$$\frac{dF}{d\omega} = \left(2 \frac{\partial F}{\partial X} X - \frac{\partial F}{\partial n} n \right) \frac{1}{\omega}.$$

При нахождении поправок к частоте правую часть уравнения (6) можно было бы выразить через один из параметров ω или ϑ , поскольку связь между ними определяется соотношением (7). Однако получающиеся при этом выражения весьма громоздки и интерпретация их затруднительна. Выражение для ξ существенно упрощается при опре-

делении ξ через $\tilde{\omega}$ и ϑ . В этом случае из (6), используя также (5), получим:

$$\xi = - \left\{ \frac{\omega_{0s}^2 \omega (1 - \beta^2)}{2} \frac{X}{X - \alpha} \left[1 - \frac{2\alpha}{X - 1} + \frac{\alpha^2}{X(X - 1)} - \frac{X - \alpha - 1}{X - 1} n^2 \right] \times \right. \\ \times n^2 \sin^2 \vartheta \left[\left(-1 + \frac{2\alpha}{X} \cos^2 \vartheta + \alpha \frac{2X - 1}{(X - 1)^2} \sin^2 \vartheta \right) n^4 - \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{X(X - 1)^2} (4X^2 - (1 + \cos^2 \vartheta + 2\alpha)(2X - 1)) n^2 + \right. \\ \left. \left(1 - \frac{2\alpha}{(X - 1)^2} - \frac{3\alpha^2}{(X - 1)^2} + \frac{\alpha^3 (2X - 1)}{X^2 (X - 1)^2} \right) \right]^{-1} \Big\}^{1/3}. \quad (10)$$

Формула (10) значительно упрощается в различных предельных случаях. Ниже приводятся выражения для коэффициентов нарастания для слабой анизотропии ($\alpha \gg 1$), для сильной анизотропии ($\alpha \ll 1$) и в нерелятивистском приближении ($\beta^2 \ll 1$).

В том случае, когда $\alpha \gg 1$, $X < 1$, дисперсионное уравнение (3) имеет вид:

$$(\cos^2 \vartheta - X) n^4 - 2\alpha n^2 - \alpha^2/X = 0. \quad (11)$$

Используя уравнения (10) и (11) для коэффициентов нарастания, получим:

$$\xi = - \left[\frac{\omega_{0s}^2 \omega (1 - \beta^2) X^{3/2}}{2\alpha} \cos \vartheta \operatorname{tg}^2 \vartheta \right]^{1/3}. \quad (12)$$

Определяя ξ из уравнения (10) при условии $\alpha \gg 1$ для области $X - \alpha < 1$, найдем, что

$$\xi = - \left[\frac{\omega_{0s}^2 \omega (1 - \beta^2)}{2} \frac{1 + \alpha - X - \beta^2 \cos^2 \vartheta}{X - \alpha} \sin^2 \vartheta \right]^{1/3}. \quad (13)$$

В случае сильной анизотропии ($\alpha \ll 1$) для области $X < \alpha$ дисперсионное уравнение (3) имеет решения $n_1^2 = 1$ и

$$n_2^2 = \frac{X - \alpha}{X - \alpha \cos^2 \vartheta}. \quad (14)$$

Используя (10) и (14), для коэффициентов нарастания получим:

$$\xi = - \left[\frac{\omega_{0s}^2 \omega (1 - \beta^2)}{2} \frac{\sin^2 \vartheta}{1 - 2\alpha X^{-1} \cos^2 \vartheta + \alpha^2 X^{-2} \cos^2 \vartheta} \right]^{1/3}. \quad (15)$$

В той области, где $X \sim 1$, для показателя преломления получим (введя переменную $Y = X - 1$; $Y \ll 1$): $n_1^2 = 1$,

$$n_2^2 = \frac{Y - 2\alpha}{Y - \alpha \sin^2 \vartheta}. \quad (16)$$

Из (10) и (16) найдем коэффициент нарастания

$$\xi = - \left[\frac{\omega_{0s}^2 \omega (1 - \beta^2)}{2} \frac{(Y - 2\alpha)^2 \cos^2 \vartheta}{\alpha (1 + \cos^2 \vartheta)} \sin^2 \vartheta \right]^{1/3}. \quad (17)$$

В нерелятивистском приближении ($\beta^2 \ll 1$) нарастание электромагнитных волн может возникнуть при $n^2 > 1/\beta^2 \gg 1$. Дисперсионное урав-

нение (3) может иметь корни $n^2 \gg 1$, если свободный член $\varepsilon_{11} (\varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{23}^2) \gg 1$ или коэффициент при n^4 и свободный член малы ($\varepsilon_{11} \cos^2 \vartheta + \varepsilon_{22} \sin^2 \vartheta \ll 1$). Первый случай был рассмотрен выше (см. выражение (12)); во втором случае коэффициент нарастания

$$\xi = \left\{ \frac{\omega_{0s}^2 \omega}{2} \frac{X^2 (X - \alpha - 1) (X - 1)}{\alpha (X - \alpha) [(X - 1)^2 + X^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta]} \operatorname{tg}^2 \vartheta \right\}^{1/3}. \quad (18)$$

Определяемые выражениями (12), (18) коэффициенты нарастания совпадают с полученными в [4].

Приведенные выше решения были получены без учета теплового движения частиц потока. Критерием применимости этих решений является выполнение неравенства [2,3].

$$\xi \sim (\omega_{0s}^2 \omega)^{1/3} \gg k V_T \quad (19)$$

(V_T —тепловая скорость электронов потока), которое имеет простой физический смысл. Параметр $\tilde{\omega} = k V \cos \vartheta$ при наличии теплового движения имеет разброс $\Delta \tilde{\omega} = k V_T$. Тепловое движение можно не учитывать, если $\xi \gg \Delta \tilde{\omega}$.

Решение уравнения (2) должно производиться при действительных $k \cos \vartheta$, так что приведенное выше решение при условии $(k \cos \vartheta)_0 = (k \cos \vartheta)_1$ является лишь частным случаем. Если при решении уравнения (2) считать, что $(k \cos \vartheta)_0 = (k \cos \vartheta)_1 + \Delta (k \cos \vartheta)_1$, причем $\Delta (k \cos \vartheta) = -n \omega \beta \sin \vartheta \Delta \vartheta$ (находятся решения, для которых $(\vartheta)_1$ отличается от $(\vartheta)_0$), то $dn/d\omega = -n/\omega + n \beta \sin \vartheta d\vartheta/d\omega$. Уравнение (6) можно записать тогда в виде

$$1 = \omega_{0s}^2 B \xi^{-2} \left[\xi \left(2 \frac{\partial F}{\partial X} \frac{X}{\omega} - \frac{\partial F}{\partial n} \frac{n}{\omega} \right) + \frac{\partial F}{\partial n} n \beta \sin \vartheta \Delta \vartheta \right]^{-1} \quad (20)$$

или

$$a \xi^3 + b \xi^2 = d.$$

При условии $b \ll a \xi$ это уравнение переходит в (6); при условии $b \gg a \xi$ поправки к частоте $\xi \sim \omega_{0s}$. Можно считать, что поправки к частоте ξ будут порядка $\omega_{0s}^{2/3}$, если $b \ll a \xi$. Отсюда следует, что излучение электромагнитных волн на данной частоте с коэффициентами нарастания порядка $\omega_{0s}^{2/3}$ может происходить в коническом поясе, угловые размеры которого

$$\Delta \vartheta \sim \xi \left(2 \frac{\partial F}{\partial X} \frac{X}{\omega} - \frac{\partial F}{\partial n} \frac{n}{\omega} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial n} n \beta \sin \vartheta \right)^{-1}. \quad (21)$$

Когерентное нарастание электромагнитных волн в рассматриваемом случае происходит за счет автофазировки колебаний электронов в потоке и колебаний волны. Для того, чтобы выполнялись условия автофазировки, необходимо, чтобы на всем пути прохождения потока направление распространения волн на данной частоте совпадало с направлением излучения. Если поток движется в среде, свойства которой меняются в направлении движения (вдоль оси x), то генерируемая в точке x_1 под углом ϑ_1 волна частоты ω придет в точку x_2 под углом ϑ'_2 ; условия же излучения в этой точке для той же частоты ω выполняются для угла $\vartheta'_2 \neq \vartheta_2$, т. е. условия когерентности нарушаются.

Эти условия выполняются до тех пор, пока излученная в точке волна будет иметь направление, находящееся в пределах конического пояса, определяемого соотношением (21).

Полученные выше результаты могут быть использованы как при решении задач о генерации СВЧ колебаний с помощью быстрых пучков в электровакуумных приборах, так и в астрофизических и геофизических приложениях, в частности, при исследовании вопроса об излучении низкочастотных электромагнитных волн в экзосфере Земли корпускулярными потоками.

Автор выражает признательность Г. Г. Гетманцеву и М. С. Ковнеру за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Гетманцев, ЖЭТФ, 37, 843 (1959).
2. Г. Г. Гетманцев, В. О. Ралопорт, ЖЭТФ, 38, 1205 (1960).
3. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, 14 (1959).
4. М. С. Ковнер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, 746 (1960).
5. В. Я. Эйрман, Диссертация, Горьк. ун-т, 1960.
6. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, ГИТТЛ, М., 1953.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
28 апреля 1960 г.

КИНЕТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОТОКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С НЕПОДВИЖНОЙ ПЛАЗМОЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. II

М. С. Ковнер

В настоящей статье, являющейся продолжением работы [1], проводится дальнейшее рассмотрение вопросов неустойчивости при распространении волн в магнитоактивной плазме, пронизываемой неограниченным потоком заряженных частиц. Найдены критерии неустойчивости и коэффициенты нарастания (затухания) волн при слабых концентрациях потока.

В предыдущей работе автора [1] на основе кинетического рассмотрения было получено общее дисперсионное уравнение, описывающее распространение высокочастотных волн в магнитоактивной плазме при наличии в ней потока заряженных частиц.

Общим методом исследования вопроса о неустойчивости волн является отыскание комплексных решений дисперсионного уравнения (см. [2-6] и др.). При этом наиболее характерным является рассмотрение таких асимптотических случаев, в которых имеют место неравенства

$$|\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_0 + p \omega_H| \ll k v_{Ts} \cos \alpha \quad (p = 0, \pm 1)$$

или же

$$|\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_0 + p \omega_H| \gg k v_{Ts} \cos \alpha \quad (p = 0, \pm 1),$$

где ω и $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор распространяющейся волны, $\omega_H = eH_0/mc$ — гирочастота электронов, e, m — соответственно заряд и масса электрона, H_0 — постоянное внешнее магнитное поле, $v_{Ts} = \sqrt{\kappa T_s/m}$, κ — постоянная Больцмана, T_s — абсолютная температура электронов в потоке, $\mathbf{v}_0$ — скорость потока, α — угол между направлением магнитного поля H_0 и волновым вектором $\mathbf{k}$.

В статье [1] было показано, что при выполнении первого условия неустойчивость целиком определяется специфическим влиянием теплового движения частиц в потоке и неподвижной плазме*. При этом необходимым условием нарастания является выполнение неравенства $(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_0) < 0$, когда излучение происходит вне светового конуса — в области аномального эффекта Допплера (см. [6]). Полученные при этом коэффициенты нарастания μ пропорциональны N_s/N , где N_s и N — концентрации частиц в потоке и неподвижной плазме.

При выполнении второго условия, как показано ниже, влиянием теплового движения на нарастание (затухание) волн можно пренебречь. В этом случае наличие комплексных корней обусловлено присутствием резонансных членов в дисперсионном уравнении*. В указанном случае нарастание возмущений связано, как правило, или с излучением частицами волн с фазовой скоростью, близкой к скорости потока (излучение Вавилова—Черенкова), или же соответствует

* Это влияние подобно механизму затухания, рассмотренному в работе Ландау [7].

** См. ниже уравнение (1.9).

магнитотормозному излучению в области аномального эффекта Доплера [3, 6]. Проведенное решение показывает, что при выполнении неравенства $|\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_0| \ll \omega$ коэффициент нарастания (затухания) $\mu \propto (N_s/N)^{1/2}$; если же $|\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_0 + \omega_H| \ll \omega_H$, то $\mu \propto (N_s/N)^{1/2}$ (см. также [4, 8]).

1. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ, СВЯЗАННАЯ С ИЗЛУЧЕНИЕМ ВАВИЛОВА—ЧЕРЕНКОВА

1. Исходя из системы линеаризованных кинетических уравнений и уравнений электродинамики с самосогласованным полем, в [1] (ниже цитируется как I) при выполнении условий

$$(\beta^2 n^2/u) \sin^2 \alpha \ll 1; \quad (1.1)$$

$$N_s \ll N \quad (1.2)$$

вне гирорезонансных областей было получено дисперсионное уравнение (1.15) I. (В (1.1), (1.2) $n = kc/\omega$, $\beta^2 = \kappa T/mc^2 \equiv v_T^2/c^2$, $u = \omega_H^2/\omega^2$.) При выводе уравнения (1.15) I предполагалось также, что плазма и поток не ограничены и однородны; скорость потока $\mathbf{v}_0$ направлена вдоль магнитного поля $\mathbf{H}_0$, электромагнитное возмущение имеет вид плоской волны, волновой вектор $\mathbf{k}$ которой образует угол α с направлением магнитного поля $\mathbf{H}_0$. Плазма и поток предполагались нерелятивистскими.

Указанное выше уравнение (1.15) I мы вновь выпишем здесь в несколько иных обозначениях:

$$\begin{aligned} & \beta^2 v R (n^2 - n_1^2) (n^2 - n_2^2) (n^2 - n_3^2) + v_s (BA_{zz} - AA_{xx} - CA_{xy}) + \\ & + i \{ (\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_0) [(\gamma_{1s} B - 4\gamma_s \omega D \sin^2 \alpha) e^{\delta_0^+} + \gamma_s < A + C + \\ & + 2 \sin^2 \alpha (\omega + \omega_H) (D + \mathcal{E}) > e^{\delta_+^s} + \gamma_s < A - C + 2 \sin^2 \alpha (\omega - \\ & - \omega_H) (D - \mathcal{E}) > e^{\delta_-^s}] + \omega [(\gamma_1 B - 4\gamma \omega D \sin^2 \alpha) e^{\delta_0} + \\ & + \gamma < A + C + 2 \sin^2 \alpha (\omega + \omega_H) (D + \mathcal{E}) > e^{\delta_+} + \gamma < A - C + \\ & + 2 \sin^2 \alpha (\omega - \omega_H) (D - \mathcal{E}) > e^{\delta_-}] \} = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В уравнении (1.3) через n_1^2 , n_2^2 , n_3^2 обозначены корни уравнения [9]

$$\begin{aligned} & \beta^2 v R n^6 - n^4 (1 - u - v + uv \cos^2 \alpha) + n^2 [2v^2 + v(u + u \cos^2 \alpha - 4) + \\ & + 2(1 - u)] + (1 - v) [u - (1 - v)^2] = 0; \end{aligned} \quad (1.4)$$

для величин A , B , C , D , $\mathcal{E}$, R имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} A &= -n^4 (1 - u) \sin^2 \sigma + n^2 [(1 - u) (1 - v) (1 + \cos^2 \alpha) + \\ & + 2(1 - u - v) \sin^2 \alpha] - 2(1 - v) (1 - u - v); \\ B &= -n^4 (1 - u) \cos^2 \alpha + n^2 (1 - u - v) (1 + \cos^2 \alpha) + u - (1 - v)^2; \\ C &= 2v \sqrt{u} (1 - v - n^2 \sin^2 \sigma); \quad D = v n^2 / \omega; \\ \mathcal{E} &= \frac{n^2}{\omega_H} [(1 - u) n^2 - (1 - u - v)]; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$R = (1 - u) \cos^2 \alpha < 3 \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - u} > + \frac{(1 + 3u) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{(1 - u)^2} + \\ + \frac{3 \sin^4 \alpha}{1 - 4u} + 4 \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - u}.$$

В приведенных формулах использованы следующие обозначения:

$$v = \frac{4\pi N e^2}{m \omega^2} \equiv \frac{\omega_0^2}{\omega^2}; \quad v_s = \frac{4\pi N e^2}{m \omega^2} \equiv \frac{\omega_{0s}^2}{\omega^2}; \\ \delta_{\pm}^s = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega - k v_0 \pm \omega_H}{k v_{Ts} \cos \alpha} \right)^2; \quad \delta_{\pm} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega \pm \omega_H}{k v_T \cos \alpha} \right)^2; \\ \delta_0^s = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega - k v_0}{k v_{Ts} \cos \alpha} \right)^2; \quad \delta_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{k v_T \cos \alpha} \right)^2; \\ \gamma_s = \left(\frac{\pi m}{x T_s} \right)^{1/2} \frac{1}{k \cos \alpha}; \quad \gamma_{1s} = \left(\frac{\pi m^3}{2 x^3 T_s^3} \right)^{1/2} \frac{\omega^2}{k^3 \cos^3 \alpha}.$$
(1.6)

Наконец, для A_{lk} так же, как и в [1], имеем:

$$A_{xx} = \begin{cases} \left(\frac{\omega - k v_0}{k v_{Ts} \cos \alpha} \right)^2 & \text{при } |\delta_{\pm}^s| \ll 1 \\ \frac{(\omega - k v_0)^2}{(\omega - k v_0)^2 - \omega_H^2} & \text{при } |\delta_{\pm}^s| \gg 1 \end{cases}; \\ A_{xy} = \begin{cases} \frac{\omega_H (\omega - k v_0)}{(k v_{Ts} \cos \alpha)^2} & \text{при } |\delta_{\pm}^s| \ll 1 \\ -\frac{\omega_H (\omega - k v_0)}{(\omega - k v_0)^2 - \omega_H^2} & \text{при } |\delta_{\pm}^s| \gg 1 \end{cases}; \\ A_{zz} = \begin{cases} \left(\frac{\omega}{k v_{Ts} \cos \alpha} \right)^2 & \text{при } |\delta_0^s| \ll 1 \\ -\left(\frac{\omega}{\omega - k v_0} \right)^2 & \text{при } |\delta_0^s| \gg 1 \end{cases}.$$
(1.7)

Исследуем дисперсионное уравнение (1.3) в том случае, когда $|\delta_{0,\pm}^s| \gg 1$ и экспоненциальными членами в (1.3) можно пренебречь. Из соотношений (1.3) и (1.7) в указанном случае получаем:

$$v \beta^2 R (n^2 - n_1^2) (n^2 - n_2^2) (n^2 - n_3^2) - B \frac{\omega_{0s}^2}{(\omega - k v_0)^2} - \\ - v_s \frac{(\omega - k v_0)^2}{(\omega - k v_0)^2 - \omega_H^2} \left[A - \frac{\omega_H}{\omega - k v_0} C \right] = 0.$$
(1.8)

При рассмотрении вопросов устойчивости, поскольку мы предположили, что концентрация потока мала ($\omega_{0s} \ll \omega_0$), воспользуемся ме-

тодом возмущений. Пусть в нулевом приближении частота плоской волны удовлетворяет условию Вавилова—Черенкова для средней скорости потока:

$$\omega^{(0)} - k v_0 = 0, \quad (1.9)$$

где $\omega^{(0)}$ и k связаны дисперсионным уравнением (1.4). В следующем приближении полагаем:

$$\omega^{(1)} = k v_0 + \mu. \quad (1.10)$$

Тогда, считая выполненным неравенство

$$|\mu| \ll \omega^{(0)} \quad (1.11)$$

и сохраняя в уравнении (1.8) только основные члены, не содержащие μ , и слагаемые порядка ω_{0s}^2/μ^2 , получаем:

$$\mu_k = -\sqrt[3]{1 - \omega_{0s}^2} \left\{ \frac{\omega^2 B}{v \beta^2 R (n_k^2 - n_j^2) (n_k^2 - n_i^2) [(\partial/\partial \omega) (n_k^2 \omega^2)]} \right\}_{\omega = k v_0}^{1/3}, \quad (1.12)$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$ и $i \neq j \neq k$. Индексы 1, 2, 3 относятся соответственно к необыкновенной, обыкновенной и плазменной волнам. Отметим, что везде ниже для упрощения записи формул мы не будем ставить индексы у частоты в различных приближениях, так как каждый раз из записи формул ясно, о каком приближении идет речь.

Из выражения (1.12) видно, что поскольку $\sqrt[3]{1 - \omega_{0s}^2} = 1, -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, при выполнении условия (1.9) всегда существуют нарастающие решения уравнения (1.8), причем коэффициент нарастания (затухания) $\mu \propto N^{1/3}$.

Исследуем полученные формулы (1.12) более подробно для различных типов волн.

2. В случае плазменной волны, как правило, $n_3^2 \gg 1$. Кроме того, вне области перехода между плазменной и обыкновенной (необыкновенной) волнами выполняется неравенство

$$n_3^2 \gg n_1^2, n_2^2. \quad (1.13)$$

Учитывая сказанное и используя соотношения (1.4), (1.5) и (1.12), для плазменной волны получаем [9]:

$$n_3^2 = \frac{1 - u - v + uv \cos^2 \alpha}{\beta^2 v R}; \quad (1.14)$$

для коэффициента B из (1.5) следует соотношение $B \approx -n^4(1-u) \cos^2 \alpha$. Тогда для коэффициента нарастания μ имеем:

$$\mu_3 = \sqrt[3]{1 - \omega_{0s}^2} \left\{ \frac{\omega (1 - u) \cos^2 \alpha}{2\Phi(k v_0)} \right\}^{1/3}, \quad (1.15)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(k v_0) &= \frac{vR}{2\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1 - u - v + uv \cos^2 \alpha}{v R} \omega^2 \right)_{\omega = k v_0} \approx \\ &\approx (2 - u - v)_{\omega = k v_0}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

При написании последнего равенства учтено, что плазменная волна не затухает в области, где $|1 - u - v + uv \cos^2 \alpha| \ll 1$ [9].

Приведенные формулы (1.15), (1.16) решают вопрос об устойчивости плазменных волн. При этом, если необходимо отыскать при заданных параметрах среды ω_0 , ω_H и скорости потока v_0 частоты ω (в зависимости от угла α), для которых имеет место неустойчивость, надо поступать следующим образом. Условие Вавилова—Черенкова (1.9) можно записать в виде:

$$n^2 (v_0^2/c^2) \cos^2 \alpha = 1. \quad (1.17)$$

Подставляя (1.14) в (1.17), получаем:

$$1 - \frac{\omega_H^2}{\omega^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{\omega_H^2 \omega_0^2}{\omega^4} \cos^2 \alpha = \frac{v_T^2}{v_0^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{R}{\cos^2 \alpha}. \quad (1.18)$$

Из уравнения (1.18) численными методами можно определить $\omega = \omega(\alpha)$, после чего по формуле (1.15) определяется коэффициент нарастания μ_3 .

Так, например, в отсутствие магнитного поля ($\omega_H = 0$) из (1.18) и (1.15) получаем*:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + 3 \frac{v_T^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}}; \quad (1.19)$$

$$\mu_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \omega_{0s}^{2/3} \omega_0^{1/3} \frac{(1 + 3v_T^2/v_0^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}}{(1 + 6v_T^2/v_0^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}}}.$$

Последний результат при $v_T^2/v_0^2 \ll 1$ переходит в

$$\mu_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \omega_{0s}^{2/3} \omega_0^{1/3} \left(1 - \frac{3v_T^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}\right)^{1/6}},$$

что с точностью до множителя 3, связанного с кинетическим учетом теплового движения (в отличие от квазигидродинамического рассмотрения), совпадает с полученным в [3] (см. также [2]). Если же $\omega_H \neq 0$ и $v_T^2/v_0^2 \ll 1$, то из уравнения (1.18) можно найти, что частота, на которой возникает неустойчивость, определяется соотношением:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\Omega^2} \left(1 \pm \frac{v_T^2 \omega_0^2 R}{v_0^2 \cos^2 \alpha \sqrt{(\omega_H^2 + \omega_0^2)^2 - 4\omega_H^2 \omega_0^2 \cos^2 \alpha}} \right), \quad (1.20)$$

где

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{(\omega_H^2 + \omega_0^2) \pm \sqrt{(\omega_H^2 + \omega_0^2)^2 - 4\omega_H^2 \omega_0^2 \cos^2 \alpha}}{2 \omega_H^2 \omega_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

3. При рассмотрении обыкновенной и необыкновенной волн вне переходной области из соотношения (1.11) получаем**:

$$\mu_{1,2} = \mp \sqrt[3]{1 - \frac{\omega_{0s}^2 \omega^2 n_{1,2}^2 [n_{1,2}^2 (1 - u - v) + u (1 - v)^2] \sin^2 \alpha}{v (1 - v) \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u (1 - v)^2 \cos^2 \alpha} \partial(n_{1,2}^2 \omega^2) / \partial \omega}} \Big|_{\omega = kv_0} \quad (1.21)$$

* Переход к случаю $\omega_H = 0$ совершается способом, указанным в [1].

** В уравнении (1.3) и (1.11) переход к случаю отсутствия теплового движения в неподвижной плазме ($\beta^2 \rightarrow 0$) можно осуществить следующим образом (см. уравнение (1.4)):

$$\lim_{\beta^2 \rightarrow 0} (n_i^2 - n_s^2) v \beta R = -(1 - u - v + uv \cos^2 \alpha) \quad (i = 1, 2)$$

(знак „—“ соответствует необыкновенной волне, а знак „+“ обыкновенной). Выражение (1.21) можно значительно упростить, если учесть следующие обстоятельства. Поскольку задача рассматривается в нерелятивистском приближении, то, как нетрудно видеть, условие излучения Вавилова—Черенкова (1.17) требует выполнения неравенства

$$n_i^2 \gg 1. \quad (1.22)$$

Из уравнения (1.4) следует, что n_i^2 велико в двух случаях: в области, в которой выполнено условие

$$|1 - u - v + uv \cos^2 \alpha| \ll 1, \quad (1.23)$$

и при квазипродольном распространении [10], т. е. в области, в которой имеют место неравенства

$$v^2 \gg u \cos^2 \alpha \gg 1. \quad (1.24)$$

(Отметим, однако, что второе неравенство не является необходимым.)

Пусть сначала выполнено неравенство (1.23). При этом надо иметь в виду, что при $|1 - u - v + uv \cos^2 \alpha| \rightarrow 0$ показатели преломления волн n_1^2 (при $u < 1$) или n_2^2 (при $u \cos^2 \alpha > 1$) неограниченно возрастают [11], и необходимо учитывать пространственную дисперсию (тепловое движение частиц плазмы). Из уравнения (1.4) можно получить условие, определяющее область, в которой выполнено неравенство (1.23), но, тем не менее, влияние теплового движения можно еще не учитывать:

$$(1 - u - v + uv \cos^2 \alpha)^2 \gg \beta^2 R \frac{u(1 + u \cos^2 \alpha)(1 - u)^2}{|1 - u \cos^2 \alpha|^3} \sin^2 \alpha \simeq \beta^2. \quad (1.25)$$

При этом тепловые поправки к показателям преломления $n_{1,2}^2$, согласно (1.4), определяются соотношениями:

$$\frac{\Delta n_{1,2}^2}{n_{1,2}^2} \simeq \beta^2 R \frac{u(1 + u \cos^2 \alpha)(1 - u)^2 \sin^2 \alpha}{(1 - u - v + uv \cos^2 \alpha)^2 |1 - u \cos^2 \alpha|^3} \ll 1. \quad (1.26)$$

При выполнении неравенств (1.23), (1.25) для коэффициента нарастания (затухания) получаем:

$$\mu_{1,2} = \sqrt[3]{1} \left\{ \frac{\omega_{0s}^2 \omega}{2} \frac{(1 - u - v)(1 - u)}{v(1 - v)[(1 - u)^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha]} \operatorname{tg}^2 \alpha \right\}^{1/3}. \quad (1.27)$$

Формула (1.27) совпадает с результатом, полученным в работе [8].

При квазипродольном распространении из неравенств (1.24) и уравнения (1.4) получаем для обыкновенной волны формулу

$$n_2^2 = \omega_0^2 / \omega \omega_H \cos \alpha, \quad (1.28)$$

которая положена в основу общепринятой теории распространения свистящих атмосфериков [12, 13]. Для необыкновенной волны в тех же условиях $n_1^2 = -\omega_0^2 / \omega \omega_H \cos \alpha$, т. е. $n_1^2 < 0$, и ее распространение невозможно*. Для коэффициента нарастания (затухания) из (1.21) получаем в квазипродольном приближении:

* Отметим, что при $\alpha = 0$ волна, описываемая формулой (1.28), называется необыкновенной волной. Случай $\alpha = 0$ является исключительным, и при любых $\alpha \neq 0$ указанная волна называется обыкновенной [11].

$$\mu_2 = \sqrt[3]{1 - \left(\frac{\omega_{0s}^2 \omega_H \sin^2 \alpha}{2 u v \cos \alpha} \right)^{1/3}}. \quad (1.29)$$

4. Рассмотрим далее переходную область, в которой

$$|1 - u - v + uv \cos^2 \alpha| \ll \beta. \quad (1.30)$$

Для плазменной и обыкновенной (если $u \cos^2 \alpha > 1$) или необыкновенной (при $u < 1$) волн коэффициент μ , согласно (1.11), запишем в виде:

$$\mu_j = -\sqrt[3]{1 - \omega_{0s}^{2/3}} \left\{ \frac{\omega^2 B}{v \beta^2 R n_j^2 (n_j^2 - n_k^2) (\partial/\partial \omega) (n_j^2 \omega^2)_{\omega = kv_0}} \right\}^{1/3} \quad (1.31)$$

(при $j=1, 2, k=3$; если же $j=3$, то $k=1$, когда $u < 1$, и $k=2$ для $u \cos^2 \alpha > 1$).

Выражение (1.31) можно несколько упростить. В переходной области всегда выполняется неравенство (1.22). Учитывая это, квадрат показателя преломления n_i^2 (1.4) можно записать в виде*:

$$n_i^2 = \left\{ 1 - u - v + uv \cos^2 \alpha + \sqrt{(1 - u - v + uv \cos^2 \alpha)^2 - 4\beta^2 v R [2v^2 + v(u + u \cos^2 \alpha - 4) + 2(1 - u)]} \right\} \times \\ \times 2^{-1} \beta^{-2} v^{-1} R^{-1}. \quad (1.32)$$

Принимая для B приближенное значение: $B \simeq -n^4 (1 - u) \cos^2 \alpha$, получаем, из (1.31):

$$\mu_j \simeq \sqrt[3]{1 - \omega_{0s}^{2/3}} \left[\frac{\omega^2 (1 - u) \cos^2 \alpha}{v R (\partial/\partial \omega) \Phi} \right]^{1/3}, \quad (1.33)$$

где

$$\Phi = \frac{\omega^2}{v R} \left\{ 1 - u - v + uv \cos^2 \alpha + \sqrt{(1 - u - v + uv \cos^2 \alpha)^2 - 4\beta^2 v R [2v^2 + v(u + u \cos^2 \alpha - 4) + 2(1 - u)]} \right\}.$$

2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ, СВЯЗАННАЯ С МАГНИТОТОРМОЗНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

В настоящем разделе будет рассмотрено нарастание (затухание) волн в области частот, соответствующих как нормальному, так и аномальному эффекту Допплера.

1. Условие излучения вне светового конуса—в области аномального доплер-эффекта—запишется в следующем виде (см., например, [4, 6]):

$$n(v_0/c) \cos \alpha = 1 + \omega_H / \omega. \quad (2.1)$$

Условие излучения внутри светового конуса—в области нормального доплер-эффекта—запишется в виде:

$$n(v_0/c) \cos \alpha = 1 - \omega_H / \omega. \quad (2.2)$$

Обозначая

$$\omega - kv_0 \pm \omega_H = \mu_{\pm} \quad (2.3)$$

* Индексу i в выражении (1.32) надо приписать значение 3, если $v < v_{\infty} = (1 - u)/(1 - u \cos^2 \alpha)$, и значение 1 или 2 (в зависимости от величины u : $u < 1$ или $u \cos^2 \alpha > 1$), если $v > v_{\infty}$. Подробнее относительно классификации волн в переходной области см., например, [14].

и считая выполненными неравенства

$$\mu_{\pm} \ll \omega; \mu_{\pm} \ll \omega_H; \mu_{\pm} \ll k v_0, \quad (2.4)$$

запишем уравнение (1.8) следующим образом:

$$v \beta^2 R (n^2 - n_1^2) (n^2 - n_2^2) (n^2 - n_3^2) - \frac{\omega_{0s}^2 \omega_H^2}{(k v_0 \mp \omega_H)^2} \frac{A \pm C}{(\omega - k v_0 \mp \omega_H) \mu_{\pm}} = 0. \quad (2.5)$$

В уравнении (2.5) пренебрежено членом $B \omega_{0s}^2 / \omega_H^2$ по сравнению с остальными*.

Используя метод возмущений, аналогично предыдущему для определения величин $\mu_{\pm}$ получаем из (2.5) уравнение:

$$\mu_{k\pm}^2 v \beta^2 R (n_k^2 - n_j^2) (n_k^2 - n_i^2) (\partial/\partial\omega) (n_k^2 \omega^2)_{\omega=k v_0 \mp \omega_H} + \omega_{0s}^2 \omega_H^2 \frac{A \pm C}{\omega - k v_0 \mp \omega_H} = 0 \quad (i \neq j \neq k; i, j, k = 1, 2, 3), \quad (2.6)$$

откуда

$$\mu_k^+ = \pm \left\{ \frac{\omega_{0s}^2 \omega_H (A + C)}{2 v \beta^2 R (n_k^2 - n_j^2) (n_k^2 - n_i^2) (\partial/\partial\omega) (n_k^2 \omega^2)_{\omega=k v_0 - \omega_H}} \right\}^{1/2}; \quad (2.7)$$

$$\mu_k^- = \pm \left\{ - \frac{\omega_{0s}^2 \omega_H (A - C)}{2 v \beta^2 R (n_k^2 - n_j^2) (n_k^2 - n_i^2) (\partial/\partial\omega) (n_k^2 \omega^2)_{\omega=k v_0 + \omega_H}} \right\}^{1/2}. \quad (2.8)$$

2. Плазменная волна в области аномального эффекта Доплера

Для плазменной волны из (2.7) получаем:

$$\mu_3^+ = \pm \omega_{0s} \left\{ \frac{\omega_H (1 - u) [-n_3^2 \sin^2 \alpha + (1 - v) (1 + \cos^2 \alpha)]}{2 v \beta^2 R n_3^2 (\partial/\partial\omega) (n_3^2 \omega^2)_{\omega=k v_0 - \omega_H}} \right\}^{1/2}. \quad (2.9)$$

При написании последнего выражения было учтено, что для этой волны выполняются неравенства (1.13). Как нетрудно видеть из выражения (2.9), для нахождения условий, при которых возникает неустойчивость, необходимо знать знак производной $\partial(n_3^2 \omega^2)/\partial\omega$. В изотропном случае из выражения

$$n_3^2 = \frac{1 - v}{3 \beta^2 v} \quad (2.10)$$

следует, что при $n_3^2 > 0$

$$(\partial/\partial\omega) (n_3^2 \omega^2) > 0. \quad (2.11)$$

Неравенство (2.11) имеет место и при распространении волн в равновесной гиротропной плазме**. Тогда из выражений (2.9) и (2.11) сле-

* Учет члена $B \omega_{0s}^2 / \omega_H^2$ вызовет незначительный сдвиг корней n_i^2 уравнения (1.4).

** Для поперечных волн в прозрачной и изотропной среде выполняется неравенство $\partial(n^2 \omega^2)/\partial\omega > 0$ (см. [15]). В случае гиротропной среды, если влиянием поглощения из-за соударений можно пренебречь, при $n_{1,2}^2 > 0$ также имеет место указанное неравенство, что подтверждается рассмотрением дисперсионных кривых зависимости n^2 от ω , а также непосредственными вычислениями. Если же влияние соударений существенно, то вблизи переходной области для обыкновенной и необыкновенной волн может выполняться неравенство, обратное приведенному. Соответствующие дисперсионные кривые, а также условия, при которых влияния соударений в переходной области несут существенны, приведены в [14].

дует, что в области аномального эффекта Допплера при выполнении неравенства

$$\sin^2 \alpha > \frac{(1-v)(1+\cos^2 \alpha)}{n_3^2} = \beta^2 v R \frac{(1-v)(1+\cos^2 \alpha)}{1-u-v+uv \cos^2 \alpha} \quad (2.12)$$

неустойчивость имеет место при условии*

$$(1-u)R > 0. \quad (2.13)$$

Раскрывая значения параметра R , неравенство (2.13) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha \left[\frac{3(1-u)}{1-4u} + 3(1-u)^2 + u - \frac{1+3u}{1-u} - 5 \right] + \\ + \sin^2 \alpha \left[5 + \frac{1+3u}{1-u} - u - 6(1-u)^2 \right] + 3(1-u)^2 > 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Анализ квадратичной формы (2.14) показывает, что неравенство (2.14) выполняется при любых углах α для частот ω , удовлетворяющих одному из условий

$$\omega < 0,7 \omega_H; \quad \omega > 2\omega_H. \quad (2.15)$$

Отметим, что при конкретных значениях угла α область, в которой не выполнено условие (2.13), значительно сужается. Так, например, при $\alpha = \pi/4$ рассмотрение неравенства (2.14) показывает, что усиление возможно вне областей

$$1,8 \omega_H < \omega < 2\omega_H; \quad 0,7 \omega_H < \omega < \omega_H. \quad (2.16)$$

Надо, однако, иметь в виду, что указанные частоты (2.16), при которых имеет место устойчивость, примыкают непосредственно к области первого и второго гирорезонансов. Поэтому все наше рассмотрение справедливо лишь при выполнении условий

$$|\omega - \omega_H| \gg kv_T \cos \alpha; \quad |\omega - 2\omega_H| \gg kv_T \cos \alpha, \quad (2.17)$$

которые с учетом условия излучения (2.1) принимают вид:

$$\frac{|\omega - \omega_H|}{\omega + \omega_H} \frac{v_0}{v_T} \gg 1; \quad \frac{|\omega - 2\omega_H|}{\omega + \omega_H} \frac{v_0}{v_T} \gg 1. \quad (2.18)$$

3. Плазменная волна в области нормального эффекта Допплера

Для коэффициента нарастания (затухания) плазменной волны вне переходной области из (2.8) получаем:

$$\mu_3^- \simeq \pm \left\{ -\frac{\omega_{0s}^2 \omega_H (1-u) [-n_3^2 \sin^2 \alpha + (1-v)(1+\cos^2 \alpha)]}{2v\beta^2 R n_3^2 \partial(n_3^2 \omega^2)/\partial\omega_{\omega=\omega_H}} \right\}^{1/2}. \quad (2.19)$$

Далее, из проведенного выше рассмотрения, а также из вида формулы (2.19) следует, что при выполнении неравенства (2.12) усиление возможно, если

$$(1-u)R < 0. \quad (2.20)$$

* Неравенство (2.13) совпадает с условием действительности показателя преломления плазменной и обыкновенной (необыкновенной) волн в переходной области [11].

Кроме того, из (2.2) следует, что в области нормальных доплеровских частот $\omega > \omega_H$, и неравенство (2.20) имеет место при $R < 0$. Однако в этом случае мы находимся в области, в которой $n^2 < 0$ и распространение волны вообще невозможно [11].

При $\alpha = 0$, как показывает непосредственное вычисление, усиление также невозможно как в случае нормального, так и аномального доплер-эффекта. Последний результат вполне понятен, так как при распространении волны вдоль магнитного поля последнее на плазменную волну никакого влияния не оказывает.

4. Для необыкновенной и обыкновенной волн в области аномального эффекта Доплера получаем из выражения (2.7):

$$\mu_1^+ = \pm \left\{ \frac{\omega_{0s}^2 \omega_H (A + C)}{2v \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-v)^2 \cos^2 \alpha} (\partial/\partial \omega) (n_1^2 \omega^2)} \right\}_{\omega = kv_0 - \omega_H}^{1/2}; \quad (2.21)$$

$$\mu_2^+ = \pm \left\{ - \frac{\omega_{0s}^2 \omega_H (A + C)}{2v \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-v)^2 \cos^2 \alpha} (\partial/\partial \omega) (n_2^2 \omega^2)} \right\}_{\omega = kv_0 - \omega_H}^{1/2}, \quad (2.22)$$

где A и C определяются соотношениями (1.5). Полагая $\partial(n_{1,2}^2 \omega^2)/\partial \omega > 0$ (см. сноску на стр. 753), получаем условие усиления для необыкновенной волны:

$$A + C < 0, \quad (2.23)$$

для обыкновенной волны:

$$A + C > 0. \quad (2.24)$$

В нерелятивистском приближении в области аномальных доплеровских частот должно выполняться неравенство $n^2 \gg 1$ (т. е. волны являются медленными). Как уже отмечалось выше, наиболее интересным случаем медленных волн является распространение в области, где выполнены неравенства (1.23) или (1.24).

В случае квазипродольного распространения (см. (1.24)) при $\alpha = 0$ из (2.21) и (2.22) имеем:

$$\mu_1^+ = 0; \quad \mu_2^+ = \pm i \omega_{0s} [\omega_H / (\partial/\partial \omega) (n_2^2 \omega^2)]_{\omega = kv_0 - \omega_H}^{1/2};$$

однако при этом $n_2^2 = 1 - v/(1 + \sqrt{u})$ и условие (2.1) не может быть выполнено.

При произвольном направлении распространения в квазипродольном случае, согласно (1.5), (1.24) и (2.22), для обыкновенной волны:

$$A + C \simeq \sqrt{u} v^2 (1 - \cos \alpha)^2 / \cos \alpha > 0 \quad (2.25)$$

(при этом показатель преломления необыкновенной волны $n_1^2 < 0$). Для коэффициента нарастания (затухания) обыкновенной волны из (2.22) и (2.25) получаем:

$$\mu_2^+ = \pm i \left(\frac{N_s}{N} \right)^{1/2} \frac{\omega_H}{2} \frac{1 - \cos \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}}. \quad (2.26)$$

Вблизи переходной области, если выполнены условия (1.23), (1.25), при не слишком малых значениях $\sin^2 \alpha$ из (1.5) следует, что $A + C \simeq -n^4 (1 - u) \sin^2 \alpha$ и коэффициент нарастания (затухания) обыкновенной и необыкновенной волн, согласно (2.21), (2.22), имеет вид:

$$\mu_1^+ = \pm \left\{ - \frac{\omega_{0s}^2 \omega_H n_1^4 (1-u) \sin^2 \alpha}{2v \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-v)^2 \cos^2 \alpha} (\partial/\partial \omega) (n_1^2 \omega^2)} \right\}^{1/2} \quad (2.27)$$

Из написанного выражения ясно, что неустойчивость возникает при $u < 1$ (n_1^2 велико, если $u < 1$).

Далее для μ_2^+ получаем:

$$\mu_2^+ = \pm \left\{ \frac{\omega_{0s}^2 \omega_H n_2^4 (1-u) \sin^2 \alpha}{2v \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-v)^2 \cos^2 \alpha} (\partial/\partial \omega) (n_2^2 \omega^2)} \right\}^{1/2} \quad (2.28)$$

Здесь неустойчивость возникает, если $u > 1$; при этом условии $n_2^2 \gg 1$ (точнее, n_2^2 велико при $u \cos^2 \alpha > 1$).

Используя неравенство (1.22), можно еще более упростить формулы (2.27) и (2.28):

$$(\mu_{1,2}^+)^2 = - \frac{N_s}{N} (1 - u \cos^2 \alpha)^2 \frac{\omega_H \omega}{2 [(1-u)^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha]} \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (2.29)$$

Проведенное рассмотрение показывает, что при исследовании вопроса об устойчивости распространения волн в неподвижной плазме, пронизываемой потоком заряженных частиц, в том случае, когда имеет место неравенство (1), необходимо, вообще говоря, учитывать тепловое движение как в основной плазме, так и в потоке. При этом плазменная волна оказывается неустойчивой вне светового конуса при любых углах α (включая угол $\alpha = 0$), определяющих направление распространения волны, если концентрация частиц N_s достаточно велика (см. формулы (2.6) и (2.10)). При распространении обыкновенной и необыкновенной волн также возможна неустойчивость в области аномального эффекта Допплера, если концентрация частиц достаточно велика. В последнем случае, однако, при $\alpha = 0$ нарастания волн нет (см. соотношение (3.2) и (3.10) I и [6]).

Другим характерным случаем, как уже отмечалось выше, является случай, при котором влиянием теплового движения частиц в потоке можно пренебречь, т. е. когда выполнено соотношение (2). Однако и при этом тепловое движение в основной плазме следует учитывать на основе метода кинетического уравнения, так как только в этом случае возможно последовательное изучение поведения плазменной волны. Кроме того, кинетическое рассмотрение необходимо проводить и вблизи переходной области между плазменной и обыкновенной (необыкновенной) волнами, так как одним из критериев нарастания обыкновенной и необыкновенной волн в нерелятивистском приближении является выполнение условия $n^2 \gg 1$. Последнее же имеет место в переходной области, где формально при элементарном гидродинамическом рассмотрении показатель преломления обыкновенной (необыкновенной) волны неограниченно возрастает (см. формулы (1.30)–(1.33)).

Вместе с тем, надо отметить, что существуют области частот, в которых можно провести гидродинамическое рассмотрение вопросов устойчивости без учета теплового движения. Соответствующие области указаны выше (см. выражения (1.24) и (1.25)). Однако границы применимости гидродинамического рассмотрения могут быть установлены лишь на основе метода кинетического уравнения. И, наконец, отметим, что для $n^2 \gg 1$ при любых углах α (за исключением угла $\alpha = 0$, для случая обыкновенной и необыкновенной волн) возможна неустойчивость, связанная с излучением Вавилова–Черенкова. В области же частот, соответствующих аномальному эффекту Допплера, при $\alpha = 0$

волны устойчивы и нарастания волн нет. Если же $\alpha \neq 0$, то возможно нарастание всех трех типов волн: обыкновенной, необыкновенной и плазменной. При выполнении неравенства (2) коэффициенты нарастания (затухания) волн, вообще говоря, значительно больше коэффициентов нарастания (затухания) волн в случае, если выполнено условие, обратное (2).

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. В. Железнякову и В. О. Рапопорту за просмотр рукописи и дискуссию результатов, а также Б. Н. Гершману за постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Ковнер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **3**, 631 (1960).
2. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ЖЭТФ, **21**, 11262 (1951).
3. В. Л. Гинзбург и В. В. Железняков, Астроф. ж., **35**, 694 (1958).
4. Г. Г. Гетманцев, В. О. Рапопорт, ЖЭТФ, **38**, 1205 (1960).
5. R. Q. Twiss, Phys. Rev., **84**, 448 (1951).
6. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **2**, 14 (1959).
7. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, **16**, 571 (1946).
8. В. О. Рапопорт, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **3**, 737 (1960).
9. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, **24**, 659 (1953).
10. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург и Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, М., 1953.
11. Б. Н. Гершман, В. Л. Гинзбург, Н. Г. Денисов, УФН, **61**, 561 (1957).
12. L. R. O. Storey, Phil. Trans., **246**, 113 (1953); Б. Н. Гершман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **1**, 5—6, 49 (1958).
13. Б. Н. Гершман, Ю. С. Коробков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **1**, 2, 51 (1958).
14. Б. Н. Гершман, М. С. Ковнер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **2**, 28 (1959).
15. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957, стр. 338.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
25 марта 1960 г.

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ НА ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В НИЖНЕЙ ИОНОСФЕРЕ

Г. С. Голицын

На основе статистической теории турбулентности рассмотрен вопрос о влиянии магнитного поля Земли на характер турбулентности в ионосфере. Показано, что до высоты ~ 150 км это влияние пренебрежимо мало. Далее с увеличением высоты магнитное поле должно играть все большую роль и на высотах ~ 200 км, вероятно, существенно подавить турбулентность. Обсуждены также условия существования развитой турбулентности в такой разреженной и неоднородной по высоте среде, как ионосфера. Эти особенности ионосферы, по-видимому, препятствуют развитию турбулентности на более низких, чем 200 км, высотах, в результате чего турбулентность, вероятно, значительно подавлена на высотах, больших 150 км. С этим выводом сопоставимы результаты работы [16] по исследованию обратного рассеяния радиоволн в ионосфере на частоте, много большей критической.

1. Вопрос о характере движений в ионосфере, о природе и динамике наблюдаемых там неоднородностей представляет большой геофизический и практический интерес. Измерения размывания метеорных следов большой длительности указывают на турбулентный характер диффузии следа на определенной стадии процесса [1] и дают некоторые сведения о количественных характеристиках турбулентности на высоте $80 \div 100$ км: величину диссипации энергии турбулентности на единицу массы ϵ и радиусы корреляции скоростей в вертикальном и горизонтальном направлениях [2]. На существование турбулентности в нижней ионосфере указывают и другие факты, которые будут обсуждены в конце статьи.

Вместе с тем следует отметить, что уже начиная с указанных высот атмосфера становится заметно проводящей. Турбулентные движения проводящей среды в магнитном поле Земли приводят к возникновению объемной электромагнитной силы (силы Ампера), вызванной взаимодействием индуцируемых случайных токов с магнитным полем. Представляет интерес оценка этого эффекта. Очевидно, что пока проводимость невелика, для не очень больших масштабов рассматриваемых явлений можно пренебречь обратным влиянием объемной электромагнитной силы на динамику среды. В работе [3] изучены флуктуации плотности индуцируемых турбулентностью случайных токов в условиях, когда можно пренебречь обратным влиянием токов на характер порождающей их турбулентности, а также определены условия, при которых справедливо подобное рассмотрение. В настоящей работе предпринята попытка применить эти результаты к изучению ионосферы с целью выяснения, когда можно пренебречь влиянием магнитного поля Земли на турбулентные движения. Нарушение этих условий будет рассматриваться как указание на то, что учет магнитного поля может оказаться существенным при изучении турбулентных движений среды. Большое число теоретических и экспериментальных работ показывает (см. обзор [4]), что в общем случае магнитное поле затрудняет развитие турбулентности, а достаточно сильное магнитное поле полностью подавляет ее.

Некоторые предварительные оценки влияния магнитного поля на турбулентность в ионосфере были опубликованы автором ранее [3], до выполнения работы [3]. Эти оценки являются приближенными, так как они верны, строго говоря, только для стационарных движений. Однако выводы работы [3] не противоречат результатам данной статьи, которые их подтверждают и уточняют с новой точки зрения.

Влияние земного магнитного поля на движения в ионосфере рассматривалось в ряде работ (см., например, [6, 10, 14]). Близкой по теме к нашей работе является статья Гершмана [6], посвященная вопросу о влиянии магнитного поля на возникновение турбулентной неустойчивости при наличии ветра. Им было показано, что на высотах $80 \div 150$ км это влияние слабо и им можно пренебречь, если только вертикальный размер области, где дует ветер, не очень велик (меньше $50 \div 100$ км). Мы, наоборот, будем предполагать турбулентность уже существующей и определим, до какой высоты влиянием магнитного поля на нее можно пренебречь.

2. Рассмотрим вкратце результаты работы [3]. Уравнения для магнитного поля $\mathbf{H}$ в проводящей среде, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$, имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H} - (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{v} = \nu_m \Delta \mathbf{H}; \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (1)$$

где $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$, c — скорость света, σ — проводимость. Коэффициент ν_m , так называемая магнитная вязкость, определяет диффузию и джоулеву диссипацию магнитного поля в среде.

Среда считается слабо проводящей в том смысле, что $\nu_m \gg \nu$, где ν — кинематическая вязкость. Это неравенство с большим запасом верно почти для всех сред, за исключением очень разреженного газа. В ионосфере оно справедливо до высоты приблизительно 200 км (если не учитывать влияния магнитного поля на величину проводимости).

Допустим теперь, что вектор скорости обусловлен турбулентностью, которая предполагается локально однородной и локально изотропной [7]. Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$, где $\mathbf{H}_0$ — стационарное внешнее поле, а $\mathbf{H}'$ — пульсация поля, причем $|\mathbf{H}'| \ll H_0 = |\mathbf{H}_0|$. Оценка членов первого уравнения (1) по порядку величины дает в первом приближении по $|\mathbf{H}'|/H_0$ уравнение

$$-(\mathbf{H}_0 \nabla) \mathbf{v} = \nu_m \Delta \mathbf{H}' \quad (2)$$

или, поскольку $\operatorname{rot} \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{j}$ и $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$,

$$(\mathbf{H}_0 \nabla) \mathbf{v} = (4\pi/c) \nu_m \operatorname{rot} \mathbf{j}, \quad (3)$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока.

В работе [3] дано более подробное обоснование возможности пренебречь временной производной и показано, что это справедливо, если масштаб рассматриваемых явлений много меньше длины $l_m = (\nu_m/\varepsilon)^{1/4}$. Если принять $\nu_m = 10^{14}$ см²·сек⁻²; $\varepsilon = 10^3$ см²·сек⁻³, что характерно для ионосферы, то величина l_m окажется порядка 10^4 км. Таким образом, уравнение (3) совершенно законно в условиях ионосферы.

Другим масштабом, ограничивающим сверху пределы применимости используемой теории, является внешний масштаб турбулентности. В качестве внешнего масштаба следует принять высоту однородной атмосферы L_0 , что будет обсуждено ниже. Для нижней ионосферы L_0 порядка 10 км, что много меньше величины l_m . Рассматриваемая область масштабов, таким образом, включает интервал полубоя (инер-

ционный интервал для пульсаций скорости, в котором действует „закон $2/3$ “), а также интервал вязкой диссипации.

Уравнение (3) является основным уравнением теории. Из него можно получить уравнение для структурной функции флуктуаций плотности тока $I_{st}(\rho) = [j_s(\mathbf{r}) - j_s(\mathbf{r} + \rho)] [j_t(\mathbf{r}) - j_t(\mathbf{r} + \rho)]$, которое определяет I_{st} через структурную функцию флуктуаций скорости $D_{st}(\rho) = [v_s(\mathbf{r}) - v_s(\mathbf{r} + \rho)] [v_t(\mathbf{r}) - v_t(\mathbf{r} + \rho)]$. Вывод этого уравнения и общий вид тензора I_{st} в инерционном интервале приведены в [3]. Особенно простой вид имеет уравнение для определения следа тензора I_{tt} :

$$\Delta I_{tt} = \lambda_k \lambda_l \frac{\partial^2 D_{tt}}{\partial \rho_k \partial \rho_l} \frac{c^2 H_0^2}{16 \pi^2 v_m^2}, \quad (4)$$

где $\lambda_i = H_{0i}/H_0$, ρ_i — компонента ρ . Из уравнения (4) следует, что

$$I_{tt} \sim \frac{c^2 H_0^2}{16 \pi^2 v_m^2} D_{tt}, \quad (5)$$

откуда среднеквадратичная пульсация плотности тока j'_l масштаба l — порядка $c H_0 (4 \pi v_m)^{-1} v'_l$. Поэтому сила Ампера, отнесенная к единице массы:

$$\frac{1}{c \rho} [j'_l H_0] \sim \frac{H_0^2}{4 \pi \rho v_m} v'_l = \frac{V_A^2}{v_m} v'_l, \quad (6)$$

где $V_A^2 = H_0^2 / 4 \pi \rho$.

Поскольку сила Ампера пропорциональна скорости, то величину V_A^2 / v_m можно назвать „коэффициентом трения“ между магнитным полем и средой. Если v_m велико, то коэффициент трения мал и взаимодействие между полем и средой слабое. Обозначим $V_A^2 / v_m \equiv \tau_H^{-1}$; тогда величина τ_H имеет размерность времени.

Чтобы оценить роль силы Ампера в динамике среды, надо сравнить ее с градиентом турбулентных пульсаций давления (или, что одно и то же, с инерционными силами). Последняя величина, согласно работе [8], определяется соотношением

$$\nabla p / \rho \sim v_l'^2 / l. \quad (7)$$

Отношение силы Ампера к градиенту турбулентных пульсаций давления мы обозначим через K :

$$K = (V_A^2 v_l' / v_m) : (v_l'^2 / l) = \tau_l / \tau_H, \quad (8)$$

где $\tau_l = l / v'_l$ — период распада вихрей масштаба l . Величина τ_H определяется только значением напряженности поля и параметрами среды, т. е. является характерным параметром для каждого уровня в ионосфере*. Поэтому, если бы мы знали временные характеристики турбулентности (величины τ_l), то их сравнение с τ_H вскрыло бы относительную роль магнитного поля в динамике среды.

Роль поля можно оценить также на языке масштабов процессов, определив те масштабы, для которых влияние поля не существенно. При выводе формулы (4) скорость предполагалась локально однородным случайным вектором. Основной характеристикой локально одно-

* Приведем значения τ_H для некоторых высот: для 100 км $\tau_H = 7 \cdot 10^8$ сек, для 150 км $\tau_H = 4 \cdot 10^4$ сек, для 200 км $\tau_H = 2$ сек.

родной турбулентности является величина диссипации кинетической энергии турбулентных пульсаций ε . В инерционном интервале, где $v_l \sim (\varepsilon l)^{1/3}$, критерий (8) примет вид:

$$K = V_A^2 v_m^{-1} l (\varepsilon l)^{-1/3}. \quad (8')$$

Если число K много меньше единицы, то влиянием поля на турбулентные вихри масштаба l можно пренебречь, что справедливо, если

$$l \ll \varepsilon^{1/2} v_m^{3/2} V_A^{-3} \equiv l_H. \quad (9)$$

Для масштаба l_H число K равно единице. Если $l_H \gg l_0$, где $l_0 = (v_l^3/\varepsilon)^{1/4}$ — колмогоровский внутренний масштаб турбулентности, то диссипация турбулентной энергии происходит благодаря действию только вязкости; влиянием джоулевой диссипации можно пренебречь и, следовательно, мелкомасштабная турбулентность будет иметь обычный характер.

Критерий (9) можно представить в виде

$$K_1 = l_H/l_0 = (\varepsilon v_m^2/v)^{3/4} V_A^{-3} \gg 1. \quad (10)$$

Тогда число K_1 показывает, во сколько раз масштаб l_H , для которого градиент турбулентных пульсаций давления равен силе Ампера, больше внутреннего масштаба турбулентности.

Данные по распылению метеорных следов [1,2] позволяют оценить величину ε — основной параметр для наших расчетов. Согласно [9], на высоте $80 \div 100$ км ε имеет величину порядка 10^3 см².сек⁻³. С этим значением согласуются данные по дальнейшему распространению радиоволн, обусловленному рассеянием в нижней ионосфере (подробнее см. [9]). Указанное значение ε мы будем экстраполировать и на большие высоты, ввиду отсутствия каких-либо количественных сведений о турбулентности на этих высотах. Это, по-видимому, не даст очень большой ошибки, так как ε входит в оценку (10) в не слишком сильной степени, а предполагать очень больших изменений ε с высотой нет веских оснований.

Остановимся еще на одном вопросе. Учет молекулярной структуры приводит к тому, что в основном уравнении (1) появляется не один, а три коэффициента магнитной вязкости [6,10]. Это происходит потому, что с высоты около 80 км ларморовский радиус электрона становится меньше длины свободного пробега, в результате чего появляется анизотропия проводимости в направлениях вдоль и поперек магнитного поля. Учет всех коэффициентов изменит угловую зависимость и коэффициент в структурной функции плотности тока, однако пропорциональность структурной функции скорости останется. В наших оценках мы будем брать проводимость в направлении поперек магнитного поля, что может несколько увеличить ту высоту, где влияние поля станет существенным.

В таблице 1 приведены результаты расчетов для ионосферы. Данные о проводимости на различных высотах были взяты из [11,12], значения вязкости и длины свободного пробега — из [17]. Остальные параметры вычислялись по данным [13], причем магнитное поле считалось равным 0,5 гс. В трех последних столбцах таблицы приведены внутренний масштаб турбулентности l_0 , длина свободного пробега λ и высота однородной атмосферы L_0 .

Данные таблицы показывают, что до высоты приблизительно 150 км влияние магнитного поля незначительно. Если бы мы считали проводимость изотропной, то эта высота уменьшилась бы до 120 км. На высоте 180 км масштаб l_H только в 2 раза больше высоты однородной атмосферы, что указывает на существенную роль поля в динамике

Таблица 1

Z (км)	γ_m (см ² ·сек ⁻¹)	γ (см ² сек ⁻¹)	V_A (см·сек ⁻¹)	K_1	K	l_0 (см)	λ (см)	L_0 (км)
80	10^{16}	$8 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^{14}$	$3 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^2$	0,4	6
100	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^5$	$5,3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^{13}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^3$	10	8
120	$1,2 \cdot 10^{14}$	$4 \cdot 10^6$	$1,8 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^2$	13
140	$1 \cdot 10^{14}$	$1 \cdot 10^8$	$4,1 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^3$	17
160	$6 \cdot 10^{13}$	$3 \cdot 10^8$	$7,8 \cdot 10^4$	50	$5 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^3$	24
180	$3 \cdot 10^{13}$	$8 \cdot 10^8$	$1,3 \cdot 10^5$	7	0,2	$7 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^4$	32
200	$1 \cdot 10^{13}$	$2 \cdot 10^9$	$1,8 \cdot 10^5$	0,1	2	$1 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^4$	33
120*	$1 \cdot 10^{13}$ *	$4 \cdot 10^6$	$1,8 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^3$	10^{-2}	$2 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^2$	13
140*	$5 \cdot 10^{11}$ *	$1 \cdot 10^8$	$4,1 \cdot 10^4$	2	0,2	$1 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^3$	17

среды. На высоте 200 км число K_1 порядка 0,1, т. е. турбулентность здесь уже заведомо подавлена. По-видимому, начиная с высоты 150 ÷ 160 км мелкомасштабная турбулентность сначала видоизменяется, переставая быть изотропной, а затем и подавляется магнитным полем. На движение больших горизонтальных неоднородностей магнитное поле оказывает влияние на более низких высотах [14]. Временные оценки по формуле (8) приводят, разумеется, к тем же результатам, если под τ_i понимать время распада мелких вихрей $\tau_0 = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$.

3. Обсудим некоторые черты турбулентности в такой разреженной и неоднородной по высоте среде, как ионосфера. Очевидно, что не может существовать изотропных вихрей с размерами, большими, чем высота однородной атмосферы, так как на больших расстояниях значительно меняется плотность. Это подтверждается данными Гринхау и Ньюфелда [2], которые для высоты 80 ÷ 100 км оценили вертикальный радиус корреляции для скорости величиной в 6 км, что совпадает с высотой однородной атмосферы на этом уровне. Именно эту величину следует считать внешним масштабом турбулентности (или, во всяком случае, он ее не превосходит). Более мелкие вихри, по-видимому, можно приближенно считать изотропными, т. е. пользоваться результатами теории Колмогорова [7].

При рассмотрении самых мелких вихрей с размерами порядка внутреннего масштаба в ионосфере возникает новое обстоятельство, которое не имеет значения для нижней атмосферы: внутренний масштаб турбулентности при увеличении высоты приближается к длине свободного пробега. Отношение l_0/λ , как показано в [5], падает с уменьшением числа частиц плотности как $n^{1/4}$ (если считать ε мало меняющимся с высотой по сравнению с изменением n). В тропосфере отношение l_0/λ — порядка 10^4 , поэтому там полностью можно пренебречь молекулярной структурой среды. На высоте 100 км $l_0/\lambda \sim 2 \cdot 10^2$, а на 200 км $l_0/\lambda \sim 50$. В этих условиях может оказаться, что учет молекулярной структуры каким-то образом отразится на характере мелкомасштабной турбулентности, в частности, на механизме диссипации турбулентной энергии.

С ростом высоты растет также и внутренний масштаб, становясь уже заметной величиной по сравнению с высотой однородной атмосферы. На высоте 100 км отношение L_0/l_0 порядка 200, а на высоте 160 км оно уже менее 10, так что совершенно не остается равновесного интервала масштабов для существования развитой турбулентности.

* Проводимость взята в направлении вдоль силовых линий поля.

Более того, на той же высоте 160 км отношение L_o/λ имеет величину только $2 \cdot 10^3$.

Вероятно, эти эффекты, связанные с убыванием плотности с высотой, играют не менее, а, может быть, даже более важную роль, чем магнитное поле, в уменьшении интенсивности турбулентности и могут сказываться на более низких высотах, чем влияние поля.

Таким образом, влияние обоих факторов—магнитного поля и разреженности и неоднородности среды—должно менять характер турбулентности. По-видимому, можно с достаточной степенью уверенности утверждать, что мелкомасштабная турбулентность (с масштабами, меньшими, чем высота однородной атмосферы) в значительной степени подавлена на высотах более 150 км. Поэтому для объяснения механизма возникновения неоднородностей в более высоких слоях ионосферы следует искать какие-то другие причины. Правда, ночью влияние магнитного поля ослабляется из-за уменьшения концентрации электронов, однако влияние разреженности и стратификации остается.

4. Обратимся к обзору некоторых, пока немногочисленных экспериментальных данных о турбулентности на высотах, больших, чем 100 км. Метеоры на этих высотах еще не создают заметной ионизации. Из ракетных наблюдений автору пока известна только одна работа [15], где сообщается о двух запусках ракет, оставляющих натриевый след на высоте $100 \div 115$ км. Наблюдения за этими следами обнаружили существование больших градиентов скорости ветра (~ 10 м·сек⁻¹·км⁻¹) и больших изменений в направлении скорости ветра с высотой. Если взять в качестве характерного масштаба высоту однородной атмосферы, то при этих градиентах скорости число Рейнольдса получается порядка 10^4 . В этих условиях движение, конечно, будет турбулентным.

Другим фактом, свидетельствующим о существовании турбулентности в нижней ионосфере, является обратное рассеяние коротких радиоволн с частотой, много большей критической. Указанное явление изучалось в работе [16]. Рассеянный сигнал в этих наблюдениях имел слабый уровень и постоянные флуктуации, т. е. имел такой характер, как при рассеянии радиоволн на турбулентных пульсациях диэлектрической проницаемости в тропосфере. В работе приведены гистограммы двухмесячных круглосуточных наблюдений, которые указывают, что обратное рассеяние регулярно наблюдается и происходит из области высот $90 \div 140$ км. Нижняя граница вполне понятна: там еще мала концентрация электронов. Довольно же резкое уменьшение процента времени наблюдения сигнала с высот около $140 \div 150$ км, несмотря на рост электронной концентрации с высотой, указывает на то, что, начиная с этих высот, хаотические неоднородности появляются крайне редко или обладают малой интенсивностью. Данные [16] можно сопоставить с нашими выводами о подавлении турбулентности, начиная с высоты порядка 150 км.

В заключение выражаю свою благодарность А. М. Обухову за ценные замечания и дискуссии по работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. S. Greenhow, J. Geophys. Res., **64**, 2203 (1959).
2. J. S. Greenhow, E. L. Neufeld, J. Geophys. Res., **64**, 2129 (1959).
3. Г. С. Голицын, ДАН СССР, **132**, 315 (1960).
4. С. И. Сыроватский, УФН, **62**, 247 (1957).
5. G. S. Golitsyn, J. Geophys. Res., **64**, 2212 (1959).
6. Б. Н. Гершман, Научн. докл. высш. школы, физ. мат. науки, **1**, 114 (1958).
7. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР, **30**, 299 (1941).
8. А. М. Обухов, ДАН СССР, **66**, 17 (1949).

9. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 551 (1960).
10. Б. Н. Гершман, В. Л. Гинзбург, Астрон. ж. 32, 201 (1955).
11. С. К. Митра, Верхняя атмосфера, ИЛ, М., 1955.
12. D. F. Martin, W. G. Baker, Phil. Trans., 246, 281 (1953).
13. H. K. Kallmann, J. Geophys. Res., 64, 615 (1959).
14. В. П. Докучаев, Изв. АН СССР, сер. геофиз., 5, 783 (1959).
15. J.—E. Blamont, C. r. Acad. Sci., 249, 1248 (1959).
16. О. И. Яковлев, В. И. Бочаров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 370 (1959).
17. M. Nicolet, J. Geophys. Res., 64, 2091 (1959).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
6 апреля 1960 г.

ОБ ЭФФЕКТЕ НАСЫЩЕНИЯ В ПАРАМАГНИТНОЙ СИСТЕМЕ С ТРЕМЯ И ЧЕТЫРЬМЯ УРОВНЯМИ

К. С. Станкевич

Проведен расчет магнитной проницаемости системы с четырьмя уровнями в присутствии сильного вспомогательного высокочастотного поля и с учетом эффекта насыщения. Полученные результаты позволяют найти выражение для магнитной проницаемости системы с тремя уровнями.

В работе [1] был предложен и экспериментально исследован парамагнитный усилитель, работающий с использованием четырех уровней. Такие системы обладают рядом особенностей по сравнению с трехуровневыми усилителями. Поэтому возникает определенный интерес к исследованию магнитной проницаемости системы с четырьмя уровнями в присутствии сильного вспомогательного радиочастотного поля и с учетом эффекта насыщения. Этим вычислениям посвящена настоящая работа.

Пусть парамагнитный кристалл имеет систему четырех уровней, энергии которых удовлетворяют соотношениям $E_1 < E_2 < E_3 < E_4$ и $E_3 - E_1 = E_4 - E_2$. На этот кристалл действуют два высокочастотных поля с частотами ω_1 и ω_2 . Поскольку спины парамагнитных ионов слабо взаимодействуют с кристаллической решеткой, то их поведение можно описывать одночастичной матрицей плотности $\hat{\rho}$. Уравнение Шредингера для матрицы плотности имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \hat{H} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H}, \quad (1)$$

где $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hbar \hat{V}$ — гамильтониан нашей системы, $\hat{H}_0$ — гамильтониан парамагнитной системы в отсутствие внешних полей и $\hbar \hat{V}$ — энергия взаимодействия с внешними полями излучения:

$$\hat{V} = \hat{\psi}^{\pm} e^{\mp i\omega_1 t} + \hat{\varphi}^{\pm} e^{\mp i\omega_2 t}; \quad \hat{\psi} \gg \hat{\varphi}; \quad (2)$$

$$\omega_1 \simeq \omega_{13} = \omega_{24}; \quad \omega_2 \simeq \omega_{23}.$$

Согласно методике, развитой в [2], для вычисления магнитной проницаемости нам важна матрица плотности $\bar{\rho}$, усредненная по соответствующему времени релаксации. Тогда для $\bar{\rho}$ уравнение Шредингера принимает вид:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H} \bar{\rho}(t) - \bar{\rho}(t) \hat{H}] + \frac{\delta \bar{\rho}}{\delta t} \quad (3)$$

($\delta \bar{\rho} / \delta t$ — изменение матрицы плотности из-за релаксационных процессов). Для парамагнитных веществ [3]

$$\frac{\delta \bar{\rho}}{\delta t} = \left[\frac{\bar{\rho} - \bar{\rho}_0}{\pi} \right]_{mn}, \quad (4)$$

где при $m \neq n$ $\tau_{mn} = \tau_1$, а при $m = n$ $\tau_{mn} = \tau_2$, τ_1 — время спин-решеточной релаксации, τ_2 — время спин-спиновой релаксации, ρ_0 — значение матрицы плотности при тепловом равновесии в отсутствие поля: $\rho_0 = \exp(-\hat{H}_0/kT)/\text{Sp} \exp(-\hat{H}_0/kT)$ (k — постоянная Больцмана, T — температура).

Введем величину $D(t) = \bar{\rho}(t) - \rho_0(t)$, которая дает отклонение усредненной матрицы плотности $\bar{\rho}(t)$ от мгновенного значения ρ_0 при тепловом равновесии.

В представлении, в котором H_0 диагонален, уравнение (3) преобразуется к виду:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega_{mn} + \frac{1}{\tau_{mn}}\right) D_{mn}(t) = -\frac{\partial}{\partial t} [\rho_0(t)]_{mn} - i \sum_{k=1}^4 (V_{mk} D_{kn} - D_{n,k} V_{kn}), \quad (5)$$

где $\omega_{mk} = (E_m - E_n)/\hbar$. Используя выражение для $[\rho_0(t)]_{mn}$, полученное в [2] в предположении, что $\hbar V/kT \ll 1$, получим для D следующее уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega_{mn} + \frac{1}{\tau_{mn}}\right) D_{mn} + i \sum_{k=1}^4 (V_{mk} D_{kn} - D_{mk} V_{kn}) = \frac{\rho_n^{(0)} - \rho_m^{(0)}}{\omega_{mn}} \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{mn}; \quad (6)$$

$$[\rho_0(t)]_{mn} = \rho_m^{(0)} \delta_{mn} + (\rho_m^{(0)} - \rho_n^{(0)}) \frac{V_{mn}}{\hbar \omega_{mn}}. \quad (7)$$

Уравнение (6) для случая $\tau_1 = \tau_2$, $k = 3$ совпадает с уравнением, полученным в работе [4].

Пренебрегая процессами установления, будем искать решение уравнения (6) в виде ряда, который содержит резонансные члены для всех переходов:

$$\hat{D} = \hat{R} + \hat{S}^{\pm} e^{\mp i\omega_1 t} + \hat{T}^{\pm} e^{\mp i\omega_2 t} + \hat{Q}^{\pm} e^{\mp i(\omega_1 - \omega_2)t} + \hat{U}^{\pm} e^{\mp i(2\omega_1 - \omega_2)t}, \quad (8)$$

аналогично тому, как это сделано в работе [4]. Для определения $\hat{R}$, $\hat{S}^{\pm}$, $\hat{T}^{\pm}$, $\hat{Q}^{\pm}$, $\hat{U}^{\pm}$ получим следующую систему матричных уравнений:

$$\gamma_1^{mn} S_{mn}^{+} + \sum_{k=1}^4 (\psi_{mk}^{+} R_{kn} - R_{mk} \psi_{kn}^{+}) + \sum_{k=1}^4 (\varphi_{mk}^{+} Q_{kn}^{+} - Q_{mk}^{+} \varphi_{kn}^{+}) = -\beta_1^{nm} \psi_{mn}^{+};$$

$$\gamma_2^{mn} S_{mn}^{-} + \sum_{k=1}^4 (\psi_{mk}^{-} R_{kn} - R_{mk} \psi_{kn}^{-}) + \sum_{k=1}^4 (\varphi_{mk}^{-} Q_{kn}^{-} - Q_{mk}^{-} \varphi_{kn}^{-}) = \beta_1^{nm} \psi_{mn}^{-};$$

$$\gamma_3^{mn} T_{mn}^{+} + \sum_{k=1}^4 (\varphi_{mk}^{+} R_{kn} - R_{mk} \varphi_{kn}^{+}) + \sum_{k=1}^4 (\psi_{mk}^{+} Q_{kn}^{-} - Q_{mk}^{-} \psi_{kn}^{+}) = -\beta_2^{nm} \varphi_{mn}^{+};$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_4^{mn} T_{mn}^- + \sum_{k=1}^4 (\varphi_{mk}^- R_{kn} - R_{mk} \varphi_{kn}^-) + \sum_{k=1}^4 (\psi_{mk}^- Q_{kn}^+ - Q_{mk}^+ \psi_{kn}^-) = \beta_2^{nm} \varphi_{mn}^-; \\
& \gamma_5^{mn} Q_{mn}^+ + \sum_{k=1}^4 (\varphi_{mk}^- S_{kn}^+ - S_{mk}^+ \varphi_{kn}^-) + \sum_{k=1}^4 (\psi_{mk}^+ T_{kn}^- - T_{mk}^- \psi_{kn}^+) + \\
& \quad + \sum_{k=1}^4 (\psi_{mk}^- U_{kn}^+ - U_{mk}^+ \psi_{kn}^-) = 0; \\
& \gamma_6^{mn} Q_{mn}^- + \sum_{k=1}^4 (\varphi_{mk}^+ S_{kn}^- - S_{mk}^- \varphi_{kn}^+) + \sum_{k=1}^4 (\psi_{mk}^- T_{kn}^+ - T_{mk}^+ \psi_{kn}^-) + \\
& \quad + \sum_{k=1}^4 (\psi_{mk}^+ U_{kn}^- - U_{mk}^- \psi_{kn}^+) = 0; \\
& \gamma_7^{mn} U_{mn}^+ + \sum_{k=1}^4 (\psi_{mk}^+ Q_{kn}^- - Q_{mk}^- \psi_{kn}^+) = 0; \\
& \gamma_8^{mn} U_{mn}^- + \sum_{k=1}^4 (\psi_{mk}^- Q_{kn}^+ - Q_{mk}^+ \psi_{kn}^-) = 0; \\
& \gamma_9^{mn} R_{mn} + \sum_{k=1}^4 (\psi_{mk}^+ S_{kn}^- - S_{mk}^- \psi_{kn}^+) + \sum_{k=1}^4 (\varphi_{mk}^- T_{kn}^+ - T_{mk}^+ \varphi_{kn}^-) = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

В последнем уравнении по двойным знакам ведется суммирование. Выше введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\gamma_1^{mn} &= -\omega_1 + \omega_{mn} - i/\tau_{mn}; \\
\gamma_2^{mn} &= \omega_1 + \omega_{mn} - i/\tau_{mn}; \\
\gamma_3^{mn} &= -\omega_2 + \omega_{mn} - i/\tau_{mn}; \\
\gamma_4^{mn} &= \omega_2 + \omega_{mn} - i/\tau_{mn}; \\
\gamma_5^{mn} &= -(\omega_1 - \omega_2) + \omega_{mn} - i/\tau_{mn}; \\
\gamma_6^{mn} &= (\omega_1 - \omega_2) + \omega_{mn} - i/\tau_{mn}; \\
\gamma_7^{mn} &= -(2\omega_1 - \omega_2) + \omega_{mn} - i/\tau_{mn}; \\
\gamma_8^{mn} &= (2\omega_1 - \omega_2) + \omega_{mn} - i/\tau_{mn}; \\
\gamma_9^{mn} &= \omega_{mn} - i/\tau_{mn}; \\
\beta_1^{mn} &= \frac{\rho_m^{(0)} - \rho_n^{(0)}}{\omega_{mn}} \omega_1; \\
\beta_2^{mn} &= \frac{\rho_m^{(0)} - \rho_n^{(0)}}{\omega_{mn}} \omega_2.
\end{aligned} \tag{10}$$

Резонансная часть среднего магнитодипольного момента единицы объема на частоте ω_{23} равна

$$P_{23} = 2\text{Re } \mu_{32} T_{23}^+ e^{-i\omega_2 t} = \text{Sp}(\hat{\mu} \hat{D}). \quad (11)$$

Сравнивая это выражение с определением магнитной проницаемости [2]

$$P_{23} = \text{Re} (\chi_{23} H_- e^{-i\omega_2 t}), \quad (12)$$

получим следующее выражение для χ_{23} :

$$\chi_{23} = 2\mu_{32} T_{23}^+ / H_- . \quad (13)$$

Таким образом, задача о вычислении χ_{23} сводится к решению системы (9) относительно T_{23}^+ , которое определяется системой 20 уравнений, входящих в (9).

В систему, определяющую T_{23}^+ , входят наряду с резонансными и нерезонансные члены T_{14}^- , T_{41}^- , U_{32}^+ , U_{23}^- . Сравнение их с соответствующими резонансными членами показывает, что они дают поправку порядка $\gamma_{\text{рез}}^{mn} / \gamma_{\text{нерез}}^{mn} \ll 1$, поскольку для большинства веществ ширина линии парамагнитного резонанса меньше резонансной частоты. Оценка резонансных членов Q_{12}^+ , Q_{21}^- и U_{14}^+ , U_{41}^- показывает, что они порядка T_{23}^+ .

Таким образом, в системе четырех уравнений нельзя пренебрегать членами $Q^\pm$ и $U^\pm$, которые в приближении теории возмущения соответствуют двух- и трехфотонным переходам. Окончательно получим, что для определения χ_{23} необходимо решить систему 16 уравнений:

$$\begin{aligned} \gamma_1^{13} S_{13}^+ + (R_{33} - R_{11}) \psi_{13} - Q_{12}^+ \varphi_{23} &= -\beta_1^{31} \psi_{13}; \\ \gamma_1^{24} S_{24}^+ + (R_{44} - R_{22}) \psi_{24} + \varphi_{23} Q_{34}^+ &= -\beta_1^{42} \psi_{24}; \\ \gamma_2^{31} S_{31}^- + (R_{11} - R_{33}) \psi_{13} + \varphi_{23} Q_{21}^- &= \beta_1^{13} \psi_{13}; \\ \gamma_2^{42} S_{42}^- + (R_{22} - R_{44}) \psi_{24} - Q_{43}^- \varphi_{23} &= \beta_1^{24} \psi_{24}; \\ \gamma_3^{23} T_{23}^+ + (R_{33} - R_{22}) \varphi_{23} - Q_{21}^- \psi_{13} + \psi_{24} Q_{43}^- &= -\beta_2^{32} \varphi_{23}; \\ \gamma_4^{32} T_{32}^- + (R_{22} - R_{33}) \varphi_{23} + \psi_{13} Q_{12}^+ - Q_{34}^+ \psi_{24} &= \beta_2^{23} \varphi_{23}; \\ \gamma_5^{12} Q_{12}^+ - S_{13}^+ \varphi_{23} + \psi_{13} T_{32}^- - U_{14}^+ \psi_{24} &= 0; \\ \gamma_5^{34} Q_{34}^+ + S_{24}^+ \varphi_{23} + U_{14}^+ \psi_{13} - T_{32}^- \psi_{24} &= 0; \\ \gamma_6^{21} Q_{21}^- + S_{31}^- \varphi_{23} - T_{23}^+ \psi_{13} + \psi_{24} U_{41}^- &= 0; \\ \gamma_6^{43} Q_{43}^- - S_{42}^- \varphi_{23} + \psi_{24} T_{23}^+ - U_{41}^- \psi_{13} &= 0; \\ \gamma_7^{14} U_{14}^+ + \psi_{13} Q_{34}^+ - Q_{12}^+ \psi_{24} &= 0; \\ \gamma_8^{41} U_{41}^- + \psi_{24} Q_{21}^- - Q_{43}^- \psi_{13} &= 0; \\ \gamma_9 R_{11} + \psi_{13} S_{31}^- - S_{13}^+ \psi_{13} &= 0; \\ \gamma_9 R_{44} + \psi_{24} S_{24}^+ - S_{42}^- \psi_{24} &= 0; \\ \gamma_9 R_{22} + \psi_{24} S_{42}^- - S_{24}^+ \psi_{24} + \varphi_{23} T_{32}^- - T_{23}^+ \varphi_{23} &= 0; \\ \gamma_9 R_{33} + \psi_{13} S_{31}^+ - S_{31}^- \psi_{13} + \varphi_{23} T_{23}^+ - T_{32}^- \varphi_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Выше учитывалось, что из всех ψ_{mn} и φ_{mn} отличны от нуля только $\psi_{13}^+ = \psi_{13}^- = \psi_{31}^+ = \psi_{31}^-$, $\psi_{24}^+ = \psi_{42}^+ = \psi_{42}^- = \psi_{24}^-$ и $\varphi_{23}^+ = \varphi_{32}^+ = \varphi_{32}^- = \varphi_{23}^-$.

Решение системы (14) (в приближении, что членами с φ^2 можно пренебречь по сравнению с членами, содержащими φ) дает для T_{23}^+ следующее выражение:

$$T_{23}^+ = -\varphi \frac{\left[\begin{array}{ccc|c} \gamma_6^{21} & 0 & \psi_{24} & \\ \beta_2^{23} & 0 & \gamma_6^{43} - \psi_{13} & \\ \psi_{24} & -\psi_{13} & \gamma_8^{41} & \end{array} \right] + \beta_1^{24} \gamma_9 \psi_{24} \delta_1 + \beta_1^{13} \gamma_9 \psi_{13} \delta_2}{\begin{vmatrix} \gamma_3^{23} & -\psi_{13} & \psi_{24} & 0 \\ -\psi_{13} & \gamma_6^{21} & 0 & \psi_{24} \\ \psi_{24} & 0 & \gamma_6^{43} & -\psi_{13} \\ 0 & \psi_{24} & -\psi_{13} & \gamma_8^{41} \end{vmatrix}}, \quad (15)$$

где

$$\delta_1 = \frac{\left[\begin{array}{ccc|c} -\psi_{13} & \psi_{24} & 0 & \\ \gamma_1^{24} \gamma_9 & \gamma_6^{21} & 0 & \psi_{24} \\ \psi_{24} & -\psi_{13} & \gamma_8^{41} & \end{array} \right] + \psi_{24} (\gamma_2^{42} + \gamma_1^{24})}{\begin{vmatrix} \gamma_1^{24} & 0 & -\psi_{24} & \psi_{24} \\ 0 & \gamma_2^{42} & \psi_{24} & -\psi_{24} \\ -\psi_{24} & \psi_{24} & \gamma_9 & 0 \\ \psi_{24} & -\psi_{24} & 0 & \gamma_9 \end{vmatrix}}; \quad (16)$$

$$\delta_2 = \frac{\left[\begin{array}{ccc|c} -\psi_{13} & \psi_{24} & 0 & \\ \gamma_1^{13} \gamma_9 & 0 & \gamma_6^{43} - \psi_{13} & \\ \psi_{24} & -\psi_{13} & \gamma_8^{41} & \end{array} \right] + \psi_{13} (\gamma_2^{31} + \gamma_1^{13})}{\begin{vmatrix} \gamma_1^{13} & 0 & -\psi_{13} & \psi_{13} \\ 0 & \gamma_2^{31} & \psi_{13} & -\psi_{13} \\ -\psi_{13} & \psi_{13} & \gamma_9 & 0 \\ \psi_{13} & -\psi_{13} & 0 & \gamma_9 \end{vmatrix}}. \quad (17)$$

Подставляя решение (15) в (13), получим для χ_{23} следующее выражение:

$$\chi_{23} = -\frac{\mu_{23}^2}{\hbar} \beta_2^{23} \frac{\left[\begin{array}{ccc|c} \gamma_6^{21} & 0 & \psi_{24} & \\ 0 & \gamma_6^{43} & -\psi_{13} & \\ \psi_{24} & -\psi_{13} & \gamma_8^{41} & \end{array} \right] + \frac{\beta_1^{24}}{\beta_2^{23}} \gamma_9 \psi_{24} \delta_1 + \frac{\beta_1^{13}}{\beta_2^{23}} \gamma_9 \psi_{13} \delta_2}{\begin{vmatrix} \gamma_3^{23} & -\psi_{13} & \psi_{24} & 0 \\ -\psi_{13} & \gamma_6^{21} & 0 & \psi_{24} \\ \psi_{24} & 0 & \gamma_6^{43} & -\psi_{13} \\ 0 & \psi_{24} & -\psi_{13} & \gamma_8^{41} \end{vmatrix}}. \quad (18)$$

Магнитная проницаемость трехуровневой системы получается из выражения (18) при обращении в нуль матричных элементов с индексами $i4$ и $4i$ или $i1$ и $1i$:

$$\chi_{23} = -\frac{\mu_{23}^2}{\hbar} \beta_2^{23} \frac{\left[-\gamma_6^{21} + \frac{\beta_1^{13}}{\beta_2^{23}} \gamma_9 \psi_{13}^2 \delta_2 \right]}{\gamma_6^{21} \gamma_3^{23} - \psi_{13}^2};$$

$$\delta_2 = \frac{[\gamma_1^{13} \gamma_9 + (\gamma_2^{31} + \gamma_1^{13}) \gamma_6^{21}]}{\begin{vmatrix} \gamma_1^{13} & 0 & -\psi_{13} & \psi_{13} \\ 0 & \gamma_2^{31} & \psi_{13} & -\psi_{13} \\ -\psi_{13} & \psi_{13} & \gamma_9 & 0 \\ \psi_{13} & -\psi_{13} & 0 & \gamma_9 \end{vmatrix}}. \quad (19)$$

Заметим, что такое же выражение получается для χ_{23} в четырехуровневой системе, когда $\psi_{24} = 0$.

Выделим действительную и мнимую части магнитной проницаемости:

$$\chi'_{23} = \frac{\mu_{23}^2}{\hbar} \beta_2^{23} \frac{\text{Im } N \text{Im } \vartheta^* - \text{Re } \vartheta^* \text{Re } N}{\vartheta \vartheta^*}; \quad (20)$$

$$\chi''_{23} = -\frac{\mu_{23}^2}{\hbar} \beta_2^{23} \frac{\text{Re } \vartheta^* \text{Im } N + \text{Re } N \text{Im } \vartheta^*}{\vartheta \vartheta^*}, \quad (21)$$

где ϑ^* — матрица, сопряженная матрице знаменателя, и N — выражение, стоящее в квадратных скобках формулы (18).

Исследуем χ_{23} для системы с тремя и четырьмя уровнями в случае, когда $\psi_{13}^2, \psi_{24}^2 \gg (\Delta\omega_{13})^2, (\tau_{mn}\tau_2)^{-1}$. При этом для четырехуровневой системы

$$\vartheta^* = (\Delta\omega_{23})^4 - 4(\Delta\omega_{23})^3 (\Delta\omega_{13}) - 2(\Delta\omega_{23})^2 (\psi_{13}^2 + \psi_{24}^2) + 4(\Delta\omega_{23}) (\Delta\omega_{13}) (\psi_{24}^2 + \psi_{13}^2) +$$

$$+ (\psi_{24}^2 - \psi_{13}^2)^2 + \psi_{13}^2 \left(\frac{1}{\tau_{23} \tau_{12}} + \frac{1}{\tau_{34} \tau_{14}} \right) + \psi_{24}^2 \left(\frac{1}{\tau_{12} \tau_{14}} + \frac{1}{\tau_{34} \tau_{23}} \right) -$$

$$- i \left[\Delta\omega_{23} \left(\frac{1}{\tau_{21}} + \frac{1}{\tau_{14}} + \frac{1}{\tau_{34}} + \frac{1}{\tau_{23}} \right) (\psi_{24}^2 + \psi_{13}^2) + (\Delta\omega_{23})^2 (\Delta\omega_{13}) \times \right.$$

$$\times \left[\frac{3}{\tau_{12}} + \frac{2}{\tau_{14}} + \frac{3}{\tau_{34}} + \frac{4}{\tau_{23}} \right] - (\Delta\omega_{23})^3 \left[\frac{1}{\tau_{34}} + \frac{1}{\tau_{12}} + \frac{1}{\tau_{14}} + \frac{1}{\tau_{23}} \right] -$$

$$\left. - \Delta\omega_{13} \left(\frac{1}{\tau_{23}} + \frac{1}{\tau_{14}} + \frac{2}{\tau_{12}} \right) \psi_{24}^2 - \Delta\omega_{13} \left(\frac{1}{\tau_{23}} + \frac{1}{\tau_{14}} + \frac{2}{\tau_{43}} \right) \psi_{13}^2 \right]; \quad (22)$$

$$N = (\Delta\omega_{23})^3 \left[1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right] - (\Delta\omega_{23})^2 \Delta\omega_{13} \frac{\omega_1 \tau_{24} + \tau_{13}}{4\tau} -$$

$$- \Delta\omega_{23} (\psi_{24}^2 + \psi_{13}^2) \left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) + \Delta\omega_{13} (\psi_{13}^2 + \psi_{24}^2) - i \left[(\Delta\omega_{23})^2 \frac{\omega_1}{2\omega_2 \tau} - \right.$$

$$\left. - \Delta\omega_{23} \Delta\omega_{13} \frac{\omega_1}{4\omega_2 \tau} \left[6 + \frac{\tau_{24}}{\tau_{12}} + \frac{\tau_{24}}{\tau_{14}} + \frac{\tau_{13}}{\tau_{43}} + \frac{\tau_{13}}{\tau_{14}} \right] - \frac{1}{\tau_{12}} \psi_{13}^2 - \frac{1}{\tau_{34}} \psi_{24}^2 \right];$$

для трехуровневой системы:

$$\vartheta^* = (\Delta\omega_{23})^2 - (\Delta\omega_{23})\Delta\omega_{13} - \psi_{13}^2 + i \left[\Delta\omega_{23} \left(\frac{1}{\tau_{23}} + \frac{1}{\tau_{13}} \right) + \frac{\Delta\omega_{13}}{\tau_{23}} \right]; \quad (23)$$

$$N = -\Delta\omega_{13} + \Delta\omega_{23} - \frac{1}{\tau} \frac{\beta_1^{13}}{\beta_2^{23}} (\tau_{13}\Delta\omega_{13} - 2\tau\Delta\omega_{23}) - i \left[-\frac{1}{\tau_{12}} + \frac{1}{\tau} \frac{\beta_1^{13}}{\beta_2^{23}} \right].$$

В случае $\Delta\omega_{23} \approx 0$, $\Delta\omega_{13} \approx 0$, когда частоты сигнала и подсветки совпадают с частотой перехода, получим:

$$\chi_{23}'' = -\frac{\mu_{23}^2}{\hbar} \beta_2^{23} \frac{\psi_{13}^2/\tau_{12} + \psi_{24}^2/\tau_{34}}{(\psi_{24}^2 - \psi_{13}^2)^2 + \psi_{13}^2 (1/\tau_{23}\tau_{12} + 1/\tau_{34}\tau_{14}) + \psi_{24}^2 (1/\tau_{12}\tau_{14} + 1/\tau_{34}\tau_{23})} \quad (24)$$

для четырехуровневой системы и

$$\chi_{23}'' = -\frac{\mu_{23}^2}{\hbar} \beta_2^{23} \frac{-1/\tau_{12} + \beta_1^{13}/\beta_2^{23} \tau}{\psi_{13}^2} \quad (25)$$

для трехуровневой системы.

Из (24) видно, что в случае насыщения в парамагнитной системе с четырьмя уровнями всегда $\chi_{23}'' < 0$ и не зависит от соотношения между ω_{13} и ω_{23} . Последнее обстоятельство особенно ценно для построения усилителей миллиметрового диапазона, поскольку в этом случае можно брать частоту подсветки, мало отличающуюся от частоты сигнала.

Независимость усиления в системе с четырьмя уровнями от соотношения времен релаксации для различных переходов позволяет значительно расширить класс веществ, которые можно использовать для получения усиления, подбирая их только по энергетической структуре уровней.

Для получения усиления сигнала в парамагнитной системе с тремя уровнями необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\tau_{12}} < \frac{1}{\tau} \frac{\omega_{13}}{\omega_{23}} \quad (26)$$

($\omega_{13} > \omega_{23}$ по условию), которое не совпадает с критерием, полученным Бломбергом [5]. Из (24) и (25) следует, что

$$\frac{(\chi_{23}'')_4}{(\chi_{23}'')_3} \approx \frac{\psi_{13}^2 \tau_{14} \tau_{23} \tau_{12} \tau \omega_{23}}{(\tau_{23} + \tau_{14})(\tau_{12}\omega_{13} - \tau\omega_{23})} > 1,$$

т. е. система с четырьмя уровнями позволяет получить значительно большее произведение $\sqrt{G} \Delta f$ (где G —усиление по мощности), чем трехуровневая система.

Сравнение выражений (24) и (25) также показывает, что при $\psi_{13}^2 \approx \psi_{24}^2$ (χ_{23}'') четырехуровневой системы не зависит от мощности подсветки, в то время как χ_{23}'' трехуровневой системы уменьшается с увеличением ψ_{13}^2 , что наблюдалось на опыте [6]. В парамагнитной системе с тремя уровнями уменьшение χ_{23}'' с ростом приложенной мощности на частоте подсветки ω_{13} связано с наличием в решении (8) резонансного члена $Q^{\pm} e^{\mp i(\omega_{13} - \omega_0)t}$ для перехода между уровнями 1 и 2. Этот член отражает тот факт, что переход между уровнями 1 и 3 может происходить двумя путями: непосредственно между уровнями

1 и 3 и через вспомогательный уровень 2, когда переход 1—3 осуществляется двумя переходами между уровнями 1—2 и затем 2—3. Поскольку время спин-решеточной релаксации τ_{12} между уровнями 1 и 2 должно быть больше времени τ_{23} [7], то на уровне 2 происходит уменьшение населенности. В пределе при $\psi_{13} \rightarrow \infty$ этот механизм приводит к выравниванию населенностей уровней 2 и 3, что соответствует $\chi_{23}^* = 0$.

В четырехуровневой системе механизм двойных переходов действует одновременно на оба уровня и при $\psi_{24} \approx \psi_{13}$ в одинаковой степени. Поэтому в этом случае χ_{23}^* не зависит от мощности подсветки.

Отметим также, что при $\mu_{24} \ll \mu_{13}$ наличие четвертого уровня в системе не приводит к изменению величины магнитной проницаемости перехода 2—3 и выражение для нее получается таким же, как в трехуровневой системе.

Исследуем форму линии поглощения. Условие для нахождения экстремумов χ_{23}^* приводит к уравнению пятого порядка, решить которое не представляется возможным. Анализ его методом Штурма показывает, что оно имеет три действительных корня. Для нахождения $\Delta\omega_{23}$, при которых χ_{23}^* имеет максимум, представим (19) в виде двух слагаемых:

$$\chi_{23}^* = -\frac{\mu_{23}^2}{2\psi_{13}\hbar} \beta_2^{23} \left[\frac{1}{\Delta\omega_{23} - \psi_{13} + (i/2)(1/\tau_{21} + 1/\tau_{23})} + \frac{-1}{\Delta\omega_{23} + \psi_{13} + (i/2)(1/\tau_{21} + 1/\tau_{23})} \right] \left[-\gamma_6^{21} + \frac{\beta_1^{13}}{\beta_2^{23}} \gamma_9 \psi_{13}^2 \delta_2 \right]$$

и исследуем на экстремум каждое слагаемое в отдельности. При этом получим, что χ_{23}^* имеет два максимума, положение которых соответствует

$$\begin{aligned} (\Delta\omega_{23})_1 &= \psi_{13} (1 - \sqrt{2}) - \Delta\omega_{13} \left(\frac{\tau_{11}}{2\tau_{23}} + \frac{\tau_{13}}{2\tau_{12}} + 1 \right); \\ (\Delta\omega_{23})_2 &= -\psi_{13} (1 - \sqrt{2}) - \Delta\omega_{13} \left(\frac{\tau_{13}}{2\tau_{23}} + \frac{\tau_{13}}{2\tau_{12}} + 1 \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Для четырехуровневой системы экстремумы описываются уравнением 13 степени. Откуда следует, что линия поглощения имеет по крайней мере один максимум.

Рассмотрим действительную часть χ_{23}^* . Для трехуровневой системы она описывается многочленом третьей степени:

$$\begin{aligned} (\Delta\omega_{23})^3 - (\Delta\omega_{23})^2 \frac{\tau_{13}}{\tau} \frac{\omega_{13}}{\omega_{13} + \omega_{23}} \Delta\omega_{13} - (\Delta\omega_{23}) \left[\psi_{13}^2 - (\Delta\omega_{13})^2 \frac{\tau_{13}}{\tau} \frac{\omega_{13}}{\omega_{23} + \omega_{13}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\tau} \frac{\omega_{13}}{\omega_{13} + \omega_{23}} \left(\frac{1}{\tau_{23}} + \frac{1}{\tau_{12}} \right) \right] + \psi_{13}^2 \frac{\tau_{13}}{\tau} \frac{\omega_{13}}{\omega_{13} + \omega_{23}} \Delta\omega_{13}. \end{aligned} \quad (28)$$

Дискриминант этого уравнения отрицательный; поэтому оно имеет три действительных корня, которые легко находятся по формулам Кардана:

$$(\Delta\omega_{23})_1 = -2rcos \frac{\Phi}{3} - \frac{b}{3};$$

$$(\Delta\omega_{23})_2 = 2r \cos \frac{\pi - \Phi}{3} - \frac{b}{3};$$

$$(\Delta\omega_{23})_3 = 2r \cos \frac{\pi + \Phi}{3} - \frac{b}{3},$$

где

$$b = -\frac{\tau_{13}}{\tau} \frac{\omega_{13}}{\omega_{13} + \omega_{23}} \Delta\omega_{13};$$

$$\Phi = \arccos \left(\frac{2}{3} \frac{\tau_{13}}{\tau} \frac{\omega_{13}}{\omega_{13} + \omega_{23}} \frac{\Delta\omega_{13}}{\psi_{13}} \right).$$

Корни действительной части для четырехуровневой системы описываются уравнением седьмой степени. На основании общих соображений можно сказать, что оно имеет по крайней мере один действительный корень и при $\Delta\omega_{13} > 0$ может иметь максимум три положительных действительных корня и четыре отрицательных, при $\Delta\omega_{13} < 0$ — наоборот.

Автор выражает благодарность В. М. Файну и Я. И. Ханину за дискуссию и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. R. Ditchfield, P. A. Forrester, Phys. Rev. Letters, **1**, 448 (1958).
2. R. Karplus, J. Schwinger, Phys. Rev., **73**, 1020 (1948).
3. В. М. Файн, ЖЭТФ, **33**, 1290 (1957).
4. В. М. Конторович, А. М. Прохоров, ЖЭТФ, **33**, 1428 (1957).
5. N. Bloembergen, Phys. Rev., **104**, 324 (1956).
6. A. L. McWhorter, J. W. Meyer, Phys. Rev., **109**, 312 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
7 апреля 1960 г.

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ОСЦИЛЛЯТОРА В ТЕРМОСТАТЕ

В. Н. Луговой

Получено уравнение для среднего значения координаты осциллятора с переменным коэффициентом упругости $K(t)$, находящегося в термостате и подверженного воздействию внешней силы. В случае $K(t) = K - \alpha \cos(pt)$ и при условии $\sqrt{K/m} = p/2$ (m — масса осциллятора) найдена мнимая часть поляризуемости $\chi''(\omega)$ (ω — частота внешней монохроматической силы) в зависимости от глубины модуляции коэффициента упругости.

Пусть некоторый объем, заполненный газом из осцилляторов, находится в термостате. Предположим далее, что коэффициент упругости K каждого осциллятора является функцией времени t . нас будут интересовать поглощающие свойства такой среды. Известно, что если $K(t) \equiv \text{const}$, то линии поглощения имеют лоренцовскую форму (см., например, [1]). Мы особо рассмотрим случай $K(t) = K - \alpha \cos(pt)$, что даст возможность проследить изменение этой формы при введении модуляции (α). В частности, из изложенного ниже следует, что при некотором значении α линия поглощения переходит в линию излучения, т. е. рассматриваемый газ обладает в этом случае отрицательными потерями.

Интересующие нас свойства среды определяются мнимой частью $\chi''(\omega)$ поляризуемости. Обозначим через $\bar{x}(t)$ среднее значение координаты одного осциллятора рассматриваемого газа. Тогда, если на него действует внешняя сила $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$, то коэффициент при $\sin(\omega t)$ из разложения в ряд Фурье периодического отклика $\bar{x}(t)$ будет равен $\chi''(\omega) f_0$. При этом мнимая часть поляризуемости всей среды определится произведением $N \chi''(\omega)$, где N — число осцилляторов в среде. Таким образом, надо найти $\bar{x}(t)$ при воздействии внешней силы $f(t)$.

Мы предположим, что в нашем газе имеют место „сильные“ соударения со средним временем τ между соударениями [2,3]. При этом под „сильными“ понимаются такие соударения, когда значение матрицы плотности осциллятора $\rho(t)$ сразу после соударения совпадает с ее равновесным значением в момент соударения:

$$\rho(t) = \rho_0(t) \equiv \frac{\exp\{-\hat{H}(t)/kT\}}{\text{Sp} \exp\{-\hat{H}(t)/kT\}}, \quad (1)$$

где $\hat{H}(t)$ — гамильтониан осциллятора в промежуток времени между соударениями. При наличии внешней силы он равен

$$\hat{H}(t) = \hat{p}^2/2m + K(t) \hat{x}^2/2 - \hat{x}f(t). \quad (2)$$

Чтобы определить $\bar{x}(t)$, используем метод квантовомеханической матрицы плотности, развитый Карплусом и Швингером [2,3]. (Заметим сразу, что окончательный результат не содержит постоянной Планка

и может быть получен классически. Однако в данном случае нам представляется более интересным квантовое рассмотрение.) Применительно к осциллятору имеем:

$$\bar{x}(t) = \text{Sp} \{ \hat{x} \bar{\rho}(t) \}, \quad (3)$$

где $\bar{\rho}(t) = D(t) + \rho_0(t)$ и матрица $D(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial D(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t) D(t)] - \frac{1}{\tau} D(t) - \frac{\partial}{\partial t} \rho_0(t). \quad (4)$$

Установим, что $\bar{x}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка. Для этого мы воспользуемся выражением (3), а также равенством

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H} \bar{\rho}] - \frac{1}{\tau} (\bar{\rho} - \rho_0), \quad (5)$$

которое эквивалентно соотношению (4). Дифференцируя $\bar{x}(t)$ по времени, имеем:

$$\dot{\bar{x}} = -\frac{i}{\hbar} \text{Sp} \{ \hat{x} [\hat{H} \bar{\rho}] \} - \frac{1}{\tau} \text{Sp} \{ \hat{x} \bar{\rho} \} + \frac{1}{\tau} \text{Sp} \{ \hat{x} \rho_0 \}. \quad (6)$$

Используя свойства следа матрицы, находим

$$\text{Sp} \{ \hat{x} [\hat{H} \bar{\rho}] \} = \text{Sp} \{ [\hat{x} \hat{H}] \bar{\rho} \} = \frac{i\hbar}{m} \text{Sp} \{ \hat{p} \bar{\rho} \}. \quad (7)$$

Далее, подставляя (7) в (6), получаем:

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\bar{p}}{m} - \frac{1}{\tau} \bar{x} + \frac{1}{\tau} \text{Sp} \{ \hat{x} \rho_0 \}. \quad (8)$$

Дифференцируя по времени выражение (8) и пользуясь аналогично свойствами следа матрицы, можно убедиться в справедливости уравнения:

$$m \ddot{\bar{x}} + \frac{2m}{\tau} \dot{\bar{x}} + k(t) \bar{x} = f(t) + \frac{m}{\tau^2} \text{Sp} \{ \hat{x} \rho_0 \} + \frac{m}{\tau} \text{Sp} \{ \dot{\hat{x}} \rho_0 \}, \quad (9)$$

где $k(t) = K(t) + m/\tau^2$.

Теперь надо найти величину $\text{Sp} \{ \hat{x} \rho_0 \}$. Мы не будем вычислять ее с помощью формулы (1), а используем для этого другой прием. Дифференцируя дважды по времени выражение $\chi(t) = \text{Sp} \{ \hat{x} D(t) \}$ и используя при этом равенство (4), получаем (аналогично тому, как было получено соотношение (9)):

$$m \ddot{\chi} + \frac{2m}{\tau} \dot{\chi} + k(t) \chi = -\frac{m}{\tau} \text{Sp} \{ \dot{\hat{x}} \rho_0 \} - m \text{Sp} \{ \ddot{\hat{x}} \rho_0 \}. \quad (10)$$

Если учесть соотношение $\chi(t) = \bar{x}(t) - \text{Sp} \{ \hat{x} \rho_0 \}$, то легко видеть, что равенство (10) принимает вид:

$$m \ddot{\bar{x}} + \frac{2m}{\tau} \dot{\bar{x}} + k(t) \bar{x} = k(t) \text{Sp} \{ \hat{x} \rho_0 \} + \frac{m}{\tau} \text{Sp} \{ \dot{\hat{x}} \rho_0 \}. \quad (11)$$

Сравнивая правые части равенств (9) и (11), находим:

$$\text{Sp } \{\hat{x} \rho_0\} = \frac{f(t)}{K(t)} \quad (12)$$

и окончательно для среднего значения координаты осциллятора получаем уравнение:

$$m\ddot{\bar{x}} + \frac{2m}{\tau} \dot{\bar{x}} + k(t) \bar{x} = f(t) \frac{k(t)}{K(t)} + \frac{m}{\tau} \frac{d}{dt} \frac{f(t)}{K(t)}. \quad (13)$$

Это соотношение представляет наш основной результат. Мы видим, что правая часть (13) является своеобразной интерференцией внешней силы и переменного коэффициента упругости осциллятора, т. е. постулат „сильных“ соударений не приводит к привычной (в вопросах, связанных с осциллятором) картине, когда в правой части стоит просто сила.

Ниже мы ограничимся случаем $K(t) = K - \alpha \cos(pt)$. Так как соответствующее однородное уравнение в этом случае хорошо изучено [4], то частное решение уравнения (13) всегда может быть получено в квадратурах. Величина $x''(\omega)$ определится указанным в начале статьи способом, если положить $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$ и найти периодическое решение $\bar{x}(t)$ уравнения (13).

Рассмотрим в качестве примера выражение $x''(\omega)$ для случая $\sqrt{K/m} = p/2$. При этом мы предположим, что $1/\tau p \ll 1$ (практически интересный случай) и $q = 2\alpha/mp^2 \ll 1$ (случай малой модуляции). Ввиду того, что соответствующие вычисления громоздки, приведем сразу результат. При $q = 0$ (отсутствие модуляции) кривая $x''(\omega)$ имеет один узкий пик в точке $\omega = p/2$. Соответственно, форма линии поглощения есть лоренцовская. При увеличении q высота этого пика растет и, кроме того, появляются пики на частотах $\omega = 3p/2, 5p/2, \dots$. Когда q достигает величины $4/\tau p$, величина x'' обращается на этих частотах в бесконечность, причем соответствующие пики бесконечно узки. При переходе через $4/\tau p$ они „опрокидываются“, и далее величина $|x''|$ в этих пиках уменьшается.

Заметим, что при $q = 4/\tau p$ кривая x'' не определена. Это является следствием того, что периодическое решение уравнения (13) в этой точке не единственно. Для более точного представления о форме линий (поглощения и излучения) приведем выражение x'' в окрестности частоты $\omega = p/2$:

$$x'' = \frac{z''}{4\pi} = \frac{4}{(\tau p) m p^2} \left\{ (l-1)^2 + \frac{4}{(\tau p)^2} - \frac{1}{4} q^2 \right\} \left\{ \left[(l-1)^2 + \left(\frac{2}{\tau p} - \frac{1}{2} q \right)^2 \right] \left[(l-1)^2 + \left(\frac{2}{\tau p} + \frac{1}{2} q \right)^2 \right] \right\}^{-1} \quad (14)$$

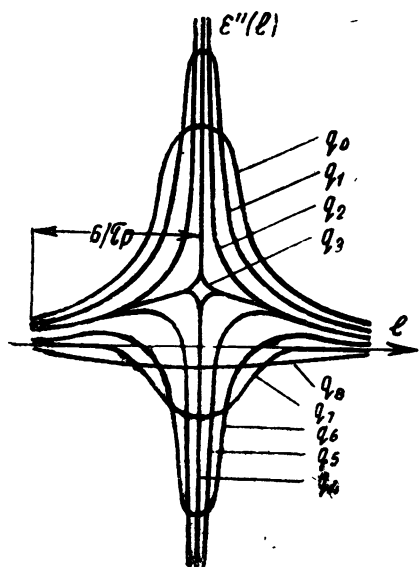


Рис. 1.

Здесь обозначено $l = 2\omega/p$, так что формула справедлива в окрестности точки $l = 1$. Соответствующее семейство кривых (с разными значениями параметра q) приведено на рис. 1 ($0 = q_0 < q_1 < q_2 < q_3 < 4/\tau p < q_4 < q_5 < q_6 < q_7 = 8/\tau p < q_8$). Из рисунка следует, что с увеличением модуляции линия поглощения непрерывно деформируется и при некотором пороговом значении ($q = 4/\tau p$) происходит скачкообразный переход к отрицательным потерям. На рисунке эта деформация и переход отображены для частного случая. Однако анализ уравнения (13) показывает, что качественно эта картина справедлива в общем случае в окрестности порогового значения модуляции.

Автор благодарен Ф. В. Бункину, предложившему рассмотренную в статье задачу, за руководство и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. H. Van Vleck, V. F. Weisskopf, Rev. Mod. Phys., **17**, 227 (1945).
2. R. Karplus, J. Schwinger, Phys. Rev., **73**, 1020 (1948).
3. М. Стрендберг, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1956.
4. Н. В. Мак-Лаклан, Теория и приложения функций Матье, ИЛ, М., 1953.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
7 мая 1960 г.

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ СИГНАЛА, ПРОШЕДШЕГО СРЕДУ С ХАОТИЧЕСКИ ДВИЖУЩИМИСЯ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Г. И. Приймак

Проводится рассмотрение задачи о корреляционной функции сигнала, прошедшего среду с хаотически движущимися неоднородностями. Настоящее рассмотрение непосредственно проведено для акустического случая, хотя в равной мере относится и к распространению радиоволн.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Поместим излучатель и приемник в среду, содержащую хаотически движущиеся неоднородности. Расстояние между приемником и излучателем обозначим через L . В связи с тем, что в рассматриваемом случае проходящего сигнала эффект Доплера не имеет места (в отличие от случая отражения), изменений излучаемой частоты не происходит. Хаотические движения неоднородностей приводят к случайному изменению во времени суммарной фазы принимаемого сигнала. Абсолютные величины случайных скоростей неоднородностей могут быть любыми.

Запишем звуковое поле в точке приема в виде:

$$\Psi = A(L, t) \cos [\omega_0 t - \Phi(L, t)], \quad (1.1)$$

где $A(L, t)$ — амплитуда (огibaющая), зависящая от времени t и расстояния L , а также от характера излучения (непрерывное, импульсное) и неоднородности среды, $\Phi(L, t)$ — суммарная фаза, состоящая из регулярной и статистической частей. Последняя обусловлена наличием перемещающихся тепловых неоднородностей*.

Рассмотрим несколько подробнее величину $\Phi(L, t)$. Она состоит, очевидно, из набегов фазы в отдельных тепловых неоднородностях и свободном пространстве между ними. Обозначим геометрическую длину пути луча в отдельной неоднородности номера i в момент t через $\xi_i(t)$. Набег фазы на этом пути

$$\alpha_i(t) = k \xi_i(t) = k_0 n_i \xi_i(t) = k_0(1 + \mu_i) \xi_i(t), \quad (1.2)$$

где

$$n_i = 1 + \mu_i = \frac{c_0}{c_i} = \frac{c_0}{c_0(1 + \Delta c_i/c_0)} = 1 - \frac{\Delta c_i}{c_0} \quad (1.3)$$

— показатель преломления в неоднородности номера i , c_0 — скорость звука в однородной среде, $c_i = c_0 + \Delta c_i$ — скорость звука в i -ой неоднородности (Δc_i может иметь любой знак), $k_0 = \omega_0/c_0$ — волновое число.

Полный набег фазы — суммарную фазу $\Phi(L, t)$ — можно записать следующим образом**:

* Хотя здесь и в дальнейшем в качестве неоднородностей упоминаются тепловые, все изложенное пригодно для любых неоднородностей скалярного типа.

** Рассмотрение ведется в приближении геометрической оптики.

$$\Phi(L, t) = \sum_{i=1}^N \{ k_0 \xi_i(t) + k_0 \mu_i \xi_i(t) + k_0 [L - \xi_i(t)] \}, \quad (1.4)$$

где N — число неоднородностей, попавших в луч в момент t . Первый член суммы является набегом фазы на длине пути $\xi_i(t)$ при условии его однородности. Второй член суммы выражает добавочный набег фазы на этом же пути, вызванный наличием неоднородности. Третий член суммы представляет собой набег фазы на свободной от неоднородностей части пути L . Таким образом, принимаемый сигнал можно представить в виде:

$$\Psi = A(L, t) \cos \{ \omega_0 t - k_0 [L + \sum_{i=1}^N \mu_i \xi_i(t)] \}. \quad (1.5)$$

Найдем теперь функцию корреляции выражения (1.5)

$$\begin{aligned} \Psi(t) \Psi(t') &= A(L, t) A(L, t') \cos \left\{ \omega_0 t - k_0 \left[L + \sum_{i=1}^N \mu_i \xi_i(t) \right] \right\} \times \\ &\times \cos \left\{ \omega_0 t' - k_0 \left[L + \sum_{j=1}^{N'} \mu'_j \xi'_j(t') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Преобразуя последнее выражение, получим:

$$\begin{aligned} \overline{\Psi(t) \Psi(t')} &= \frac{1}{2} A(L, t) A(L, t') \left\langle \cos \left\{ \omega_0 \tau - k_0 \left[\sum_{j=1}^{N'} \mu'_j \xi'_j(t') - \sum_{i=1}^N \mu_i \xi_i(t) \right] \right\} + \right. \\ &\left. + \cos \left\{ \omega_0 (t + t') - 2k_0 L - k_0 \left[\sum_{j=1}^{N'} \mu'_j \xi'_j(t') + \sum_{i=1}^N \mu_i \xi_i(t) \right] \right\} \right\rangle, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\tau = t' - t$, N' — число неоднородностей, попавших в луч в момент t' .

В общем случае промежуток времени τ может быть как большим, так и малым. Будем сравнивать τ — текущий временной радиус корреляции сигнала Ψ со следующими двумя временными характеристиками движения тепловых неоднородностей — $\bar{T}$ (средним временем пребывания тепловой неоднородности в луче) и τ_v (эффективным временным радиусом корреляции для декартовой составляющей случайной скорости движения тепловой неоднородности).

Если $\tau \gg \bar{T}$, то, очевидно, все „старые“ неоднородности $\xi_i(t)$ будут сменены новыми — $\xi_j(t')$. Кроме того, в этом случае, вообще говоря, $N \neq N'$. Таким образом, при $\tau \gg \bar{T}$ величины сигналов $\Psi(t)$ и $\Psi(t')$ можно считать статистически независимыми и, следовательно,

$$\overline{\Psi(t) \Psi(t')} = 0 \quad (1.8)$$

при $\tau \gg \bar{T}$. Физически это равносильно предположению о статистической независимости движений различных неоднородностей при $\tau \gg \bar{T}^*$.

Рассмотрим теперь противоположный случай $\tau \ll \bar{T}$. Тогда можно считать, что неоднородности $\xi_i(t)$ не успели за время τ существенно сместиться и выйти за пределы луча. Соответственно и число неоднородностей не изменилось. Поэтому будем считать $N' = N$, $\mu'_j = \mu_j$,

* Поскольку обычно $\bar{T} > \tau_v$, такая независимость вполне естественна. Подробнее об этом будет сказано ниже.

$\xi_j'(t') = \xi_j(t')$. Так как порядок „нумерации“ неоднородностей также не изменился, то можно положить в (1.7) $i = j^*$.

Заметим далее следующее. Так как наше рассмотрение ведется в приближении геометрической оптики и для времен корреляции, за которые неоднородности в среднем не успеют смениться новыми (на пути луча), то без учета поглощения звука флуктуации суммарной амплитуды $A(L, t)$ могут происходить лишь за счет изменения доли отраженной (рассеянной) энергии при прохождении среды. Однако, предполагая малым изменение углов отражения сигнала от отдельных неоднородностей за время малого смещения последних при достаточно плавно меняющейся их форме (что довольно естественно), можно, по-видимому, считать, что абсолютные значения флуктуаций амплитуды также будут малыми. В то же время флуктуации суммарной фазы могут быть значительны. Кроме того, известно, что фаза значительно более критична к изменению оптического пути, чем амплитуда.

Поэтому множитель $A(L, t) A(L, t')$ в (1.7) может быть записан в виде

$$A(L, t) A(L, t') \simeq A^2(L, t) \pm A(L, t) \Delta A(L, t' - t),$$

где $\Delta A(L, t' - t)$ — малая флуктуация суммарной амплитуды, а величина $A^2(L, t)$ при $0 \leq t \leq \tau$, $\tau \ll \bar{T}$ может рассматриваться как независимая от времени. Пренебрегая далее в последнем выражении вторым членом и вынося $A^2(L)$ в (1.7) из под знака усреднения (как постоянный множитель), имеем^{***}:

$$\begin{aligned} \overline{\Psi(t) \Psi(t')} &= \frac{1}{2} A^2(L) \overline{\cos \left\{ \omega_0 \tau - \sum_{i=1}^N k_0 \mu_i [\xi_i(t') - \xi_i(t)] \right\}} + \\ &+ \overline{\cos \left\{ \omega_0 (t + t') - 2k_0 L - \sum_{i=1}^N \mu_i k_0 [\xi_i(t') + \xi_i(t)] \right\}} >. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Рассмотрим далее последний член в формуле (1.9). По определению его можно записать так:

$$\begin{aligned} &\overline{\cos \left\{ \omega_0 (t + t') - 2k_0 L - \sum_{i=1}^N k_0 \mu_i [\xi_i(t') + \xi_i(t)] \right\}} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \left\{ \omega_0 (t + t') - 2k_0 L - \sum_{i=1}^N k_0 \mu_i [\xi_i(t') + \xi_i(t)] \right\} \times \\ &\times W \left\{ \sum_{i=1}^N \mu_i [\xi_i(t') + \xi_i(t)] \right\} d \left\{ \sum_{i=1}^N \mu_i [\xi_i(t') + \xi_i(t)] \right\}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

* Конечно, все сказанное для случая $\tau < \bar{T}$ имеет лишь относительную достоверность. Так, например, неоднородности, которые в момент t лишь задевали „краем“ луча, могут успеть и выйти из луча, и войти в луч даже при $\tau < \bar{T}$. Но в среднем, особенно при весьма сильном неравенстве $\tau \ll \bar{T}$, сказанное, по-видимому, верно.

** Следует отметить, что корреляционная функция сигнала $K_\psi = \overline{\Psi(t) \Psi(t')}$ будет, вообще говоря, соответствовать определению корреляционной функции лишь после вычитания из приведенных выражений постоянного уровня — квадрата среднего значения коррелируемой величины. Однако эта операция приводит лишь к сдвигу функции K_ψ на постоянную величину вследствие исключения постоянной составляющей. Поскольку это никак не сказывается на результатах нашего рассмотрения, для простоты вычислений вычитать постоянную составляющую мы не будем.

где

$$W \left\{ \sum_{i=1}^N \mu_i [\xi_i(t') + \xi_i(t)] \right\}$$

— плотность вероятности суммы, стоящей в аргументе. Усреднение в (1.10) производится по ансамблю, т. е. по различным значениям суммы

$$\sum_{i=1}^N \mu_i [\xi_i(t') + \xi_i(t)] . \quad (1.11)$$

Рассматривая эту сумму в целом как случайную величину, можно заметить следующее. В отличие, например, от выражения

$$\sum_{i=1}^N \mu_i [\xi_i(t') - \xi_i(t)] , \quad (1.12)$$

представляющего сумму изменений оптических путей в неоднородностях за время τ , выражение (1.11) представляет сумму самих путей в некоторый момент t и через время τ — в момент t' . Суммарный же путь в неоднородностях естественно считать медленно меняющимся с течением времени, в особенности при малых τ . Это связано, главным образом, с тем, что пути $\xi_i(t)$ являются „накопленными“ величинами. Так, например, при весьма малых изменениях величины (1.11) выражение (1.12) может меняться очень сильно, ибо последнее учитывает чистую „изменчивость“, тогда как (1.11) содержит в основном некоторую среднюю постоянную суммарную длину пути, а „изменчивость“ является лишь добавком, дающим малое относительное изменение (1.11). Из сказанного ясно, что распределение $W \left\{ \sum_{i=1}^N \mu_i [\xi_i(t') + \xi_i(t)] \right\}$

можно рассматривать как медленно меняющуюся функцию. Таким образом, первый множитель в (1.10) является быстро осциллирующей, а второй — медленно меняющейся функцией. Вследствие этого выражение (1.10) мало отличается от нуля и им можно пренебречь*.

Итак, характер функции корреляции (1.9) определяется первым членом вида

$$\cos \left\{ \omega_0 \tau - \sum_{i=1}^N k_0 \mu_i [\xi_i(t') - \xi_i(t)] \right\} = \quad (1.13)$$

$$= \cos \omega_0 \tau \cos \left\{ \sum_{i=1}^N k_0 \mu_i [\xi_i(t') - \xi_i(t)] \right\} + \sin \omega_0 \tau \sin \left\{ \sum_{i=1}^N k_0 \mu_i [\xi_i(t') - \xi_i(t)] \right\} .$$

Рассмотрим это выражение подробнее. Предполагая естественную четность плотности вероятности

$$W \left\{ \sum_{i=1}^N \mu_i [\xi_i(t') - \xi_i(t)] \right\} , \quad (1.14)$$

получим, что второй член (1.13) равен нулю, так что

* Пределы интегрирования в (1.10) можно взять бесконечными, так как вне конечного максимального значения суммы (1.11) (т. е. аргумента в W) распределение W равно нулю.

$$\overline{\cos \left\{ \omega_0 \tau - \sum_{i=1}^N k_0 \mu_i [\xi_i(t') - \xi_i(t)] \right\}} = \overline{\cos \omega_0 \tau} \overline{\cos \left\{ \sum_{i=1}^N k_0 \mu_i [\xi_i(t') - \xi_i(t)] \right\}}.$$

Следовательно, для функции корреляции (1.9) будем иметь:

$$\overline{\Psi(t)\Psi(t')} = \frac{1}{2} A^2(L) \overline{\cos \omega_0 \tau} \overline{\cos \left\{ \sum_{i=1}^N k_0 \mu_i [\xi_i(t') - \xi_i(t)] \right\}}. \quad (1.15)$$

Для дальнейшего рассмотрения необходимо конкретизировать выражение (1.14), определяющее вид (1.15).

2. ВИД ФУНКЦИИ КОРРЕЛЯЦИИ ПРИ ГАУССОВОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СУММАРНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ОПТИЧЕСКОЙ ДЛИНЫ ПУТИ ЛУЧА В НЕОДНОРОДНОМ УЧАСТКЕ СРЕДЫ

Предположим, что распределение (1.14) является нормальным*. Ясно, что оно не может быть симметричным относительно нуля, если знак произведения $\mu_i [\xi_i(t') - \xi_i(t)]$ не распределен равномерно. Легко показать, что если случайная величина x распределена нормально с нулевым центром распределения, то

$$\overline{\cos x} = \exp \left[-\overline{x^2}/2 \right]. \quad (2.1)$$

Если же центр распределения есть $a \neq 0$, то

$$\overline{\cos x} = \cos a \exp \left[-\overline{x^2}/2 \right]. \quad (2.1a)$$

Как видно, несимметричность нормального распределения приводит лишь к появлению постоянного множителя $\cos a$ и не влияет на существо дела. Поэтому можно считать знак произведения $\mu_i [\xi_i(t') - \xi_i(t)]$ как случайным, так и постоянным — это не изменит результата, хотя, вообще говоря, эти случаи соответствуют разным физическим картинам. Не вводя поэтому для простоты постоянного фактора для определяющего множителя в (1.15) (его можно всегда учесть), имеем:

$$\overline{\cos \left\{ \sum_{i=1}^N k_0 \mu_i [\xi_i(t') - \xi_i(t)] \right\}} = \exp \left\langle -\frac{1}{2} \overline{\left\{ \sum_{i=1}^N k_0 \mu_i [\xi_i(t') - \xi_i(t)] \right\}^2} \right\rangle. \quad (2.2)$$

Исследуем теперь величину

$$\begin{aligned} \overline{\left\{ \sum_{i=1}^N k_0 \mu_i [\xi_i(t') - \xi_i(t)] \right\}^2} &= \overline{\left\{ \sum_{i=1}^N k_0 \mu_i [\xi_i(t') - \xi_i(t)] \sum_{j=1}^N k_0 \mu_j [\xi_j(t') - \xi_j(t)] \right\}} = \\ &= \overline{\left\{ \sum_{i=1}^N k_0^2 \mu_i^2 [\xi_i(t') - \xi_i(t)]^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_0^2 \mu_i \mu_j [\xi_i(t') - \xi_i(t)] [\xi_j(t') - \xi_j(t)] \right\}} \\ &\quad (i \neq j). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Считая статистические свойства неоднородностей одинаковыми, для первого члена в выражении (2.3) имеем:

$$\sum_{i=1}^N \overline{k_0^2 \mu_i^2 [\xi_i(t') - \xi_i(t)]^2} = N k_0^2 \overline{\mu_i^2 [\xi(t') - \xi(t)]^2}. \quad (2.4)$$

* В связи с тем, что значения суммы в (1.14) ограничены сверху, предполагаемое распределение по нормальному закону должно быть обрезано на некотором конечном значении суммы (в сторону больших значений). Мы будем предполагать, что это значение суммы достаточно велико и соответствует малому значению плотности вероятности на кривой распределения.

Рассмотрим второе слагаемое в (2.3). Вследствие некоррелированности величин μ и ξ

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_0^2 \overline{\mu_i \mu_j} [\xi_i(t') - \xi_i(t)] [\xi_j(t') - \xi_j(t)] = \\ & = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_0^2 \overline{\mu_i \mu_j} [\xi_i(t') - \xi_i(t)] [\xi_j(t') - \xi_j(t)] \\ & \quad (i \neq j). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Так как $i \neq j$, то естественно считать $\overline{\mu_i \mu_j} = 0$. Что касается корреляции изменений длин луча в различных неоднородностях, то здесь можно провести подобные же рассуждения, указывающие на возможность пренебрежения корреляцией составляющих скоростей различных неоднородностей.

Таким образом, дело свелось к рассмотрению величины $[\xi(t') - \xi(t)]^2$. Выражение $[\xi(t') - \xi(t)]$ есть изменение пути луча в некоторой неоднородности за время τ . Эту величину можно выразить через скорость изменения длины луча $\xi(t)$ в данной неоднородности. Обозначив эту скорость через $v_\xi(t)$, имеем:

$$\xi(t') - \xi(t) = \int_0^\tau v_\xi(t) dt. \quad (2.6)$$

Вводя далее декартову систему координат с осью x по нормали к лучу и осью y , направленной вдоль луча, запишем контур сечения неоднородности плоскостью xu как некоторую функцию $y = f(x)$ или $y(t) = f[x(t)]$. Если считать, что контур этого сечения состоит из монотонных отрезков плавной кривой, которая, в свою очередь, может иметь симметричный ход относительно оси x , проведенной как ось симметрии, то можно записать*:

$$2y(t) = \xi(t); \quad (2.7)$$

$$\Delta \xi_\tau = \xi(t') - \xi(t) = 2 \Delta y_\tau(t) = 2 \int_0^\tau f'_x[x(t)] \frac{dx}{dt} dt.$$

Тогда (2.6) примет вид:

$$\Delta \xi_\tau = \int_0^\tau v_\xi(t) dt = 2 \int_0^\tau f'_x[x(t)] v_x(t) dt, \quad (2.8)$$

где

$$v_x(t) = dx/dt.$$

Для искомого выражения $[\xi(t') - \xi(t)]^2$ имеем:

$$\begin{aligned} \Delta \xi_\tau^2 &= [\xi(t') - \xi(t)]^2 = \int_0^\tau \int_0^\tau v_\xi(t) v_\xi(t') dt dt' = \\ &= 4 \int_0^\tau \int_0^\tau f'_x[x(t)] f'_x[x(t')] v_x(t) v_x(t') dt dt'. \end{aligned} \quad (2.9)$$

* Для удобства рассмотрения лучше считать эту систему координат жестко связанной с неоднородностью, а луч — перемещающимся по оси x параллельно оси y . Можно, конечно, считать неоднородность движущейся относительно луча вместе со связанной с ней системой координат.

Если считать форму неоднородности определенной, то $f[x(t)]$ не является случайной функцией аргумента. Однако, вообще говоря, можно считать $f[x(t)]$ случайной функцией, допуская тем самым всевозможные очертания неоднородностей. При этом остается в силе требование монотонности и симметрии по x каждой реализации $f[x(t)]^*$. В любом случае величина f'_x является скоростью изменения половины пути луча в неоднородности при ее движении по оси x , зависящей от вида самой функции $f[x(t)]$. Эта величина не коррелирует со скоростью движения по оси x . Обозначим

$$\overline{f'_x[x(t)] f'_x[x(t')]} = K_{f'_x}(\tau); \quad (2.10)$$

$$\overline{v_x(t) v_x(t')} = K_{v_x}(\tau), \quad (2.11)$$

где $K_{f'_x}(\tau)$ — функция корреляции скорости изменения половины пути луча, а $K_{v_x}(\tau)$ — функция корреляции составляющей случайной скорости неоднородности по оси x . Тогда (2.9) будет иметь вид:

$$\overline{\Delta \xi^2} = 4 \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} K_{f'_x}(t' - t) K_{v_x}(t' - t) dt dt'. \quad (2.12)$$

Таким образом, соотношения (1.15), (2.2), (2.4) и (2.12) определяют искомую корреляцию. Теперь (1.15) можно записать так:

$$\begin{aligned} \overline{\Psi(t) \Psi(t')} &= \frac{1}{2} A^2(L) \cos(\omega_0 \tau) \times \\ &\times \exp \left[-2Nk_0^2 \mu^2 \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} K_{f'_x}(t' - t) K_{v_x}(t' - t) dt dt' \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Выражение (2.13) дает связь между корреляцией сигнала и корреляцией составляющей скорости движения неоднородности. Конкретный вид этой связи прежде всего зависит от показателя экспоненты, т. е. выражения (2.12).

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ КОРРЕЛЯЦИИ СИГНАЛА ДЛЯ БОЛЬШИХ И МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВРЕМЕННОГО РАДИУСА КОРРЕЛЯЦИИ

В первом разделе статьи были введены следующие временные параметры: $\bar{T} \simeq \bar{l}/|\bar{v}|$ — среднее время нахождения неоднородности среднего масштаба в луче ($\bar{l}$ — средний масштаб неоднородности, $|\bar{v}|$ — средняя скорость), τ_v^* — эффективный временной радиус корреляции декартовой составляющей скорости движения неоднородности (текущее значение — τ_v), τ^* — эффективный временной радиус корреляции исследуемого сигнала (текущее значение — τ).

Как было указано выше, все наши рассуждения проводятся при $\tau \ll \bar{T}$. При $\tau \gg \bar{T}$ функция корреляции принимаемого сигнала равна нулю. Теперь необходимо провести дальнейшую детализацию — сопоставление τ и τ_v^* при условии $\tau \ll \bar{T}$. Очевидно, при этом возможны

* Величина $v_x(t)$ — случайная функция времени. Координата x как функция скорости $x = \int_0^t v_x dt$ — также случайная функция времени. Сама же $f[x(t)]$ может быть как регулярной функцией случайного аргумента, так и случайной функцией. В обоих случаях величина $y(t)$ — случайная функция времени.

два случая: а) $\tau \ll \tau_v$, б) $\tau \gg \tau_v$ (предполагается, что $\tau_v^* < \bar{T}$). Заметим, что если $\tau_v > \bar{T}$, то (поскольку $\tau < \bar{T}$) остается лишь случай $\tau < \bar{T} < \tau_v$, т. е. „усиленный“ случай а).

Рассмотрим теперь асимптотические представления выражения (2.12) в двух предельных случаях (ср. [1]).

а) Пусть $\tau \ll \tau_v^*$, так что $v_x(t)$ и $f'_x[x(t)]$ можно считать постоянными на интервале τ . В этом случае можно записать (2.12) в виде:

$$\overline{\Delta \xi_{\tau}^2} = 4 \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} K_{f'_x}(t'-t) K_{v_x}(t'-t) dt dt' = \overline{4v_x^2(t) [f'_x(x)]^2} \tau^2. \quad (3.1)$$

б) Пусть $\tau \gg \tau_v$, так что функции корреляции для $v_x(t)$ и $f'_x[x(t)]$ можно положить равными нулю. Тогда, сделав замену переменных

$$t' - t = p, \quad t + t' = q, \quad (3.2)$$

имеем:

$$\overline{\Delta \xi_{\tau}^2} = 4 \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} K_{f'_x}(t'-t) K_{v_x}(t'-t) dt dt' = 8 \int_0^{\tau} dq \int_0^q K_{f'_x}(p) K_{v_x}(p) dp. \quad (3.3)$$

Поскольку при $\tau \gg \tau_v$

$$K_{v_x}(p) = 0, \quad K_{f'_x}(p) = 0, \quad (3.4)$$

на интервале $0 \leq q \leq \tau$ можно положить

$$\int_0^q K_{f'_x}(p) K_{v_x}(p) dp = \int_0^{\infty} K_{f'_x}(p) K_{v_x}(p) dp. \quad (3.5)$$

Действительно, из (3.2) следует, что $q = t + t' = 2t + \tau$, так как

$$\tau = t' - t,$$

где t' — текущее время, а t — начальный момент. При условии $\tau \gg \tau_v^*$ в первом интеграле (3.3) $q \geq \tau \geq \tau_v^*$, что с учетом (3.4) обеспечивает справедливость соотношения (3.5). Теперь (3.3) можно записать в виде:

$$\overline{\Delta \xi_{\tau}^2} = 8 \tau A_0; \quad A_0 = \int_0^{\infty} K_{f'_x}(p) K_{v_x}(p) dp. \quad (3.6)$$

Сделаем теперь несколько замечаний относительно формул (3.1) и (3.6), а также относительно значения величины N в формуле (2.13). В соотношение (3.1) входят значения $\overline{v_x^2(t)}$ и $[f'_x(x)]^2$. Первую из этих величин — средний квадрат составляющей случайной скорости — можно определить экспериментально или оценить теоретически. Со второй величиной — средним квадратом скорости изменения формы неоднородности в плоскости xu , дело обстоит несколько сложнее. Вообще говоря, тепловые неоднородности могут иметь весьма разнообразную форму. Так как мы рассматриваем „плоскую картину распространения звука“, то для нас важно лишь сечение неоднородностей этой плоскостью xu . В случае, когда неоднородности имеют одну определенную форму, в плоскости xu существует набор правильных, возможно, подобных фигур (например, окружностей разного радиуса с различными расстояниями между центрами). Если же форма неоднородности является случайной, т. е. может быть выражена случайной функцией трех переменных, то в плоскости xu существует набор фигур произвольной формы.

Не рассматривая эти случаи более подробно, отметим важное для нас обстоятельство, согласно которому во всех случаях члены $\overline{v_x^2(t)} (\overline{f'_x})^2$ в (3.1) являются постоянными, не зависящими от τ . Их вид может быть всегда разумно оценен на основе сказанного ранее.

Входящая в формулу (3.6) величина A_0 также является постоянной, не зависящей от τ . Ее значение также может быть оценено на основе эксперимента и некоторых допущений.

Величина N в (2.13), обозначающая среднее число неоднородностей, одновременно „попавших в луч“, может быть приближенно оценена, например, следующим образом. Пусть ρ — средний эффективный радиус неоднородности, D — ширина полосы, заполненной неоднородностями, σ — средняя плотность заполнения полосы неоднородностями. Окружим луч полосой ширины 2ρ . Вероятность попадания центра неоднородности в эту полосу и, следовательно, вероятность попадания неоднородности в пределы луча равна $2\rho/D$. Если общее число неоднородностей есть $DL\sigma$ (где L — расстояние от точки излучения до точки приема), то среднее число неоднородностей, попадающих в луч одновременно,

$$N = DL\sigma 2\rho/D = 2\rho L\sigma.$$

Оценка величины N также может быть проведена и в более сложных случаях подобного рода.

Из изложенного выше следует, что, по крайней мере, в двух рассмотренных асимптотических случаях корреляционная функция (2.13) может быть конкретизирована.

При сделанном предположении о гауссовом характере распределения суммарного изменения оптической длины луча в неоднородностях (1.14) корреляционная функция прямого сигнала в двух крайних асимптотических случаях имеет следующий характер.

1) Если текущий радиус корреляции сигнала достаточно мал, то корреляционная функция сигнала имеет вид:

$$K_\psi(\tau) \simeq \frac{1}{2} A^2(L) \cos \omega_0 \tau \exp \{ - 2Nk_0^2 \overline{\mu^2} \overline{v_x^2(t)} [\overline{f'_x(x)}]^2 \} \tau^2, \quad (3.7)$$

т. е. ее огибающая имеет гауссов характер.

2) Если текущий радиус корреляции сигнала достаточно велик, то корреляционная функция сигнала имеет вид:

$$K_\psi(\tau) \simeq \frac{1}{2} A^2(L) \cos \omega_0 \tau \exp \{ - 4Nk_0^2 \overline{\mu^2} A_0 \} \tau, \quad (3.8)$$

т. е. ее огибающая имеет экспоненциальный характер. В общем случае огибающая корреляции сигнала имеет гауссов характер при малых $\tau \ll \tau_v^*$ и экспоненциальный при больших $\tau \gg \tau_v^*$.

Напомним, что все рассуждения проведены для случая, когда радиус корреляции сигнала меньше среднего времени пребывания неоднородности в луче. При больших временах корреляция должна отсутствовать*.

Теперь можно написать выражения для эффективных временных радиусов корреляции. Определяя последние как интервал, на котором степень корреляции убывает в e раз, получаем

* Это должно иметь место в случае независимости движений отдельных неоднородностей. При наличии корреляции скоростей различных неоднородностей необходимо дополнительное рассмотрение.

1) для (3.7)

$$\tau^* = \left[\frac{1}{2N \bar{\mu}^2 k_0^2 \bar{v}_x^2(t) [f'_x(x)]^2} \right]^{1/2}; \quad (3.9)$$

2) для (3.8)

$$\tau^* = \frac{1}{4N \bar{\mu}^2 k_0^2 A_0}. \quad (3.10)$$

Таким образом, в рассмотренных асимптотических случаях качественные результаты (характер функции корреляции сигнала в зависимости от функции корреляции скорости каждой неоднородности) получились такого же типа, как и в работах [1,2]. Это связано с одинаковыми предположениями о гауссовом характере распределения основной флюктуирующей величины. Вообще говоря, возможен и другой выбор характера распределения — в зависимости от характера реальной задачи.

Зависимость τ^* (3.9), (3.10) от входящих в эти выражения параметров качественно вполне понятна. Чем больше количество неоднородностей, чем больше „степень их неоднородности“ $\bar{\mu}^2$, а также скорость их перемещений $\bar{v}_x^2$ и изменение пути луча в неоднородностях (изменение „формы“ $(f'_x)^2$), тем быстрее происходит „расстройка“ сигнала и меньше его эффективный временной радиус корреляции.

4. СПЕКТР МОЩНОСТИ СИГНАЛА

Для спектра мощности сигнала и функции корреляции имеют место следующие соотношения [3]:

$$g_\psi(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty K_\psi(\tau) \cos \omega \tau d\tau; \quad (4.1)$$

$$K_\psi(\tau) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty g_\psi(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (4.2)$$

Вычислим по (4.1) спектры для приведенных в третьем разделе асимптотических выражений корреляционной функции сигнала:

$$K_\psi(\tau) = \frac{1}{2} A^2(L) \cos \omega_0 \tau \exp(-q_0^2 \tau^2); \quad (3.7a)$$

$$K_\psi(\tau) = \frac{1}{2} A^2(L) \cos \omega_0 \tau \exp(-p_0 \tau). \quad (3.8a)$$

Для (3.7a)

$$g_\psi(\omega) = \frac{A^2(L)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp(-q_0^2 \tau^2) \cos(\omega_0 \tau) \cos(\omega \tau) d\tau, \quad (4.3)$$

откуда имеем

$$g_\psi(\omega) = \frac{\sqrt{2} A^2(L)}{8q_0^2} \left\{ \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4q_0^2}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{4q_0^2}\right] \right\}. \quad (4.4)$$

Для (3.8а)

$$g_{\psi}(\omega) = \frac{A^2(L)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-p_0 \tau) \cos(\omega_0 \tau) \cos(\omega \tau) d\tau \quad (4.5)$$

получим:

$$g_{\psi}(\omega) = \frac{\sqrt{2} A^2(L)}{4} \left[\frac{1}{p_0^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{p_0^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]. \quad (4.6)$$

В формулах (4.4) и (4.6) вторые члены в скобках дают весьма малый вклад в положительную часть спектров и могут быть опущены („зеркальные спектры“). Таким образом, в первом случае (4.4) имеет место гауссов спектр, во втором (4.6) — спектр Коши.

Из (4.4) и (4.6) видно, что прохождение сигнала через среду с движущимися неоднородностями приводит к уширению спектра; физически это связано со случайными набегами фазы.

Результаты настоящей статьи могут быть использованы при расчетах, связанных с временем наблюдения сигналов в неоднородной среде, а также при оценках точности различных методов измерения разности фаз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Горелик, Радиотехника и электроника, 1, 695 (1956).
2. Г. С. Горелик, Радиотехника и электроника, 2, 1227 (1957).
3. А. А. Харкевич, Спектры и анализ, Гостехиздат, М., 1953.

Акустический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
19 ноября 1959 г.,
после переработки—
23 мая 1960 г.

МУЛЬТИВИБРАТОР ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНЫХ СИЛ

Р. Х. Садеков

Методом точечных преобразований вычисляются статистические средние колебаний в симметричном мультивибраторе под действием тепловых и дробовых шумов в сопротивлениях и лампах.

В настоящей статье рассматривается модель симметричного мультивибратора, изображенная на рис. 1. (Обозначения $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $i_4(t)$, $i_5(t)$, $i_6(t)$ на рисунке характеризуют эквивалентные источники шумового тока.) Согласно [1, 2], система уравнений для данной модели в безразмерных переменных и параметрах записывается следующим образом:

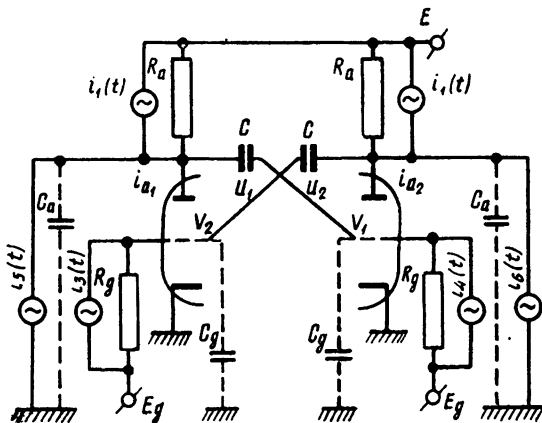


Рис. 1.

характеризуют эквивалентные источники шумового тока.) Согласно [1, 2], система уравнений для данной модели в безразмерных переменных и параметрах записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda \dot{x}_1 &= -x_1 - y_1 - K \varphi(x_2) + f_1(t); \\ \dot{y}_1 &= x_1 + f_2(t); \\ \lambda \dot{x}_2 &= -x_2 - y_2 - K \varphi(x_1) + f_3(t); \end{aligned}$$

$$y_2 = x_2 + f_4(t),$$

где

$$f_1(t) = \frac{K}{V_0 S} \left[i_1(t) - i_5(t) - i_4(t) \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) \right];$$

$$f_2(t) = \frac{R_g}{V_0} i_4(t);$$

$$f_3(t) = \frac{K}{V_0 S} \left[i_2(t) - i_6(t) - i_3(t) \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) \right];$$

$$f_4(t) = \frac{R_g}{V_0} i_3(t);$$

$$V_{1,2} = E_g + V_0 x_{1,2};$$

$$U_{1,2} = E_a - R_a i_{a1,2}(E_g) - E_g + V_0 \left\{ \frac{C_g}{C} x_{1,2} + \left[1 + \frac{C_g}{C} + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) y_{1,2} \right] \right\};$$

$$\lambda = \frac{R_a [C_a/C + C_g/C + C_a C_g/C^2]}{R_g [1 + C_g/C + (R_a/R_g) (1 + C_a/C)]^2}; K = \frac{S R_a R_g}{R_g (1 + C_g/C) + R_a (1 + C_a/C)};$$

$$t_{\text{нов}} = \frac{t_{\text{стар}}}{R_a(C + C_a) + R_g(C + C_g)} = \frac{t_{\text{стар}}}{T_0};$$

$\varphi(x_1), \varphi(x_2)$ — приведенные характеристики ламп:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \pm 1 & \text{при } |x| \geq 1 \\ x & \text{при } |x| < 1 \end{cases}$$

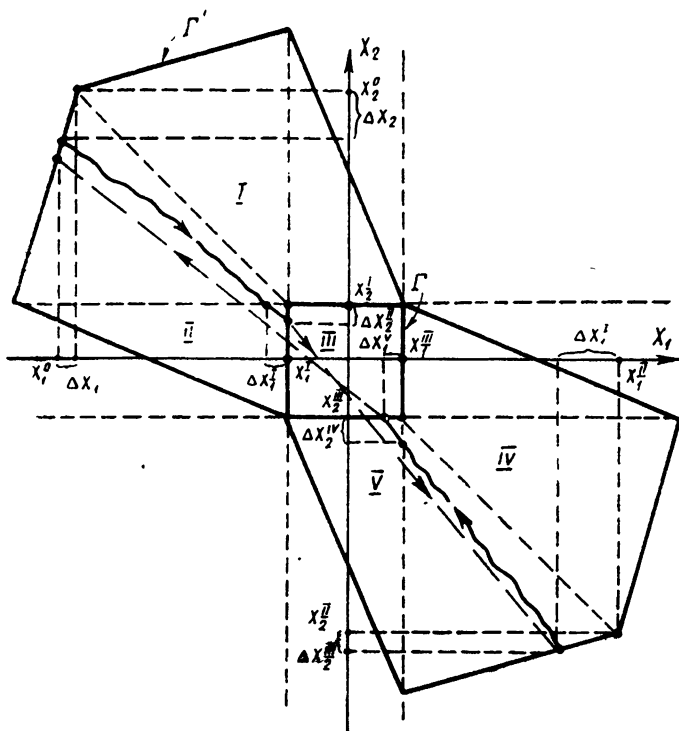


Рис. 2.

Рассмотрим движение указанной системы на плоскости x_1, x_2 , которая прямыми $x_1 = \pm 1, x_2 = \pm 1$ разбивается на области медленного и быстрого движения (рис. 2)*. Из динамической теории симметричного мультивибратора известно, что 1) изображающая точка из точек кривой Γ быстро движется в точки кривой Γ' (см. рис. 2), 2) из точек кривой Γ' изображающая точка движется медленно до точек кривой Γ .

Наложим на случайные воздействия в нашей системе следующие ограничения: 1) случайные функции $f_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) малы; отклонения изображающей точки от невозмущенного периодического движения таковы, что можно ограничиться их первыми порядками; 2) время корреляции случайных сил $\Delta \ll \lambda$.

Задачу будем решать методом, разработанным Рытовым [3]. Пусть по прошествии $n-1$ циклов в t_n на кривой Γ в области I реализовалось следующее возмущение:

$$x_{1n} = x_1^0 + \Delta x_{1n}; \quad \dot{y}_{1n} = y_1^0 + \Delta y_{1n};$$

* Нам интересует случай $\lambda \ll 1$

$$x_{2n} = x_2^0 + \Delta x_{2n}; \quad y_{2n} = y_2^0 + \Delta y_{2n}.$$

Система уравнений в этой области имеет вид:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{\lambda} x_1 - \frac{1}{\lambda} y_1 - \frac{K}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} f_1(t);$$

$$\dot{y}_1 = x_1 + f_2(t);$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{\lambda} x_2 - \frac{1}{\lambda} y_2 + \frac{K}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} f_3(t);$$

$$\dot{y}_2 = x_2 + f_4(t),$$

решая которую, можно найти

$$\dot{x}_1 = p_1 + C_1 e^{\mu_1 t} + D_1 e^{\nu_1 t} + F_{1n}(t);$$

$$y_1 = q_1 + m_1 C_1 e^{\mu_1 t} + n_1 D_1 e^{\nu_1 t} + G_{1n}(t);$$

$$x_2 = p_2 + C_2 e^{\mu_2 t} + D_2 e^{\nu_2 t} + F_{2n}(t);$$

$$y_2 = q_2 + m_2 C_2 e^{\mu_2 t} + n_2 D_2 e^{\nu_2 t} + G_{2n}(t),$$

где

$$p_1 = p_2 = 0; \quad q_1 = -K; \quad q_2 = K;$$

$$\mu_{1,2} \simeq -1; \quad \nu_{1,2} \simeq \frac{\lambda - 1}{\lambda}; \quad n_{1,2} \simeq -\lambda; \quad m_{1,2} \simeq \lambda - 1;$$

$$C_{1,2} = \frac{(x_{1,2} + \Delta x_{1,2n}) n_{1,2} - y_{1,2}^0 - \Delta y_{1,2n} \mp K}{n_{1,2} - m_{1,2}} e^{\mu_{1,2} t_n};$$

$$D_{1,2} = \frac{y_{1,2}^0 + \Delta y_{1,2n} \pm K - m_{1,2} (x_{1,2}^0 + \Delta x_{1,2n})}{n_{1,2} - m_{1,2}} e^{\nu_{1,2} t_n};$$

$$F_{1,2n}(t) = \frac{1}{m_{1,2} - n_{1,2}} \int_{t_n}^{t_n + t} \left\{ \left[f_{2,4}(u) - n_{1,2} \frac{1}{\lambda} f_{1,3}(u) \right] e^{\mu_{1,2} (t_n + t - u)} - \right. \\ \left. - \left[f_{2,4}(u) - m_{1,2} \frac{1}{\lambda} f_{1,3}(u) \right] e^{\nu_{1,2} (t_n + t - u)} \right\} du;$$

$$G_{1,2n}(t) = \frac{1}{m_{1,2} - n_{1,2}} \int_{t_n}^{t_n + t} \left\{ \left[f_{2,4}(u) - n_{1,2} \frac{1}{\lambda} f_{1,3}(u) \right] m_{1,2} e^{\mu_{1,2} (t_n + t - u)} - \right. \\ \left. - \left[f_{2,4}(u) - n_{1,2} \frac{1}{\lambda} f_{1,3}(u) \right] n_{1,2} e^{\nu_{1,2} (t_n + t - u)} \right\} du.$$

Пусть в момент $t_n + T_1 + \tau_{1n}$ изображающая точка приходит на границу областей I и II, где реализуются возмущения

$$x_{1n} = x'_1 + \Delta x'_{1n}; \quad y_{1n} = y'_1 + \Delta y'_{1n};$$

$$x_{2n} = x'_2; \quad y_{2n} = y'_2 + \Delta y'_{2n}$$

(T_1 — время движения изображающей точки в области I в отсутствие

флюктуаций). Учитывая малость $\Delta x_{1,2}$, $\Delta y_{1,2}$, τ_{1n} , λ , можно написать выражения для отклонения изображающей точки от периодического цикла на границе областей I и II:

$$\begin{aligned}\tau_{1n} &= -P^{1/2} \Delta y_{2n} + F_{2n}(T_1); \quad P = \frac{1}{(2K-1)^2}; \\ \Delta x'_{1n} &= -P^{1/2} \Delta y_{2n} - P^{1/2} \Delta y_{1n} + F_{1n}(T_1) + F_{2n}(T_1); \\ \Delta y'_{1n} &= P^{1/2} \Delta y_{2n} + P^{1/2} \Delta y_{1n} + G_{1n}(T_1) - F_{2n}(T_1); \\ \Delta y'_{2n} &= G_{2n}(T_1) + F_{2n}(T_1).\end{aligned}$$

В области II ($x_1 \leq 1$; $-1 \leq x_2 < 1$) уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{\lambda} x_1 - \frac{1}{\lambda} y_1 - \frac{K}{\lambda} x_2 + \frac{1}{\lambda} f_1(t); \\ \dot{y}_1 &= x_1 + f_2'(t); \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{\lambda} x_2 - \frac{1}{\lambda} y_2 + \frac{K}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} f_3'(t); \\ \dot{y}_2 &= x_2 + f_4'(t).\end{aligned}$$

Изображающая точка может выйти из области II только через отрезок прямой $x_1 = -1$; $-1 \leq x_2 \leq 1$. Нетрудно показать, что при отклонении изображающей точки от периодического цикла на границе областей I и II на величину порядка Δx время движения ее в области II будет $T_2 \sim \Delta x$. Отсюда следует, что $F'_{1n}(T_2)$, $F'_{2n}(T_2)$, $G'_{1n}(T_2)$, $G'_{2n}(T_2) \sim (\Delta x)^2$, т. е. движение изображающей точки в области II можно рассматривать чисто динамически.

Для малых отклонений около предельного цикла на границе областей I, II получаем:

$$\begin{aligned}\Delta x'_{2n} &= \frac{\Delta x'_{1n}}{K+1}; \quad y'_{1n} = \Delta y'_{1n} + \Delta x'_{2n}; \\ T_2 &= -\frac{\Delta x'_{1n}}{K+1}; \quad y'_{2n} = \Delta y'_{2n} - \Delta x'_{2n}.\end{aligned}$$

Область III ($-1 \leq x_1 \leq 1$; $-1 \leq x_2 \leq 1$) при $\lambda \ll 1$ является областью быстрых движений (скачков). Так как время скачка порядка $|\lambda \ln \lambda|$, то, очевидно*,

$$F'_{1,2n}(|\lambda \ln \lambda|) \sim \Delta x |\lambda \ln \lambda|; \quad G'_{1,2n}(|\lambda \ln \lambda|) \sim \Delta x |\lambda \ln \lambda|.$$

Следовательно, движение изображающей точки в области III можно рассматривать также чисто динамически, так что

$$\begin{aligned}\Delta x'''_{1n} &= K \Delta x'_{2n}; \quad \Delta y'''_{1n} = \Delta y'_{2n}; \\ \Delta x'''_{2n} &= \Delta x'_{2n}; \quad \Delta y'''_{2n} = \Delta y'_{2n}.\end{aligned}$$

Уравнения для области IV ($x_1 > 1$; $x_2 < -1$) получаются из уравнений для области I взаимной перестановкой x_1 и x_2 , y_1 и y_2 , f_1 и f_3 , f_2 и f_4 . Учитывая сказанное, легко найти, что

$$\tau_{4n} = -P^{1/2} \Delta y'''_{1n} + F'_{1n}(T_4);$$

* Можно привести и более строгое доказательство этих соотношений.

$$\Delta x_{2n}^{IV} = -P^{1/2} (\Delta y_{1n}^{'''} + \Delta y_{2n}^{'''}) + F_{1n}^{'''}(T_4) + F_{2n}^{'''}(T_4);$$

$$\Delta y_{1n}^{IV} = G_{1n}^{'''}(T_4) + F_{1n}^{'''}(T_4);$$

$$\Delta y_{2n}^{IV} = P^{1/2} (\Delta y_{1n}^{'''} + \Delta y_{2n}^{'''}) + G_{2n}^{'''}(T_4) - F_{1n}^{'''}(T_4),$$

где T_4 — невозмущенное время движения изображающей точки в области IV.

Для области V ($-1 \leq x_1 \leq 1$; $x_2 \leq -1$) также из соображения симметрии легко написать:

$$\Delta x_{1n}^V = \frac{\Delta x_{2n}^{IV}}{K+1}; \quad T_5 = -\frac{\Delta x_{2n}^{IV}}{K+1};$$

$$\Delta y_{1n}^V = \Delta y_{1n}^{IV} - \frac{\Delta x_{2n}^{IV}}{K+1};$$

$$\Delta y_{2n}^V = \Delta y_{1n}^{IV} + \frac{\Delta x_{2n}^{IV}}{K+1},$$

где Δx_{1n}^V , Δy_{1n}^V , Δy_{2n}^V — малые отклонения изображающей точки от предельного цикла на отрезке $-1 \leq x_1 \leq 1$.

Наконец, для второго скачка за период имеем:

$$\Delta x_{1(n+1)} = \Delta x_{1n}^V;$$

$$\Delta x_{2(n+1)} = K \Delta x_{1n}^V;$$

$$\Delta y_{1(n+1)} = \Delta y_{1n}^V;$$

$$\Delta y_{2(n+1)} = \Delta y_{2n}^V.$$

Объединяя полученные преобразования в одно и рассматривая стационарный случай, получим:

$$\Delta x_{1n} = \left[-P \sum_{m=-\infty}^{n-2} P_{\varphi_m}^{n-m-2} + \psi_{n-1} \right] \frac{1}{K+1};$$

$$\Delta x_{2n} = \left[-P \sum_{m=-\infty}^{n-2} P_{\varphi_m}^{n-m-2} + \psi_{n-1} \right] \frac{K}{K+1};$$

$$\Delta y_{1n} = \left[P \sum_{m=-\infty}^{n-2} P_{\varphi_m}^{n-m-2} + \omega_{n-1} \right] \frac{1}{K+1};$$

$$\Delta y_{2n} = \left[KP \sum_{m=-\infty}^{n-2} P_{\varphi_m}^{n-m-2} + z_{n-1} \right] \frac{1}{K+1};$$

$$(\tau_{1n} + T_2 + \tau_{4n} + T_5) = -\frac{1}{K+1} \left[(K-1) P^{1/2} (P^{1/2} + 1) \sum_{m=-\infty}^{n-2} P_{\varphi_m}^{n-m-2} + M_{n-1} + N_n \right],$$

где

$$\varphi_m = \frac{G_{1m} + G_{2m}}{2K-1} + G_{1m}^{'''} + G_{2m}^{'''};$$

$$\omega_m = G_{1m}''' (K+1) + F_{1m}''' K - F_{2m}''' + P^{\frac{1}{2}} [G_{1m} + G_{2m}];$$

$$x_m = (K+1) \varphi_m - \omega_m;$$

$$M_m = P^{\frac{1}{2}} x_m + P(K-1) \varphi_m + P^{\frac{1}{2}} \varphi_m;$$

$$N_m = (1 + P^{\frac{1}{2}}) (F_{1m} - KF_{2m}) + (F_{2m}''' - KF_{1m}''') + P^{\frac{1}{2}} (G_{1m} K - G_{2m});$$

$$\psi_m = F_{1m}''' + F_{2m}''' - P^{\frac{1}{2}} [G_{1m} + G_{2m}].$$

Для средних квадратов и корреляционных функций тогда справедливы следующие выражения:

$$\overline{\Delta x_1^2} = \frac{1}{(K+1)^2} \left[P^2 \frac{1}{1-P^2} \overline{\varphi^2} + \overline{\psi^2} \right];$$

$$\overline{\Delta y_1^2} = \frac{1}{(K+1)^2} \left[\frac{P^2}{1-P^2} \overline{\varphi^2} + \overline{\psi^2} \right];$$

$$\overline{\Delta y_2^2} = \frac{1}{(K+1)^2} \left[\frac{K^2 P^2}{1-P^2} \overline{\varphi^2} + \overline{x^2} \right];$$

$$\overline{\Delta x_2^2} = \frac{K^2}{(K+1)^2} \left[\frac{P^2}{1-P^2} \overline{\varphi^2} + \overline{\psi^2} \right];$$

$$\overline{\Delta x_{1n} \Delta x_{1(n+1)}} = \frac{1}{(K+1)^2} \left[\frac{P^3}{1-P^2} \overline{\varphi^2} - P \overline{\varphi_{n-1} \psi_{n-1}} \right];$$

$$\overline{\Delta x_{1n} \tau_{1n}} = - \frac{P^{\frac{1}{2}}}{(K+1)^2} \left[\frac{K P^2}{1-P^2} \overline{\varphi^2} + \overline{\psi_{n-1} x_{n-1}} \right]$$

и т. д.*.

На плоскости $x_1 x_2$ (рис. 2) изображающая точка может совершить полный цикл четырьмя различными способами. В силу соотношения

$$\overline{\Delta x_n \Delta x_{n+1}} \ll \overline{\Delta x^2}$$

и симметрии схемы их можно считать независимыми и равновероятными, так что

$$\overline{\Delta x_{1,2}^2} = \frac{K^2 + 1}{(K+1)^2} \left[\frac{P^2}{1-P^2} \overline{\varphi^2} + \overline{\psi^2} \right].$$

Условия, наложенные на времена корреляции случайных функций $f_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), дают, очевидно, возможность рассматривать их как белый шум. Тогда

* Заметим, что в силу условий, наложенных на времена корреляции случайных функций,

$$\overline{F_j^{(i)} F_{j'}^{(i')}} = 0;$$

$$\overline{G_j^{(i)} G_{j'}^{(i')}} = 0; \quad \overline{F_j^{(i)} G_{j'}^{(i')}} = 0$$

при $i \neq i', j \neq j'$.

$$\overline{\Delta x_{1,2}^2} \simeq -\frac{K^2(K^2+1)}{2(K+1)^2 V_0^2 S^2 T_0 \lambda} [2\alpha^2 + 2\beta^2 + \gamma^2],$$

где

$$\alpha^2 = 4kT/R_a; \beta^2 = 4kT/R_g; \gamma^2 = 2eI_s.$$

Для среднего квадрата дифференциального набега фазы за N периодов можно написать следующие выражения:

$$\overline{\Theta_N^2} = DN - R \quad (N = 1, 2, 3, \dots);$$

$$\overline{\Theta_N^2} = 0 \quad (N = 0);$$

$$D = \frac{2K^4(K^2+1)}{(K+1)^2(2K-1)^2 V_0^2 S^2 T_0 \lambda} [2\alpha^2 + 2\beta^2 + \gamma^2];$$

$$R = \frac{K^2(K^2+1)}{2(K+1)^2(2K-1) V_0^2 S^2 T_0 \lambda} [2\alpha^2 + 2\beta^2 + \gamma^2].$$

Рассмотрим пример: полагая $R_a = 10$ ком, $R_g = 300$ ком, $C = 5000$ пф, $C_a = C_g = 10$ пф, $S = 3$ ма·с⁻¹, $V_0 = -10$ в, $I_s = 10$ ма, $\lambda = 1,3 \cdot 10^{-4}$, $K \simeq 30$, $T \simeq 1,5 \cdot 10^{-3}$ сек, получим:

$$\sqrt{\frac{\overline{\Delta x_{1,2}^2}}{a^2}} \simeq 5,2 \cdot 10^{-6}; D/T_0 \simeq 3,4 \cdot 10^{-5},$$

где $a = 2K - 1$ — амплитуда колебаний, $T_0 = 2\pi(2K - 1)$ — безразмерный период колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Железцов, ЖТФ, 20, 778 (1950).
2. Н. А. Железцов, Л. В. Родыгин, ДАН СССР, 81, 391 (1951).
3. С. М. Рытов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, 50 (1959).
4. В. И. Бунимович, Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. изд. Сов. радио, М., 1951.
5. В. С. Пугачев, Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Гостехиздат, М., 1957.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
28 февраля 1960 г.

Примечание при корректуре. В правой части рис. 2. вместо Δx_1^I следует читать Δx_1^{III} .

К ВОПРОСУ О ФЛЮКТУАЦИЯХ В КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Р. Х. Садеков

Обобщается метод Рытова [1] на случай недельта-коррелированных шумов, воздействующих на кусочно-линейную систему с произвольным числом степеней свободы.

1. Пусть некоторая автоколебательная система, подвергающаяся случайным возмущениям, может быть описана системой уравнений

$$\dot{z}_i = f_i(z_1, \dots, z_k) + \xi_i(z_1, \dots, z_k, t) \quad (i = 1, \dots, k), \quad (1)$$

относительно правых частей которых предположено, что $f_i(z_1, \dots, z_k)$ — кусочно-линейные, а $\xi_i(z_1, \dots, z_k, t)$ — малые случайные функции. В статье [1] разработан способ нахождения среднестатистических характеристик колебаний в подобной системе для малых Δ -времен корреляции случайных функций ξ_i относительно временных характеристик системы. Здесь мы, не предполагая Δ малым, попытаемся применить указанный способ к нашей задаче.

Пусть пространство переменных $z_1, \dots, z_k$ состоит из M областей линейности системы уравнений (1), границами которых служат гиперплоскости $\Gamma_{m, m+1}$:

$$D_{m, m+1} z + C_{m, m+1} = 0. \quad (2)$$

В каждой из этих областей система (1) может быть записана в виде:

$$\dot{z} = A_m z + \xi_m(t), \quad (1a)$$

где A_m — матрица порядка $(k \times k)$ с постоянными элементами, $\xi_m(t)$ — столбец случайных функций, получившийся из $\xi(z, t)$ после подстановки в него невозмущенных решений системы (1a). Придерживаясь алгоритма, указанного в работе [1], для возмущения Δz на границе $\Gamma_{m, m+1}$ получим:

$$\Delta z_n^{(m+1)} = P^{n-r} \Delta z_r^{(m)} + \sum_{j=r}^{n-1} P^{n-j-1} H_{n-j-2}^{(m)} \quad (n \geq r), \quad (3)$$

где

$$P = \prod_{i=0}^{M-1} P_{m+i};$$

$$P_j = e^{A_m T_m} - e^{A_m T_m} A_m z_0^{(m)} [D_{m, m+1} e^{A_m T_m} A_m z_0^{(m)}]^{-1} D_{m, m+1} e^{A_m T_m},$$

$e^{A_m t}$ — матрица решений системы (при $\xi_m(t) = 0$), T_m — невозмущенное время пребывания системы в области m , $z_0^{(m)}$ — координата точки пересечения предельного цикла с границей $\Gamma_{m-1, m}$,

$$H_\alpha^{(m)} = \sum_{i=1}^{M-1} \left(\prod_{j=i}^{M-1} P_{m+j-1} \right) Q_{m+i-1} F_\alpha(T_{m+i-1}) + Q_{m+M-1} F_\alpha(T_{m+M-1});$$

$$Q_{\beta} = -e^{A_{\beta} T_{\beta}} A_{\beta} z_0^{(\beta)} [D_{\beta, \beta+1} e^{A_{\beta} T_{\beta}} A_{\beta} z_0^{(\beta)}]^{-1} D_{\beta, \beta+1};$$

$$F_{\alpha}(T_{\gamma}) = \int_{t_{\alpha, \gamma}}^{t_{\alpha, \gamma} + T_{\gamma}} e^{A_{\gamma} [t_{\alpha, \gamma} + T_{\gamma} - u]} \xi_{\gamma}(u) du,$$

$t_{\alpha, \gamma}$ — время прихода системы на границу $\Gamma_{\gamma-1, \gamma}$. Заметим, что в приведенных выражениях $\Delta z_n^{(m+M)} = \Delta z_{n+1}^{(m)}$, а $P_{m+\delta}$, $Q_{m+\delta}$, $T_{m+\delta}$ при $m + \delta > M$ должны быть заменены соответственно на $P_{m+\delta-M}$, $Q_{m+\delta-M}$, $T_{m+\delta-M}$. При $k \rightarrow -\infty$, учитывая асимптотическую устойчивость предельного цикла, получаем:

$$\Delta z_n^{(m)} = \sum_{j=-\infty}^{n-1} P^{n-j-1} H_{n-j-2}^{(m)} = \sum_{j=-\infty}^{n-1} (z_n^m)_j. \quad (4)$$

Введем в рассмотрение корреляционную матрицу случайной функции $\Delta z_n^{(m)}$. Нетрудно видеть, что ее можно записать в виде:

$$\overline{(\Delta z_n^m)(\Delta z_{n+l}^m)^*} = \begin{vmatrix} \overline{\Delta z_{n,1}^m \Delta z_{n+l,1}^m} & \overline{\Delta z_{n,1}^m \Delta z_{n+l,2}^m} & \dots \\ \overline{\Delta z_{n,2}^m \Delta z_{n+l,1}^m} & \overline{\Delta z_{n,2}^m \Delta z_{n+l,2}^m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \overline{\Delta z_{n,k}^m \Delta z_{n+l,1}^m} & \overline{\Delta z_{n,k}^m \Delta z_{n+l,2}^m} & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{j=-\infty}^{n-1} (z_n^m)_1 \sum_{j=-\infty}^{n+l-1} (z_{n+l}^m)_1 & \sum_{j=-\infty}^{n-1} (z_n^m)_1 \sum_{j=-\infty}^{n+l-1} (z_{n+l}^m)_2 & \dots \\ \sum_{j=-\infty}^{n-1} (z_n^m)_2 \sum_{j=-\infty}^{n+l-1} (z_{n+l}^m)_1 & \sum_{j=-\infty}^{n-1} (z_n^m)_2 \sum_{j=-\infty}^{n+l-1} (z_{n+l}^m)_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \sum_{j=-\infty}^{n-1} (z_n^m)_k \sum_{j=-\infty}^{n+l-1} (z_{n+l}^m)_1 & \sum_{j=-\infty}^{n-1} (z_n^m)_k \sum_{j=-\infty}^{n+l-1} (z_{n+l}^m)_2 & \dots \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Любой из диагональных элементов для $i = 0$ можно переписать следующим образом:

$$\overline{(\Delta z_{n,p}^m)^2} = \sum_{j=-\infty}^{n-1} \overline{(z_{n,j}^m)^2} + \sum_{j=-\infty}^{n-1} \overline{(z_{n,j}^m)(z_{n,j-1}^m)} + \sum_{j=-\infty}^{n-1} (z_{n,j}^m)(z_{n,j-2}^m) + \dots =$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{n-1} \overline{(z_{n,j}^m)(z_{n,j-q}^m)}. \quad (6)$$

Сходимость полученного ряда по индексу j обеспечивается асимптотической устойчивостью предельного цикла. Для сходимости ряда по индексу q нетрудно получить следующее достаточное условие:

$$\int_0^{\infty} |\varphi(t, t')| dt < \infty, \quad (7)$$

в котором $\varphi(t, t')$ — корреляционная матрица случайной функции $\xi(z, t)$, а C — любое действительное число. Указанное условие является достаточным и для сходимости любого другого элемента матрицы для $i=0, 1, 2, \dots$, так как ряд (6) мажорирует все остальные*.

В практических приложениях зачастую имеется возможность ограничиться небольшим числом членов ряда по индексу q (см. ниже).

Для флуктуаций периода колебаний в общем случае можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \tau_n = & - \sum_{j=1}^M [D_{j, j+1} e^{A_j T_j A_j} z_0^{(j)}]^{-1} D_{j, j+1} e^{A_j T_j} \Delta z_n^{(j)} - \\ & - [D_{j, j+1} e^{A_j T_j A_j} z_0^{(j)}]^{-1} D_{j, j+1} F(T_j). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда для среднего квадрата дифференциального набег фазы за N периодов имеем:

$$\begin{aligned} \overline{\Theta_N^2} &= \overline{\left[\sum_{m=n}^{n+N} \tau_m \right]^2} = N \overline{\tau_n^2} + (N-1) \overline{\tau_n \tau_{n+1}} + \dots + = \\ &= N \left[\sum_{j=0}^N \overline{\tau_n \tau_{n+j}} - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N j \overline{\tau_n \tau_{n+j}} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Из выражения (9) следует, что при $N \rightarrow \infty$ распределение $\overline{\Theta_N^2}$ сводится к диффузионному закону с коэффициентом $D = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\tau_n \tau_{n+j}}$, причем критерий (7) является достаточным условием сходимости рядов

$$\sum_{j=0}^{\infty} \overline{\tau_n \tau_{n+j}}; \quad \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{\infty} j \overline{\tau_n \tau_{n+j}}.$$

2. В качестве примера рассмотрим флуктуации в системе 2-го порядка с двумя областями линейности $|y| > 1$ ($k=2$; $M=2$) на границе $y=0$ (см. [1]).

В работе [1] для Δx_n^1 было получено выражение

$$\Delta x_n^1 = \sum_{m=-\infty}^{n-1} P^{n-m-1} (P_2 H_{1m} + H_{2m}) = \sum_{m=-\infty}^{n-1} P^{n-m-1} a_m, \quad (10)$$

откуда

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta x_n^1)^2} &= \sum_{m=-\infty}^{n-1} P^{2(n-m-1)} \overline{a_m^2} + P \sum_{m=-\infty}^{n-1} P^{2(n-m-1)} \overline{a_m a_{m-1}} + \dots + = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P^k \sum_{m=-\infty}^{n-1} P^{2(n-m-1)} \overline{a_m a_{m-k}} \end{aligned} \quad (11)$$

или (поскольку $a_m a_{m-k}$ не зависит от индекса m)

* Во многих конкретных случаях условие (7) может быть заменено более слабым.

$$\overline{(\Delta x_n^1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} P^k \overline{\alpha_m \alpha_{m-k}} \sum_{m=-\infty}^{n-1} P^{n-m-1} = \frac{1}{1-P^2} \sum_{k=0}^{\infty} P^k \overline{\alpha_m \alpha_{m-k}}. \quad (12)$$

Аналогично можно получить и другие выражения, например,

$$\overline{\Delta x_n^1 \Delta x_{n+1}^1} = \overline{(\Delta x_n^1)^2} P + \sum_{k=0}^{\infty} P^k \overline{\alpha_m \alpha_{m-k-1}}; \quad (13)$$

$$\overline{\Delta x_n^1 \Delta x_{n+2}^1} = \overline{(\Delta x_n^1)^2} P^2 + \overline{(\Delta x_n^1 \Delta x_{n+1}^1)} P + \sum_{k=0}^{\infty} P^k \overline{\alpha_m \alpha_{m-k-2}}$$

и т. д. Для флуктуации периода колебаний можно написать (см. [1]):

$$\tau_n = (Q_1 + Q_2 P_1) \sum_{m=-\infty}^{n-1} P^{n-m-1} \alpha_m + I_{1n} + Q_2 H_{1n} + I_{2n} = q \sum_{m=-\infty}^{n-1} P^{n-m-1} \alpha_m + \beta_n. \quad (14)$$

Неспосредственный расчет дает следующее выражение для $\overline{\Theta_N^2}$:

$$\begin{aligned} \overline{\Theta_N^2} = & DN - R(1 - P^N) + \sum_{i=1}^{\infty} [D_i N - R_i(1 - P^N)] P^i + 2 \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) \overline{\beta_m \beta_{m+i}} + \\ & 2q \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\alpha_m \alpha_{m+i+k}} \mu_k + 2q \sum_{k=2}^{N-1} \overline{\alpha_{m+k-1} \beta_m} \mu_k, \end{aligned} \quad (15)$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned} D &= \frac{q}{1-P} \left[\frac{\overline{\alpha_m^2}}{1-P} + 2 \overline{\alpha_m \beta_m} \right] + \overline{\beta_m^2}; \\ R &= \frac{2q}{1-P^2} \left[\frac{q \overline{\alpha_m^2}}{1-P^2} + \overline{\alpha_m \beta_m} \right]; \\ D_i &= \frac{2q}{1-P} \left[q \frac{\overline{\alpha_m \alpha_{m-i}}}{1-P} + 2 \overline{\beta_m \alpha_{m-i}} \right]; \\ R_i &= \frac{4q}{1-P^2} \left[q \frac{\overline{\alpha_m \alpha_{m-i}}}{1-P^2} + \overline{\beta_m \alpha_{m-i}} \right]; \\ \mu_k &= \frac{P(P^{N-k} - 1) + N - k}{1 - P}. \end{aligned} \quad (16)$$

3. Рассмотрим один конкретный физический пример: колебания мультивибратора (см. рис. 1) под действием случайной последовательности малых экспоненциальных импульсов

$$J(t) = \sum n_i a_i e^{-\delta'(t-t_i)}$$

(n_i и a_i — плотность и величина импульсов) [3].

Систему уравнений, описывающую движение указанной системы, можно записать в виде*:

$$\begin{aligned} \mu \dot{x} &= -x - y - K \varphi(x) - \xi(t); \\ \dot{y} &= x + \gamma(t); \end{aligned} \quad (17)$$

* Все обозначения взяты из [2].

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < -1 \\ -x & \text{при } |x| < 1 \\ -1 & \text{при } x > 1 \end{cases},$$

где

$$K = \frac{SR_a}{1 + C_g/C + (R_a/R_g)(1 + C_a/C)};$$

$$\mu = \frac{R_a}{R_g} \frac{(C_a + C_g)/C + C_a C_g/C^2}{[1 + C_g/C + (R_a/R_g)(1 + C_a/C)]^2};$$

$$V = E_g + V_0 x; \quad \xi(t) = \frac{[1 + C_a/C]CRr}{T_0 V_0} J(t); \quad \eta_1(t) = \frac{r}{V_0} J(t);$$

$$U = E_a + \frac{C_g}{C} V_0 x + \frac{T_0}{CR_g} V_0 y; \quad t_{\text{стар}} = T_0 t_{\text{нов}}.$$

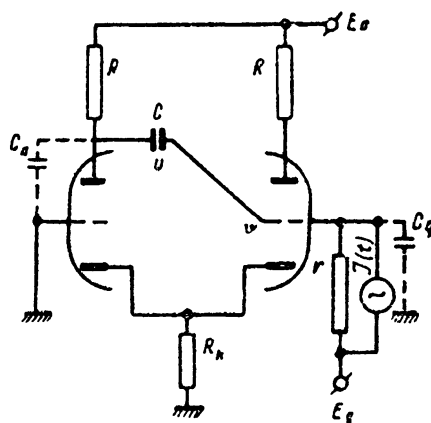


Рис. 1.

Обычно параметр $\mu \ll 1$. В этом случае, как показывает непосредственный расчет, из всей суммы для $\overline{\Delta y_n \Delta y_{n+i}}$ остается лишь один член, который в окончательном виде записывается так:

$$\overline{\Delta y_n \Delta y_{n+i}} = \left[\frac{CRr}{V_0 T_0} \right]^2 \frac{n \bar{a}^2}{\delta'} e^{-2\delta T i} \quad (18)$$

(на границе $x = -1$). Здесь $2T = 2\ln(2K - 1)$ — период колебаний мультивибратора.

При том же условии $\mu \ll 1$ для $\overline{\Theta_N^2}$ можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \overline{\Theta_N^2} &= Na - 2b + c \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) e^{-2\delta T i} = \\ &= N \left[a + c \frac{e^{-2\delta T}}{1 - e^{-2\delta T}} \right] - 2b - c \frac{e^{-2\delta T N} - e^{-4\delta T}}{(1 - e^{-2\delta T})^2} \quad (N \geq 1); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
a &= 2\alpha [2Q^2 + 3Q + 2 + e^{-\delta T}(Q + 1)^2 + Qe^{-2\delta T}] + \\
&+ \frac{4\beta}{\delta^2 - 1} [-\delta(1+Q+Q^2+2Qe^{-\delta T}+Qe^{-2\delta T}) + (1-Q^2)+e^{-\delta T}(1-Q^2)] + \\
&+ \frac{2\gamma}{\delta^2 - 1} [\delta(1-Q^2) - 1 - Q - Q^2 - (1-Q^2)e^{-\delta T} + Qe^{-2\delta T}]; \\
b &= \alpha Qe^{-\delta T}(1+Q+e^{-\delta T}) + \frac{\beta Q}{\delta - 1}(1 - e^{-\delta T})(e^{-\delta T} - Q); \\
c &= \alpha [4(Q+1)^2 + (2Q^2+2Q+1)(e^{-\delta T} + e^{\delta T}) + 2Q(e^{-2\delta T} + e^{2\delta T})] + \\
&+ \frac{2\beta}{\delta^2 - 1} [(1+Q^2)(2+e^{\delta T} + e^{-\delta T}) + Q\delta(2e^{-\delta T} - 2e^{\delta T} + e^{-2\delta T} - e^{2\delta T})] + \\
&+ \frac{\gamma}{\delta^2 - 1} [-2(1+Q^2) - (Q-1)^2(e^{-\delta T} + e^{\delta T}) + Q(e^{-2\delta T} + e^{2\delta T})],
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left[\frac{cRr}{V_0 T_0} \right]^2 \frac{\bar{n}a^2}{\delta T_0}; \quad Q = \frac{1}{2K-1}; \\
\beta &= \frac{r^2 \bar{n}a^2}{V_0^2 T_0 \delta} \left[\frac{cR}{T_0} + 1 \right]; \quad \gamma = \frac{r^2 \bar{n}a^2}{V_0^2 T_0 \delta} \left[\frac{cR}{T_0} + 1 \right]^2; \\
\delta &= T_0 \delta'.
\end{aligned}$$

Представляет интерес случай, когда $J(t)$ стремится к белому шуму. Этот случай получается из только что рассмотренного, если вместо $\psi(\tau)$ взять $\delta^2 \psi(\tau)$ при $\delta \rightarrow \infty$. Тогда

$$\overline{\Delta y^2} \simeq \left[\frac{cRr}{V_0 T_0} \right]^2 \frac{\bar{n}a_2}{T_0 \mu}. \quad (20)$$

Из (20), в частности, следует вывод: если $1/\delta \gg \mu$ (т. е. если время корреляции случайной функции $J(t)$ велико по сравнению с μ), то параметр μ несущественен. Последнее понимается в том смысле, что вместо системы (17) может рассматриваться вырожденная система ($\mu=0$) с привлечением гипотезы о скачке. Если же $1/\delta \ll \mu$, то параметр μ существенен (т. е. μ не может быть положено равным 0) и тем более, чем сильнее не выполняется неравенство $1/\delta \gg \mu$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, 50 (1959).
2. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
3. В. И. Бунимович, Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, изд. Сов. радио, М., 1951.
4. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, М., 1954.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
26 марта 1960 г.

К ВОПРОСУ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ АНТЕНН ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПОВЕРХНОСТНЫМ ИМПЕДАНСОМ

В. И. Таланов

Рассмотрены поверхностные электромагнитные волны над плоскостью с синусоидально изменяющимся поверхностным импедансом. В случае малых амплитуд модуляции импеданса вычислены поправки к невозмущенному значению постоянной распространения поверхностной волны, обусловленные модуляцией, а также коэффициент затухания поверхностной волны из-за переизлучения ее энергии полем — 1-ой пространственной гармоники. Особо рассмотрена структура поля в системе вблизи критических частот, соответствующих „ π “- и „ 2π “-колебаниям. Полученные результаты использованы для расчета закона изменения глубины модуляции импеданса по антенне, обеспечивающего требуемое амплитудное распределение эквивалентных источников на ее поверхности.

В настоящей работе проведен анализ особенностей формирования поверхностного электромагнитного поля над плоскостью с синусоидально изменяющимся поверхностным импедансом (раздел 1); на основе этого анализа получены соотношения, необходимые для расчета излучателя, использующего в качестве основного элемента участок такой поверхности (раздел 2).

1. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НАД ПЛОСКОСТЬЮ С СИНУСОИДАЛЬНО ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПОВЕРХНОСТНЫМ ИМПЕДАНСОМ

Вопросу о распространении волн в неэкранированных замедляющих системах с периодически изменяющимся поверхностным импедансом посвящен ряд работ [1–3]. Тем

не менее, некоторые особенности электромагнитного поля в таких системах нуждаются в более подробном изучении. Это касается, в первую очередь, квазиповерхностных волн, играющих основную роль в механизме излучения антенн, построенных на основе замедляющих структур с периодически изменяющимися параметрами. Ниже эти особенности рассмотрены на примере двумерных поверхностных

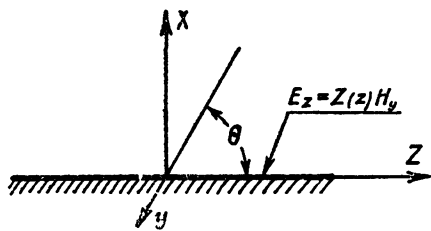


Рис. 1.

ТМ-волн над импедансной плоскостью (рис. 1), характеризующейся краевым условием*

$$E_z = Z(z)H_y \quad (1.1)$$

с чисто реактивным поверхностным импедансом

$$Z(z) = iZ_0(Q_0 + Q_1 \sin(\beta kz)) \quad (\text{Re } Z = 0), \quad (1.2)$$

* Используется практическая рационализированная система единиц; зависимость от времени — $e^{i\omega t}$.

где Q_0, Q_1 — положительные постоянные величины, $\beta = 2\pi / kD$, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 2\pi/\lambda$, D — период модуляции импеданса, ε_0, μ_0 — параметры среды, заполняющей полупространство $x > 0$.

В класс поверхностных волн будем включать не только поля, полностью локализованные вблизи плоскости $x = 0$ и экспоненциально убывающие по амплитуде при удалении от нее (устойчивые волны), но также поля, имеющие на достаточно большом расстоянии от импедансной плоскости характер волн, распространяющихся в $+x$ -направлении (неустойчивые, или квазиповерхностные волны). Над плоскостью с однородным импедансом ($Q_1 = 0$) волны второго типа, как известно, существовать не могут; возникновение их связано с изменением импеданса как функции координат.

Компоненту магнитного поля $H_y \equiv H$, через которую выражаются остальные компоненты поля, запишем в виде бесконечной суммы пространственных гармоник:

$$H(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-ih_n z - i\alpha_n x}, \quad (1.3)$$

где

$$h_n = h_0 + \frac{2\pi}{D} n, \quad \alpha_n = \sqrt{k^2 - h_n^2}, \quad (1.4)$$

причем в силу данного выше определения поверхностных полей

$$\operatorname{Re} \alpha_n \geq 0 \quad \text{при} \quad |\operatorname{Re} h_n| \leq k \quad (\text{„быстрые“ гармоники}),$$

$$\operatorname{Im} \alpha_n \leq 0 \quad \text{при} \quad |\operatorname{Re} h_n| \geq k \quad (\text{„медленные“ гармоники}).$$

Подставляя выражение (1.3) в (1.1), после умножения последнего на $e^{ih_n z}$ и интегрирования его в пределах $(0, D)$ для определения амплитуд a_n пространственных гармоник получим бесконечную систему уравнений

$$\alpha_n a_n + B(a_{n+1} - a_{n-1}) = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.5)$$

где

$$\alpha_n = Q_0 - i\sigma_n; \quad (1.6)$$

$$\sigma_n = \frac{\alpha_n}{k} = \sqrt{1 - \gamma_n^2}; \quad \gamma_n = h_n/k = \gamma_0 + \beta n; \quad B = Q_1/2i.$$

Запишем уравнения (1.5) в виде рекуррентных соотношений:

$$T_n = \frac{B^2}{\alpha_{n+1} + T_{n+1}} \quad (1.7a)$$

или

$$T_n = -\alpha_n + \frac{B^2}{T_{n-1}}, \quad (1.7b)$$

где

$$T_n = Ba_{n+1}/a_n. \quad (1.8)$$

Из (1.7) нетрудно получить асимптотические значения T_n при $n \rightarrow \pm \infty$:

$$T_n \sim \frac{B^2}{\alpha_{n+1}} \sim -\frac{B^2}{n\beta} \quad (n \rightarrow \infty); \quad (1.9a)$$

$$T_n \sim -\alpha_n \sim |n|^\beta \quad (n \rightarrow -\infty). \quad (1.96)$$

Сопоставляя эти выражения с (1.7), найдем, что

$$a_{n+m} \sim \left(-\frac{B}{\beta}\right)^m \frac{n!}{(n+m)!} a_n; \quad (1.10)$$

$$a_{-(n+m)} \sim \left(\frac{B}{\beta}\right)^m \frac{n!}{(n+m)!} a_{-n}$$

при больших n . Таким образом, быстрота сходимости амплитуд пространственных гармоник $a_{\pm(n+m)}$ к нулю при $m \rightarrow \infty$ зависит от отношения $|B/\beta| = Q_1 D / 2\lambda$ и будет, следовательно, тем больше, чем меньше амплитуда модуляции безразмерного импеданса Q_1 и отношение периода модуляции D к длине волны λ . При $Q_1 D / 2\lambda < 1$ в выражении (1.3) практически достаточно учитывать лишь несколько первых гармоник.

Используя рекуррентные соотношения (1.7), выражения для T_n можно записать в виде цепных дробей:

$$T_n = \frac{B^2}{\alpha_{n+1} + \frac{B^2}{\alpha_{n+2} + \dots + \frac{B^2}{\alpha_{n+m} + T_{n+m}}}}; \quad (1.11a)$$

$$T_n = -\alpha_n - \frac{B^2}{\alpha_{n-1} + \frac{B^2}{\alpha_{n-2} + \dots + \frac{B^2}{\alpha_{n-m} - \frac{B^2}{T_{n-m-1}}}}}. \quad (1.116)$$

Приравнивая друг другу эти выражения при $m \rightarrow \infty$, получим характеристическое уравнение для определения волнового числа γ_0 нулевой гармоники:

$$\alpha_n = \frac{\xi}{\alpha_{n+1}} - \frac{\xi}{\alpha_{n+2}} - \dots + \frac{\xi}{\alpha_{n-1}} - \frac{\xi}{\alpha_{n-2}} - \dots, \quad (1.12)$$

где $\xi = -B^2 = Q_1^2/4$, а n — произвольное целое число. Произвол в выборе n связан с тем, что корень $\gamma_0 = h_0/k$, согласно (1.4), определен с точностью до βm (m — целое). Условимся под γ_0 понимать то значение корня, которое переходит при $\xi \rightarrow 0$ в $\gamma_s = \sqrt{1 + Q_0^2}$ — безразмерную постоянную распространения поверхностной волны над плоскостью с немодулированным импедансом. В этом случае уравнение (1.12) целесообразно записать в виде

$$\sigma_0 = \frac{\xi}{\alpha_1} - \frac{\xi}{\alpha_2} - \dots + \frac{\xi}{\alpha_{-1}} - \frac{\xi}{\alpha_{-2}} - \dots, \quad (1.13)$$

положив $n = 0$.

Из выражения (1.6) видно, что при $\beta \ll 2$ ($D \gg \lambda/2$) некоторые из коэффициентов α_n будут комплексны, а, следовательно, будет комплексным, вообще говоря, и корень уравнения (1.13). При определенных значениях параметров аналогичное явление имеет место и при $\beta > 2$. При отсутствии поглощения в импедансной плоскости комплексный характер постоянной распространения γ_0 может быть обусловлен лишь потерями энергии поверхностной волны на излучение (неустойчивая или квазиповерхностная волна). В дальнейшем мы остановимся в основном на анализе этого случая ввиду его исключительной важности для теории излучателей.

Уравнение (1.13) записано в форме, удобной для решения его методом последовательных приближений. Этот метод в практически интересном (с точки зрения излучателей) случае малой амплитуды изменения импеданса $\xi \ll 1$ и не слишком больших периодов модуляции $D \sim \lambda$ дает достаточно точное значение γ_0 уже в первых приближениях. Некоторые трудности представляет исследование уравнения (1.13) вблизи критических частот, соответствующих значениям γ_0 , лежащим вблизи либо $\frac{\beta}{2} (2N-1)$ — колебания типа „ π “, либо βN — колебания типа „ 2π “ (N — целое число), когда отдельные приближения даже при сколь угодно малых, но конечных значениях ξ могут оказаться расходящимися. Эти случаи будут исследованы особо.

В соответствии с (1.13) при малой глубине модуляции импеданса ($\xi \ll 1$) уравнения для γ_0 в нулевом и первом приближениях будут следующие:

$$\alpha_0^{(0)} = 0; \quad (1.14)$$

$$\alpha_0^{(1)} = \xi/\alpha_1^{(0)} + \xi/\alpha_{-1}^{(0)}. \quad (1.15)$$

В нулевом приближении имеем:

$$\gamma_0^{(0)} = \sqrt{1 + Q_0^2} \equiv \gamma_s; \quad (1.16)$$

в первом приближении

$$\gamma_0^{(1)} = \sqrt{1 - \sigma_0^{(1)2}}, \quad (1.17)$$

где

$$\sigma_0^{(1)} = -iQ_0 - i\frac{\xi}{2\beta} \left(\frac{Q_0 + i\sigma_{+1}^{(0)}}{\gamma_s + \beta/2} - \frac{Q_0 + i\sigma_{-1}^{(0)}}{\gamma_s - \beta/2} \right). \quad (1.18)$$

При $|\gamma_{-1}^{(0)}| \equiv |\gamma_s - \beta| > 1$ $\sigma_0^{(1)}$ — чисто мнимая величина, так что поверхностная волна распространяется без затухания. При $|\gamma_{-1}^{(0)}| < 1$ величина $\sigma_0^{(1)}$ становится комплексной, что соответствует квазиповерхностной волне, энергия которой переизлучается в окружающее пространство ввиду наличия „быстрой“ пространственной гармоник номера $n = -1$. В последнем случае формула (1.17) позволяет рассчитать коэффициент затухания поверхностной волны из-за потерь на излучение.

Полагая

$$\gamma_0^{(1)} = \gamma_{0r}^{(1)} - i\gamma_{0im}^{(1)} \quad (1.19)$$

и принимая во внимание малую величину глубины модуляции импеданса ($\xi \ll 1$), из (1.17) получим:

$$\frac{\gamma_{0r}^{(1)} - \gamma_s}{\xi} = \frac{\sqrt{\gamma_s^2 - 1}}{2\beta\gamma_s} \left[\frac{\sqrt{\gamma_s^2 - 1} + \sqrt{(\gamma_s + \beta)^2 - 1}}{\gamma_s + \beta/2} - \frac{\sqrt{\gamma_s^2 - 1}}{\gamma_s - \beta/2} \right] \equiv F(\gamma_s, \beta); \quad (1.20)$$

$$\frac{\gamma_{0im}^{(1)}}{\xi} = \frac{\sqrt{\gamma_s^2 - 1}}{2\beta\gamma_s} \frac{\sqrt{1 - (\gamma_s - \beta)^2}}{\gamma_s - \beta/2} \equiv G(\gamma_s, \beta). \quad (1.21)$$

Зависимости $F(\gamma_s, \beta)$ и $G(\gamma_s, \beta)$ показаны соответственно на рис. 2, 3 (пунктирные кривые).

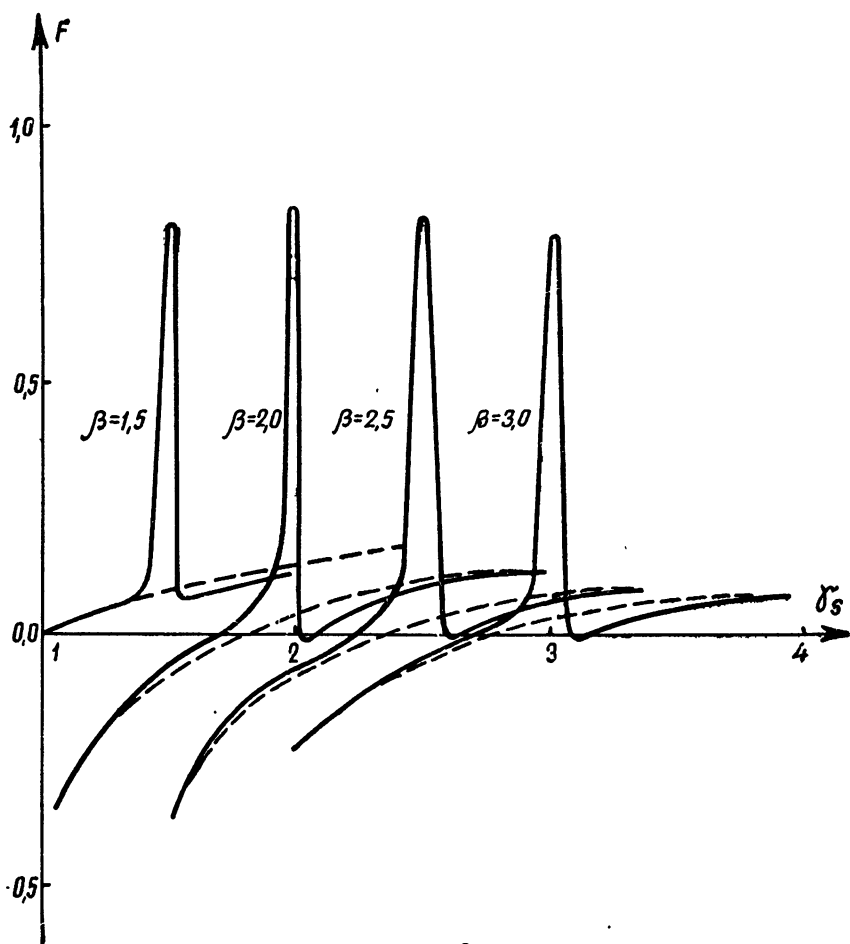


Рис. 2.

Приведем еще необходимое в дальнейшем выражение для поля — 1-ой пространственной гармоники, ответственной за излучение с поверхности с модулированным импедансом при $|\operatorname{Re} \gamma_{-1}| < 1$:

$$H_{-1}^{(1)} = - \frac{Q_1 a_0}{2i (Q_0 - i\sigma_{-1}^{(0)})} e^{-i\gamma_{-1}^{(1)} kx - i\sigma_{-1}^{(1)} kx}, \quad (1.22)$$

где

$$\gamma_{-1}^{(1)} = \gamma_0^{(1)} - \beta, \quad \sigma_{-1}^{(1)} = \sqrt{1 - \gamma_{-1}^{(1)2}}.$$

Формулы (1.20)–(1.22) будут использованы в разделе 2 при расчете излучателя, основным элементом которого является участок плоскости с синусоидально модулированным поверхностным импедансом.

Исследуем детальнее поле в рассматриваемой системе вблизи отмеченных выше критических частот „ π “-или „ 2π “-колебаний.

При колебаниях типа „ π “ имеют место соотношения:

$$\gamma_{-N-m} = -\gamma_{-N+m+1}; \quad \gamma_0 = \frac{\beta}{2} (2N-1); \quad \alpha_{-N-m} = \alpha_{-N+m+1}; \quad (1.23)$$

$$a_{-N-m} = \pm i (-1)^m a_{-N+m+1}.$$

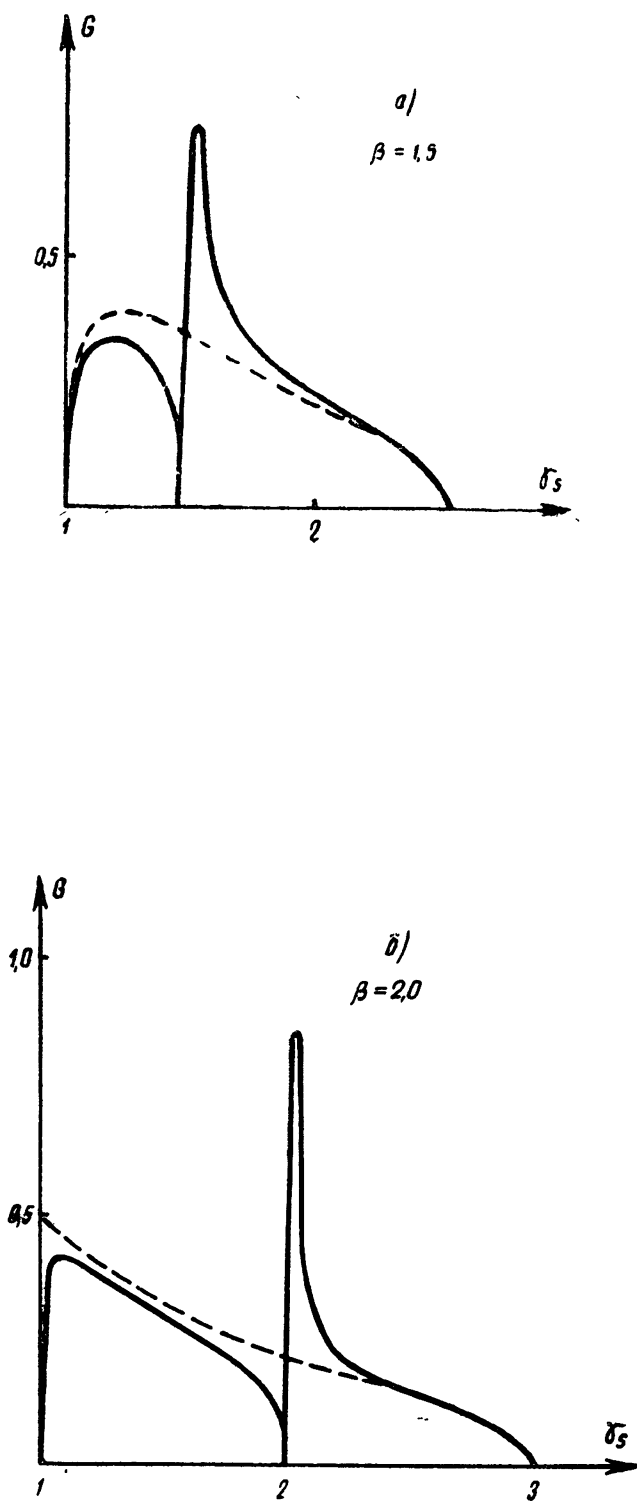


Рис. 3.

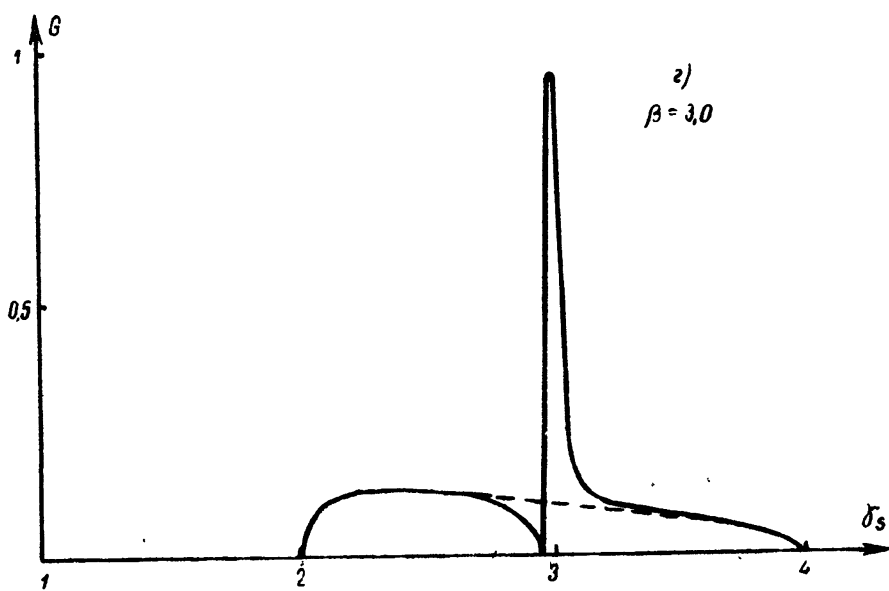
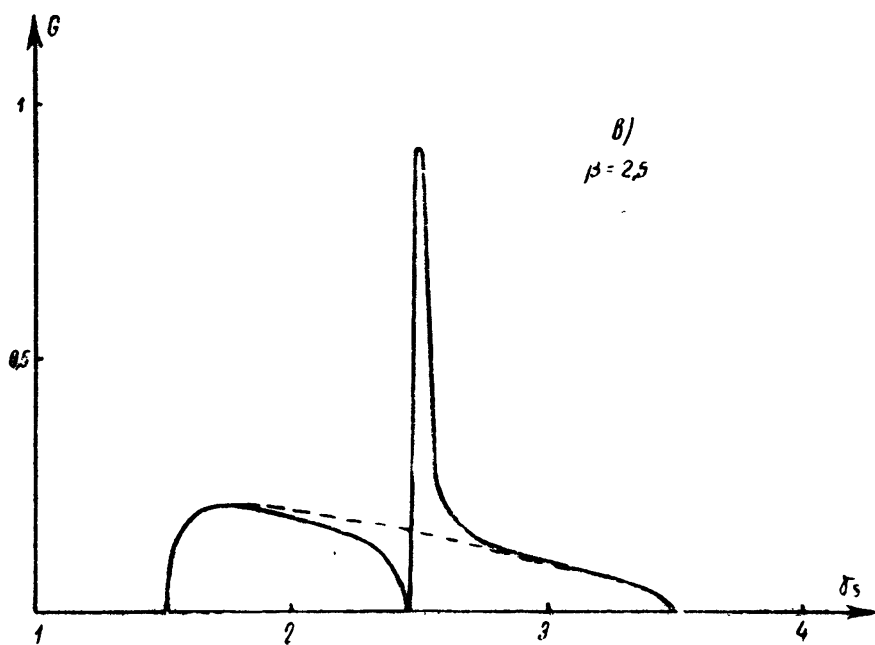


Рис. 3.

При этом система уравнений (1.5) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} a_{-N} &= \pm ia_{-N+1}; \\ \alpha_{-N+1} a_{-N+1} &= B(\pm ia_{-N+1} - a_{-N+2}); \\ \alpha_{-N+m} a_{-N+m} &= B(a_{-N+m-1} - a_{-N+m+1}) \quad (m \geq 2). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Вводя обозначение (1.8), получим опять рекуррентное соотношение (1.11a), но теперь уже

$$T_{-N+1} = -(\sigma_{-N+1} \mp iB). \quad (1.25)$$

Сравнивая (1.11a) и (1.25) при $n = -N + 1$, приходим к следующему характеристическому уравнению для определения частот „ π “-колебаний (или соответствующих значений импеданса $Q_0 = Q_{0\pi}$)*:

$$\alpha_{-N+1} - \frac{\xi}{\alpha_{-N+2}} - \frac{\xi}{\alpha_{-N+3}} - \dots = \pm \sqrt{\xi}. \quad (1.26)$$

Две частоты „ π “-колебаний, определяемые уравнением (1.26), лежат на границах полосы запираания системы. Ширина этой полосы определяется параметром ξ , т. е. глубиной модуляции поверхностного импеданса.

Уравнение (1.26) имеет решения, соответствующие действительным значениям безразмерного реактанса $Q_0 \equiv Q_{0\pi}$ лишь при $\beta/2 > 1$ ($D < \lambda/2$); при $\beta/2 < 1$ ($D > \lambda/2$) „ π “-колебания в системе невозможны. Значения $Q_{0\pi}$ в случае малых амплитуд модуляции получим из (1.26), ограничившись там членами порядка $\sqrt{\xi}$ ($N = 1$):

$$Q_{0\pi} = \sqrt{(\beta/2)^2 - 1} \pm Q_1/2.$$

Чтобы проанализировать характер поля в системе вблизи критических частот, в частности, в полосе между ними, следует обратиться к общему характеристическому уравнению (1.13) и исследовать его корни при параметрах, близких к параметрам системы при „ π “-колебаниях. В рассматриваемом случае уравнение (1.13) целесообразно записать в виде:

$$\left(\alpha_0 - \frac{\xi}{\alpha_{+1}} - \frac{\xi}{\alpha_{+2}} - \dots \right) \left(\alpha_{-1} - \frac{\xi}{\alpha_{-2}} - \frac{\xi}{\alpha_{-3}} - \dots \right) = \xi. \quad (1.27)$$

Принимая во внимание, что при „ π “-колебаниях каждая из скобок в уравнении (1.27) имеет порядок $\xi^{1/2}$, при исследовании его корней в случае малых амплитуд модуляции импеданса в первом приближении следует рассмотреть уравнение

$$\alpha_0 \alpha_{-1} = \xi. \quad (1.28)$$

Полагая $\gamma_0 = \beta/2 - i\zeta$ и считая ζ малой величиной, из (1.28) найдем, что

$$\zeta = \frac{\sqrt{(\beta/2)^2 - 1}}{\beta/2} \sqrt{\xi - \Delta Q^2}, \quad (1.29)$$

где

$$\Delta Q = Q_0 - \sqrt{(\beta/2)^2 - 1}.$$

* Уравнение (1.26) можно, конечно, получить и непосредственно из (1.12), полагая там $n = -N + 1$ и учитывая (1.23).

Таким образом, внутри полосы

$$-\sqrt{\xi} \leq \Delta Q \leq \sqrt{\xi} \quad (1.30)$$

поле (1.3) имеет характер экспоненциально затухающей волны с коэффициентом затухания $k\xi$. В центре полосы коэффициент затухания достигает максимального значения

$$k\xi_{\text{макс}} = k \frac{\sqrt{(\beta/2)^2 - 1}}{\beta/2} \sqrt{\xi} \quad (1.31)$$

С ростом амплитуды модуляции импеданса полоса запирающая (1.30) расширяется, причем одновременно возрастает и максимальное значение коэффициента затухания. Вне полосы (1.30) поправка к постоянной распространения становится чисто действительной, так что волна распространяется без затухания.

При колебаниях типа „2 π “ выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma_{-N-m} &= -\gamma_{-N+m} \quad (m \neq 0); \quad \gamma_{-N} = 0; \quad \gamma_0 = \beta N; \\ \alpha_{-N+0} &= \alpha_{-N+m}; \quad \alpha_{-N-m} = (-1)^{m+1} \alpha_{-N+m}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

так что система (1.5) приводится к виду

$$\begin{aligned} \alpha_{-N} &= 0; \\ \alpha_{-N+1} \alpha_{-N+1} &= -B \alpha_{-N+2}; \\ \alpha_{-N+m} \alpha_{-N+m} &= B (\alpha_{-N+m-1} - \alpha_{-N+m+1}) \quad (m \geq 2). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Учитывая, что теперь $T_{-N+1} = -\alpha_{-N+1}$, из рекуррентного соотношения (1.11а) получим следующее характеристическое уравнение для определения критической частоты „2 π “-колебаний:

$$\alpha_{-N+1} - \frac{\xi}{\alpha_{-N+2}} - \frac{\xi}{\alpha_{-N+3}} - \dots = 0. \quad (1.34)$$

Уравнение (1.34) имеет действительные решения для безразмерного реактанса $Q_{02\pi}$ лишь при $\beta > 1$ ($D < \lambda$); при $\beta < 1$ ($D > \lambda$) колебания типа „2 π “ в рассматриваемой системе существовать не могут. При малой глубине модуляции импеданса с точностью до членов порядка ξ из (1.34) имеем ($N = 1$):

$$\gamma_{s_{2\pi}} = \sqrt{1 + Q_{02\pi}^2} = \beta - \frac{\xi}{\beta} \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\sqrt{(\beta/2)^2 - 1} - \sqrt{\beta^2 - 1}}. \quad (1.35)$$

Согласно (1.33), при „2 π “-колебаниях амплитуда гармоники номера $-N$ обращается в нуль. В частности, при $N=1$ это относится к амплитуде 1-ой пространственной гармоники. Это значит, что имеющееся при $|\operatorname{Re} \gamma_{-1}| < 1$ излучение от поверхности пропадает при $\operatorname{Re} \gamma_{-1} = 0$ ($\gamma_0 = \beta$), что как раз соответствует переходу к колебаниям типа „2 π *“.

Полученные выше формулы для постоянных распространения и затухания (1.20), (1.21), а также для поля (1.22) вблизи „2 π “-колебаний ($\gamma_s \approx \beta$) становятся некорректными, так как не отражают отмеченных здесь особенностей поведения системы. Это связано с тем, что при написании (1.15) в характеристическом уравнении (1.13) были отброшены члены, которые даже при сколь угодно малых, но конеч-

* Условие $\operatorname{Re} \gamma_{-1} = 0$ означает, что излучение от поверхности должно быть направлено перпендикулярно к ней. Таким образом, использование плоской поверхности с периодически модулированным импедансом в качестве излучателя с нормальным излучением представляет известные трудности.

ных значениях параметра ξ будут велики вблизи „2 π “-колебаний. Чтобы получить выражение для γ_0 , пригодное и в области „2 π “-колебаний, учтем в выражении (1.15) дополнительные члены, записав его в виде:

$$\alpha_0^{(1)} = \frac{\xi}{\alpha_1^{(0)}} + \frac{\xi}{\alpha_{-1}^{(0)} - \frac{\xi}{\alpha_{-2}^{(0)} - \frac{\xi}{\alpha_{-3}^{(0)}}}}, \quad (1.36)$$

что соответствует учету в выражении для поля волны (1.3) пяти пространственных гармоник. Вместо (1.18) теперь из (1.36) имеем:

$$\sigma_0^{(1)} = -iQ_0 - i\xi \left[\frac{Q_0 + i\sigma_{+1}^{(0)}}{2\beta(\gamma_s + \beta/2)} - \frac{Q_0 - \varepsilon + i\sigma_{-1}^{(0)}}{(Q_0 - \varepsilon)^2 + 1 - (\gamma_s - \beta)^2} \right], \quad (1.37)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\xi}{\sqrt{\gamma_s^2 - 1} - \sqrt{(\gamma_s - 2\beta)^2 - 1} - \xi / \left(\sqrt{\gamma_s^2 - 1} - \sqrt{(\gamma_s - 3\beta)^2 - 1} \right)}. \quad (1.38)$$

Из (1.17) и (1.37) получим:

$$\frac{\gamma_{0r}^{(1)} - \gamma_s}{\xi} = \frac{\sqrt{\gamma_s^2 - 1}}{\gamma_s} \left[\frac{\sqrt{\gamma_s^2 - 1} + \sqrt{(\gamma_s + \beta)^2 - 1}}{2\beta(\gamma_s + \beta/2)} - \frac{\sqrt{\gamma_s^2 - 1} - \varepsilon}{(\sqrt{\gamma_s^2 - 1} - \varepsilon)^2 + 1 - (\gamma_s - \beta)^2} \right] \equiv F'; \quad (1.39)$$

$$\frac{\gamma_{0im}^{(1)}}{\xi} = \frac{\sqrt{\gamma_s^2 - 1}}{\gamma_s} \frac{\sqrt{1 - (\gamma_s - \beta)^2}}{(\sqrt{\gamma_s^2 - 1} - \varepsilon)^2 + 1 - (\gamma_s - \beta)^2} \equiv G'. \quad (1.40)$$

При $\varepsilon \ll 1$ выражения (1.37), (1.39), (1.40) переходят соответственно в (1.18), (1.20) и (1.21). Однако вблизи „2 π “-колебаний ($\varepsilon \rightarrow \infty$) указанные формулы дают существенно иной результат. В частности, при „2 π “-колебаниях ($\gamma_s = \gamma_{s2\pi}$) из (1.39) и (1.40) следует, что $\gamma_{0r}^{(1)} = \beta$, $\gamma_{0im}^{(1)} = 0$. Для сравнения на рис. 2, 3 показаны зависимости $F'(\gamma_s, \beta)$ и $G'(\gamma_s, \beta)$ при значении $\xi = 0,1$ (сплошные кривые). Зависимость $G'(\gamma_s)$ имеет характерный максимум при значении

$$\gamma_{s \text{ макс } G'} \approx \beta + \frac{\xi}{2\beta} \left(1 - \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\sqrt{(2\beta)^2 - 1} - \sqrt{\beta^2 - 1}} \right) > \beta, \quad (1.41)$$

отвечающем условию $\varepsilon = \sqrt{\gamma_s^2 - 1}$, а зависимость $F'(\gamma_s)$ — при значении

$$\gamma_{s \text{ макс } F'} = \beta + \xi \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{2\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1} + 1} - \frac{1}{\sqrt{(2\beta)^2 - 1} - \sqrt{\beta^2 - 1}} \right),$$

лежащем между $\gamma_{s2\pi}$ и $\gamma_{s \text{ макс } G'}$.

Что касается амплитуды—1-ой пространственной гармоники, то для нее, как нетрудно убедиться, уточненное выражение будет следующее:

$$a_{-1}^{(1)} = -\frac{1}{2i} \frac{Q_1}{Q_0 - i\sigma_{-1}^{(0)} - \varepsilon} a_0. \quad (1.42)$$

В отличие от (1.22) эта формула дает правильный результат ($a_{-1} = 0$) и при „2 π “-колебаниях ($\varepsilon \rightarrow \infty$).

2. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ С МОДУЛИРОВАННЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ ИМПЕДАНСОМ

Рассмотрим двухмерный излучатель, представляющий собой участок импедансной плоскости $0 \leq z \leq E$ с синусоидально изменяющимся поверхностным импедансом. Допустим, что на этом участке возбуждена поверхностная волна, распространяющаяся в $+z$ -направлении. При $|\operatorname{Re} \gamma_{-1}| < 1$ и $|\operatorname{Re} \gamma_n| > 1$ ($n \neq -1$) основное излучение с такой поверхности обусловлено полем „быстрой“ пространственной гармоники номера $n = -1^*$.

Поэтому диаграмма направленности такого излучателя будет практически зависеть лишь от распределения поля этой гармоники на поверхности антенны. Исключая из рассмотрения область параметров импедансной структуры, лежащую вблизи „2 π “-колебаний, распределение эквивалентных источников на антенне можно описывать, в соответствии с (1.22), функцией

$$\Phi(z) = \sqrt{\xi} \exp(-i\gamma_{-1r} kz - \gamma_{0im} kz), \quad (2.1)$$

где γ_{-1r} и γ_{0im} определяются формулами (1.20), (1.21). При таком распределении источников максимум излучения направлен под углом

$$\theta = \arccos \gamma_{-1r}$$

к оси антенны (рис. 1).

Экспоненциальное распределение источников (2.1), как известно, дает сравнительно высокий уровень боковых лепестков диаграммы направленности. Распределение поля—1-ой гармоники, отличное от (2.1), можно получить, сделав глубину модуляции импеданса Q_1 переменной вдоль антенны. В случае достаточно медленного изменения Q_1 распределение поля по антенне будет описываться функцией

$$\Phi(z) = \sqrt{\xi(z)} \exp\left(-ik \int_0^z \gamma_{-1r} dz - k \int_0^z \gamma_{0im} dz\right), \quad (2.2)$$

где

$$\gamma_{-1r}(z) = \gamma_{0r}(z) - \beta; \quad \gamma_{0im}(z) = \xi(z)G; \quad \gamma_{0r}(z) = \gamma_s + \xi(z)F. \quad (2.3)$$

Таким образом, изменение $\xi(z) = Q_1^2(z)/4$ приводит к дополнительной амплитудной и фазовой модуляции поля на антенне.

* Полем излучения, возникающим в результате дифракции поверхностной волны на концах антенны, можно пренебречь, предполагая, что поверхностная волна возбуждается достаточно эффективно, а амплитуда ее на конце антенны, удаленном от возбуждающего устройства, мала вследствие затухания из-за потерь энергии на излучение. При необходимости это излучение, сказывающееся в основном на уровне боковых лепестков, может быть учтено методами, применяемыми при расчете антенн с медленными поверхностными волнами на немодулированных структурах.

Рассмотрим сначала амплитудное распределение

$$A(z) = \sqrt{\xi(z)} \exp \left[-kG \int_0^z \xi(z') dz' \right]. \quad (2.4)$$

При заданной функции $A(z)$ это соотношение представляет собой уравнение относительно $\xi(z)$, решением которого является функция

$$\xi(z) = A^2(z) \left[1 - 2kG \int_0^z A^2(z') dz' \right]^{-1}. \quad (2.5)$$

Подставляя это значение $\xi(z)$ в (2.2), получим, что

$$\Phi(z) = A(z) \exp \left[-ik(\gamma_s - \beta)z + i\psi(z) \right], \quad (2.6)$$

где

$$\psi(z) = \frac{F}{2G} \ln \left[1 - 2kG \int_0^z A^2(z') dz' \right]. \quad (2.7)$$

Таким образом, изменение глубины модуляции импеданса по антенне, обеспечивающее требуемое амплитудное распределение $A(z)$, неизбежно приводит к некоторым фазовым искажениям $\psi(z)$, которые достигают наибольшей величины на конце антенны $z=L$:

$$\psi_{\max} = \psi(L) = \frac{F}{2G} \ln \left[1 - 2kG \int_0^L A^2(z') dz' \right]. \quad (2.8)$$

Нетрудно убедиться, что коэффициент полезного действия рассматриваемого излучателя равен

$$\eta = 2kG \int_0^L A^2(z') dz', \quad (2.9)$$

так что максимальные фазовые искажения

$$\psi_{\max} = \frac{F}{2G} \ln(1 - \eta) \quad (2.10)$$

в конечном счете определяются величиной КПД антенны η при любых амплитудных распределениях. Поэтому, как правило, фазовые искажения могут быть уменьшены за счет некоторого снижения КПД излучателя*.

В качестве примера приведем законы модуляции импеданса, обеспечивающие равномерное и синусоидальное распределение амплитуды 1-ой гармоники вдоль антенны. В случае равноамплитудного распределения

$$A(z) \equiv \sqrt{\xi_0} = A(0)$$

закон модуляции импеданса, согласно (2.5), должен быть следующим:

$$\xi(z) = \frac{\xi_0}{1 - \eta z/L}. \quad (2.11)$$

* Фазовых искажений можно избежать также путем соответствующего изменения среднего значения поверхностного импеданса; однако следует иметь в виду, что при этом меняется одновременно и коэффициент загужания волны γ_{0lm} , а также и амплитудное распределение.

Здесь

$$\eta = 2kG\xi_0 L \quad (2.12)$$

—КПД антенны. При заданном КПД соотношение (2.12) определяет начальное значение глубины модуляции импеданса $Q_1(0) = 2\sqrt{\xi_0}$. Зависимости ξ/ξ_0 от z/L показаны на рис. 4 для различных КПД η .

Синусоидальное распределение амплитуды

$$A(z) = A_0 \sin(\pi z/L)$$

обеспечивается законом изменения импеданса

$$\xi(z) = \frac{(\eta/kGL) \sin^2(\pi z/L)}{1 - \eta [z/L - (1/2\pi) \sin(2\pi z/L)]}, \quad (2.13)$$

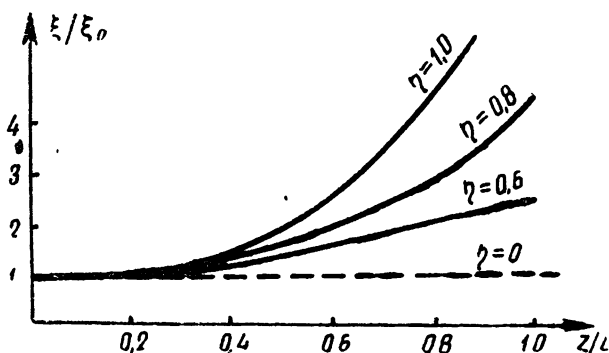


Рис. 4.

где КПД $\eta = kGA_0^2 L$. Графики зависимостей $\xi kGL/\eta$ от z/L при разных значениях η показаны на рис. 5.

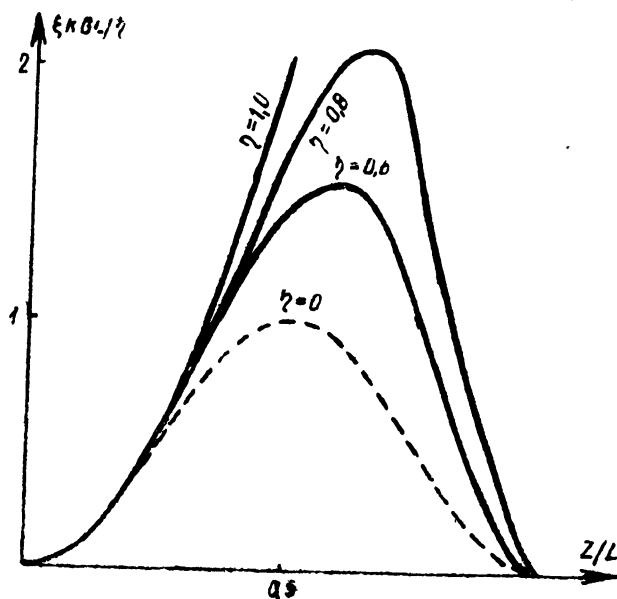


Рис. 5.

В приведенных расчетах не учитывалось поглощение энергии поверхностной волны в замедляющей системе. Учет этого поглощения легко осуществить, если считать, что в первом приближении коэффициент затухания волны $k\delta$, обусловленный диссипацией энергии в замедляющей системе, не зависит от глубины модуляции импеданса $Q_1(z)$, а определяется лишь средними значениями параметров системы. В этом случае распре-

деление амплитуды — 1-ой пространственной гармоники вдоль антенны будет описываться функцией

$$A(z) = \sqrt{\xi} \exp \left[-kG \int_0^z \xi(z') dz' - k\delta z \right]. \quad (2.14)$$

Закон изменения $\xi(z)$ в зависимости от $A(z)$ получим, заменив в (2.5) $A(z)$ на $A(z) e^{k\delta z}$:

$$\xi(z) = \frac{A^2(z) \exp(2k\delta z)}{1 - 2kG \int_0^z A^2(z') \exp(2k\delta z') dz'}. \quad (2.15)$$

Аналогичным образом для фазовых искажений из (2.7) будем иметь соотношение

$$\psi(z) = \frac{F}{2G} \ln \left[1 - 2kG \int_0^z A^2(z') \exp(2k\delta z') dz' \right]. \quad (2.16)$$

КПД излучателя по-прежнему описывается формулой (2.9). Предельное значение $\eta_{\text{пред}}$ этого КПД при заданном коэффициенте поглощения $k\delta$ можно оценить, исходя из условия

$$2kG \int_0^L A^2(z) \exp(2k\delta z) dz = 1, \quad (2.17)$$

соответствующего бесконечно большой амплитуде модуляции импеданса на конце антенны. Сравнивая (2.17) с (2.9), найдем, что

$$\eta_{\text{пред}} = \frac{\int_0^L A^2(z) dz}{\int_0^L A^2(z) \exp(2k\delta z) dz} < 1. \quad (2.18)$$

Из (2.16) видно, что максимальная величина фазовых искажений, достигаемая на конце антенны $z=L$, равна

$$\psi_{\text{макс}} = \psi(L) = (F/2G) \ln(1 - \eta/\eta_{\text{пред}}) \quad (2.19)$$

и будет велика при $\eta \rightarrow \eta_{\text{пред}}$.

Для равноамплитудного распределения

$$A(z) \equiv \sqrt{\xi_0} = A(0)$$

из (2.15) имеем:

$$\xi(z) = \frac{\xi_0 \exp(\chi z/L)}{1 - (\eta/\chi) [\exp(\chi z/L) - 1]}, \quad (2.20)$$

где $\eta = 2kG\xi_0 L$ — КПД излучателя, а $\chi = 2k\delta L$. В рассматриваемом случае предельное значение КПД равно

$$\eta_{\text{пред}} = \frac{\chi}{e^\chi - 1}. \quad (2.21)$$

Зависимость $\eta_{\text{пред}}(\chi)$ показана на рис. 6. На рис. 7 приведены зависимости $\xi(z)/\xi_0$, рассчитанные по формуле (2.20) при $\chi=1$ ($\eta_{\text{пред}} = 0,58$) и разных значениях $\eta/\eta_{\text{пред}}$.

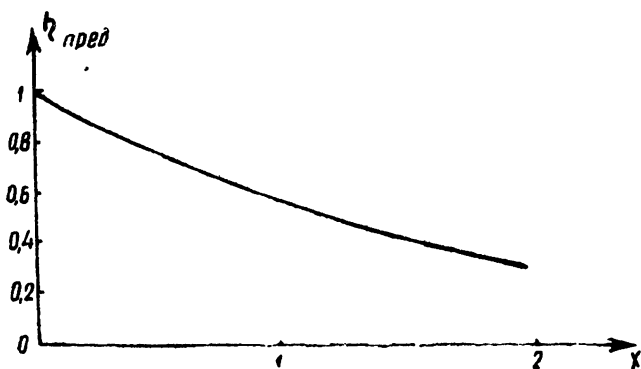


Рис. 6.

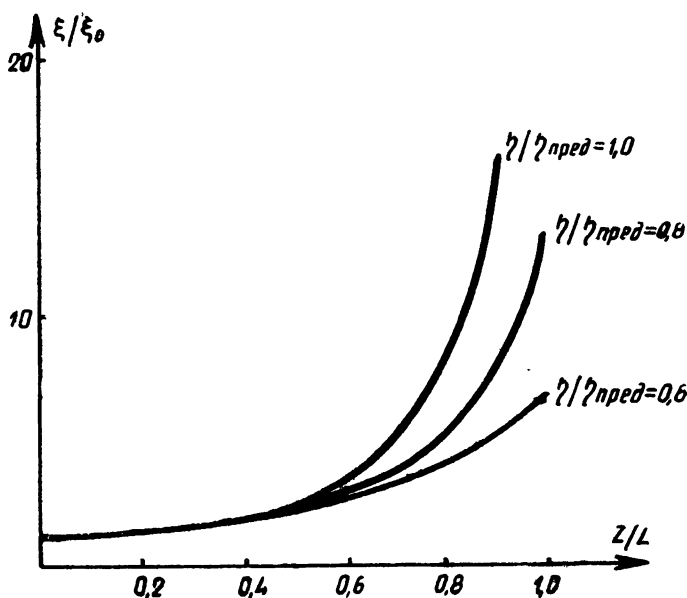


Рис. 7.

Итак, применение метода пространственных гармоник к решению задачи о распространении поверхностных волн над плоскостью с синусоидально изменяющимся поверхностным импедансом при малой глубине модуляции последнего позволяет получить все соотношения, необходимые для расчета амплитудно-фазовых распределений поля в плоских антеннах с поверхностными волнами. Аналогичные расчеты могут быть выполнены и для цилиндрических ребристо-стержневых излучателей [1] с периодически изменяющимися параметрами. При этом

все результаты второго раздела переносятся и на этот случай с тем лишь изменением, что коэффициенты G и F в формулах (2.3) будут иными. Очевидно, что результаты второго раздела могут быть применены к расчету амплитудных распределений эквивалентных источников в любых антеннах бегущей волны, у которых амплитуда поля излучения меняется линейно, а, следовательно, коэффициент затухания из-за потерь на излучение меняется квадратично в зависимости от некоторого параметра антенны (в рассмотренном случае—глубины модуляции импеданса Q_1).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. C. Simon, G. Weill, Ann. Radioelectr., 8, 33, 183 (1953).
2. A. S. Thomas, F. G. Zucker, IRE Nat. Conv. Record, P1, AP-MTT, 5, 153 (1957).
3. Ю. П. Лысанов, Акуст. ж., 2, 47 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 апреля 1960 г.

Дополнение при корректуре. Как сообщил автору А. А. Олинер, аналогичная задача о распространении волн вдоль поверхности с синусоидально модулированным импедансом была рассмотрена им совместно с А. Хесселем и результаты доложены на симпозиуме по электромагнитной теории, состоявшемуся в Торонто в июне 1959 г. Однако, к сожалению, автор не имел возможности своевременно ознакомиться с материалами этого симпозиума.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СИСТЕМАХ С ПАРАМЕТРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ

С. И. Аверков и Ю. Г. Хронопуло

Решена задача о распространении волн в электродинамических системах произвольной конфигурации, содержащих среды, проницаемости которых зависят от времени. Показано, что в таких системах могут распространяться немонохроматические волны типа *ТЕМ*, *ТЕ* или *ТМ*. Исследована простейшая диспергирующая система с переменными параметрами в виде прямоугольного волновода, заполненного средой, магнитная проницаемость которой меняется по квадратичному закону. Показана возможность периодического преобразования вида модуляции волны в таком волноводе и определена величина пространственного периода этого явления.

В опубликованных за последние годы работах [1-4] рассматривались некоторые вопросы распространения электромагнитных волн в средах, проницаемости которых μ и ϵ не обладают дисперсией и зависят от времени. Было обнаружено, что если величины μ и ϵ успевают существенно измениться за время прохождения фронта волны через среду*, то в последней возможен параметрический эффект значительного увеличения мощности и изменения частоты колебаний [2,3]. Однако полученные в [1-4] результаты применимы лишь к некоторым электрическим (или акустическим) линейным недиспергирующим** системам, в которых могут распространяться плоские волны. Системы же, в которых поверхность фронта волны не является плоской, а также системы, обладающие дисперсией (как, например, волноводы, заполненные средами с переменными параметрами) изучены недостаточно [4].

Ниже обсуждается вопрос о волнах в системах с дисперсией, содержащих среды, проницаемости которых зависят только от времени.

1. Допустим сначала, что проницаемости среды μ и ϵ — переменные и что в этой среде нет зарядов и токов. Тогда уравнения Максвелла можно записать в виде***:

$$(I) \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu(t) \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad (III) \operatorname{div} \mathbf{B} = 0;$$

$$(II) \operatorname{rot} \mathbf{D} = -\epsilon(t) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (IV) \operatorname{div} \mathbf{D} = 0,$$

где векторы индукции $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ и векторы напряженности магнитного и электрического полей $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ связаны соотношениями:

* Уточнение этого условия применительно к системам с бегущим параметром сделано в [3].

** Т. е. к системам, не обладающим дисперсией при фиксированных значениях параметров.

*** Заметим, что в случае плоской волны, распространяющейся в однородной среде с параметрами, зависящими от времени t , уравнения I—IV имеют такой же вид, как и уравнения плоской волны в среде с параметрами, зависящими только от пространственной координаты z . Вторые уравнения можно получить из первых, заменяя t , $\mathbf{B}$, $\epsilon(t)$, $\mathbf{D}$, $\mu(t)$, z соответственно величинами z , $\mathbf{E}$, $1/\mu(z)$, $\mathbf{H}$, $1/\epsilon(z)$, t .

$$(V) \quad B = \mu(t) H, \quad (VI) \quad D = \varepsilon(t) E.$$

Пусть также на поверхности идеально проводящего металла векторы B и D удовлетворяют граничным условиям:

$$(VII) \quad B_n = 0, \quad (VIII) \quad D_{\tan} = 0.$$

Будем искать решение этих уравнений методом разделения переменных. Для этого положим

$$B = B_a f; \quad (1)$$

$$D = D_a \theta, \quad (2)$$

где $f = f(t)$ и $\theta = \theta(t)$ — некоторые безразмерные функции времени, а B_a и D_a — векторы, зависящие только от пространственных координат. Подставляя (1), (2) в (I), (II) получим:

$$\operatorname{rot} B_a = D_a \frac{\mu(t)}{f} \frac{d\theta}{dt}; \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} D_a = -B_a \frac{\varepsilon(t)}{\theta} \frac{df}{dt}. \quad (4)$$

Замечая, что произведение скалярных функций в правых частях равенств (3)—(4) не зависит от времени, и принимая во внимание, что f и θ определены выше с точностью до постоянного множителя, положим:

$$\frac{\mu(t)}{\mu_0 f} \frac{d\theta}{dt} = i\omega; \quad (5)$$

$$\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_0 \theta} \frac{df}{dt} = i\omega, \quad (6)$$

где ω — некоторая постоянная величина, имеющая размерность $[T]^{-1}$, μ_0 и ε_0 — проницаемости свободного пространства. Подставляя (5)—(6) в (3)—(4), получим:

$$(I') \quad \operatorname{rot} B_a = i\omega\mu_0 D_a;$$

$$(II') \quad \operatorname{rot} D_a = -i\omega\varepsilon_0 B_a,$$

а после подстановки (1)—(2) в III—IV и VII—VIII найдем также:

$$(V') \quad \operatorname{div} B_a = 0; \quad (VI') \quad \operatorname{div} D_a = 0;$$

$$(VII') \quad (B_a)_n = 0; \quad (VIII') \quad (D_a)_{\tan} = 0.$$

Отсюда следует, что векторы B_a и D_a удовлетворяют уравнениям Максвелла и граничным условиям задачи, написанным применительно к случаю монохроматических колебаний частоты ω в рассматриваемой электродинамической системе, „содержащей“ вакуум вместо среды с переменными параметрами. В частности, из I', II' и III' следует, что

$$\Delta B_a + \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 B_a = 0. \quad (7)$$

Обозначая, как обычно, через k волновое число

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2, \quad (8)$$

имеем:

$$\omega = kc_0, \quad (9)$$

где c_0 — скорость света в вакууме.

В случае систем с переменными параметрами значения величин ω

и k определяются из начальных и граничных условий задачи. Воспользовавшись (6), напишем выражение для $\theta(t)$ в виде:

$$\theta = \frac{\varepsilon(t)}{i \omega \varepsilon_0} \frac{df}{dt}. \quad (10)$$

Подставив (10) в (5), получим уравнение для функции $f(t)$:

$$\mu(t) \frac{d}{dt} \left\{ \varepsilon(t) \frac{df}{dt} \right\} + k^2 f = 0. \quad (11)$$

Аналогичное уравнение справедливо и для функции $\theta(t)$:

$$\varepsilon(t) \frac{d}{dt} \left\{ \mu(t) \frac{d\theta}{dt} \right\} + k^2 \theta = 0. \quad (12)$$

Из (11), (12) следует, что в общем случае временные законы изменения векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ являются различными. Если в (11), (12) заменить f и θ соответственно величинами $W_H = f \sqrt{\varepsilon(t)}$ и $W_E = \theta \sqrt{\mu(t)}$, то придем к уравнениям:

$$\dot{W}_H + \psi W_H = 0; \quad (11a)$$

$$\dot{W}_E + \psi_E W_E = 0, \quad (12a)$$

где

$$\psi_H = \frac{k^2}{\mu\varepsilon} + \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 - \frac{\ddot{\varepsilon}}{2\varepsilon}; \quad \psi_E = \frac{k^2}{\mu\varepsilon} + \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu} \right)^2 - \frac{\ddot{\mu}}{2\mu}.$$

Эти уравнения обсуждались ранее Моргенталером [1] применительно к случаю распространения плоской волны в неограниченной среде с переменными параметрами.

Полученные выше равенства (I')—(VIII') определяют пространственную структуру электромагнитных полей. Так как структура последних не зависит от временных законов изменения векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$, в рассматриваемых системах возможно распространение немонохроматических волн типа TEM , TE или TM .

Для суждения о потоке энергии в волне напишем выражение вектора Умова—Пойнтинга*:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{1}{\varepsilon(t) \mu(t)} [\text{Re}(\mathbf{D}_a \theta) \text{Re}(\mathbf{B}_a f)]. \quad (13)$$

Если $\mu(t)$ и $\varepsilon(t)$ меняются медленно в сравнении с W_H или f , то решение уравнения (11a) может быть записано в приближении геометрической оптики [9] (см. также [1]):

$$W_H \approx \frac{1}{\sqrt{\omega_-}} \left\{ q_1 e^{i \int_0^t \omega_- dt} + q_2 e^{-i \int_0^t \omega_- dt} \right\}, \quad (14)$$

где $\omega_- = \sqrt{\psi_H} \approx k/\sqrt{\mu\varepsilon}$ и q_1, q_2 —постоянные величины**.

* В связи с тем, что при выполнении начальных условий задачи (см. далее равенство (23)) удобно записывать векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ в комплексном виде, перед произведениями $\mathbf{D}_a \theta$ и $\mathbf{B}_a f$ в (13) поставлен знак Re .

** Отметим, что (14) справедливо при условии, если $d\omega_-/dt < \omega_-^2$.

Члены, заключенные в фигурных скобках (14), соответствуют волнам, распространяющимся в противоположных направлениях. Для волн, распространяющихся в одном направлении,

$$f \simeq \frac{q_1}{\sqrt{\varepsilon \omega_-}} e^{i \int_0^t \omega_- dt};$$

$$\theta \simeq \frac{p_1}{\sqrt{\mu \omega_-}} e^{i \int_0^t \omega_- dt}.$$

Подставив выражения для f и θ в (13) и полагая, что колебания являются квазимонохроматическими, найдём инвариантную зависимость [2]

$$S_{cp}/\omega_-^2 = \text{const}$$

между мгновенной частотой ω_- и усредненной (за период колебания) величиной вектора Умова—Пойнтинга S_{cp} .

2. Рассмотрим теперь вопрос о распространении волн в простейшей диспергирующей системе—регулярном волноводе, заполненном средой, проницаемость μ которой зависит от времени и $\varepsilon = \text{const}$. Тогда равенство (11) примет вид:

$$\ddot{f} + \frac{c}{\mu(t)} \dot{f} = 0, \quad (15)$$

где $c = k^2/\varepsilon$.

Точное решение этого уравнения, как и уравнений (11a), (12a), в общем случае не выражается в элементарных функциях. Однако для некоторых аperiodических законов изменения $\mu(t)$ такие решения могут быть найдены.

Предположим, что $\mu(t)$ меняется по квадратичному закону;

$$\mu(t) = (\alpha - \beta t)^2, \quad (16)$$

где α, β —постоянные величины. Тогда в зависимости от величины

$$R = \sqrt{4c/\beta^2 - 1} \quad (17)$$

уравнение (15) имеет три различных решения:

а) если $R^2 > 1$, то

$$f = Q(\alpha - \beta t)^{1/2} \cos \{-F_t + \Phi\}; \quad (18)$$

б) если $R^2 = 0$, то

$$f = Q(\alpha - \beta t)^{1/2} \{Q + \Phi \ln(\alpha - \beta t)\}; \quad (19)$$

в) если $R^2 < 0$, то

$$f = Q(\alpha - \beta t)^{(1/2)(1+iR)} + \Phi(\alpha - \beta t)^{(1/2)(1+iR)}. \quad (20)$$

Здесь

$$2F_t = -R \ln(1 - \beta/\alpha)$$

и Q и Φ — постоянные величины.

Рассмотрим первый случай*. Предположим, что стенки волновода

* Из дальнейшего следует, что условие $R^2 \leq 1$ соответствует выполнению неравенства $\omega_0 T \leq 1$. Этот случай нами не рассматривается.

сделаны из идеального проводника и что в нем распространяется $TE_{m,n}$ -волна. Тогда компоненты векторов B_a и D_a имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} B_{az} &= \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{-ihz}; \\ B_{ax} &= \frac{ihk_x}{k_c^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{-ihz}; \\ B_{ay} &= \frac{ihk_y}{k_c^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{-ihz}; \\ D_{ax} &= \frac{i\omega\epsilon_0 k_y}{k_c^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{-ihz}; \\ D_{ay} &= -\frac{i\omega\epsilon_0 k_x}{k_c^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{-ihz}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$ ($k_x = m\pi/a$, $k_y = n\pi/b$; a и b — размеры поперечного сечения волновода), h — постоянная распространения, связанная с k_c и k соотношением $k^2 = h^2 + k_c^2$. Отсюда и на основании равенств (1) и (18) для B_z -компоненты вектора B находим выражение

$$B_z = B_{az} f = Q(\alpha - \beta t)^{1/2} \cos\{-F_t + \Phi\} \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{-ihz}. \quad (22)$$

Последнее зависит от трех произвольных постоянных h , Q , Φ и двух целочисленных переменных n и m . Для определения их значений нужно задать начальные условия задачи. В связи с этим предположим, что при $t \leq 0$ величина $\mu(t) = \text{const}$ и в волноводе распространяется одна волна типа $TE_{m,n}$, для $\tilde{B}_z$ -компоненты вектора $\tilde{B}$ которой может быть написано выражение:

$$\tilde{B}_z = A \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(\omega_0 t - h_0 z)} \quad (23)$$

(A , ω_0 , h_0 — постоянные величины).

Рассмотрим вопрос о распространении этой волны при $t \geq 0$, предполагая, что с момента $t = 0$ величина $\mu(t)$ начинает изменяться по закону (16). Начальные условия задачи в этом случае имеют вид:

$$B_z(0) = \tilde{B}_z(0); \quad \dot{B}_z(0) = \dot{\tilde{B}}_z(0). \quad (24)$$

Подставляя выражения для B_z и $\tilde{B}_z$ в (24), нетрудно найти, что

$$Q = A \sqrt{(1/\alpha)(1 + \gamma^2/R_0^2)}; \quad \Phi = \arctg \gamma/R_0,$$

где

$$\gamma = 1 + j2\omega_0\alpha/\beta; \quad R = \{R\}_{h=h_0}.$$

Отсюда имеем

$$k^2 = k_c^2 + h^2 = k_c^2 + h_0^2 = \omega_0^2 \epsilon_\mu(0), \quad (25)$$

где $\mu(0)$ — значение магнитной проницаемости среды при $t = 0$. Сравнивая (25) с (9), находим постоянную ω :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\epsilon_\mu(0)/\epsilon_0 \mu_0}. \quad (26)$$

Подставляя значения Q и Φ в (18) и (10), получим:

$$f = A(1 - \xi t)^{1/2} (\cos F_t + \gamma/R_0 \sin F_t); \quad (27)$$

$$Q = A \frac{\varepsilon \xi}{i \omega_{\varepsilon_0} 2 (1 - \xi t)^{1/2}} \left\{ (\gamma - 1) \cos F_t - \left(R_0 + \frac{\gamma}{R_0} \right) \sin F_t \right\}, \quad (28)$$

где $\xi = \beta/\alpha$ и $2F_t = -R_0 \ln(1 - \xi t)$.

Приведенные соотношения являются решением поставленной задачи.

3. Пользуясь найденными в предыдущем разделе выражениями (21) и (27), напомним величину B_z в действительном виде:

$$B_z = \frac{A}{2} (1 - \xi t)^{1/2} \left\{ \left(1 + \frac{2\omega_0}{\xi R_0} \right) \cos(F_t - h_0 z) + \left(1 - \frac{2\omega_0}{\xi R_0} \right) \cos(F_t + h_0 z) + \frac{1}{R_0} \sin(F_t - h_0 z) + \frac{1}{R_0} \sin(F_t + h_0 z) \right\} \cos(k_x x) \cos(k_y y). \quad (29)$$

Аналогичного вида выражения справедливы и для других компонент векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$. Отсюда следует, что поле в волноводе можно рассматривать как суперпозицию двух немонахроматических волн, распространяющихся в прямом и обратном направлениях с мгновенной фазовой скоростью*

$$v_{\phi} = \frac{\dot{F}_t}{h_0} = \frac{R_0 \xi}{2h_0 (1 - \xi t)}, \quad (30)$$

причем мгновенная частота $\omega_{\sim} = \dot{F}_t$ и фазовые скорости этих волн неограниченно уменьшаются, если $R_0 \rightarrow 0$. Из выражений v_{ϕ} и $\omega_{\sim}$ следует также, что длина волны в волноводе $\lambda = 2\pi v_{\phi}/\omega_{\sim}$ не зависит от времени.

Так как изменение $\mu(t)$ по квадратичному закону может происходить лишь за конечный промежуток времени, то в случае, если $\mu_{\max} \geq \mu(t) \geq \mu_{\min}$ при $0 \leq t \leq T$, нетрудно найти, что

$$\alpha = \sqrt{\mu_{\max}}, \quad \xi = \frac{1}{T} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\mu_{\min}}{\mu_{\max}}} \right\}. \quad (31)$$

Принимая во внимание, что $k^2 = \omega_0^2 \mu_{\max}$, представим постоянную R_0 (см. (15), (17)) в виде:

$$R_0 = \sqrt{(2\omega_0/\xi)^2 - 1}. \quad (32)$$

В частности, полагая, что $T\omega_0 \gg 1^{**}$, имеем:

$$\frac{2\omega_0}{\xi} = \frac{T\omega_0}{1 - \sqrt{\mu_{\min}/\mu_{\max}}} \gg 1$$

и, следовательно, $R_0 \simeq 2\omega_0/\xi \gg 1$. В этом случае (27), (28) принимают вид:

* Под мгновенной фазовой скоростью мы понимаем здесь скорость перемещения фазы $F_t \pm h_0 z$ (см. (34)).

** Заметим, что выполнение неравенства $T\omega_0 \gg 1$, в общем случае, связано с описанием в квазистатическом приближении, происходящем в системе процессов [2,3].

$$f = A (1 - \xi t)^{1/2} e^{iFt}; \quad (27a)$$

$$\theta = A \frac{\varepsilon \omega_0}{\omega \varepsilon_0} (1 - \xi t)^{-1/2} e^{iFt}. \quad (28a)$$

Используя эти выражения функций f и θ , найдем на основании (21) и (1)–(2) в действительном виде значения компонент векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$:

$$H_x \simeq \frac{A k_x h_0}{k_c^2 k_{\text{макс}} (1 - \xi t)^{3/2}} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(F_t - h_0 z); \quad (33)$$

$$E_y \simeq \frac{A k_x \omega_0}{k_c^2 (1 - \xi t)^{1/2}} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(F_t - h_0 z). \quad (34)$$

Следовательно, в этом случае в волноводе имеется одна немонохроматическая волна с зависящей от времени амплитудой. Нетрудно убедиться, что в силу принципа суперпозиции найденные приближенные* и точные выражения для векторов поля могут быть обобщены и на случай распространения (в начальный момент времени) в волноводе нескольких монохроматических волн. В частности, если при $t \leq 0$ в волноводе существует модулированная тригармоническая волна (с глубиной и частотой модуляции m и Ω), то в силу (34)

$$E_y = q(t) \left\{ \omega_0 \sin(F_\omega - h_0 z) + \frac{m}{2} (\omega_0 + \Omega) \sin(F_{\omega+\Omega} - h_{\omega+\Omega} z) + \right. \\ \left. + \frac{m}{2} (\omega_0 - \Omega) \sin(F_{\omega-\Omega} - h_{\omega-\Omega} z) \right\}, \quad (35)$$

где

$$q(t) = A k_x \omega_0 k_c^{-2} (1 - \xi t)^{-1/2} \sin(k_x x) \cos(k_y y),$$

$F_\omega = F_z$, $F_{\omega \pm \Omega}$ — функции, совпадающие с F_t при замене ω_0 величинами $\omega_0 \pm \Omega$, h_ω и $h_{\omega \pm \Omega}$ — постоянные распространения.

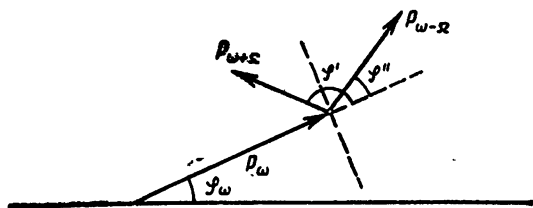


Рис. 1.

На рис. 1 показана векторная диаграмма, на которой P_ω и $P_{\omega \pm \Omega}$ — амплитуды трех компонент модулированной волны (35). Фазовые углы φ_ω , φ' и φ'' определяются выражениями

$$\varphi_\omega = F_\omega - h_\omega z, \quad \varphi' = F_{\omega+\Omega} - h_{\omega+\Omega} z - \varphi_\omega, \\ \varphi'' = F_{\omega-\Omega} - h_{\omega-\Omega} z - \varphi_\omega. \quad (36)$$

Если $\omega_0 \gg \Omega$, то в сравнении с φ_ω углы φ' и φ'' являются медлен-

* Заметим, что в силу эквивалентности условий $T\omega_0 \gg 1$ и $\omega_0^2 \gg d\omega_-/dt$ соотношения (33), (34) можно получить, решая уравнение (15) в приближении геометрической оптики.

ными функциями времени и $P_{\omega+\Omega} \approx P_{\omega-\Omega}$. В этом случае нетрудно найти условия, при выполнении которых тот или другой вид модуляции E_y будет наиболее сильно выражен: для частотной модуляции

$$(1/2) (\varphi' + \varphi'') = \pi/2 + p \pi; \quad (37)$$

для амплитудной модуляции

$$(1/2) (\varphi' + \varphi'') = p \pi, \quad (38)$$

где p — целое число.

Найдем значения $z = z_{\text{чм}}$ и $z = z_{\text{ам}}$, для которых выполняются последние равенства. Подставляя (36) в (37), (38) и замечая, что в рассматриваемом случае $F_{\omega+\Omega} + F_{\omega-\Omega} - 2F_{\omega} = 0$, имеем:

$$z_{\text{чм}} = \frac{\pi (1 + 2p)}{h_{\omega+\Omega} + h_{\omega-\Omega} - 2h_{\omega}}; \quad z_{\text{ам}} = \frac{2\pi p}{h_{\omega+\Omega} + h_{\omega-\Omega} - 2h_{\omega}}.$$

Отсюда заключаем о существовании в волноводе ряда поперечных сечений, в которых преобладает или частотная или амплитудная модуляция волны. Величина пространственного периода этого явления

$$L = \frac{2\pi}{h_{\omega+\Omega} + h_{\omega-\Omega} - 2h_{\omega}}$$

не отличается от ранее найденной величины пространственного периода для диспергирующих систем с постоянными параметрами [5-7]. С физической точки зрения последний результат может быть объяснен тем, что при указанных выше условиях в волноводе могут распространяться немонахроматические волны, длина которых не зависит* от изменения величины магнитной проницаемости среды.

Авторы выражают благодарность А. В. Гапонову и Н. Г. Денисову за высказанные ими соображения при подготовке статьи к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. R. Morgenthaler, IRE Trans., **MTT-6**, 167 (1958).
2. С. И. Аверков, Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **1**, 4, 46 (1958).
3. С. И. Аверков и Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **2**, 203 (1959).
4. А. М. Морковкин, Радиотехника и электроника, **4**, 785 (1959).
5. P. S. Rogell, Appl. Phys., **21**, 629 (1950).
6. В. А. Зверев, Сб. памяти А. А. Андропова, изд. АН СССР, М., 1955.
7. С. И. Аверков и В. Я. Рядов, Радиотехника и электроника, **1**, 739 (1956).
8. Теория линий передачи СВЧ, изд. Сов. радио, М., 1951.
9. П. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1951.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
16 марта 1960 г.

* См. равенство (30) и ниже.

К ТЕОРИИ СТРОФОТРОНА С БЕГУЩЕЙ ВОЛНОЙ

В. М. Боков, А. В. Гапонов

На примере строфотрона с бегущей волной рассматривается задача о взаимодействии незамедленных электромагнитных волн с системой возбужденных нелинейных осцилляторов — электронов, колеблющихся в электростатической потенциальной яме. Полученное в приближении слабых сигналов дисперсионное уравнение имеет третью степень относительно поправки к постоянной распространения волны, что указывает на возможность взаимодействия типа «0» в такого рода системах. Дисперсионное уравнение содержит релятивистские поправки порядка v^2/c^2 , учет которых в некоторых случаях оказывается существенным. Рассмотрена также работа строфотрона с бегущей волной в режиме, когда возможен отбор ускоренных электронов на один из электродов.

Эффективное взаимодействие электронного потока с электромагнитными волнами, приводящее к неустойчивости системы, возможно, как известно, не только при сверхсветовой скорости частиц (неустойчивость, связанная с излучением Вавилова—Черенкова и с аномальным эффектом Допплера), но и при сколь угодно малой средней скорости потока v_0 при условии, что в невозмущенном (стационарном) потоке электроны совершают колебания относительно некоторых положений равновесия, движущихся со скоростью v_0 . В последнем случае электронный пучок можно рассматривать, как поток возбужденных электрических осцилляторов, неустойчивость которого обуславливается благодаря автогруппировке (автофазировке и пространственной группировке) осцилляторов в поле излучения [1,2]. Для системы, существенно неизохронных (ангармонических) осцилляторов — например, для электронов, вращающихся в электростатическом поле цилиндрического конденсатора (центробежная фокусировка) — основную роль играет фазовая группировка (автофазировка), а пространственной рассортировкой, дающей эффекты порядка v^2/c^2 (v — скорость электронов, c — скорость света) можно пренебречь [3].

Другим примером системы с ангармоническими возбужденными осцилляторами может служить так называемый строфотрон [4,5], в котором используются электроны, колеблющиеся в электростатической потенциальной яме вдоль сильного постоянного магнитного поля. Простейшая модель строфотрона, описанная в [4], изображена схематически на рис. 1; колебательный контур может быть подключен к любой паре электродов. Такое устройство может быть использовано в качестве генератора высокочастотных колебаний или регенеративного усилителя. В работе [5] приводятся результаты более подробного теоретического и экспериментального исследования строфотрона с другой формой электростатической потенциальной ямы — коаксиального строфотрона (рис. 2). Существенно, что если форма потенциальной ямы отлична от параболической, то колебания электронов в строфотроне так же, как и в системах с центробежной фокусировкой, вообще говоря, неизохронны уже в нерелятивистском приближении. Это обстоятельство упрощает исследование, так как позволяет не учитывать эффекты порядка v^2/c^2 .

В настоящей работе рассматриваются системы типа строфотрона, но предполагается, что электроны взаимодействуют с бегущей электромагнитной волной. Как и в других системах с возбужденными

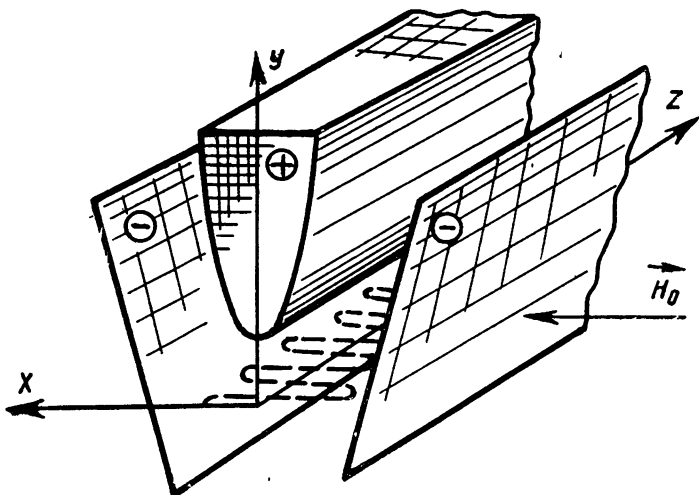


Рис. 1.

осцилляторами, эффективное взаимодействие электронов с волной имеет место при выполнении условия синхронизма $h_0 v_0 \approx \omega + n \omega_E$ (ω_E — частота колебаний электронов в потенциальной яме, v_0 — скорость дрейфа,

h_0 — постоянная распространения волны в „холодной“ системе, ω — частота излучения, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); таким образом, взаимодействие возможно и с незамедленными электромагнитными волнами. Методом, изложенным в [6] и основанным на исследовании уравнений движения электронов в самосогласованном поле, получено приближенное дисперсионное уравнение, связывающее постоянную распространения волны h с частотой.

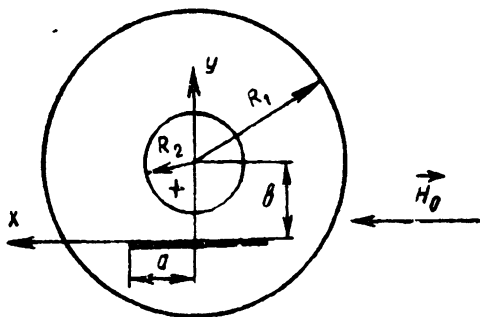


Рис. 2.

При достаточно слабых токах пучка уравнение для поправки $\delta h = h - h_0$ оказывается кубическим и имеет ту же структуру, что и в случае ЛБВ типа „0“ (взаимодействие типа „0“). Наличие комплексных корней у этого уравнения указывает на то, что строфотрон с бегущей волной может служить как для усиления (если направление групповой скорости волны совпадает с направлением дрейфа электронов), так и для генерирования (при взаимодействии пучка со встречной волной) высокочастотных колебаний. Такое устройство имеет ряд положительных особенностей, в частности, широкую полосу электронной перестройки в режиме генерации на встречной волне.

Строфотрон с потенциальной ямой, близкой к параболической,

нуждается в специальном рассмотрении, так как в этом случае учет релятивистских эффектов может оказаться принципиальным. В работе дано соответствующее обобщение дисперсионного уравнения. Рассмотрена также работа строботрона с бегущей волной в режиме, когда разбиение электронного пучка на сгустки происходит благодаря оседанию ускоряющихся электронов на один из электродов (режим с отбором).

При выводе основных уравнений всюду приняты обычные для теории слабых сигналов допущения (см. также [6]): малость тока пучка (малость усиления на длину волны, малость пространственного заряда), достаточно большая длина пространства взаимодействия, обеспечивающая возможность учета взаимодействия только с одной (синхронной) волной и др.

1. Движение электрона в двухмерной потенциальной яме при наличии постоянного однородного магнитного поля $H_0 = H_0 x_0$ описывается в нерелятивистском приближении уравнением

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\eta (E_0 + E_-) - \frac{\eta}{c} [\dot{\mathbf{r}}, H_0 + H_-], \quad (1)$$

где E_- и H_- — напряженности электрического и магнитного высокочастотных полей, E_0 — электростатическое поле с компонентами $E_{0x} = E_x(x, y)$, $E_{0y} = -E_0 - E_y(x, y)$, $E_{0z} = 0$, $\eta = |e/m_0|$, e — заряд электрона, m_0 — его масса покоя.

Нетрудно показать (см. также [5]), что при достаточно сильном магнитном поле H_0 ($\omega_H = \frac{\eta}{c} H_0 \gg \omega$, ω_E) и достаточно большой постоянной составляющей E_0 в y -компоненте электростатического поля ($|E_0| \gg |E_x(x, y)|$, $|E_y(x, y)|$) электроны в процессе движения сколь угодно мало отклоняются от плоскости xz . При этом движение вдоль z можно считать равномерным $z \approx v_0 t$ ($v_0 = cE_0/H_0$ — скорость дрейфа).

Считая выполненными эти условия и рассматривая высокочастотное поле как возмущение, будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\mathbf{r} = z_0 Z + x_0 (X + x^{(1)}), \quad |x^{(1)}| \ll |X|. \quad (2)$$

В нулевом приближении (в отсутствие высокочастотного поля) движение электрона описывается уравнениями

$$\ddot{X} + \eta E_x(X, 0) = 0, \quad Z = v_0 t, \quad (3)$$

причем функция $E_x(x, 0)$ меняет знак при $x = 0$. Решение первого из этих уравнений $X(t)$, соответствующее реальным начальным условиям и являющееся периодической функцией t с периодом $T_E = 2\pi/\omega_E$, мы будем считать известным и записывать в виде ряда

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \omega_E t; \quad (4)$$

соответственно

$$\dot{X}(t) = -\omega_E \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin n \omega_E t. \quad (4a)$$

Заметим, что в параболической потенциальной яме ($E_x = Ax$) колебания гармонические с частотой $\omega_E = \sqrt{\eta A}$.

2. Уравнение первого приближения, получающееся в результате

подстановки (2) в (1) (с учетом $\omega_H \gg \omega_E$, ω и $|E_0| \gg |E_x|, |E_y|$) имеет вид:

$$\ddot{x}^{(1)} + \Phi(X) \dot{x}^{(1)} = -\gamma E_{\sim}(X, 0, Z, t), \quad (5)$$

где $\Phi(x) = \gamma \frac{\partial E_{\sim}}{\partial x}$, $E_{\sim}(x, y, z, t)$ — x -компонента высокочастотного электрического поля*.

Уравнение (5) представляет собой линейное неоднородное уравнение с периодическими коэффициентами. Нетрудно видеть, что общее решение соответствующего однородного уравнения должно иметь вид (см., например, [1,7]):

$$x_{\text{одн}}^{(1)} = C_1 \frac{1}{\omega_E} \dot{X}(t) + C_2 [M \dot{X}(t) t + u(t)] = C_1 x_{01}^{(1)} + C_2 x_{02}^{(1)}, \quad (6)$$

где $u(t)$ — периодическая функция с периодом T_E , C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Наличие нарастающего во времени слагаемого в одном из решений однородного уравнения связано с фазовой неустойчивостью орбитно-устойчивого [8] движения ангармонического осциллятора. Коэффициент при нарастающей части M , который мы будем в дальнейшем называть параметром неизохронности, пропорционален производной частоты колебаний ω_E по энергии осциллятора W_0 ($M \sim d\omega_E/dW_0$). Заметим, что поскольку второе решение однородного уравнения $x_{02}^{(1)}$ связано с первым $x_{01}^{(1)}$ соотношением $x_{02}^{(1)} = \Delta x_{01}^{(1)} \int dt / (x_{01}^{(1)})^2$ (здесь Δ — вронскиан функций $x_{01}^{(1)}$ и $x_{02}^{(1)}$), и функция $u(t)$ и параметр неизохронности могут быть выражены через $\dot{X}(t)$. В частности, для M нетрудно получить**

$$M = -\frac{a_1^2 \omega_E^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |\sin \xi| \frac{d^2}{d\xi^2} \left[\frac{\sin^2 \xi}{\dot{X}^2(\xi)} \right] d\xi, \quad \xi = \omega_E t. \quad (7)$$

При помощи (7) можно записать параметр неизохронности M через амплитуды гармоник разложения (4); если ограничиться учетом второй и третьей гармоник, то

$$M \approx -24 \left[2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 - \frac{a_3}{a_1} + 18 \left(\frac{a_3}{a_1} \right)^2 + \dots \right]. \quad (7a)$$

Для гармонического осциллятора, как и следовало ожидать, $M \equiv 0$.

Общее решение неоднородного уравнения (5) записывается через решения (6) соответствующего однородного уравнения:

$$x^{(1)} = A(t) x_{01}^{(1)}(t) + B(t) x_{02}^{(1)}(t),$$

где

$$A(t) = \gamma \Delta^{-1} \int x_{02}^{(1)} E_{\sim}[X(t), 0, Z(t), t] dt + C_1;$$

$$B(t) = -\gamma \Delta^{-1} \int x_{01}^{(1)} E_{\sim}[X(t), 0, Z(t), t] dt + C_2.$$

3. Допустим, что высокочастотное поле в пространстве взаимодействия имеет вид плоской неоднородной волны $E_{\sim} = V_0 E(x, y) e^{i(\omega t - hz)}$,

* Поскольку движение по z считается равномерным, в силе Лорентца, стоящей в правой части (5), можно не учитывать член, пропорциональный переменному магнитному полю $H_{\sim}$.

** Здесь и в дальнейшем принято $\Delta = a_1^2 \omega_E$.

отличающейся от волны в „холодной“ системе только постоянной распротранения $h = h_0 (1 + \delta)$, $|\delta| \ll 1$ (это имеет место при достаточно слабых токах пучка). Используя разложения

$$\frac{1}{\omega_E} V_0 \dot{X}(t) E[X(t), 0] e^{i(\omega - h v_0) t} = \sum_k V_0 G_k e^{i(h_e - h + k h_E) v_0 t}; \quad (8)$$

$$V_0 u(t) E[X(t), 0] e^{i(\omega - h v_0) t} = \sum_k V_0 \tilde{G}_k e^{i(h_e - h + k h_E) v_0 t},$$

где $h_e = \omega/v_0$, $h_E = \omega_E/v_0$, нетрудно убедиться, что при

$$h_0 (1 + \epsilon) = h_e + m h_E, \quad |\epsilon| \ll 1 \quad (9)$$

в решении (8) имеются резонансные члены порядка $(\delta - \epsilon)^{-2}$ и $(\delta - \epsilon)^{-1}$. При достаточно малых $|\delta - \epsilon|$ и $M \neq 0$ можно сохранить в (8) лишь слагаемые порядка $(\delta - \epsilon)^{-2}$. Таким образом, получим:

$$x^{(1)} \approx M \frac{V_0}{2U_0} \frac{1}{\alpha_1^2 \omega_E} \dot{X}(t) G_m \frac{e^{i(h_e - h + m h_E) v_0 t}}{(h_e - h + m h_E)^2}, \quad (10)$$

где $U_0 = v_0^2/2\gamma_1$ — напряжение, соответствующее скорости дрейфа v_0 .

С другой стороны, для вычисления амплитуды синхронной (удовлетворяющей условию (9)) волны, возбуждаемой в системе электронным пучком, можно, согласно [6], воспользоваться выражением*

$$V \approx i \omega \frac{V_0 I_0}{N} \int_0^{\tau = z/v_0} x^{(1)}(t) E^*[X(t), 0] e^{-i(h_e - h_0) v_0 t} dt, \quad (11)$$

где I_0 — ток пучка, N — норма волны единичной амплитуды, $\tau = z/v_0$ — время пролета электрона до сечения z , * означает комплексно-сопряженную величину. Подставляя в (11) приближенное выражение для смещения электрона под действием высокочастотного поля (10), выполняя интегрирование по t и учитывая лишь резонансные члены порядка $[\delta(\delta - \epsilon)^2]^{-1}$, получим дисперсионное уравнение

$$\delta(\delta - \epsilon)^2 = -C_m^3 = -\frac{I_0}{2U_0} \frac{h_e}{\alpha_1^2 h_0^3 N} M |G_m|^2, \quad (12)$$

определяющее поправки к постоянной распространения $\delta h_0 = h - h_0$. Уравнение (12) совпадает по форме с дисперсионным уравнением обычной ЛБВ типа „0“ без учета затухания в волноведущей системе** и пространственного заряда [9] (взаимодействие типа „0“). Параметр усиления C_m оказывается пропорциональным $M^{1/3}$; это означает, что взаимодействие типа „0“ в строфотроне с бегущей волной связано с неизохронностью колебаний электрона в электростатической потенциальной яме.

* В формуле (19) работы [6] при гармонической зависимости $[r^{(1)}(\tau, t)]_{\tau=\text{const}}$ от времени интегрирование по времени пролета τ можно заменить интегрированием по t . Кроме того, в (11) учтено сделанное на стр. 829 замечание о возможности пренебрежения высокочастотным магнитным полем.

** При наличии малого затухания (параметр потерь $\delta_1 \ll 1$) дисперсионное уравнение принимает вид:

$$(\delta + i \delta_1)(\delta - \epsilon)^2 = -C_m^3.$$

4. Неизохронность колебаний электрона может быть обусловлена не только отличием формы электростатической потенциальной ямы от параболической, но и проявлением релятивистских эффектов. Уравнение первого приближения для x в случае слабого релятивизма $\left(\frac{x^2}{c^2} \ll 1, \frac{v_0^2}{c^2} \ll 1\right)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(1)} + \frac{\partial \Phi(X, \dot{X})}{\partial \dot{X}} \dot{x}^{(1)} + \\ + \frac{\partial \Phi(X, \dot{X})}{\partial X} x^{(1)} = -\eta \Psi(\dot{X}) E_-(X, 0, Z, t), \end{aligned} \quad (13)$$

где $X(t)$ — решение уравнения нулевого приближения

$$\ddot{X} + \Phi(X, \dot{X}) = 0;$$

$$\Phi(x, \dot{x}) = \eta E_x(x) \Psi(\dot{x}); \quad \Psi(\dot{x}) = 1 - \frac{3}{2} \frac{\dot{x}^2}{c^2},$$

$\eta = |e/m_0|$, m_0 — масса покоя. Решение задачи тем же путем, что и ранее приводит к дисперсионному уравнению вида (12), но с заменой M на $M_{\text{рел}}$:

$$M_{\text{рел}} = -\frac{a_1^2 \omega_E^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |\sin \xi| \frac{d^2}{d\xi^2} \left[\frac{\sin^2 \xi}{\dot{X}^2(\xi)} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\dot{X}^2}{c^2} \right) \right] d\xi, \quad (14)$$

$$\xi = \omega_E t.$$

Таким образом, дисперсионное уравнение всегда имеет третью степень относительно поправки δ , т. е. и в том случае, когда в нерелятивистском приближении колебания близки к гармоническим. Отметим, что хотя параметр неизохронности $M_{\text{рел}}$ оказывается при этом порядка v^2/c^2 , учет релятивистских эффектов необходим, так как с ними связана неустойчивость системы. Параметр усиления S при $v^2/c^2 \sim 10^{-2}$ получается по порядку величины таким же, как в обычных ЛБВ и ЛОВ.

5. В том случае, когда колебания электронов в электростатической потенциальной яме близки к гармоническим и параметр неизохронности M ($M_{\text{рел}}$) весьма мал, в (8) наряду с членами порядка $M(\delta - \varepsilon)^{-2}$ необходимо учитывать резонансные слагаемые порядка $(\delta - \varepsilon)^{-1}$, не содержащие множителя M . С учетом этих членов дисперсионное уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned} \delta(\delta - \varepsilon)^2 = \frac{I_0}{2U_0} \frac{h_e}{a_1^2 h_0^3 N} \left[-M |G_m|^2 + 2(\delta - \varepsilon) \times \right. \\ \left. \times \frac{h_0}{h_E} \operatorname{Im}(\tilde{G}_m G_m) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Пользуясь тем, что для колебаний, близких к гармоническим, $\dot{X} = -a_1 \omega_E \sin(\omega_E t)$ и $u = a_1 \cos(\omega_E t)$, дисперсионное уравнение (15) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta(\delta - \varepsilon)^2 = \frac{I_0}{8U_0} \frac{h_e}{h_0^3 N} \left[-M |E_{m-1} - E_{m+1}|^2 + \right. \\ \left. + 2(\delta - \varepsilon) \frac{h_0}{h_E} (|\dot{E}_{m+1}|^2 - |E_{m-1}|^2) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где E_k — коэффициенты разложения поля $E[X(t), 0]$ в ряд Фурье $E = \sum_k E_k e^{ik\omega_E t}$. По форме это уравнение сходно с уравнением ЛБВ

с учтенным пространственным зарядом, и его исследование нетрудно провести обычным методом [9]. Отметим, что при достаточно малых токах пучка вторым слагаемым в правой части (16) всегда можно пренебречь; таким образом, при слабых токах уравнение (16) переходит в (12) и всегда имеет комплексные корни (взаимодействие типа „0“). Наоборот, при достаточно сильных токах и малой ангармоничности колебаний в правой части (16) можно пренебречь первым слагаемым; при этом дисперсионное уравнение оказывается второго порядка относительно δ и имеет вид, характерный для систем типа „М“ (взаимодействие типа „М“):

$$\delta(\delta - \varepsilon) = \frac{I_0}{4U_0} \frac{h_e}{h_E h_0^2 N} (|E_{m+1}|^2 - |E_{m-1}|^2). \quad (16a)$$

Возможность усиления и генерации электромагнитных колебаний при взаимодействии типа „М“, связанная с наличием комплексных корней у уравнения (16a), определяется знаком его правой части, т. е. зависимостью абсолютной величины коэффициентов Фурье $|E_k|$ от индекса k . Если, как это обычно бывает, $|E_{k_1}| > |E_{k_2}|$ при $|k_1| > |k_2|$, то при $m < 0$ (т. е. при взаимодействии с незамедленными волнами) поправки δ оказываются действительными и взаимодействие типа „М“ не приводит к неустойчивости системы. В специальных случаях, когда для некоторых значений $k_{1,2}$ между коэффициентами Фурье имеет место обратное соотношение, уравнение (16a) может иметь комплексные корни, что указывает на возможность усиления незамедленных волн. Пример такой системы приведен на рис. 3. Если положение проводников

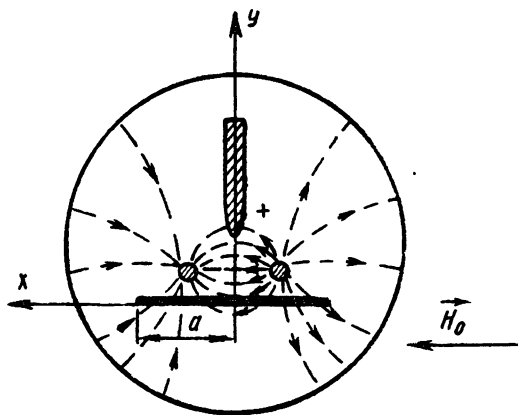


Рис. 2.

двухпроводной линии передачи и амплитуда стационарных колебаний электронов a подобраны так, что $|\dot{E}_{\pm 2}| > |E_0|$, то при $m = -1$ ($h_0 \approx h_e - h_E$) возможны нарастающие волны.

Характер зависимости коэффициента усиления (мнимой части поправки δ) от тока изображен на рис. 4.

6. Рассмотрим, в качестве примера, коаксиальный строкотрон с бегущей волной.

Уравнение, описывающее невозмущенное движение (электростатическое поле $E_0 = \frac{A}{r} r_0$) в достаточно сильном магнитном поле H_0 , имеет вид

$$\ddot{x} + \eta A \frac{x}{b^2 + x^2} = 0, \quad (17)$$

где b —расстояние плоскости колебаний электрона (плоскости xz) от оси системы. Решение этого уравнения требует, в общем случае, численного интегрирования. Однако при слабой нелинейности ($a/b \ll 1$)

возможно применение асимптотических методов* (см., например, [10]). Ограничиваясь первыми тремя членами разложения функции $\frac{1}{b^2 + x^2}$ в ряд по x/b , получим приближенное решение уравнения (17) в виде ряда Фурье:

$$X \approx a \cos \omega_E t -$$

$$- \frac{1}{32} a \frac{a^2}{b^2} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{15}{16} \frac{a^2}{b^2} + \dots \right) \times$$

$$\times \cos 3\omega_E t + \frac{3}{512} a \frac{a^4}{b^4} (1 + \dots) \cos 5\omega_E t - \dots$$

Пользуясь формулой (7) или (7а)** нетрудно написать первые члены разложения параметра неизохронности M в ряд по a^2/b^2 :

$$M \approx -24 \left(3,1 \cdot 10^{-2} \frac{a^2}{b^2} + 5,3 \cdot 10^{-3} \frac{a^4}{b^4} + \dots \right).$$

Взаимодействие пучка с главной волной в рассматриваемой системе наиболее эффективно при синхронизме $h \approx h_e - 2h_E$ ($m = -2$); при этом

$$|G_{-2}|^2 \approx \frac{1}{16} \frac{a^4}{b^4} \left[1 - (1 + \dots) \frac{a^2}{b^2} + \dots \right],$$

а формула (12) для параметра усиления*** принимает вид:

$$C^3 = \frac{I_0 z_b h_e |M| |G_{-2}|^2}{4U_0 \ln^2(R_1/R_2) h_0^3 a^2} \quad (18)$$

(z_b —волновое сопротивление коаксиала). Зависимость параметра усиления C от отношения a/b при $\lambda_0 = 10$ см (λ_0 —длина волны в свободном пространстве), $I_0 = 1$ ма, $R_1 = 5$ мм, $R_2 = 0,35$ мм (R_1 и R_2 — радиусы наружного и внутреннего проводников), $L = 25$ см (L —длина пространства взаимодействия), $b = 1,8$ мм, $H_0 = 3000$ эрстед, рассчитанная по формуле (18), приведена на рис. 5.

* Согласно [10], асимптотический метод обеспечивает хорошую точность до значений $a/b \sim 0,8$.

** Для симметричной потенциальной ямы с учетом пятой гармоники формула (7а) имеет вид:

$$M \approx -24 \left[-\frac{a_3}{a_1} + 18 \left(\frac{a_3}{a_1} \right)^2 - \frac{85}{12} \frac{a_5}{a_1} + \dots \right].$$

*** В приведенном ниже численном примере релятивистская поправка и член, определяющий взаимодействие типа «М», пренебрежимо малы.

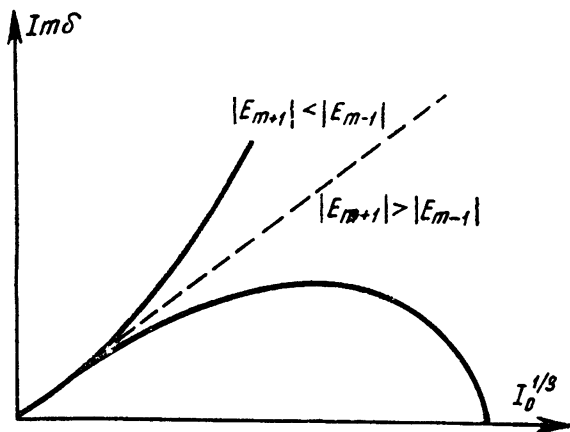


Рис. 4.

Коэффициент усиления на прямой волне при точном синхронизме и при отсутствии поглощения определяется формулой

$$G = -9,54 + 47,3 CL/\lambda$$

(λ — длина волны в системе).

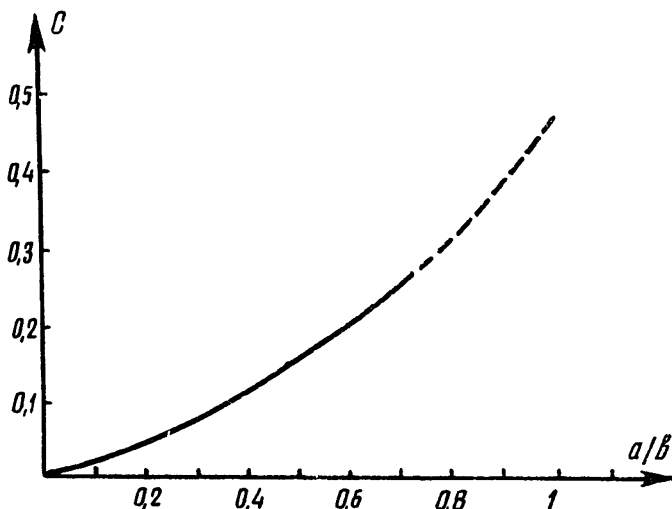


Рис. 5.

Например, значению $a/b = 0,7$ ($C \approx 0,25$) соответствует $G \approx 20$ дБ; однако пусковой ток, обеспечивающий генерацию на встречной волне (синхронизм — $h_0 = h_e - 2h_F$), получается при этом равным 20 мА и соответствующий такому току „предельный“ коэффициент усиления на прямой волне — 5 дБ. Это означает, что для получения усиления порядка 20 дБ необходимо вводить в систему поглотитель.

Заметим, что большие значения параметра неизохронности указывают на возможность повышения частоты генерируемых или усиливаемых высокочастотных колебаний в коаксиальном строботроне с бегущей волной за счет работы на более высоких гармониках $\omega \approx m \omega_E$.

7. Рассмотренный выше механизм взаимодействия электронного пучка с быстрой электромагнитной волной в строботроне обусловлен автофазировкой частиц в поле волны. Однако, если пучок проходит вблизи стенок линии передачи (вершины статических траекторий близки к поверхности стенки), в строботроне, как и в любых системах с криволинейными пучками („трохотронный усилитель“ [11], гелитрон [12] и др.) может иметь место и другой механизм группировки пучка: ускоренные высокочастотным полем электроны оседают (отбираются) на стенку, при этом число тормозящихся („полезных“) электронов становится преобладающим. Эффективность такого взаимодействия зависит от распределения тока в направлении, перпендикулярном поверхности отбирающего электрода (рис. 6), и при известных условиях может быть выше, чем эффективность автофазировки.

Механизм взаимодействия непрямолинейных пучков с электромагнитными волнами в режиме „принудительной“ группировки (в режиме отбора) подробно рассмотрен в работе [11] на примере трохотронного пучка (скрещенные E_0 и H_0 поля) в двухпроводной ленточной линии. Результаты, полученные в [11], нетрудно распространить и на

строфотрон. Предполагая, для простоты, что статические колебания по x гармонические ($X = X_0 - a \cos \omega_E t$), запишем уравнение первого приближения, аналогично [11], в действительной форме:

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_E^2 x^{(1)} = \eta V_0 E(X) f(Z) \sin(\omega t - \hbar z + \varphi), \quad (19)$$

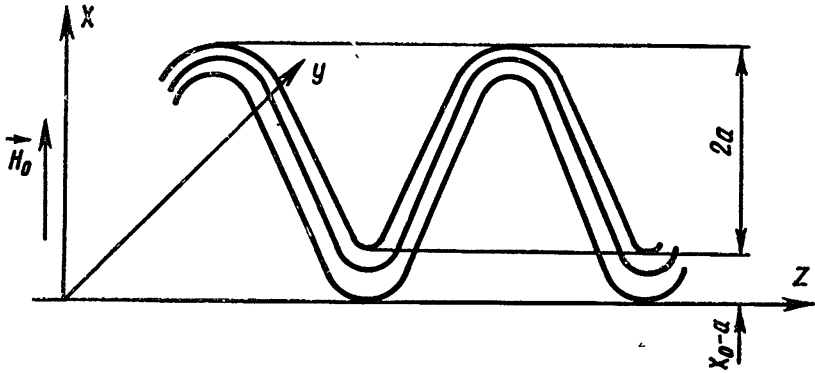


Рис. 6.

где $f(z)$ — медленно меняющаяся по z единичная функция. Решая уравнение (19) при условии точного синхронизма $\omega - \hbar v_0 - m\omega_E = 0$, получим выражение для амплитуды поперечных колебаний

$$R(z) = a + (\eta V_0 |G_{-m}| / a v_0 \omega_E) \cos \varphi \int_0^z f(z) dz,$$

совпадающее с соответствующим выражением, полученным в [11] при замене $\omega_E \rightarrow \omega_H$, $\frac{2V_0 |G_{-m}| f(z)}{a} \rightarrow E_a(z)$. При этом все основные результаты, полученные в [11], легко распространяются на рассмотренную систему. Например, в случае равномерного распределения тока по поперечному сечению пучка в низших точках статических траекторий („плотность“ тока $j_0 = I_0/d$, где d — „толщина“ пучка) для коэффициента усиления имеем

$$G = 13,5 \sqrt{\frac{j_0 K_{-m}}{2U_0 \hbar_E}} \frac{L}{\lambda} - 6 \quad (\text{дБ}),$$

для полосы усиления (при слабых токах и малой „толщине“ пучка)

$$\Pi_{0,5} \approx \frac{180}{\pi} \frac{1}{N_e} (\%)$$

и для пусковой плотности тока, обеспечивающей генерацию на встречной волне,

$$\tilde{j}_0 = \frac{2U_0 \hbar_E \lambda^2}{K_{-m} L^2}.$$

Здесь N_e — число пространственных периодов траектории электрона, укладывающихся в пространстве взаимодействия, $K_{-m} = 4 |G_{-m}|^2 / a^2 \hbar_0^2 N$ — импеданс взаимодействия.

Отметим, в заключение, что близость пучка к стенке линии передачи, высокая плотность тока в направлении, перпендикулярном стенке, и малая длина пространства взаимодействия могут привести к тому,

что взаимодействие в режиме отбора будет более эффективным*, чем в режиме автофазировки, так как при отборе даже малые возмущения траекторий движения электрона могут вызывать существенную модуляцию электронного пучка.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, **38** (1960), (в печати).
2. А. В. Гапонов, В. В. Железняков, Доклад на XIII Ассамблее URSI, Лондон, 1960.
3. В. М. Боков, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **2**, 831 (1959).
4. H. Alfvén, D. Romell, PIRE, **42**, 1239 (1954).
5. B. Agdur, Ericsson Techn., **13**, 3 (1957).
6. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **2**, 443, 450, 836 (1959).
7. Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, изд. АН СССР, М., 1948, стр. 590.
8. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
9. Д. Р. Пирс, Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1952.
10. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958, стр. 49.
11. В. М. Боков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **2**, 730 (1959).
12. D. Watkins, G. Wada, PIRE, **46**, 1700 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
18 июня 1960 г.

* Эффективность в режиме отбора может сильно снижаться из-за вторичной эмиссии с поверхности стенки [5].

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОННЫХ ПРОМЕЖУТКОВ С БОЛЬШИМИ УГЛАМИ ПРОЛЕТА

М. А. Миллер

Рассмотрены некоторые особенности электронных промежутков с большими углами пролета. В предположении плавного пространственного изменения поля внутри промежутка получены выражения для электронной проводимости, существенно зависящие от способов инжекции и удаления (отбора) электронов. Установлен характер модуляции пучка при прохождении через такой промежуток.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, характер движения частиц во внешнем электромагнитном поле, переменном во времени и неоднородном в пространстве, существенно зависит от величины параметра $\Delta t/T$, представляющего собой отношение времени пролета частицы через систему Δt к периоду колебаний (или другому характерному интервалу) управляющего поля T .

Наиболее полно изучено движение в статических полях, соответствующих предельному значению $\Delta t/T = 0$. Речь идет, конечно, не только об „истинных“ статических полях, но и о полях, сводящихся к статическим при таких преобразованиях систем отсчета, которые либо оставляют уравнения движения инвариантными, либо изменяются весьма незначительно.

Опираясь на статическое приближение, удастся продвинуться и в решении задач, характеризующих конечным, но малым значением угла пролета ($\Delta t/T \ll 1$), в частности, путем отыскания поправок к статическому приближению в виде рядов по степеням $\Delta t/T$. Иногда достигается даже получение электродинамически самосогласованного решения, учитывающего изменения, вносимые частицами в управляющее поле (учет квазистатического поля пространственного заряда, резонансное взаимодействие и т. п.).

При временах пролета, соизмеримых с периодом колебаний T , исследование характера движения частиц сильно усложняется. Разумеется, отдельные конкретные варианты могут быть изучены аналитически или рассчитаны численными методами, но отсутствие общего подхода препятствует установлению хотя бы приближенных, интуитивных критериев, необходимых для правильного выбора и предварительной оценки того или иного варианта.

Однако в другом предельном случае, при условии существенного превышения времени пролета над периодом колебаний ($\Delta t/T \gg 1$), такие критерии могут быть сформулированы, чему, по сути дела, и посвящены наши работы [1–3], а также ряд работ других авторов [4–6]. Цель настоящей статьи состоит в применении этих результатов для выяснения некоторых специфических характеристик электронных промежутков с большими углами пролета.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В пространственно неоднородном поле под величиной Δt целесообразно понимать время пролета частиц через область $L_E \sim E/|\nabla E|$,

внутри которой поле (его амплитуда или фаза) претерпевает заметные изменения. Тогда, обозначая через $\dot{r}_{\text{ср}}$ среднюю скорость частицы, условие $\Delta t \gg T$ можно переписать в виде:

$$L_E \gg \dot{r}_{\text{ср}} T. \quad (1.1)$$

Это означает, что за один период высокочастотных колебаний частица продвигается в среднем на расстояние, много меньшее размеров области L_E . Поля, характеризуемые соотношением (2.1), мы называем слабо неоднородными.

В дальнейшем, говоря о промежутках с большими углами пролета, мы предполагаем, что электромагнитное поле внутри них удовлетворяет условию (1.1), т. е. является в указанном выше смысле слабо неоднородным. Разумно, однако, не распространять это ограничение на границы промежутка, допуская там (например, при переходе через поверхность проводящих электродов) возможность резких пространственных изменений поля (характеризуемых неравенством, противоположным (1.1)).

Таким образом, мы вводим в рассмотрение некоторый идеализированный электронный промежуток, составленный из областей с очень плавными и с очень крутыми изменениями поля, т. е. соответственно с очень большими ($\omega L_E \gg \dot{r}_{\text{ср}}$) -или пренебрежимо малыми ($\omega L_E \ll \dot{r}_{\text{ср}}$) углами пролета. Относительно размеров этого промежутка не делается никаких предположений. В типичных для высокочастотных распределенных систем случаях размеры области L_E можно считать по порядку величины равными $\lambda/2 \sim \pi/k = \pi c/\omega$. Тогда легко убедиться, что условие (2.1) выполняется для любого нерелятивистского движения ($\dot{r}_{\text{ср}} \ll c$).

Принципиально вполне допустимы и „удлиненные“ неоднородности $L_E \gg \lambda$, размеры которых заметно превышают длину волны, хотя, как правило, они трудно реализуемы из-за пространственной неустойчивости полей. В другом предельном случае „укороченных“ неоднородностей, когда $L_E \ll \lambda$, речь идет об обычных квазистационарных системах, т. е. об электронных промежутках в общепринятом смысле этого термина.

2. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ВНУТРИ ПРОМЕЖУТКА

Мы будем предполагать электромагнитное поле внутри электронного промежутка заданным в виде $E(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, $H(\mathbf{r})e^{i\omega t}$. Тогда в соответствии с результатами работы [1] движение электрона может быть приближенно представлено как суперпозиция осцилляторного движения

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(1)}(t) &= -\eta/\omega^2 E(\mathbf{r}) e^{i\omega t}, \\ \dot{\mathbf{r}}^{(1)}(t) &= -i\eta/\omega E(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

и плавного усредненного движения $\mathbf{r}^{(0)}(t)$, подчиненного уравнению

$$\ddot{\mathbf{r}}^{(0)} = -\nabla \Phi(\mathbf{r}^{(0)}). \quad (2.2)$$

Здесь η —отношение заряда электрона e к его массе m , а Φ —высокочастотный потенциал, равный

$$\Phi = |\eta E/2\omega|^2. \quad (2.3)$$

Такое усредненное описание движения допустимо при выполнении следующих ограничений:

$$\dot{r}^{(0)}/c \sim \dot{r}^{(1)}/c \ll 1; \quad (2.4)$$

$$\dot{r}^{(0)}/\omega L_E \sim \dot{r}^{(1)}/\omega L_E \ll 1; \quad (2.5)$$

$$r^{(1)}/L_E \sim \eta E/\omega^2 L_E \ll 1, \quad (2.6)$$

физический смысл которых очевиден [3]. Нетрудно убедиться, что для типичных высокочастотных неоднородностей, когда $L_E \sim \lambda/2$, все три неравенства (2.4)–(2.6) эквивалентны друг другу.

Уравнение (2.2) приводит к следующему интегралу усредненной энергии:

$$\dot{r}^{(0)2}/2 + \Phi(r^{(0)}) = \text{const}, \quad (2.7)$$

который, кстати сказать, оказывается точнее самого уравнения (2.2) [3]. Благодаря (2.7), во многих важных случаях удастся установить характер движения электронов внутри промежутка, не конкретизируя структуры электромагнитного поля.

Очевидно, что если высокочастотное поле одинаково по величине на входе и выходе промежутка, а внутри него изменяется достаточно плавно, то в силу потенциальности усредненного движения электроны в результате пролета через такой промежуток не изменяют своих скоростей. Изменение скорости может произойти лишь при наличии резких перепадов поля, т. е. из-за прохождения электронов через области, где интеграл (2.7) несправедлив.

По крайней мере две характеристики электронных промежутков с плавно изменяющимся полем внутри и резкими скачками поля на границах представляются интересными с точки зрения оценки возможностей использования в высокочастотной электронике. Это—электронная проводимость и функция распределения по скоростям и фазам электронов по выходе из промежутка. Первая характеристика позволяет судить о влиянии электронного промежутка на режим работы внешних полей, к которым он подключен, и, в частности, установить условия, при которых возможно достижение в системе режима устойчивых автоколебаний. Вторая характеристика показывает, как преобразуются параметры электронного пучка при его прохождении через промежуток, т. е. позволяет оценить качества последнего как элемента управления движением частиц.

3. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ОТБОРА ЭЛЕКТРОНОВ ОТ ПРОМЕЖУТКА

Прежде всего рассмотрим идеальный случай, соответствующий максимальному значению электронной проводимости $G_{эл}$ [7, 8]. Возьмем в качестве примера прямолинейный пучок частиц, влетающих со скоростью $z = v_{вх}$ в промежуток с монотонно возрастающим от нуля распределением высокочастотного потенциала $\Phi(z)$. Очевидно, что в соответствии с интегралом энергии (2.7) частицы смогут продвинуться только до плоскости $z = z_{отр}$, где $\Phi(z_{отр}) = v_{вх}^2/2$, причем в точке отражения происходит полная трансформация первоначальной энергии поступательного движения в энергию осцилляций. Если теперь выбрать „выходную поверхность“ промежутка так, чтобы суммарная скорость частиц на ней обращалась в нуль:

$$\dot{r}^{(0)}(t_n) + \dot{r}^{(1)}(t_n) = 0 \quad (3.1)$$

(t_n —момент вылета частиц из промежутка), то кинетическая энергия частиц окажется полностью отданной электромагнитному полю.

Естественно, что это соответствует максимально возможному значению электронной проводимости. В этом смысле равенство (3.1) определяет условия оптимального отбора электронов из пространства взаимодействия с полем. Но, как правило, соотношение (3.1) не может быть реализовано в точности, потому что при полной (усредненной) остановке частиц плотность пространственного заряда в пучке неограниченно возрастает; кроме того, если отбор осуществляется не на поверхность проводящего электрода, а в вакуум, то для квазимоментального пролета через область с резко спадающим полем ($\omega L_E \ll r$ при $t = t_n$) необходимо сохранить на выходе хотя бы небольшую отличную от нуля усредненную скорость. Тогда оптимальным следует считать такой отбор, при котором осцилляторная скорость обращается в нуль, т. е.

$$\dot{r}^{(0)}(t_n) \neq 0, \quad \dot{r}^{(1)}(t_n) = 0. \quad (3.2)$$

Очевидно, что при выполнении условий оптимального отбора для всех частиц их скорости на выходе промежутка оказываются одинаковыми.

Следует различать три разновидности отбора в зависимости от направления усредненной скорости на выходе промежутка: поперечный отбор, при котором направления усредненной и осцилляторной скоростей ортогональны ($\dot{r}^{(0)} \dot{r}^{(1)} = 0$), продольный отбор, происходящий при одинаковых направлениях этих скоростей ($[\dot{r}^{(0)} \dot{r}^{(1)}] = 0$), и, наконец, смешанный отбор, когда $(\dot{r}^{(0)} \dot{r}^{(1)}) \neq 0$, $[\dot{r}^{(0)} \dot{r}^{(1)}] \neq 0$.

Так, например, если граница промежутка является поверхностью идеально проводящего коллектора, то поперечный отбор оказывается возможным из электронного пучка, скользящего вдоль этой поверхности, а продольный и смешанный отбор—соответственно из нормально или наклонно падающего пучка.

4. ЭЛЕКТРОННАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ОТБОРЕ

Реальная часть электронной проводимости $G_{\text{опт}}$ при оптимальном отборе может быть найдена в общем случае без уточнения структуры электронного промежутка. Действительно, если по-прежнему считать, что электроны влетают в область нулевого поля и имеют одинаковые начальные скорости, то мощность, отдаваемая пучком полю при оптимальном отборе, будет в среднем за период поля равна*

$$P = \frac{I \Phi(r_n)}{\eta} = \frac{I \eta}{4 \omega^2} |E(r_n)|^2, \quad (4.1)$$

где I —сила тока в пучке, а $E(r_n)$ —напряженность электрического поля в месте отбора, которую можно представить в виде:

$$E(r_n) = V_- f(r_n)/L_E, \quad (4.2)$$

где L_E —характерные размеры промежутка или области отбора, V_- —некоторое эффективное напряжение, а $f(r)$ —распределение поля в промежутке. В частности, в случае типичных распределенных высокочастотных систем можно положить $L_E = 1/k$, т. е. $E(r_n) = V_- k f(r_n)$. Подстановка (4.2) в (4.1) позволяет сразу же по-

* Используется гауссова система единиц.

лучить выражение для некоторой эффективной электронной проводимости промежутка

$$P = \frac{1}{2} G_{\text{эл}}^{\text{опт}} V_e^2; \quad (4.3)$$

$$G_{\text{эл}}^{\text{опт}} = \frac{\eta I f^2(r_n)}{2\omega^2 L_E} = \frac{1}{2(kL_E)^2} \frac{I f^2(r_n)}{V_e}. \quad (4.4)$$

Здесь через V_e обозначена величина $mc^2/e = 1,7 \cdot 10^3 \text{ CGSE} = 5,12 \cdot 10^5 \text{ в}$, т. е. энергия покоя электрона в единицах напряжения.

Из (4.4) ясно, что эффективность передачи энергии полю уменьшается с увеличением частоты. Однако это вовсе не означает, что длинноволновый диапазон является предпочтительным. Для осуществления оптимального отбора необходимо, чтобы условие (2.5) надежно выполнялось: в противном случае либо скорость частиц будет всюду отличаться от нуля, либо координаты тех точек, где скорость обращается в нуль, будет зависеть от фазы влета частиц в поле, что также почти исключает возможность оптимального отбора.

К формуле (4.4) можно придти несколько иным путем, рассматривая промежуток как систему с переменным параметром. В самом деле, при внесении диэлектрика в поле усредненная за период энергия последнего изменится на величину

$$\frac{1-\varepsilon}{16\pi} \int |E|^2 dV. \quad (4.5)$$

Если скорость перемещения диэлектрика мала (в масштабе ωL_E) и все ЭДС во внешних цепях остаются неизменными, то источником энергии (4.5) является кинетическая энергия на входе системы.

Представим теперь, что благодаря отбору вся энергия (4.5) отдается полю. Тогда, предполагая поле в области отбора почти однородным, для проводимости $G_{\text{эл}}^{\text{опт}}$ будем иметь:

$$G_{\text{эл}}^{\text{опт}} = \frac{1-\varepsilon}{8\pi} \frac{\Delta S v_n}{L_E^2}, \quad (4.6)$$

где ΔS —площадка на выходной поверхности, в пределах которой происходит отбор, v_n —средняя скорость отбираемых частиц. В случае плазменного или электронного пучка, подставляя в (4.6) значение

$$1-\varepsilon = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = \frac{4\pi\eta I}{\omega^2 \Delta S v_n} \quad (4.7)$$

(N —концентрация электронов, I —электронный ток на поверхность отбора), приходим к той же формуле (4.4).

Таким образом, эффект передачи энергии полю можно было бы трактовать и с чисто макроскопических позиций, задаваясь определенной функцией $\varepsilon(t)$.

5. ЭЛЕКТРОННАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ПРИ НЕОПТИМАЛЬНОМ ОТБОРЕ

В случае оптимального отбора электроны удаляются из промежутка мгновенно при одной и той же фазе поля в момент равенства нулю их осцилляторной (или даже полной) скорости. Поэтому можно считать, что они как бы группируются по фазе отбора, хотя группировки в обычном понимании этого процесса внутри промежутка не

происходит. В действительности, конечно, идеальная фазовая группировка неосуществима: электроны пересекают выходную поверхность в конечный интервал времени, и поэтому хотя бы часть из них имеет при уходе из промежутка отличные от нуля скорости, зависящие от фазы поля. Таким образом, частицы оказываются всегда в какой-то степени разгруппированными. Учет этой фазовой разгруппировки особенно важен при достаточно больших усредненных скоростях на выходе, когда отбор электронов происходит в течение всего периода и сопровождается уносом энергии из поля. Чтобы разобраться в этом, достаточно рассмотреть задачу об отборе в пределах области строго однородного поля.

Пусть речь идет об отборе частиц из тонкого прямолинейного пучка, ориентированного под произвольным углом α_n к плоской (локально плоской) выходной границе $x=0$ промежутка. Сначала будем считать, что тангенциальная составляющая вектора E на этой границе равна нулю (идеально проводящий коллектор), т. е.

$$E = x_0 \frac{V_{\sim}}{L_E} f(z_n) \cos(\omega t), \quad (5.1)$$

где $V_{\sim} f(z_n)/L_E$ — амплитуда однородного поля в области отбора.

Подстановка (5.1) в (4.1), (4.2) позволяет записать траектории электронов в следующем виде:

$$x = x_b - \frac{v_n \sin \alpha_n}{\omega \mu} (\cos \tau - \cos \tau_1) - \frac{v_n \sin \alpha_n}{\omega} (\tau - \tau_1); \quad (5.2)$$

$$z = z_b + \frac{v_n \cos \alpha_n}{\omega} (\tau - \tau_1);$$

$$\dot{x} = -v_n \sin \alpha_n \left(1 - \frac{\sin \tau}{\mu} \right); \quad (5.3)$$

$$\dot{z} = v_n \cos \alpha_n.$$

Здесь $\tau = \omega t$, μ — параметр фазовой разгруппировки, равный

$$\mu = \frac{L_E \omega v_n \sin \alpha_n}{\gamma_1 V_{\sim} f(z_n)} = \frac{\omega v_n \sin \alpha_n}{\gamma_1 E(z_n)}, \quad (5.4)$$

$t_b = \tau_b/\omega$ — момент влета частиц в область отбора, x_b, z_b — соответствующие координаты, определяющие границу области отбора. Последняя является в известной мере произвольной. Этим произволом можно распорядиться для упрощения вычислений. Предположим, что все частицы (из числа отбираемых в данном периоде) влетают в область отбора одновременно в момент $\tau_b = \tau_1$, когда равна нулю их осциллирующая скорость. Тогда, согласно (5.3),

$$\sin \tau_1 = \mu. \quad (5.5)$$

Если траектория (5.2) сформировалась в результате прохождения электронного луча через участок слабо неоднородного поля, то в пределах области отбора, где поле однородно, этот луч должен осциллировать как единое целое, оставаясь строго прямолинейным. Это существенно облегчает анализ, исключая возможность „фазового обгона“ электронов. Обозначим через τ_n фазу отбора электрона, т. е. фазу пересечения его траектории с плоскостью $x=0$. Тогда, согласно (5.2),

$$x_b \frac{\omega}{v_n \sin \alpha_n} = \tau_n - \tau_1 + \frac{\cos \tau_n - \cos \tau_1}{\mu}. \quad (5.6)$$

При $\tau_n = \tau_1$, $x_b = 0$ происходит отбор последнего электрона из числа отбираемых в данном периоде. В этот момент все остальные электроны „выстраиваются“ на входе в область отбора, после чего луч начинает приподниматься над плоскостью $x = 0$, т. е. отбор прекращается. Отбор возобновляется в следующем периоде в момент времени $\tau = \tau_2$, который определяется как следующий (после $\tau_n = \tau_1$) корень уравнения (5.6), относящийся к тому же значению координаты влета,

$$\tau_2 - \tau_1 + \frac{\cos \tau_2 - \cos \tau_1}{\mu} = 0. \quad (5.7)$$

Таким образом, отбор происходит в следующих пределах изменения фазы τ_n :

$$\tau_2 \leq \tau_n \leq \tau_3 = \tau_1 + 2\pi, \quad (5.8)$$

причем, если $0 \leq \tau_1 \leq \pi/2$, то $3\pi/2 \leq \tau_2 \leq 2\pi$. При оптимальном отборе пределы (5.8) совмещаются, что и соответствует идеальной фазовой группировке.

Подсчитаем теперь энергию, уносимую пучком из промежутка. Кинетическая энергия одиночной частицы, связанная с x -составляющей скорости, равна

$$\frac{m x^2}{2} = \frac{m v_n^2 \sin^2 \alpha_n}{2} \left(1 - \frac{\sin \tau}{\mu} \right)^2. \quad (5.9)$$

Число таких частиц, пересекающих плоскость $x=0$ в единицу времени, определяется выражением

$$\frac{I}{e} \left(1 - \frac{\sin \tau_n}{\mu} \right). \quad (5.10)$$

Следовательно, для суммарной кинетической энергии, уносимой из промежутка за один период колебаний, имеем:

$$\frac{I v_n^2 \sin^2 \alpha_n}{4\pi\eta} \int_{\tau_2}^{\tau_3} \left(1 - \frac{\sin \tau_n}{\mu} \right)^3 d\tau_n = \frac{I\Phi(z_n)}{\eta} \frac{1}{\pi\mu} \int_{\tau_2}^{\tau_3} (\mu - \sin \tau_b)^3 d\tau_n. \quad (5.11)$$

Здесь учтено, что, согласно (2.3),

$$\Phi(z_n) = \eta^2 V_-^2 f^2(z_n) / 4\omega^2 L_E^2 = v_n^2 \sin^2 \alpha_n / 4\mu^2.$$

Вычитая (5.11) из полной кинетической энергии движения пучка в x -направлении, т. е. из $I\Phi(2\mu^2 + 1)/\eta$, и восстанавливая обозначения (4.3), для электронной проводимости промежутка получим:

$$G = G_{\text{онт}} F(\mu);$$

$$F(\mu) = 1 + 2\mu^2 - \frac{1}{\pi\mu} \int_{\tau_2}^{\tau_3} (\mu - \sin \tau_n)^3 d\tau_n = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2\pi} (1 - 4\mu^2) - \frac{3}{4\pi} [\sin(2\tau_2) - \sin(2\tau_1)] + \frac{\cos^3 \tau_1 - \cos^3 \tau_2}{3\pi\mu} - 2. \quad (5.12)$$

Функцию $F(\mu)$ можно назвать фактором фазовой разгруппировки. При $\mu > 1$ действительные решения для фаз отбора τ_1 и τ_2 отсутствуют, т. е. становятся невозможными такие пересечения электронных траекторий с коллектором, при которых x -составляющая скорости обращалась бы в нуль. Однако, несмотря на это, окончательное выражение (5.12) не должно утрачивать смысл, если только учесть, что при $\mu \geq 1$ отбор происходит непрерывно в течение всего периода. Полагая в (5.12) $\tau_1 = \tau_2$, получаем:

$$F(\mu) |_{\mu \geq 1} = -2. \quad (5.13)$$

Следовательно, при $\mu \geq 1$ определенная доля энергии, не зависящая от параметра разгруппировки μ , уносится электронами из промежутка. Физически это связано с тем, что, как ясно из (5.9) и (5.10), число электронов, пересекающих плоскость $x=0$, пропорционально корню квадратному из их кинетической энергии. Поэтому электронов, уносящих большую энергию, всегда больше, чем электронов, уносящих меньшую энергию, т. е. имеет место своеобразное параметрическое успокоение.

В другом предельном случае $\mu \rightarrow 0$, $\tau_2 \rightarrow \tau_3$ фактор $F(\mu)$ стремится к $+1$, что соответствует оптимальному отбору. Нетрудно показать, что при малых μ справедливо следующее приближенное выражение для $F(\mu)$:

$$F(\mu) = 1 - 4\pi\mu + 8\sqrt{\pi}\mu^{3/2} + O(\mu^2). \quad (5.14)$$

6. ЭЛЕКТРОННАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ПРОМЕЖУТКА С ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫМ ПОЛЕМ НА ВЫХОДЕ

Полученные выше соотношения нетрудно обобщить и на случай промежутков с произвольно ориентированным (но по-прежнему квазиоднородным) полем на выходе. Действительно, пусть поле E в области отбора имеет вид (5.1), но плоскость коллектора (выходная плоскость промежутка) отклонена от плоскости $x=0$ на угол γ . Тогда наряду с координатами x и z , в которых движение задается формулами (5.2), (5.3), целесообразно ввести координаты x' , z' , совместив плоскость $x' = 0$ с плоскостью коллектора ($x' = x \cos \gamma - z \sin \gamma$, $z' = x \sin \gamma + z \cos \gamma$). При этом, как нетрудно убедиться,

$$\dot{x}' = -v_n \sin(\alpha_n + \gamma) \left(1 - \frac{\sin \tau}{\mu} \right), \quad (6.1)$$

где

$$\tilde{\mu} = \mu \frac{\sin(\alpha_n + \gamma)}{\sin \alpha_n \cos \gamma} = \frac{\omega v_n L_E \sin(\alpha_n + \gamma)}{\eta V_{\sim} f(z_n) \sin \alpha_n \cos \gamma}. \quad (6.2)$$

Из (6.1) следует, что начальная и конечная фазы отбора определяются, как и ранее, уравнениями (5.7) и (5.5), если в них произвести замену $\mu \rightarrow \tilde{\mu}$. Для того, чтобы найти число частиц, пересекающих плоскость коллектора $x' = 0$, аналогичная замена должна быть сделана и в формуле (5.10). Однако кинетическая энергия, связанная с осцилляциями электронов, определяется их движением вдоль линий поля E , т. е. вдоль координаты x , а не x' ; следовательно, она остается неизменной, т. е. по-прежнему задается соотношением (5.9). В результате для мощности, уносимой пучком из промежутка, вместо (5.11) получим

$$\frac{I\Phi(z_{11})}{\eta} = \frac{1}{\pi\tilde{\mu}} \int_{\tau_2}^{\tau_1} (\mu - \sin\tau_{11})^2 (\tilde{\mu} - \sin\tau_{11}) d\tau_{11}. \quad (6.3)$$

После интегрирования и некоторых простых преобразований приходим к следующей более общей, чем (5.12), формуле для фактора фазовой разгруппировки:

$$F(\mu, \tilde{\mu}) = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2\pi} \left(2 \frac{\mu}{\tilde{\mu}} - 1 - 4\mu\tilde{\mu} \right) - \frac{1}{4\pi} (1 + 2\mu/\tilde{\mu}) [\sin(2\tau_2) - \sin(2\tau_1)] + \\ + \frac{1}{3\pi\tilde{\mu}} (\cos^3\tau_1 - \cos^3\tau_2) - 2\mu/\tilde{\mu}. \quad (6.4)$$

Естественно, что при $\mu = \tilde{\mu}$, когда, согласно (6.2), $\gamma = 0$, (6.4) сводится к (5.12). При малых $\tilde{\mu}$ взамен (5.14) имеем:

$$F(\mu, \tilde{\mu}) \simeq 1 - 4\pi\tilde{\mu}(1 + \mu/\pi) + 8\sqrt{\pi}\tilde{\mu}^{3/2} + \dots \quad (6.5)$$

График функции $F(\tilde{\mu})$ при различных значениях $\mu/\tilde{\mu}$ показан на рис. 1. С уменьшением $\mu/\tilde{\mu}$ и ростом $\tilde{\mu}$ фактор разгруппировки $F(\mu, \tilde{\mu})$ стре-

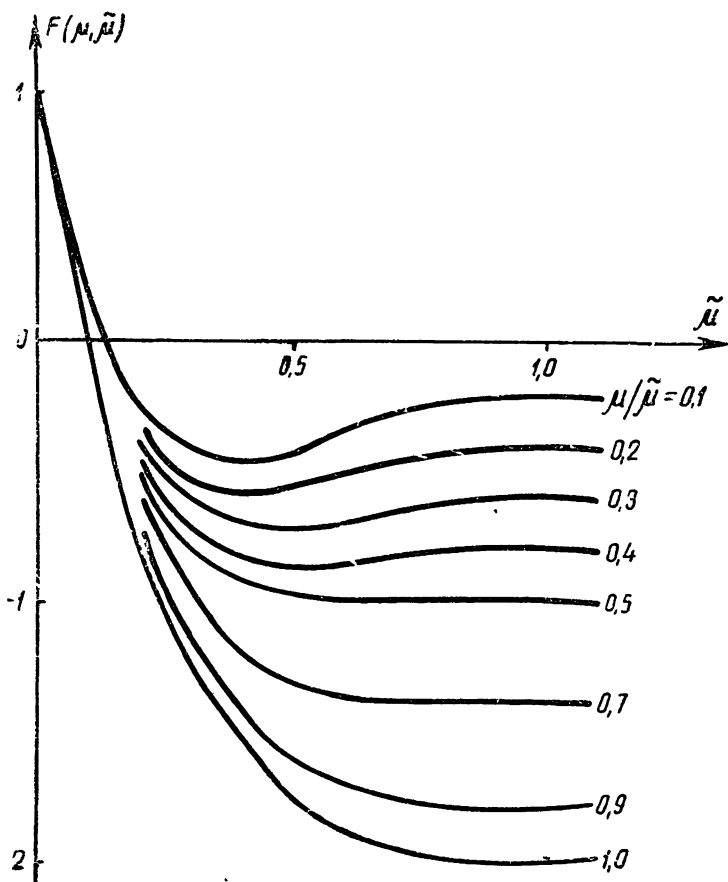


Рис. 1.

мится к нулю. Благодаря этой тенденции у кривых $F(\tilde{\mu})$ появляется минимум (при $\mu/\tilde{\mu} < 0,5$), соответствующий оптимальному „поглощению“ электронами энергии из промежутка.

7. СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОНОВ НА ВЫХОДЕ ПРОМЕЖУТКА

Как уже отмечалось, представляется также интересным оценить изменения, испытываемые электронным пучком при прохождении через промежуток со слабо неоднородным полем. В усредненном приближении (2.4)–(2.6) электронный луч осциллирует как единое целое, и движение частиц является всюду однозначным, т. е. обгон частиц вдоль усредненной траектории отсутствует. Естественно поэтому, что при резком обрыве поля на выходе из промежутка пучок оказывается кусочно постоянным по плотности и непрерывно модулированным по скорости.

Величина скорости электронов в направлении поля находится непосредственно из первого уравнения (5.3):

$$\frac{v_x}{v_n \sin \alpha} = \frac{-\dot{x}_n}{v_n \sin \alpha} = \begin{cases} 1 - \sin \tau_n / \mu & (\tau_2 \leq \tau_n \leq \tau_3) \\ 0 & (\tau_1 \leq \tau_n \leq \tau_2) \end{cases} \quad (7.1)$$

Выражение (7.1) описывает кусочно синусоидальную функцию времени, причем выход электронов из промежутка заканчивается в момент обращения скорости $\dot{x}$ в нуль ($\tau_n = \tau_3 = \tau_1 + 2\pi$), а начинается в момент τ_2 , зависящий от параметра разгруппировки μ . Соответствующий график $\tau_2(\mu)$, построенный на основании численного решения уравнения (5.7), приведен на рис. 2. При оптимальном отборе все электроны покидают промежуток с нулевой скоростью.

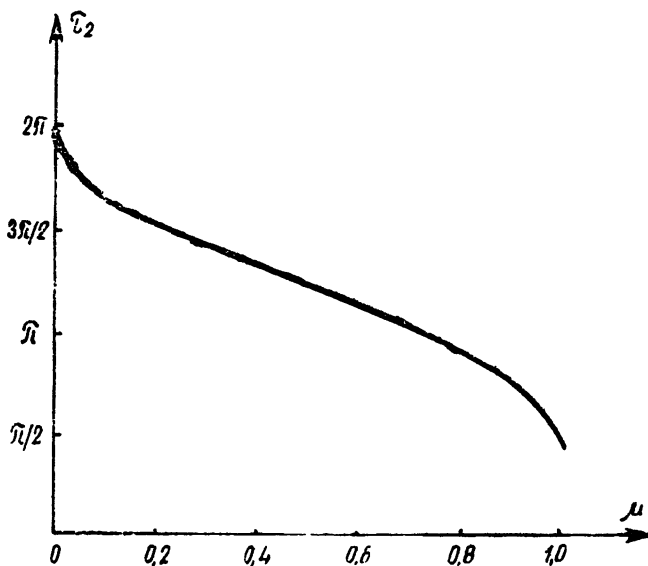


Рис. 2.

Важно подчеркнуть, что в отличие от случая прохождения через квазистационарные промежутки с малыми углами пролета в рассматриваемой нами системе энергия, расходуемая на модуляцию пучка по скорости, черпается, вообще говоря, не из управляющего поля, а из

первоначальной кинетической энергии пучка. Поэтому, если отвлечься от потерь, связанных с поддержанием стационарного поля, такие модулирующие промежутки могут оказаться более эффективными, чем обычные клистронные.

8. ОБ УЧЕТЕ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Несмотря на то, что приведенные выше расчеты относились только к промежуткам с чисто высокочастотными полями, многие результаты могут быть распространены или легко обобщены на промежутки, в которых помимо высокочастотного имеются еще и слабо неоднородные статические поля. Так, например, при наложении постоянного магнитного поля H_0 , перпендикулярного высокочастотному электрическому полю E , выражение для электронной проводимости в случае оптимального отбора будет иметь вид:

$$G_{эл}^{онт}(\omega_H) = G_{эл}^{онт}(0) \frac{1 - 2\omega_H^2/\omega^2}{(1 - \omega_H^2/\omega^2)^2}, \quad (8.1)$$

где $G_{эл}^{онт}(0)$ —электронная проводимость в отсутствие магнитного поля, $\omega_H = \eta H_0/c$ —гиромангнитная частота.

Аналогичным образом может быть проведен учет электростатического поля, расчет характеристик электронных промежутков с многочастотными полями и т. п.

Таким образом, электронные промежутки со слабо неоднородными полями обладают некоторыми своеобразными свойствами, позволяющими рассчитывать на их использование как: в автоколебательных системах, так и в системах, предназначенных для управления движением электронных пучков.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 3, 110 (1958)
2. М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 439 (1959).
3. M. A. Miller, Proc. of Intern. Conf. of High-Energy Accelerators and Instrumentation, Cern, 1959, стр. 662.
4. H. Boot, S. Self, R. Harvie, J. Electron and Control, 4, 434 (1958).
5. В. И. Векслер, Л. М. Коврижных, ЖЭТФ, 35, 1416 (1958).
6. E. S. Weibel, Phys. Rev., 114, 18 (1959).
7. М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 4, 166 (1958).
8. М. А. Миллер, ЖЭТФ, 35, 809 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 мая 1960 г.

ЭЛЕКТРОННЫЕ ПРОМЕЖУТКИ С БОЛЬШИМИ УГЛАМИ ПРОЛЕТА В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

М. А. Миллер

Рассмотрены автоколебательные системы, содержащие в качестве нелинейных элементов электронные промежутки с большими углами пролета. Предполагается, что поле внутри промежутка является слабо неоднородным и что электронный пучок совершает пространственно неоднородные квазисинусоидальные колебания. Решена задача о возбуждении высокочастотного резонатора таким колеблющимся пучком, а также написаны укороченные уравнения Ван-дер-Поля, описывающие самосогласованные состояния автоколебательной системы в целом. Приведено несколько конкретных примеров и оценок порядков величин основных параметров.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [1], посвященной изучению особенностей электронных промежутков с большими углами пролета. Как было показано в [1], при определенных значениях параметров действительная часть электронной проводимости таких промежутков оказывается положительной, что свидетельствует о возможности их использования в качестве нелинейных элементов автоколебательных систем [2,3]. Однако для окончательного решения вопроса об условиях возникновения автоколебаний, а также о характере достижимого автоколебательного режима необходимо проанализировать самосогласованное решение уравнений поля и уравнений движения электронов.

Эффект передачи энергии от электронного пучка полю заметен лишь при наличии оптимального (или близкого к оптимальному) отбора электронов из промежутка [1-3]. Это возможно в условиях соблюдения закона сохранения усредненной энергии (I. 3.7)* при квазисинусоидальной зависимости поля от времени. Поэтому ясно, что процедуру самосогласованного расчета целесообразно базировать на методе медленно изменяющихся амплитуд. Более того, идеализации, положенные ранее [1] в основу усредненного описания движения частиц в промежутках с большими пролетными углами, фактически исключают какие-либо другие подходы к этой задаче.

Ниже на примере взаимодействия тонких электронных пучков с электромагнитными полями в резонаторах будут продемонстрированы основные особенности соответствующих автоколебательных систем. При этом в отличие от задач, рассмотренных в работах Гапонова [4,5], мы изучаем нерезонансное взаимодействие электронных пучков с полем, т. е. считаем, что частота управляющего поля (для высокочастотных систем — просто резонансная частота контура) существенно отличается от собственных частот колебаний электронов в пучке [6].

* Ссылки на формулы работы [1] отмечаются римской цифрой I, стоящей впереди номера формулы. Мы придерживаемся тех же обозначений, что и в [1].

2. ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕЗОНАТОРА КОЛЕБЛЮЩИМСЯ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

Как обычно, самосогласованное решение задачи о взаимодействии пучка с полем отыскивается путем объединения решений двух независимых задач: задачи о возбуждении поля заданными токами и задачи о движении пучка в заданном поле. Последняя была уже рассмотрена в [1] в предположении слабо неоднородного поля внутри промежутка. В этом случае можно приближенно считать, что деформации электронного луча представляют собой пространственно неоднородные синусоидальные колебания, происходящие с частотой внешнего поля. Таким образом, остается решить только первую задачу, т. е. определить, какие поля возбуждаются таким колеблющимся электронным пучком.

Будем считать, что электронный промежуток является высокочастотным резонатором, структура электромагнитного поля в котором фиксирована и совпадает со структурой одного из собственных колебаний. Запишем поле, возбуждаемое в таком резонаторе электронным пучком, колеблющимся с частотой ω , в виде, аналогичном (1. 5.2),

$$E(\mathbf{r}, t) = V_{\sim}(t) \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r})}{L_E} e^{i\omega t}, \quad (2.1)$$

где $V_{\sim}(t)$ — некоторое эффективное напряжение, являющееся медленно изменяющейся (в масштабе $2\pi/\omega$) комплексной функцией времени

$$V_{\sim}(t) = |V_{\sim}(t)| e^{i\Psi(t)}, \quad (2.2)$$

L_E — характерный линейный размер резонатора ($L_E \sim 1/k = c/\omega$), определяемый из условий нормировки напряжения $V_{\sim}$, а $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ — безразмерная функция распределения электрического поля внутри резонатора, соответствующая собственным колебаниям с частотой $\omega_{\text{соб}}$, причем

$$1/4\pi \int \mathbf{f}^2(\mathbf{r}) dV = N_{\text{рез}} L_{\text{рез}}^3. \quad (2.3)$$

Здесь $L_{\text{рез}}^3$ — объем резонатора (или какой-нибудь другой фиксированный объем), а $N_{\text{рез}}$ — норма собственного поля.

Используя известную методику возбуждения резонаторов сторонними токами (см., например, книгу Вайнштейна [7]), для амплитуды $V_{\sim}(t)$ нетрудно получить следующее уравнение:

$$\frac{d^2 V_{\sim}}{dt^2} + 2i\omega \frac{dV_{\sim}}{dt} + (\omega_{\text{соб}}^2 - \omega^2) V_{\sim} = -\frac{da}{dt} - i\omega a. \quad (2.4)$$

Предположим теперь, что частота колебаний пучка совпадает с действительной частью частоты $\omega_{\text{соб}}$

$$\omega_{\text{соб}}^2 - \omega^2 = i\omega^2/Q \quad (2.5)$$

(Q — добротность резонатора), и будем последовательно пренебрегать в (2.4) вторыми производными и квадратами первых производных от медленно изменяющихся функций. В результате получим систему „укороченных“ (усредненных по периоду высокой частоты) уравнений вида

$$\frac{d\Psi}{dt} = -a_s / |V_{\sim}|; \quad (2.6)$$

$$\frac{d|V_{\sim}|}{dt} = -\frac{\omega}{2Q} |V_{\sim}| + a_c, \quad (2.7)$$

где

$$a_c \cos \Psi + a_s \sin \Psi = \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{2i\omega} \frac{da}{dt} - \frac{a}{2} \right), \quad (2.8)$$

а коэффициент a определяется через объемную плотность возбуждающего тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ по формуле

$$a = \frac{L_E}{N_{\text{рез}} L_{\text{рез}}^3 T} \oint e^{-i\omega t} dt \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{f}(\mathbf{r}) dV. \quad (2.9)$$

В случае тонкого электронного пучка можно проинтегрировать в (2.9) по поперечному сечению пучка $S_{\perp}$, введя вектор тока

$$\mathbf{I}(\xi, t) = \int_{S_{\perp}} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) dS_{\perp}. \quad (2.10)$$

Тогда

$$a = \frac{L_E}{N_{\text{рез}} L_{\text{рез}}^3 T} \oint e^{-i\omega t} dt \int \mathbf{I}(\xi, t) \mathbf{f}(\xi) d\xi, \quad (2.11)$$

где ξ — координата, отсчитываемая вдоль пучка, а интеграл $\oint$ берется по периоду колебаний T .

3. СОВМЕСТНАЯ СИСТЕМА УСРЕДНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Для получения совместной системы усредненных уравнений необходимо объединить (1. 3.1), (1. 3.2), (2.5) и (2.7). С этой целью, ограничиваясь рассмотрением тонких колеблющихся пучков*, представим ток (2.10) в виде произведения некоторого погонного заряда $q_{\perp} = -I/|\dot{\mathbf{r}}^{(0)}(t)|$ на скорость осциллирующего движения (1. 3.1)

$$\mathbf{I}(\xi, t) = q_{\perp}(\xi) \dot{\mathbf{r}}^{(1)} = \frac{\eta}{\omega L_E} q_{\perp}(\xi) |V_{\sim}| \mathbf{f}(\xi) \sin(\omega t + \Psi). \quad (3.1)$$

Подстановка (3.1) в (2.11) дает

$$a = -i\omega |V_{\sim}(t)| [\tilde{M}e^{i\Psi} - e^{-i\Psi} (M_c + iM_s)], \quad (3.2)$$

где

$$\tilde{M} = (1/2) \oint R(\tau) d\tau; \quad (3.3)$$

$$M_c + iM_s = (1/2) \oint e^{-2i\tau} R(\tau) d\tau; \quad (3.4)$$

$$R(\tau) = \frac{\eta}{2\pi\omega^2 N_{\text{рез}} L_{\text{рез}}^3} \int_{\xi} q_{\perp}(\xi) (\mathbf{f}(\xi))^2 d\xi. \quad (3.5)$$

Функция (3.5) зависит от времени через пределы интегрирования. Разобьем путь интегрирования в (3.5) на два участка: $0 \leq \xi \leq \xi_1$, $\xi > \xi_1$, определив точку ξ_1 как координату границы области отбора. Соответственно интеграл (3.5) представится в виде суммы медленно (при $\xi < \xi_1$) и быстро (при $\xi > \xi_1$) изменяющихся функций времени.

Вводя (3.5) в (3.3) и (3.4), а затем в (3.2) и учитывая, что в принятом нами усредненном приближении $\tilde{M} \gg M_c \sim M_s$, после выделения в (2.8) и (3.2) вещественной части получаем:

$$a_c \approx (1/2) \left(\omega |V_{\sim}| M_s + |V_{\sim}| \frac{d\tilde{M}}{dt} - \tilde{M} \frac{d|V_{\sim}|}{dt} \right);$$

* Учет конечной толщины не вносит никаких принципиально новых моментов.

$$a_s \approx -\frac{\omega}{2} |V_-| \tilde{M}.$$

В результате подстановки этих выражений в (2.6), (2.7) приходим к следующей системе уравнений, содержащих только усредненные величины [3]:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\omega}{2} \tilde{M};$$

$$\frac{d|V_-|}{dt} (1 - \tilde{M}/2) = \frac{\omega |V_-|}{2Q} \left(-1 + 2QM_s + 2\frac{Q}{\omega} \frac{d\tilde{M}}{dt} \right). \quad (3.6)$$

Величина $\tilde{M}$ определяет в стационарном режиме смещение частоты, обусловленное электронным пучком. Действительно, нетрудно убедиться, что при $\tilde{M} = \text{const}$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\tilde{M}}{2} = \frac{\eta}{8\pi\omega^2 N_{\text{рез}} L_{\text{рез}}^3} \oint d\tau \int_{\xi} q_{\perp}(\xi) (f(\xi))^2 d\xi. \quad (3.7)$$

Это означает, что изменение частоты резонатора в основном объяснено поляризации всего пучка в целом и по сравнению с этим эффектом влиянием реактивного взаимодействия в области отбора можно пренебречь ($M_c \ll \tilde{M}$). Впрочем, в обычных условиях величина (3.7) сама по себе оказывается достаточно малой, что сильно упрощает систему (3.6). В этом случае, если воспользоваться обозначениями

$$G_{\text{эл}} / G_{\text{рез}} = 2QM_s, \quad (3.8)$$

то (3.6) запишется в виде

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0, \quad \frac{d|V_-|}{dt} = \frac{\omega}{2Q} |V_-| \left(\frac{G_{\text{эл}}}{G_{\text{рез}}} - 1 \right), \quad (3.9)$$

причем $G_{\text{рез}}$ следует трактовать как некоторую эффективную проводимость резонатора, а $G_{\text{эл}}$ — как действительную часть электронной проводимости. Нелинейность уравнений (3.9) связана с зависимостью этой проводимости от напряжения. Формулы (3.8) и (3.4) позволяют найти значения $G_{\text{эл}}$ в произвольном случае для любого электронного промежутка. Однако, как правило, для отыскания $G_{\text{эл}}$ проще действовать энергетическими методами, рассмотренными в [1].

Анализ уравнений (3.9) с точки зрения возможных режимов работы системы сводится к хорошо известной процедуре отыскания положений равновесия и проверки их устойчивости [8], что по существу и исчерпывает решение поставленной задачи.

4. СИСТЕМА С ПОПЕРЕЧНЫМ ОТБОРОМ

Конечно, невозможно охватить все даже конструктивно независимые варианты электронных промежутков. Мы рассмотрим по одному примеру из каждого типа систем, классифицированных по видам отбора [1].

Сначала рассмотрим чисто поперечный отбор. Пусть двухмерный электронный пучок конечной толщины $D_1 \leq x \leq D_2$, ориентированный параллельно плоскости идеально проводящего коллектора $x=0$, облучает высокочастотный потенциальный барьер $\Phi = \gamma^2/4\omega^2 |E|^2$, образованный полем типа TE по отношению к z -направлению; предполо-

жим также, что на участке $0 \leq z \leq L$ функция $\Phi(z)$ монотонно возрастает до значения $\Phi(L)$, после чего либо остается постоянной, либо плавно уменьшается до нуля. Этот случай охватывает практически все системы с чисто поперечным отбором.

Будем считать, что отбор электронов из пучка является оптимальным в том смысле, что x -составляющая скорости частиц при отборе обращается в нуль. Подсчитаем мощность, отдаваемую полю в среднем за период элементарным электронным слоем dx , расположенным на расстоянии x от поверхности коллектора. Согласно (I. 3.7), (I. 5.1), средняя кинетическая энергия осцилляторного движения в момент отбора ($\tau = \tau_n = \tau_1$, $z = z_n = z_1$, $x_n = 0$) равна $m \Phi(z_1)$, следовательно,

$$dP = j dx \frac{\Phi(z_1)}{\tau_1}, \quad (4.1)$$

где j — линейная плотность тока

$$I = \int_{D_1}^{D_2} j dx, \quad (4.2)$$

а z_1 — зависящая от высоты подъема слоя над коллектором координата точки отбора. Если $z_1 \leq L$, то координата z_1 должна определяться из уравнения

$$\tau_1 \frac{E_x(z_1)}{\omega^2} = \frac{2}{\omega} \sqrt{\Phi(z_1)} = x. \quad (4.3)$$

В противном случае при $z_1 \leq L$, когда отбора на плоскость $x = 0$ не происходит, можно считать, что $\Phi(z_1) = 0^*$.

Подстановка (4.3) в (4.1) дает

$$dP = \begin{cases} j \frac{\omega^2 x^2}{4\tau_1} dx & x < \frac{2}{\omega} \sqrt{\Phi(L)} \\ 0 & x > \frac{2}{\omega} \sqrt{\Phi(L)} \end{cases}. \quad (4.4)$$

При интегрировании (4.4) по поперечному сечению пучка следует различать три случая: а) $D_1 > \frac{2}{\omega} \sqrt{\Phi(L)}$ — пучок пролетает сквозь потенциальный барьер без отбора, б) $D_1 < \frac{2}{\omega} \sqrt{\Phi(L)} < D_2$ — отбирается только часть электронов из пучка, в) $D_2 < \frac{2}{\omega} \sqrt{\Phi(L)}$ — отбираются все электроны. Соответственно имеем следующие выражения для мощности, полученные в предположении $j = \text{const}$:

$$\begin{aligned} \text{а) } P &= 0; \\ \text{б) } P &= \frac{I}{12V_e} \frac{V_e^3 - (kD_1)^3 V_e^3}{k(D_2 - D_1)}; \end{aligned} \quad (4.5)$$

* Здесь мыслимы две возможности. Одна из них состоит в том, что неотобранные электроны уходят из пространства взаимодействия с той же средней энергией, которой они обладали на входе; другая возникает при наличии резкого обрыва поля где-то в области $z > L$ или при отборе электронов на дополнительный коллектор, не вынесенный из поля. Мы будем иметь в виду только первую возможность, считая принятыми меры по удалению «несработавших» электронов из пространства взаимодействия без поглощения ими энергии из поля (плавное убывание высокочастотного потенциала в области $z > L$). Однако и вторая возможность небезынтересна для тех задач, где необходимо оценить влияние электродов на поглощение высокочастотной энергии электронным облаком или плазмой.

$$\text{в) } P = \frac{IV_e}{12} [(kD_1)^2 + (kD_2)^2 + k^2 D_1 D_2], \quad (4.6)$$

где

$$V_{\sim} = E_{\lambda}(L)/k, \quad V_e = \frac{mc^2}{e} = 5,12 \cdot 10^5 \text{ (вольт)}.$$

Из (4.5) и (4.6) легко получить формулы для $G_{эл}$:

$$\text{б) } G_{эл} = \frac{I}{6V_e^2 V_{\sim}^2} \frac{V_{\sim}^3 - (kD_1)^3 V_e^3}{k(D_2 - D_1)}; \quad (4.7)$$

$$\text{в) } G_{эл} = \frac{IV_e}{6V_{\sim}^2} [(kD_1)^2 + (kD_2)^2 + k^2 D_1 D_2]. \quad (4.8)$$

В частности, при $D_1 = 0$, когда зазор между пучком и коллектором отсутствует*

$$G_{эл} = \begin{cases} \frac{1}{6} G_I \frac{V_{\sim}}{kD_2 V_e} & kD_2 > V_{\sim}/V_e \\ \frac{1}{6} G_I \frac{(kD_2 V_e)^2}{V_{\sim}^2} & kD_2 < V_{\sim}/V_e \end{cases}, \quad (4.9)$$

где $G_I = I/V_e = \eta I/c^2$. Интересно отметить, что формулы (4.5) ÷ (4.9) не содержат в явном виде значения начальной скорости электронов в пучке, которое, однако, должно удовлетворять условиям (I. 3.4), (I. 3.5) (справедливость усредненного описания).

Зависимость $G_{эл}/G_I$ как функция $V_{\sim}/V_e$ показана на рис. 1а для значения $kD_2 = 1$. Там же отмечены точки пересечения с прямой $G_{рез} = \text{const}$, соответствующие состояниям равновесия системы (3.9): неустойчивому (точка 1) и устойчивому (точка 2). Очевидно, что даже при отборе электронов из прижатого к коллектору луча (т. е. когда

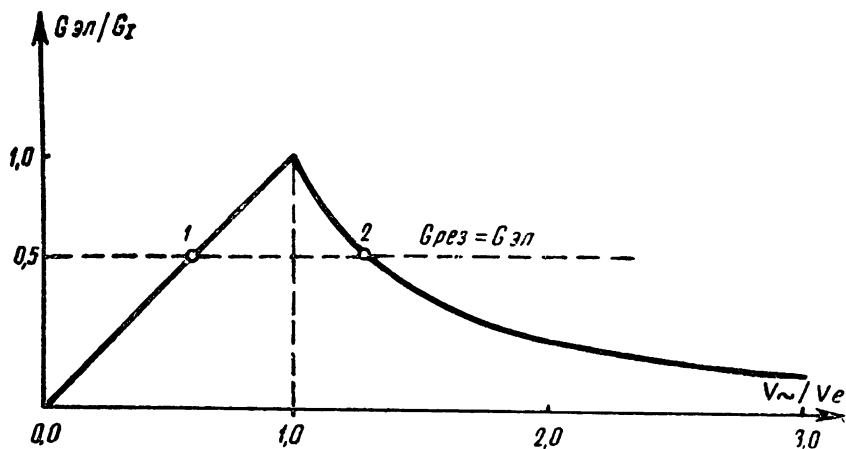


Рис. 1а.

* Правда, в таком случае часть электронов, расположенных в прилегающем к коллектору слое, не отбирается оптимально. Но устремляя в (4.7) и (4.8) $D_1 \rightarrow 0$, мы полагаем, что влиянием этого слоя можно пренебречь.

$D_1=0$) нельзя добиться мягкого режима возникновения автоколебаний, причем ситуация не изменяется при любых реализуемых распределениях плотности тока в (4.4)*. Автоколебания в системе становятся возможными при условии, что проводимость $G_{\text{рез}}$ удовлетворяет условию

$$G_{\text{рез}} < G_I \frac{V_{\sim}}{6kD_2V_e},$$

которое определяет одновременно начальную амплитуду колебаний генератора, уменьшающуюся с ростом тока в пучке.

5. СИСТЕМА СО СМЕШАНЫМ ОТБОРОМ

Предположим теперь, что идеально тонкий электронный пучок влетает в рассмотренный выше электронный промежуток под углом α_b к плоскости коллектора, т. е. при $z=0$ $\dot{x}=\dot{x}_b=v_b \sin \alpha_b$, $\dot{z}=\dot{z}_b=v_b \cos \alpha_b$.

В этом случае отбор уже не может быть оптимальным, и вместо (4.1) для мощности, отбираемой от пучка в среднем за период, следует написать

$$P = \frac{I \Phi(z_1)}{\gamma_l} F(\mu), \quad (5.1)$$

где z_1 —точка пересечения траектории электронного луча с плоскостью коллектора в момент обращения в нуль x -составляющей скорости электронов; $F(\mu)$ — фактор фазовой разгруппировки электронов, приблизительно (при малых μ) равный [1]

$$F(\mu) \simeq 1 - 4\pi\mu = 1 - 2\pi \frac{\dot{x}_b}{\sqrt{\Phi(z_1)}}. \quad (5.2)$$

Если обозначить через $\Delta\tau_l$ угол пролета электронов до точки $z=z_1$, через D —расстояние между пучком и коллектором на входе, то для определения $\Delta\tau_l$ и z_1 будем иметь следующую очевидную систему уравнений:

$$\begin{aligned} D &= \dot{z}_b \Delta\tau_l + 2/\omega \sqrt{\Phi(z_1)}; \\ \Delta\tau_l &= \int_{z=0}^{z=z_1} (v_b^2 - 2\Phi(z_1))^{-1/2} dz. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Или, возвращаясь к обозначениям (2.1), т. е. полагая

$$V_{\sim} = \frac{E(L)}{k}; \quad E(z) = E(L)f(z), \quad (5.4)$$

получаем

$$kD - \frac{V_{\sim}}{V_e} f(z_1) = \operatorname{tg} \alpha_b \int_0^{kz_1} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2\beta_z^2} \frac{V_{\sim}^2}{V_e^2} f^2(\zeta/k)}}, \quad (5.5)$$

где $\beta_z = \dot{z}_b/c$, $\beta_x = \dot{x}_b/c$. Решение этого, вообще говоря, трансцендентного уравнения позволяет определить зависимость координаты пересечения луча с коллектором z_1 от напряжения $V_{\sim}$. В результате для электронной проводимости промежутка находим

* Действительно, для возможности появления мягкого режима самовозбуждения необходимо, чтобы плотность тока в (4.4) возрастала с уменьшением x не медленнее, чем функция $1/x$, но это приводит к неограниченному значению суммарного электронного тока в (4.2).

$$G_{эл}(V_{\sim}) = \frac{1}{2} G_I f^2(z_1) [1 - 4\pi\beta_x V_c/V_{\sim} f(z_1)] . \quad (5.6)$$

Применим теперь эти соотношения к частному случаю параболического барьера $f(z) = kz/kL$. Интегрирование (5.6) или непосредственно (5.3) и проведение несложных преобразований дает

$$G_{эл} = G_I \frac{1}{4(kL)^2 \chi^2} (kD - \beta_x \Delta\tau_1)^2 \left(1 - \frac{4\pi\beta_x}{kD - \beta_x \Delta\tau_1} \right); \quad (5.7)$$

$$(kD - \beta_x \Delta\tau_1) \operatorname{tg} \alpha_b = \sqrt{2} \beta_x \sin \chi \Delta\tau_1 ,$$

где

$$\chi = \frac{1}{kL\sqrt{2}} \frac{V_{\sim}}{V_c} .$$

При $\beta_x = 0$ формула (5.7) совпадает, естественно, с (4.9), если в последней положить $D_1 = D_2 = D$.

На рис. 16 приведен график функции $G_{эл}(\chi)$, построенный на основании численного решения уравнения (5.7) при значении $kD = 1/3$. Следует помнить, что эта кривая, как и все приведенные выше рассуждения, справедлива только для области малых значений χ . Режим самовозбуждения генератора с отбором смешанного типа, как и в случае поперечного отбора, является жестким. Различие заключается лишь в том, что отдача энергии от пучка полю начинается с некоторого конечного значения амплитуды $V_{\sim}$.

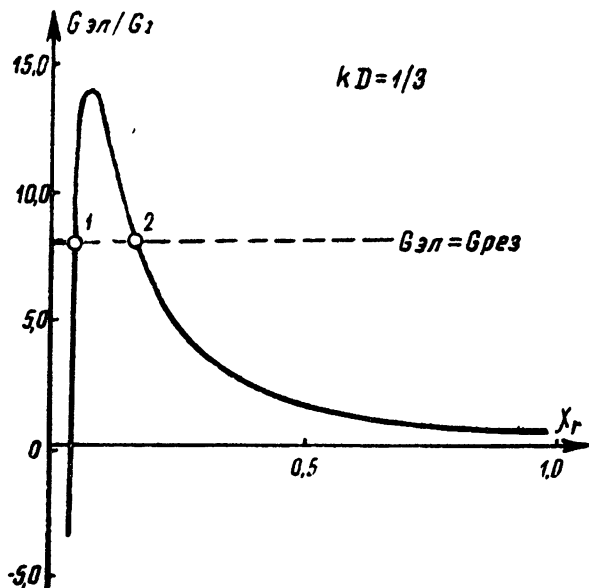


Рис. 16.

6. СИСТЕМА С ПРОДОЛЬНОМ ОТБОРОМ

Рассмотрим в качестве примера системы с продольным отбором так называемый обращенный коаксиальный диод, внутрь которого через наружную оболочку радиуса b инжектируются электроны с начальной скоростью $v_b = \beta_b c$; роль коллектора играет тонкий внутренний

стержень радиуса a . Распределение поля в таком диоде, очевидно, имеет вид:

$$E_r = \frac{V_{\sim}}{kr \ln b/a} = V_{\sim} \frac{f(r)}{k} = V_e \chi_r \left(\frac{a}{r} \right). \quad (6.1)$$

Фактически в принятом нами приближении следует рассматривать только тот случай, когда амплитуда поля мало изменяется в пределах смещения электрона за одну осцилляцию, т. е. нужно считать далее в формуле (6.2) $\chi_r \ll ka$; тогда координата оптимально отбираемого электрона r_1 определится по формуле

$$r_1 \simeq a(1 + \chi_r/ka).$$

Учитывая также, что в соответствии с (5.2) и (6.1)

$$\mu \simeq \frac{1 + \chi_r/ka}{\chi_r} \left[\beta_b^2 - \frac{\chi_r^2}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} - 2\chi_r/ka \right) \right]^{1/2};$$

$$\Phi(r_1) = \frac{c^2 \chi_r^2}{4} (1 - 2\chi_r/ka),$$

для проводимости $G_{эл}$ находим

$$G_{эл} \simeq \frac{G_I}{2} \frac{1 - 2\chi_r/ka - 4\pi\mu}{(ka)^2 (\ln b/a)^2}. \quad (6.2)$$

На рис. 1в построена одна из типичных зависимостей (6.2). Отличие

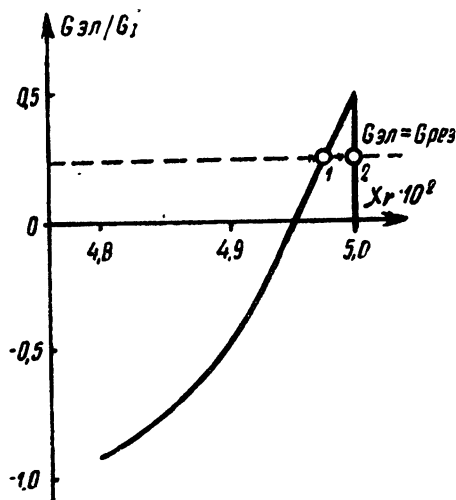


Рис. 1в.

от предыдущих случаев состоит в том, что область параметров, при которых существует устойчивый предельный цикл, оказывается бесконечно малой, что связано с условием $\chi_r \ll ka$. При учете изменений поля в пределах зоны отбора π , в частности, при $\chi_r \sim ka$ эта область становится конечной, однако такой учет уже выходит за рамки принятого выше описания.

7. ОЦЕНКИ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Изложенное выше принципиальное рассмотрение уместно теперь подкрепить в заключение оценками порядков величин основных параметров, определяющих возможность достижения автоколебательных режимов в различных системах. Мы сосредоточим свое внимание на двух таких параметрах: токе (I) и напряжении (V_r) электронного пучка в режиме установившихся автоколебаний (рабочем режиме).

Для отыскания значения I необходимо приравнять между собой мощность потерь в резонаторе

$$\frac{1}{2} G_{\text{рез}} V^2 = \frac{\omega}{8\pi Q} \int |E|^2 dV = \frac{\omega V^2}{8\pi Q L_E^2} \int (f)^2 dV \quad (7.1)$$

и мощность, отдаваемую электронным пучком полю. Последняя в оптимальных условиях определится формулами (1. 5.1) или (1. 5.3). В результате имеем*

$$I = V_e G_{\text{рез}} \frac{(kL_E)^2}{f^2(r_n)} = cV_e \frac{(kL_{\text{эфф}})^3}{2\pi Q} = 2,7 \cdot 10^3 \frac{(kL_{\text{эфф}})^3}{Q} (\text{ампер}). \quad (7.2)$$

Здесь $L_{\text{эфф}}$ — некоторый эффективный размер резонатора, определяемый выражением

$$L_{\text{эфф}}^3 = \frac{\int |E|^2 dV}{|E(r_n)|^2} = \frac{4\pi N_{\text{рез}} L_{\text{рез}}^3}{(f(r_n))^2}. \quad (7.3)$$

В частности, для квазистационарного параллельного LC -контура с отбором на одну из пластин плоского конденсатора формулы (7.2) и (7.3), как нетрудно показать, дают

$$I = 8\pi^2 (l/\lambda)^2 G_{\text{рез}} = 4 \cdot 10^7 (l/\lambda)^2 G_{\text{рез}} (\text{ампер}), \quad (7.4)$$

где l — расстояние между пластинами конденсатора.

Следует помнить, однако, что значения I , найденные по формулам (7.2) или (7.4), должны соответствовать устойчивым участкам кривой $G_{\text{эл}}(V_-)$, т. е. несколько превышать значения пускового тока $I_{\text{пуск}}$. Последний может быть определен только на основании рассмотрения характеристик конкретных систем. Так, например, при оптимальном отборе электронов из луча, скользящего вдоль плоского идеально проводящего коллектора, в соответствии с (4.9) и (7.1) находим

$$(G_{\text{эл}})_{\text{пуск}} = 6 G_{\text{рез}}.$$

Откуда

$$I_{\text{пуск}} = 6 V_e G_{\text{рез}} = 3,1 \cdot 10^6 G_{\text{рез}} (\text{ампер}), \quad (7.5)$$

что совпадает с (7.3) лишь по порядку величины, если считать $kL_E \sim 1$, $f(r_n) \sim 1$.

Перейдем к оценке значений V_r . Существует два противоречивых требования при решении вопроса о выборе входного напряжения пучка. Для выполнения условия (1. 3.5), обеспечивающего трансформацию начальной кинетической энергии частиц в осцилляторную, целесообразно иметь дело с низковольтными пучками. С другой стороны, снижение напряжения пучка означает (во всяком случае при наличии некомпенсированного пространственного заряда) одновременное уменьшение тока I , так что в конечном счете, несмотря на высокую эффективность преобразования энергии, этот ток может стать меньше

* Напомним, что мы всюду используем гауссовы единицы и лишь в окончательных формулах переходим к практическим.

пускового. Вопрос о максимально возможном (пусковом) напряжении требует анализа характеристик конкретных систем. Причем в этом случае уже нельзя ограничиться рамками принятого выше усредненного приближения, поскольку при больших V_I число колебаний, совершаемое электроном за время его пролета сквозь промежуток, оказывается, как правило, уже недостаточно большим для выполнения неравенств (1.5.3). Поясним это на простейшем примере. Обозначим через $\Delta\tau = \omega\Delta t$ угол пролета через промежуток, имеющий длину $\sim L_E$; очевидно, что за время пролета через промежуток частица успеет совершить $n = \frac{\Delta\tau}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}$ осцилляций. При равномерно замедленном усредненном движении число осцилляций n и постоянное напряжение пучка на входе промежутка V_I связаны между собой соотношением

$$V_I = \frac{V_e}{2\pi^2} \frac{(kL_E)^2}{n} = 2,6 \cdot 10^4 \frac{(kL_E)^2}{n} \text{ (вольт)}. \quad (7.6)$$

Соответствующий график приведен на рис. 2 для значения параметра $kL_E = 1$. Там же показана зависимость максимально реализуемого тока $I_{\text{макс}}$ в аксиально симметричном потоке, ограниченном сильным магнитным полем [9],

$$I_{\text{макс}} \text{ (ампер)} = 3,2 \cdot 10^{-5} V_I^{3/2} \text{ (вольт)}. \quad (7.7)$$

Заштрихованная область соответствует значениям $I < I_{\text{макс}}$, $V_I < V_{I \text{ пуск}}$, так что если значения пускового тока, определяемые формулами (7.2), (7.4), попадают в эту область, то создание автоколебательных систем с чисто электронными пучками оказывается возможным,

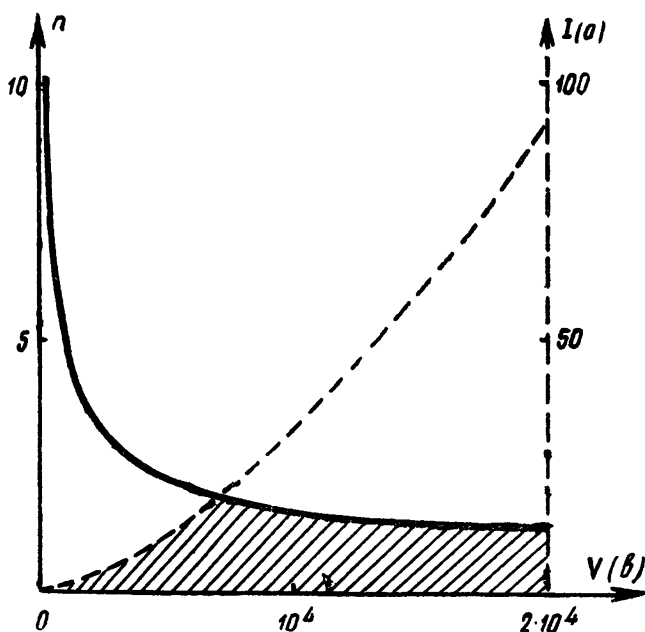


Рис. 2.

Оценим критическое значение числа осцилляций $n_{\text{кр}}$. Приравняв между собой (7.2) и (7.5) в предположении, что $V_{I \text{ пуск}}$ задается формулой (7.6), получаем

$$n_{\text{кр}}^3 = 5 \cdot 10^{-2} Q. \quad (7.8)$$

Отсюда следует, что большие значения $n_{\text{кр}}$ обеспечиваются только в случае высокодобротных резонаторов. Например, значение $n_{\text{кр}} = 10$ достигается при $Q \approx 2 \cdot 10^4$.

Итак, в генераторах, содержащих электронные промежутки рассматриваемого выше типа, помимо обычного ограничения снизу на электронный ток, существует также и специфическое ограничение сверху на начальные скорости электронов. Последнее оказывается особенно существенным для систем с чисто электронными пучками, когда в целях достижения реализуемых пусковых токов приходится использовать высокодобротные контуры. Другая возможность состоит в умышленном снижении электронного КПД системы путем применения высоковольтных пучков. Однако рассмотрение этого вопроса требует довольно громоздких численных расчетов, и его решению мы предполагаем посвятить отдельную работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 837 (1960).
2. М. А. Миллер, ЖЭТФ, 35, 809 (1958).
3. М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 4, 166 (1958).
4. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 443 (1959).
5. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 450 (1959).
6. М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 3, 110 (1958); 2, 439 (1959).
7. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
8. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
9. Дж. Р. Пирс, Теория и расчет электронных пучков, изд. Сов. радио, М., 1956.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
15 мая 1960 г.

К ЗАДАЧЕ ОБ ОЦЕНКЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ СИГНАЛА НА ШИРИНУ ЕГО СПЕКТРА

Г. М. Жислин

В работе [2] была решена задача Л. И. Мандельштама о нахождении нижней грани произведения продолжительности сигнала на ширину его спектра. В настоящей заметке дается строгое обоснование методики, использованной в [2].

1. Пусть F — совокупность всех вещественных функций $f(t)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f^2(t) dt < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = 1.$$

Если $f \in F$,

$$A(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(ut) dt, \quad B(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(ut) dt, \quad (1)$$

то по теореме Фурье—Планшерелля [1]

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(u) \cos(ut) + B(u) \sin(ut)] du. \quad (2)$$

Л. И. Мандельштамом была поставлена задача оценить наибольшее μ , для которого*

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0)^2 f^2(t) dt \int_0^{\infty} (u - u_0)^2 [A^2(u) + B^2(u)] du \geq \mu$$

при всех t_0, u_0 и $f \in F$. Указанная задача, представляющая интерес для радиофизики, была решена в [2] в предположении существования функции $f_0(t)$ и числа u_0 , реализующих минимум K . В настоящей заметке доказывается справедливость этого предположения**.

2. Без ограничения общности считаем в дальнейшем $t_0 = 0$. Из свойств преобразования Фурье—Планшерелля вытекает, что если $f \in F$, то функции $A(u)$ и $B(u)$, определяемые формулами (1), абсолютно непрерывны на полуоси $[0, +\infty)$, $B(0) = 0$ и

$$\pi \int_0^{\infty} [A'^2(u) + B'^2(u)] du = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f^2(t) dt; \quad (3)$$

* Это неравенство можно рассматривать как соотношение неопределенности для действительных сигналов (см. [2–4]).

** В [2] указывалось, что доказательство существования f_0 и u_0 , реализующих $\min K$, содержится в рукописи П. С. Новикова. Однако эта рукопись не была опубликована и, по-видимому, утеряна. Как сообщил автору Новиков, настоящее доказательство основано на совершенно другой идее по сравнению с имевшимся ранее.

$$\pi \int_0^{\infty} [A^2(u) + B^2(u)] du = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt. \quad (4)$$

Обозначим через $C_a[0, +\infty)$ совокупность всех вещественных абсолютно непрерывных при $0 \leq u < +\infty$ функций $g(u)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\infty} [g^2(u) + g'^2(u)] du < +\infty.$$

Тогда, если $A(u)$ и $B(u)$ лежат в $C_a[0, +\infty)$ и $B(0) = 0$, то функция $f(t)$, определяемая формулой (2), принадлежит F , и будут выполняться равенства (3), (4).

Пусть Q — множество всех трехкомпонентных векторов q , $q = \{v, A(u), B(u)\}$, где v — произвольное вещественное число, а $A(u)$ и $B(u)$ — любые функции из $C_a[0, +\infty)$, для которых $B(0) = 0$ и

$$\pi \int_0^{\infty} [A^2(u) + B^2(u)] du = 1. \quad (5)$$

Из сказанного следует, что поставленная в разделе 1 задача сводится к задаче о существовании вектора q_0 , реализующего минимум

$$K[q] = \pi \int_0^{\infty} [A'^2(u) + B'^2(u)] du \int_0^{\infty} (u-v)^2 [A^2(u) + B^2(u)] du$$

в классе Q .

3. Пусть $\{q_m\} = \{v_m, A_m(u), B_m(u)\}$ — минимизирующая последовательность для задачи на $\min K[q]$ в Q , т. е. $q_m \in Q$ ($m = 1, 2, \dots$) и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K[q_m] = \inf_{q \in Q} K[q].$$

Последовательность $\{q_m(\alpha)\} = \{\alpha^{-1}v_m, \sqrt{\alpha}A_m(\alpha u), \sqrt{\alpha}B_m(\alpha u)\}$ — также минимизирующая для $K[q]$ в Q при любом $\alpha > 0$, ибо $q_m(\alpha) \in Q$ ($m = 1, 2, \dots$) и

$$K[q_m(\alpha)] = \alpha^2 \pi \int_0^{\infty} [A_m'^2(u) + B_m'^2(u)] du \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\infty} (u-v_m)^2 [A_m^2(u) + B_m^2(u)] du = K[q_m].$$

Поэтому, не ограничивая общности, считаем, что

$$\pi \int_0^{\infty} [A_m'^2(u) + B_m'^2(u)] du = 1. \quad (6)$$

Так как при фиксированных $A(u)$ и $B(u)$ минимум величины K достигается при

$$v = \int_0^{\infty} u [A^2(u) + B^2(u)] du \left(\int_0^{\infty} [A^2(u) + B^2(u)] du \right)^{-1}, \quad (7)$$

то по минимизирующей последовательности $\{q_m\}$ будем считать

$$v_m = \pi \int_0^{\infty} u [A_m^2(u) + B_m^2(u)] du. \quad (7a)$$

В силу (5) и (6) функции $A_m(u)$, $B_m(u)$ равностепенно непрерывны и равномерно ограничены на полуоси $[0, +\infty)$. Действительно, для всех m и любых u_1 и u_2 в силу (6)

$$|A_m(u_1) - A_m(u_2)| = \left| \int_{u_1}^{u_2} A'_m(u) du \right| \leq \left| \frac{u_1 - u_2}{\pi} \right|^{1/2}. \quad (8)$$

Отсюда следует равностепенная непрерывность функций $A_m(u)$ при $0 \leq u < +\infty$. Оценим $\sup_u |A_m(u)|$. В силу (5) на любом отрезке γ длины $1/\pi \min_{u \in \gamma} |A_m(u)| \leq 1$. Поэтому при учете (8)

$$\sup_{u \in \gamma} |A_m(u)| \leq 1 + \pi^{-1}.$$

Для функций $B_m(u)$ оценки аналогичны. Следовательно, согласно теореме Арцелла [2], существуют такие подпоследовательности из $\{A_m(u)\}$ и $\{B_m(u)\}$ (за которыми сохраним обозначения $\{A_m\}$ и $\{B_m\}$) и такие непрерывные при $0 \leq u < +\infty$ функции $A_0(u)$ и $B_0(u)$, что

$$A_m(u) \rightarrow A_0(u), \quad B_m(u) \rightarrow B_0(u) \quad (9)$$

равномерно на $[0, n]$ для любого $n > 0$. Нетрудно видеть, что $A_0(u)$ и $B_0(u)$ абсолютно непрерывны при $0 \leq u < +\infty$.

4. Покажем, что $A_0 \neq 0$. Если $A_0 \equiv 0$, то

$$A_m(u) \rightarrow 0 \quad (10)$$

равномерно на $[0, 2]$. Пусть

$$\psi(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } u \geq 2 \\ u - 1 & \text{при } 2 \geq u \geq 1; \\ 0 & \text{при } 1 \geq u \geq 0 \end{cases}$$

$$A_m^*(u) = A_m(u) \psi(u);$$

$$\beta_m = \left\{ \pi \int_0^\infty [A_m^{*2}(u) + B_m^2(u)] du \right\}^{-1/2};$$

$$\tilde{A}_m = \beta_m A_m^*; \quad \tilde{B}_m = \beta_m B_m; \quad \tilde{q}_m = \{v_m, \tilde{A}_m, \tilde{B}_m\}.$$

Используя соотношения (6), (10) и условие $\tilde{q}_m \in Q$, имеем:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K[\tilde{q}_m] = \lim_{m \rightarrow \infty} K[q_m] = \mu,$$

где $\mu = \inf K[q]$, $q \in Q$. По неравенству Буняковского

$$\pi \left[\int_0^\infty \{ \tilde{A}_m(u) \tilde{A}'_m(u) + \tilde{B}_m(u) \tilde{B}'_m(u) \} (u - v_m) du \right]^2 \leq K[\tilde{q}_m].$$

Так как $\tilde{A}_m(0) = \tilde{B}_m(0) = 0$, то

$$\int_0^\infty (\tilde{A}_m \tilde{A}'_m + \tilde{B}_m \tilde{B}'_m) (u - v_m) du = -\frac{1}{2} \int_0^\infty [\tilde{A}_m^2 + \tilde{B}_m^2] du = -(2\pi)^{-1}$$

и, значит,

$$\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} K[\tilde{q}_m] \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Но это неверно, так как на допустимом векторе $q^0 = \left\{ 1, \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-u^2/2\pi}, 0 \right\}$

$$K[q^0] = \frac{\pi - 2}{4\pi^2}$$

(см. [2]) и, следовательно, $\mu < 1/4\pi$. Таким образом, доказано, что $A_0(u) \neq 0$.

5. Пусть положительные числа δ , R и N_1 таковы, что $\int_0^R A_m^2(u) du > \delta$ при $m > N_1$. Тогда в соответствии с (6) при $m > N_1$ и $v_m > R$

$$K[q_m] \geq (R - v_m)^2 \delta.$$

Следовательно, $\sup_m v_m = v_0 < +\infty$. В дальнейшем считаем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} v_m = v_0. \quad (11)$$

В силу (7а) и (11) по произвольному $\varepsilon > 0$ можно указать $N > 0$ так, что

$$\int_N^\infty [A_m^2(u) + B_m^2(u)] du < \varepsilon.$$

Поэтому и согласно (6)

$$\int_0^\infty [A_0^2(u) + B_0^2(u)] du = 1/\pi.$$

Следовательно, $q_0 = \{v_0, A_0(u), B_0(u)\}$ лежит в Q и

$$K[q_0] \geq \mu = \inf_{q \in Q} K[q], \quad q \in Q. \quad (12)$$

С другой стороны, в силу (6), (9), (11) и по теореме о полунепрерывности [6],

$$\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} K[q_m] \geq K[q_0]. \quad (13)$$

Из (12), (13) следует $K[q_0] = \mu$, что и требовалось доказать.

6. В заключение покажем, что функции $A_0(u)$ и $B_0(u)$ лежат в $C_2[0, +\infty)$, удовлетворяют уравнениям (1) из [2] и $A'(0) = 0$. Пусть $P = \{p\}$, где $p = \{A(u), B(u)\}$, $A(u)$ и $B(u)$ — произвольные функции из $C_2[0, +\infty)$ и $B(0) = 0$,

$$J_1(p) = \pi \int_0^\infty [A'^2(u) + B'^2(u)] du; \quad J_2(p) = \int_0^\infty u^2 [A^2(u) + B^2(u)] du;$$

$$J_3(p) = \int_0^\infty u [A^2(u) + B^2(u)] du; \quad J_4(p) = \int_0^\infty [A^2(u) + B^2(u)] du.$$

Учитывая (7), заключаем, что вектор $p_0 = \{A_0(u), B_0(u)\}$ реализует минимум функционала

$$K = \frac{J_1(p) \{J_2(p) J_4(p) - J_3^2(p)\}}{\pi^2 J_4^3(p)}$$

в классе P .

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, $\eta(u) \in C_a[0, +\infty)$, $A_\varepsilon = A_0 + \varepsilon\eta$, $p_\varepsilon = \{A_\varepsilon, B_0\}$. Сделав элементарные преобразования в неравенстве $K[p_\varepsilon] \geq \mu$ и группируя члены по степеням ε , получим:

$$\sum_k^{1,6} \varepsilon^k c_k \geq 0,$$

где c_k — величины, зависящие от A_0, B_0 и η . Так как ε произвольно, $c_1 = 0$, т. е.

$$\int_0^\infty \psi(u) A_0(u) \eta(u) du + \pi(b - \pi c^2) \int_0^\infty A_0'(u) \eta'(u) du = 0, \quad (14)$$

где

$$\psi(u) = a^2 u + \pi ab - 2\pi acu - 3\mu\pi; \quad \mu = a(b - \pi c^2);$$

$$a = J_1(p_0); \quad b = J_2(p_0); \quad c = J_3(p_0).$$

Пусть $u_1 > 0$ произвольно и $\eta(u_1) = \eta(0) = 0$. Интегрируя в (14) по частям интегралы, не содержащие $\eta'(u)$, получим:

$$\int_0^{u_1} \left\{ \pi(b - \pi c^2) A_0'(u) - \int_0^u \psi(t) A_0(t) dt \right\} \eta'(u) du = 0.$$

Отсюда в силу леммы Дю-Буа-Реймонда [7]

$$\pi(b - \pi c^2) A_0'(u) - \int_0^u \psi(t) A_0(t) dt = \text{const.}$$

Следовательно, $A_0'(u) \in C_1[0, u_1]$; так как u_1 произвольно, $A_0(u) \in C_2[0, +\infty)$ и для всех u в интервале $0 \leq u < +\infty$

$$\pi(b - \pi c^2) A_0''(u) - \psi(u) A_0(u) = 0. \quad (15)$$

Аналогично имеем: $B_0 \in C_2[0, +\infty)$ и*

$$\pi(b - \pi c^2) B_0''(u) - \psi(u) B_0(u) = 0. \quad (15a)$$

Пусть $\eta(0) \neq 0$. Тогда из (13) следует, что

$$\int_0^{u_1} \left\{ [\psi(u) A_0(u) - \pi(b - \pi c^2) A_0''(u)] \right\} \eta(u) du + A_0'(0) \eta(0) = 0,$$

откуда, вследствие (15) и так как $\eta(0) \neq 0$, имеем: $A_0'(0) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.
2. А. Г. Майер и Е. А. Леонтович, ДАН СССР, 4, 353 (1934).

* Уравнения (15), (15a) совпадают с уравнениями (1) из [2].

3. J. Kay, R. Silverman, *Information and Control*, 1, 64 (1957).
4. J. Kay, R. Silverman, *Information and Control*, 2, 396 (1959).
5. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М.—Л., 1949
6. В. И. Казимиров, УМН, 11, 3, 125 (1956).
7. М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник, Курс вариационного исчисления, М.—Л., 1950.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
7 июня 1960 г.

К ТЕОРИИ ГЕНЕРАТОРА НА ТОЧЕЧНОМ ТРАНЗИСТОРЕ

Н. И. Ашбель

На основе кусочно-линейной аппроксимации статических характеристик исследуется генератор на точечном триоде с обратной связью между коллектором и эмиттером через последовательный LC -контур. Получено условие самовозбуждения автоколебаний и определены границы областей линейности на фазовой плоскости при расположении состояния равновесия в рабочей области транзистора. Показана возможность существования в системе устойчивого предельного цикла.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСИЯ И УСЛОВИЕ САМОВОЗБУЖДЕНИЯ

Особенности параметров точечных полупроводниковых триодов позволяют применить их для генерирования колебаний в схеме рис. 1. В настоящей работе рассматривается динамика такого генератора в пренебрежении переходными процессами в самом триоде. При этом статические характеристики последнего можно аппроксимировать кусочно-линейными функциями вида [1]:

$$\begin{aligned} v_k &= R_m^m (i_k + \alpha i_e); \\ v_e &= R_n^n (i_e + \beta i_k). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь v_k и v_e — напряжения на коллекторе и эмиттере относительно основания, i_k и i_e — токи, текущие в их цепях, R_m^m и R_n^n — сопротивления коллекторного и эмиттерного переходов, принимающие в зависимости от индексов m и n (равных 0 или 1) соответ-

ственно значения R_0^m , R_1^m (сопротивления закрытого и открытого коллекторного перехода) и R_0^n , R_1^n (сопротивления закрытого и открытого эмиттерного перехода*), α и β — постоянные коэффициенты, причем для точечного триода $\alpha > 1$, $\beta < 1$ и $\alpha\beta < 1$.

Уравнения (1) справедливы для областей G_{mn} , задаваемых неравенствами

$$(-1)^m v_k \leq 0, \quad (-1)^n v_e \leq 0. \quad (2)$$

Напишем уравнения движения исследуемой схемы (рис. 1). Для узлов a и b имеем:

$$\mathcal{E} - v_e = (i + i_e) r; \quad (3)$$

* Здесь и в дальнейшем для обозначения величин, относящихся к коллекторному и эмиттерному переходам, при подстановке вместо m и n их значений 0 или 1 условился сохранять эти индексы, перенося их вверх.

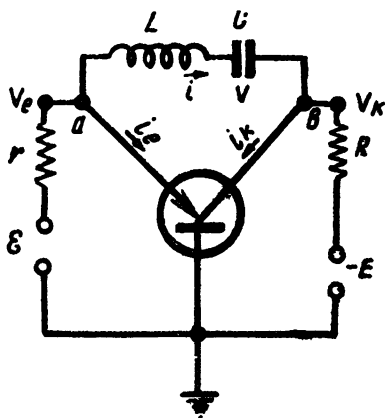


Рис. 1.

$$\text{Кроме того,} \quad -E - v_k = (-i + i_k) R. \quad (4)$$

$$L di/dt + v = v_e - v_k; \quad (5)$$

$$C dv/dt = i. \quad (6)$$

Смысл входящих в уравнения (3)÷(6) величин ясен из рис. 1. Предполагается, что омические потери контура пересчитаны в сопротивление R или r .

Исключая из уравнений (1)÷(6) величины v_k , v_e , i_k , i_e и производя замену переменных и параметров

$$g'_m = 1/R_m (1 - \alpha\beta); \quad g'_n = 1/R_n (1 - \alpha\beta); \quad \sqrt{L/C} = \rho; \quad t' = t \sqrt{LC};$$

$$v = x; \quad i = y/\rho; \quad \rho/R = \gamma; \quad \rho/r = \mu; \quad g'_m \rho = g_m; \quad g'_n \rho = g_n;$$

$$\Delta = - (1 + g_m/\gamma) (1 + g_n/\mu) + \alpha\beta g_m g_n/\gamma\mu;$$

$$a_m = -\Delta^{-1} [\mathcal{E} (1 + g_m/\gamma) - \beta g_m E/\mu];$$

$$a_n = -\Delta^{-1} [E (1 + g_n/\mu) - \alpha g_n \mathcal{E}/\gamma];$$

$$\gamma_m = \frac{1}{-\Delta\mu} \left[1 + \frac{g_m}{\gamma} (1 - \beta) \right]; \quad \gamma_n = \frac{1}{-\Delta\gamma} \left[1 - \frac{g_n}{\mu} (\alpha - 1) \right];$$

$$\gamma_m + \gamma_n = 2\sigma'; \quad a_m + a_n = \lambda,$$

получим систему

$$dy/dt' + 2\sigma' y + x = \lambda; \quad (7)$$

$$dx/dt' = y; \quad (8)$$

Неравенства (2) в принятых обозначениях запишутся в виде

$$(-1)^m (a_n - \gamma_n y) \geq 0; \quad (-1)^n (a_m - \gamma_m y) \leq 0. \quad (9)$$

Таким образом, динамика схемы рис. 1 описывается системой линейных уравнений (7) и (8) в каждой из четырех областей G_{mn} , задаваемых неравенствами (9).

Координаты состояния равновесия рассматриваемой системы

$$x_0 = \lambda, \quad y_0 = 0.$$

Эта точка попадает в область G_{mn} при условии

$$(-1)^m a_n \geq 0; \quad (-1)^n a_m \leq 0. \quad (10)$$

График рис. 2, построенный на основании (10), иллюстрирует расположение состояния равновесия в областях G_{mn} в зависимости от параметров $\mathcal{E}$ и E . Штриховкой выделены значения $\mathcal{E}$ и E , соответствующие расположению состояния равновесия в рабочей области G_{01} транзистора. Очевидно, что при положительных значениях этих параметров состояние равновесия не может находиться в области G_{10} . Единственность состояния равновесия обусловлена отсутствием наложения областей G_{mn} на плоскости $\mathcal{E}$, E . Нетрудно убедиться, что условие самовозбуждения генератора $\sigma' < 0$ или

$$\gamma + \mu + (1 - \beta) g_m - (\alpha - 1) g_n < 0 \quad (11)$$

выполняется в области G_{01} .

Попутно отметим, что условию (11)' при α и β , меньших единицы, невозможно удовлетворить, чем исключается возможность использования в описываемой схеме плоскостного триода.

2. РАЗБИЕНИЕ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ НА ОБЛАСТИ ЛИНЕЙНОСТИ

В случае существования предельного цикла последний располагается, по крайней мере, в двух областях G_{mn} . Из рассмотрения неравенства (9) следует, что границы областей линейности на фазовой

плоскости параллельны оси y , поскольку их уравнения не содержат координаты x . Функции соответствия точек преобразований отрезков границ друг в друга зависят от взаимного расположения границ; поэтому необходимо определить ординаты этих границ.

Рассмотрим случай, когда параметры ε и E принимают значения, находящиеся в заштрихованной области рис. 2 (что соответствует наличию состояния равновесия в области G_{01}), и выполнено условие самовозбуждения (11). Ограничимся такими значениями ε и E , при которых коэффициенты a_m и a_n положительные. Заметим, что параметр γ_m всегда

Рис. 2. Разбиение плоскости ε, E на области расположения состояния равновесия.

положителен (поскольку $\Delta < 0$, $\beta < 1$), а γ_1^n — отрицательная величина; что касается γ_0^n , то оно может принимать как положительные, так и отрицательные значения, в связи с чем следует рассмотреть обе возможности.

Развертывая неравенства (9), в областях G_{mn} получаем соотношения, приведенные в таблице 1.

Таблица 1

G_{00}	G_{11}	G_{01}	G_{10}
$a_0^n \geq \gamma_0^n y$	$a_1^n \leq \gamma_1^n y$	$a_1^n \geq \gamma_1^n y$	$a_0^n \leq \gamma_0^n y$
$a_0^m \leq \gamma_0^m y$	$a_1^m \geq \gamma_1^m y$	$a_0^m \geq \gamma_0^m y$	$a_1^m \leq \gamma_1^m y$

Обозначим через y_j ($j=1, 2, 3, 4$) абсолютные значения ординат границ областей линейности:

$$y_1 = \frac{a_0^n}{|\gamma_0^n|}, y_2 = \frac{a_0^m}{\gamma_0^m}, y_3 = \frac{a_1^n}{|\gamma_1^n|}, y_4 = \frac{a_1^m}{\gamma_1^m}.$$

При этом в случаях, когда $\gamma_0^n > 0$ и $\gamma_0^n < 0$, ординаты y_j границ областей G_{mn} имеют значения, указанные в таблице 2.

Таблица 2

G_{mn}	G_{00}	G_{11}	G_{01}	G_{10}
$\gamma_0^n > 0$	$y_1 \geq y \geq y_2$	$-y_3 \geq y \leq y_4$	$-y_3 \leq y \leq y_2$	$y_4 \leq y \geq y_1$
$\gamma_0^n < 0$	$-y_1 \leq y \geq y_2$	$-y_3 \geq y \leq y_4$	$-y_1 \leq y \leq y_2$	$-y_1 \geq y \geq y_4$

Неравенство $-y_1 \geq y \geq y_4$ противоречиво; следовательно, при $\gamma_0^n < 0$ область G_{10} не существует.

Проведенный расчет показал, что при $\varepsilon/E < \gamma_1/\mu$ ординаты границ подчиняются неравенству $y_3 > y_1 > y_2 > y_4$, а при $\varepsilon/E > \gamma_1/\mu$ $y_4 > y_2 > y_1 > y_3$. Области G_{mn} на фазовой плоскости не налагаются, что исключает возможность генерирования разрывных колебаний.

Очевидно, что на каждой границе будет по одной точке, в которой фазовая траектория касается границы. Обозначая абсциссу точки контакта на границе с индексом m через $\tilde{x}_m$, расстояние произвольной точки границы от этой точки — через S_m и поступая аналогично с точками границы n , можно для координат точек соответствующих границ записать:

$$\begin{aligned} x_m &= \tilde{x}_m + S_m; & y_m &= a_n / \gamma_n; \\ x_n &= \tilde{x}_n + S_n; & y_n &= a_m / \gamma_m. \end{aligned} \quad (12)$$

Пользуясь уравнениями (7) и (8), находим:

$$\tilde{x}_m = -2\sigma' a_n / \gamma_n + \lambda; \quad \tilde{x}_n = -2\sigma' a_m / \gamma_m + \lambda. \quad (13)$$

3. ФУНКЦИИ СООТВЕТСТВИЯ. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ

Как известно [2], существование в системе предельных циклов и их устойчивость показываются в результате исследования функций соответствия для точечных преобразований отрезков границ областей линейности, производимых фазовыми траекториями, пересекающими эти границы. С целью получения функций соответствия, аналогичных исследованным в упомянутой работе [1], преобразуем переменные

$$Y = \frac{y + \sigma' (x - \lambda)}{\sqrt{1 - \sigma'^2}}, \quad X = x - \lambda, \quad \tau = \sqrt{1 - \sigma'^2} t' \quad (14)$$

и введем обозначения

$$\sqrt{1 - \sigma'^2} = \omega, \quad \sigma = \frac{\sigma'}{\sqrt{1 - \sigma'^2}}.$$

Записывая в новых координатах уравнения (7) и (8), имеем:

$$\dot{Y} + \sigma Y + X = 0; \quad \dot{X} + \sigma X - Y = 0^*. \quad (15)$$

Интегрируя эту систему и полагая, что движение изображающей точки при $\tau = 0$ начинается с границы m , а по истечении промежутка τ изображающая точка приходит на границу n , получим:

$$\begin{aligned} Y_n &= e^{-\sigma\tau} (Y_m \cos \tau - X_m \sin \tau); \\ X_n &= e^{-\sigma\tau} (X_m \cos \tau - Y_m \sin \tau). \end{aligned} \quad (16)$$

Значения X_i, Y_i ($i = m, n$) суть значения координат точек соответствующих границ. Преобразуя их при помощи формул (14) и учитывая соотношения (12) и (13), получим уравнения функций соответствия в параметрической форме:

* Точкой обозначено дифференцирование по τ .

$$S_m = -\omega \frac{(a_m/\gamma_m) e^{j\tau} - (a_n/\gamma_n) (\cos \tau + \sigma \sin \tau)}{\sin \tau};$$

$$S_n = \omega \frac{(a_n/\gamma_n) e^{-j\tau} - (a_m/\gamma_m) (\cos \tau - \sigma \sin \tau)}{\sin \tau}. \quad (17)$$

При $\sigma' > 1$ величина ω становится мнимой и в уравнениях (17) тригонометрические функции заменяются гиперболическими. При этом получается состояние равновесия типа узла; при $\sigma' < 1$ состояние равновесия будет фокусом.

Дифференцируя (17), получим

$$\frac{dS_n}{dS_m} = \frac{S_m}{S_n} e^{-2j\tau}. \quad (18)$$

Из уравнений (17) и (18) следует, что функции соответствия являются непрерывными монотонно нарастающими функциями с непрерывными производными. Эти свойства сохраняются при переходе из одной области в другую; однако в каждой из областей будет своя система координат, свой интервал изменения приведенного времени τ и свои значения σ и ω .

Из сопоставления уравнений (17) с выражениями для функций соответствия, приведенными в [1], следует, что их аналогия распространяется также на производные, асимптоты и координаты точек пересечения графиков функций соответствия с осями S_m , S_n . Эти графики в случае точечных преобразований отрезков, принадлежащих одной и той же границе, проходят через начало координат; если же отрезки расположены на разных границах, то графики функций соответствия, встречая оси под прямым углом, отсекают от них отрезки, величина которых определяется ординатами границ.

Полное точечное преобразование получается в результате последовательного применения четырех точечных преобразований, функции соответствия которых задаются уравнениями (17), и существование, единственность и устойчивость предельных циклов выясняются исследованием неподвижных точек на диаграмме Ламерея. В таблице 3 представлены результаты такого исследования для случая расположения состояния равновесия в области G_{01} и точек контакта на ее границах.

Предельный цикл возникает лишь при выполнении условия самовозбуждения и может проходить либо через три области G_{00} , G_{01} и G_{11} (№ 4 таблицы 3), либо через одну из пар областей— G_{11} , G_{01} или G_{00} , G_{01} (№№ 5 и 6 таблицы 3). Режим самовозбуждения автоколебаний—мягкий.

Таблица 3

№№ п/п.	Знак σ	Соотношение между ординатами границ	Существует ли предельный цикл	Устойчивость предельного цикла
1	+	$y_2 e^{-\pi\sigma} < y_3 < y_2 e^{\pi\sigma}$	нет	—
2	+	$y_3 < y_2 e^{-\pi\sigma}$	"	—
3	+	$y_3 > y_2 e^{\pi\sigma}$	"	—
4	—	$y_2 e^{\pi\sigma} < y_3 < y_2 e^{-\pi\sigma}$	да	устойчив
5	—	$y_3 < y_2 e^{\pi\sigma}$	"	"
6	—	$y_3 > y_2 e^{-\pi\sigma}$	"	"

Жесткий режим возбуждения может возникнуть при расположении состояния равновесия вне рабочей области транзистора.

Проведенная качественная проверка [³] работы генератора на точечном триоде типа СИГ, а именно, условия самовозбуждения, влияния параметров на расположение состояния равновесия и предельных циклов, режимов возбуждения, а также осциллограммы автоколебаний подтвердили соответствие результатов расчета с экспериментом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 766 (1959).
2. А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
3. А. Я. Танаева, Дипломная работа, Горьковский ун-т, 1960.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
26 марта 1960 г.

К ТЕОРИИ РАЗРЫВНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЯМОЙ В ПРЯМУЮ

Н. Н. Леонов

Изучается разрывное кусочно-линейное преобразование прямой в прямую, имеющее один разрыв.

В работах [1,2] отмечалось, что применение метода точечных отображений при исследовании динамических систем в ряде случаев приводит к изучению разрывного точечного преобразования прямой в прямую, причем это разрывное преобразование может быть кусочно-линейным, что имело место в задаче о синхронизации мультивибратора периодически повторяющимися импульсами [3]. В настоящей работе исследуется разрывное, с одним разрывом, кусочно-линейное точечное преобразование прямой в прямую

$$x = \Pi x = \begin{cases} T_1 x = a + \lambda_1 x & (x < 0) \\ T_2 x = b + \lambda_2 x & (x > 0) \end{cases}, \quad (1)$$

которому посвящена часть статьи [1] и статья [2]. В [1,2] рассмотрены случаи, для которых $a > 0$, $b < 0$, причем в [1] изучены случаи, когда преобразование Π не имело простых неподвижных точек, а в [2] — случаи, когда преобразование Π обладало простыми неподвижными точками. Здесь будут рассмотрены остальные варианты (I) $ab > 0$ и (II) $a < 0$, $b > 0$; при этом все возможные значения параметров λ_1 , λ_2 отнесены к следующим интервалам:

- 1) $0 < \lambda_1 < 1$, $0 < \lambda_2 < 1$; 2) $0 < \lambda_1 < 1$, $\lambda_2 > 1$; 3) $0 < \lambda_1 < 1$, $\lambda_2 < 0$;
- 4) $\lambda_1 > 1$, $0 < \lambda_2 < 1$; 5) $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 > 1$; 6) $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 < 0$;
- 7) $\lambda_1 < 0$, $0 < \lambda_2 < 1$; 8) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 1$; 9) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$.

С точностью до масштаба x преобразование Π характеризуется тремя параметрами: λ_1 , λ_2 и $\Delta = |ab^{-1}|$. Пространство этих параметров обозначим через Λ . Цель задачи — выделить в пространстве Λ области, для которых движения изображающей точки качественно различны, а в частности, области существования устойчивых циклов преобразования Π . В силу того, что корни характеристического уравнения преобразования Π^n одинаковы для всех точек n -членного цикла [4], достаточно рассмотреть для каждого цикла лишь какую-нибудь одну его точку.

Следует заметить, что случаи (I) $a < 0$, $b < 0$ и (II) 4, 7, 8 подстановкой

$$x = -y, \quad \bar{x} = -\bar{y}, \quad \lambda_1 = \alpha_2, \quad \lambda_2 = \alpha_1, \quad a_1 = -b, \quad b_1 = -a \quad (2)$$

сводятся соответственно к случаям (I) $a > 0$, $b > 0$ и (II) 2, 3, 6, следовательно, необходимо рассмотреть лишь случаи (I) $a > 0$, $b > 0$ и (II) 1, 2, 3, 6, 9. Неподвижные точки преобразований $T_1^n T_2^n$ будем в дальнейшем обозначать через $x_{m^n}^*$.

Выделим сначала простейшие случаи для $a > 0$, $b > 0$. Так, в интервалах 1 и 7 преобразование Π имеет единственную неподвижную точку $x_2^* = b(1 - \lambda_2)^{-1}$, устойчивую, область притяжения которой является вся ось x . В случаях 2 и 8 преобразование Π неподвижных точек не имеет и вся ось x является областью притяжения бесконечности. В случае 4 имеются две простые неподвижные точки: $x_1^* = a(1 - \lambda_1)^{-1}$ — неустойчивая и $x_2^* = b(1 - \lambda_2)^{-1}$ — устойчивая; часть оси x , для которой $x > x_1^*$, является областью притяжения неподвижной точки x_2^* , а та часть, для которой $x < x_1^*$, — областью притяжения бесконечности. В случае 5 существует единственная неподвижная точка x_1^* (неустойчивая), так что вся ось x является областью притяжения бесконечности.

Рассмотрим теперь более сложные случаи, когда значения λ_1 , λ_2 принадлежат интервалам 3, 6 и 9.

1. 3 ($0 < \lambda_1 < 1$, $\lambda_2 < 0$). Здесь преобразование Π имеет единственную простую неподвижную точку x_2 . Бесконечность неустойчива и все движения приводят изображающую точку в ограниченную область (T_2a, a) , если $\Delta > 1$, или в область (T_2b, b) , если $\Delta < 1$.

Если $\lambda_2 > -1$, то x_2^* устойчива. Если, кроме того, $T_2a > 0$, то x_2^* является единственной неподвижной точкой преобразования Π , причем ее областью притяжения является вся ось x . Если же $T_2a < 0$, то преобразование Π может иметь кратные неподвижные точки, которыми в силу того, что $T_1T_2a \in (T_2^{-1}0, a)$, могут быть лишь неподвижные точки преобразований T_1T_2 и T_2T_1 , образующие двучленные циклы. Так как преобразования T_1 и T_2 линейны, то преобразование T_1T_2 может иметь только одну простую неподвижную точку, т. е. преобразование Π может иметь лишь один двучленный цикл. Этот цикл состоит из неподвижных точек $x_{11}^* = (a + \lambda_1 b)(1 - \lambda_1 \lambda_2)^{-1}$ и $T_2 x_{11}^* = (b + \lambda_2 a)(1 - \lambda_1 \lambda_2)^{-1}$, устойчив, а область его существования определяется из условия $T_2^{-1}0 \leq x_{11}^* \leq a$ и в пространстве Λ задается неравенством $\Delta > -\lambda_2^{-1}$. При этом области притяжения устойчивой неподвижной точки x_2^* и устойчивого двучленного цикла разделяются сепаратрисами, приходящими в точку разрыва непрерывности преобразования Π .

Пусть теперь $\lambda_2 < -1$. Неподвижная точка x_2^* становится неустойчивой, а преобразование Π уже может иметь различные кратные неподвижные точки. Для удобства исследования в этом случае разобьем пространство Λ на области Λ_{1i} , в каждой из которых будем вместо преобразования Π рассматривать преобразование Q_i .

Преобразование Q_1 , имеющее место в области Λ_{11} , для которой $\Delta > 1$ и $T_1T_2a > x_2^*$, преобразует точки интервала (T_1T_2a, a) в точки этого же интервала. является разрывным, кусочно-линейным и распадается на преобразования T_1T_2 , $T_1T_2^3$, $T_1T_2^5$, ..., $T_1T_2^{2^n+1}$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Из соответствующей диаграммы Ламерея (рис. 1а) следует, что преобразование Q_1 может иметь лишь одну устойчивую неподвижную точку x_{11}^* , если $T_1T_2T_1T_2a < a$, т. е. $\lambda_1\lambda_2 > -1$. Если кроме неподвижной точки x_{11}^* преобразование Q_1 имеет еще и другие неподвижные точки, то все они, включая x_{11}^* , неустойчивы, и движения изображающей точки в интервале (T_2a, a) непериодические, устойчивые по Пуассону.

Преобразование Q_2 , имеющее место в области Λ_{12} , для которой $\Delta > 1$ и $0 < T_1T_2a < x_2^*$, преобразует точки интервала (T_1T_2a, a) в точки этого же интервала, является кусочно-линейным и распадается

на преобразования $T_1 T_2^2$, $T_1 T_2^4$, ..., $T_1 T_2^{2i}$, ..., ..., $T_1 T_2^{2i+1}$, ..., $T_1 T_2^3$, $T_1 T_2$ (рис. 1б). В этом случае неподвижная точка x_{11}^* неустойчива, т. е. $|\lambda_1 \lambda_2| > 1$. Следовательно, $|\lambda_1 \lambda_2^i| > 1$ ($i = 2, 3, \dots$) и все неподвижные точки преобразования Q_2 неустойчивы. Поэтому движения изображающей точки в интервале $(T_2 a, a)$ непериодические, устойчивые по Пуассону.

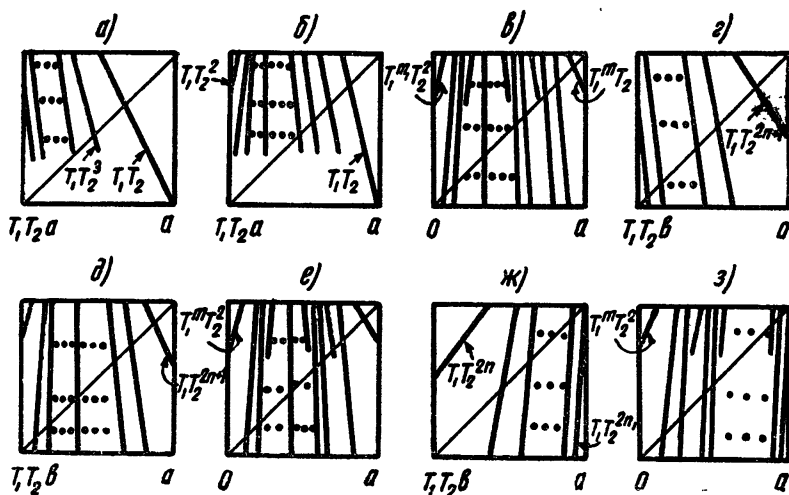


Рис. 1. Диаграммы Ламерея преобразований Q_i ($i = 1, 2, \dots, 8$).

Преобразование Q_3 , имеющее место в области Δ_{13} , для которой $\Delta > 1$ и $T_1 T_2 a < 0$, преобразует точки интервала $(0, a)$ в точки этого же интервала и распадается на преобразования $T_1^m T_2^2$, $T_1^{m-1} T_2^2$, ..., $T_1 T_2^2$; $T_1^m T_2^4$, ..., $T_1 T_2^4$; ..., $T_1^m T_2^{2i}$, ..., $T_1 T_2^{2i}$; ..., ..., $T_1 T_2^{2i+1}$, ..., $T_1 T_2^{2i+1}$; ..., $T_1 T_2^3$, ..., $T_1 T_2^3$; $T_1 T_2$, ..., $T_1^m T_2$, где $m_1 \leq m$, $m > 1$. Преобразование Q_3 имеет такой вид, если $0 < T_1^m T_2 a < a$. Оно может иметь единственную для каждого m устойчивую неподвижную точку x_{m1}^* — неподвижную точку преобразования $T_1^m T_2$, если $\lambda_1^m \lambda_2 > -1$ и $T_1^m T_2 a < a$ (см. соответствующую диаграмму Ламерея на рис. 1в). Эти условия выделяют в Δ_{13} область существования устойчивой неподвижной точки x_{m1}^* ($\lambda_2 > -\lambda_1^{-m}$, $\Delta > [(1 - \lambda_1^{1-m})(1 - \lambda_1)^{-1} - \lambda_2]^{-1}$) в предположении, что $\lambda_2 < (1 - \lambda_1^{-m})(1 - \lambda_1)^{-1}$. Нетрудно обнаружить, что эта область находится в слое, для которого $-\lambda_1^{-m} < \lambda_2 < -\lambda_1^{1-m}$, откуда в полном согласии с диаграммой Ламерея следует тот факт, что преобразование Q_3 не может иметь одновременно более чем одну устойчивую неподвижную точку типа x_{m1}^* . Если x_{m1}^* неустойчива, то преобразование Q_3 вообще не имеет устойчивых неподвижных точек.

Пусть теперь x_{m1}^* устойчива. Может ли при этом быть $\lambda_1^m \lambda_2^2 < 1$? В силу того, что $x_{m-1,1}^*$ неустойчива, $\lambda_1^{2m-2} \lambda_2^2 > 1$; если бы было справедливо неравенство $\lambda_1^m \lambda_2^2 < 1$, то $\lambda_1^{2m-2-m_1} > 1$, что возможно лишь при $m < 2(2 - k)^{-1}$, где $k = m_1 m^{-1} \leq 1$. Однако $m > 1$; поэтому $\lambda_1^m \lambda_2^2 > 1$ и преобразование Q_3 не может иметь никаких устойчивых неподвижных точек кроме точки x_{m1}^* , так как область определения преобразования $T_1^m T_2$ является областью притяжения x_{m1}^* .

В том случае, если Q_3 устойчивых неподвижных точек не имеет,

изображающая точка совершает в интервале $(T_2 a, a)$ непериодические, устойчивые по Пуассону движения. Области существования устойчивых неподвижных точек типа x_{m1}^* находятся в той части Λ_{13} , где $\Delta > (1 - \lambda_1)(1 + 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2)^{-1}$.

Преобразование Q_4 , имеющее место в Λ_{14} , где $b > a > x_2^*$ и $T_1 T_2 b > x_2^*$, переводит точки интервала $(T_1 T_2 b, a)$ в точки этого же интервала и распадается на преобразования $T_1 T_2^{2n+1}$, $T_1 T_2^{2n+3}$, ..., $T_1 T_2^{2n_i+1}$ ($n_i \geq n$, $n=0, 1, 2, \dots$), при условии, что $T_1 T_2 b < T_1 T_2^{2n+1} a < a$ (рис. 1г). Если при этом $\lambda_1 \lambda_2^{2n+1} < -1$, то Q_4 устойчивых неподвижных точек не имеет и движение изображающей точки в интервале $(T_2 b, b)$ непериодическое, устойчивое по Пуассону. Если же $\lambda_1 \lambda_2^{2n+1} > -1$, то Q_4 может иметь единственную для каждого n устойчивую неподвижную точку $x_{1,2n+1}^*$, область существования в Λ_{14} которой задается условиями $T_1 T_2^{2n+1} T_1 T_2 b > T_1 T_2 b$, $T_1 T_2^{2n+1} a < a$ или $\Delta_1 < \Delta < \Delta_2$, где $\Delta_1 = (1 - \lambda_2^{-1-2n}) \times (1 - \lambda_2)^{-1}$, $\Delta_2 = [1 - \lambda_2^{1-2n} - \lambda_1(1 - \lambda_2^2)](1 - \lambda_2)^{-1}$. Эти области действительно существуют, так как $\Delta_2(n) - \Delta_1(n) = \lambda_2^{-1-2n}(1 + \lambda_2)(1 - \lambda_1 \lambda_2^{2n+1}) > 0$. Кроме того, $\Delta_1(n+1) - \Delta_1(n) = -\lambda_2^{2n-1}(1 + \lambda_2) < 0$ и $\Delta_1(n) - \Delta_2(n+1) = \lambda_1(1 + \lambda_2) < 0$, т. е. эти области существования попарно пересекаются. Заметим, что неподвижные точки $x_{1,2n+1}^*$, $x_{1,2n+3}^*$, ..., $x_{1,2n+2m+1}^*$ могут существовать одновременно, если $\Delta_2(n+m) - \Delta_1(n) = \lambda_2^{-2n-2m-1} \times (1 - \lambda_2)^{-1} [\lambda_2^{2m} - \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^{2n+2m+1}(1 - \lambda_2^2)] > 0$. Это справедливо, если $\lambda_1 \lambda_2^{2n+2m+1} < (\lambda_2^2 - \lambda_2^m)(\lambda_2^2 - 1)^{-1}$.

Пусть неподвижная точка $x_{1,2n+2m+1}^*$ устойчива. Тогда $\lambda_1 \lambda_2^{2n+2m+1} > -1$ и должно выполняться условие $-1 < (\lambda_2^2 - \lambda_2^m)(\lambda_2^2 - 1)^{-1}$ при $\lambda_2 \in (-1, -\infty)$. Так как последнее может быть справедливо лишь при $m=1$, то преобразование Q_4 может одновременно иметь две устойчивые неподвижные точки $x_{1,2n+1}^*$ и $x_{1,2n+3}^*$, но не более, чем две. Более того, так как области определения преобразований $T_1 T_2^{2n+1}$, $T_1 T_2^{2n+3}$ являются областями притяжения неподвижных точек $x_{1,2n+1}^*$, $x_{1,2n+3}^*$ соответственно, преобразование Q_4 не может иметь устойчивых неподвижных точек, отличных от точек типа $x_{1,2n+1}^*$. То же самое имеет место и в случае, если Q_4 имеет не две, а одну устойчивую неподвижную точку $x_{1,2n+1}^*$. В заключение следует отметить, что области существования устойчивых неподвижных точек $x_{1,2n+1}^*$ ($n=0, 1, 2, \dots$) находятся в той части пространства Λ_{14} , где $\Delta > (1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2)^{-1}$.

Преобразование Q_5 , имеющее место в Λ_{15} , где $b > a > x_2^*$ и $0 < T_1 T_2 b < x_2^*$, переводит точки интервала $(T_1 T_2 b, a)$ в точки интервала $(T_1 T_2 b, a)$ и распадается на линейные преобразования $T_1 T_2^{2n_1}$, $T_1 T_2^{2n_1+2}$, ..., $T_1 T_2^{2n_i+2i}$, ..., $T_1 T_2^{2n_j+2j+1}$, ..., $T_1 T_2^{2n+1}$ ($n_i=1, 2, \dots$, $n=0, 1, 2, \dots$) при условии, что $T_1 T_2 b < T_1 T_2^{2n_i}$, $T_1 T_2 b < a$ и $T_1 T_2 b < T_1 T_2^{2n_i+1} a < a$ (см. рис. 1д).

Если $\lambda_1 \lambda_2^{2n_i} > 1$ и $\lambda_1 \lambda_2^{2n_i+1} < -1$ одновременно, то Q_5 устойчивых неподвижных точек иметь не может и изображающая точка совершает непериодические движения, устойчивые по Пуассону. Пусть теперь $\lambda_1 \lambda_2^{2n_i+1} > -1$; тогда Q_5 может иметь устойчивую неподвижную точку $x_{1,2n+1}^*$, область существования которой $\Delta_1 < \Delta < \Delta_2$, причем области существования устойчивых неподвижных точек $x_{1,2n+1}^*$ и $x_{1,2n+3}^*$ ($n=0, 1, 2, \dots$) общих точек иметь не могут. Если при этом $\lambda_1 \lambda_2^{2n_i} > 1$, то иных устойчивых неподвижных точек преобразование Q_5 иметь не может; если же $\lambda_1 \lambda_2^{2n_i} < 1$, то появляется возможность существования

устойчивых кратных неподвижных точек преобразования Q_5 . Однако этот вопрос, ввиду наличия счетного количества разрывов непрерывности преобразования Q_5 , остается открытым. Наконец, если $\lambda_1 \lambda_2^{2n+1} < -1$ и $\lambda_1 \lambda_2^{2n} < 1$, то простых устойчивых неподвижных точек типа $x_{1, 2n-1}^*$ преобразование Q_5 иметь не может, а вопрос о возможности существования устойчивых кратных неподвижных точек преобразования Q_5 остается открытым.

Преобразование Q_6 , имеющее место в Λ_{16} , где $b > a > x_2^*$ и $T_1 T_2 b < 0$, переводит точки интервала $(0, a)$ в точки этого же интервала и распадается на преобразования $T_1^m T_2^{2i}, T_1^{m-1} T_2^{2i}, \dots, T_1 T_2^{2i}, T_1^m T_2^{4i}, \dots, T_1 T_2^{4i}, \dots, T_1^m T_2^{2i}, \dots, T_1 T_2^{2i}, \dots; \dots, T_1 T_2^{2n+2i+1}, \dots, T_1^m T_2^{2n+2i+1}, \dots, T_1 T_2^{2n+3}, \dots, T_1^m T_2^{2n+3}, T_1 T_2^{2n+1}, \dots, T_1^m T_2^{2n+1}$ ($m=2, 3, \dots; 1 \leq m_1 \leq m, n=0; 1, 2, \dots$), если $0 < T_1^m T_2 b < a$ и $0 > T_2^{2n+1} a > T_2 b$ (рис. 1е).

Непосредственно из диаграммы Ламерея в силу линейности составляющих Q_6 преобразований следует, что неподвижные точки преобразований $T_1^k T_2^{2i}$ ($k=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots$) не могут быть устойчивыми. Поэтому среди простых неподвижных точек преобразования Q_6 рассмотрим лишь неподвижные точки преобразований $T_1^p T_2^{2q+1}$. Но и среди этих неподвижных точек устойчивыми могут быть лишь те, для которых $p=m$, если $q > n$, и $p=m_1$, если $q=n$. Область существования неподвижной точки $x_{m, 2q+1}^*$ определяется из условия $T_1^m T_2 b < x_{m, 2q+1}^* < a$ и в пространстве Λ задается следующим образом: $\delta_1 < \Delta < \delta_2$, где $\delta_1 = (1 - \lambda_2^{2q+1})(1 - \lambda_2)^{-1} [-\lambda_2^{2q+1} + (1 - \lambda_1^{1-m})(1 - \lambda_1)^{-1}]^{-1}$, $\delta_2 = (1 - \lambda_2)^{-1}(1 - \lambda_1) \times (1 - \lambda_1^m)^{-1} [1 - \lambda_2^{2q} + \lambda_1^m (\lambda_2^2 - 1)]$, в предположении, что $\lambda_1^m - \lambda_1 - \lambda_1^m \lambda_2^{2q+1}(1 - \lambda_1) > 0$. Устойчивой неподвижной точкой $x_{m, 2q+1}^*$ может быть лишь в том случае, если при $\lambda_1^m \lambda_2^{2q+1} > -1$ разность $\delta_2 - \delta_1 = (1 - \lambda_2)^{-1} \times (1 - \lambda_1^m)^{-1} [-\lambda_2^{2q+1} + (1 - \lambda_1^{1-m})(1 - \lambda_1)^{-1}]^{-1} \lambda_1^{1-m} \lambda_2^{-2q-1} \gamma$ положительна, т. е. $\gamma = \lambda_2^2 + \lambda_1^{m-2} \lambda_2^{2q+3} + \lambda_1^m \lambda_2^{2q-1} - \lambda_2^{2q+1} - \lambda_1^m \lambda_2^{2q+3} - \lambda_1^{m-1} \lambda_2^2 < 0$.

Выясним, при каких m и q величина γ может быть отрицательной. Для этого заменим в выражении для γ величину λ_2 на $-\lambda$ и исследуем $\text{sgn } \gamma$ на интервале $\lambda_1 \in (0, \lambda^{-(2q+1)/m})$. Очевидно, $\gamma(\lambda_1 = 0) = \lambda^2 + \lambda^{2q+1} > 0$, $\gamma(\lambda_1 = \lambda^{-(2q+1)/m}) = \lambda^{2q+1} - \lambda^{2+(2q+1)/m} - 1 + 2\lambda^2 - \lambda^{1-2q+(2q+1)/m}$. Последнее выражение при $2q+1 > 2m(m-1)^{-1}$ положительно, так как $1 < \lambda^2$, а $\lambda^2 - \lambda^{1-2q+(2q+1)/m} > 0$ и $\lambda^{2q+1} - \lambda^{2+(2q+1)/m} > 0$ в силу того, что $1 - 2q + (2q+1)/m < 0$. Далее, $\frac{d\gamma}{d\lambda_1} = \lambda_1^{m-2} \lambda^2 \varphi$, где $\varphi = m\lambda_1 \lambda^{2q+1} - m + 1 - m\lambda_1 \lambda^{2q-1} - (m-1)\lambda^{2q+1}$. Сколько нулей может иметь φ при $\lambda_1 \in (0, \lambda^{-(2q+1)/m})$? Не трудно видеть, что $\varphi(\lambda_1 = 0) = 1 - m - (m-1)\lambda^{2q+1} < 0$, а $\varphi(\lambda_1 = \lambda^{-(2q+1)/m}) = 1 - m + m\lambda^{2q+1 - \frac{2q+1}{m}} - m\lambda^{2q-1 - \frac{2q+1}{m}} - (m-1)\lambda^{2q+1}$ и пусть это равно ψ . Тогда $\psi(1) = 2(1-m) < 0$, а $d\psi/d\lambda = \left(2q+1 - \frac{2q+1}{m}\right) m \lambda^{2q-(2q+1)/m} - m \left(2q-1 - \frac{2q+1}{m}\right) \lambda^{2q-2-(2q+1)/m} - (2q+1)(m-1)\lambda^{2q} < 0$ при $2q+1 \geq 2m(m-1)^{-1}$. Следовательно, $\psi < 0$ при $\lambda > 1$ и $2q+1 \geq 2m(m-1)^{-1}$. А так как $d\varphi/d\lambda_1 = m\lambda^{2q+1} - m\lambda^{2q-1} > 0$, то $\varphi < 0$ при $\lambda_1 \in (0, \lambda^{-(2q+1)/m})$ и поэтому $\gamma > 0$ для $2q+1 \geq 2m(m-1)^{-1}$. Отрицательным γ может быть лишь при $2q+1 < 2m(m-1)^{-1} = 2+2(m-1)^{-1} \leq 4$, т. е. при $q=1, m=2$. Для $q=1, m=2$ величина $\gamma = \lambda_2^2(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_2^2)$ может быть отрицательной, если $1-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_2^2 < 0$. Неподвижная точка x_{23}^* устойчива,

если $\lambda_1^2 \lambda_2^3 > -1$, а для возможности ее существования необходимо еще, чтобы выполнялось условие $\lambda_1 \lambda_2^3 < -1$. Однако в силу того, что $\lambda_2^{-1}(1+\lambda_2)^{-1} > -\lambda_2^{-3}$, для возможности существования устойчивой неподвижной точки x_{23}^* достаточно выполнения условия $(-\lambda_2^{-3})^{1/2} > \lambda_1 > \lambda_2^{-1}(1+\lambda_2)^{-1}$, которое может быть справедливо, если $\lambda_2 < -0,5(3 + \sqrt{5})$.

Преобразование Q_6 также может иметь устойчивые неподвижные точки x_{p1}^* ($p=1, 2, \dots$), области существования и устойчивости которых определяются из условий $T_1^p T_2 a < a$ и $\lambda_1^p \lambda_2 > -1$ и являются продолжениями соответствующих областей из Λ_{13} .

Из простых неподвижных точек преобразования Q_6 устойчивыми могут быть и неподвижные точки $x_{m_1, 2n+1}^*$ преобразований $T_1^{m_1} T_2^{2n+1}$. Устойчивые неподвижные точки $x_{m_1, 2n+1}^*$ ($m_1=1, 2, \dots$) могут существовать лишь в том случае, если выполняется условие $0 > T_2^{2n+1} a > T_2 b$, выделяющее в пространстве Λ_{16} область P_{2n+1} , для которой $(1-\lambda_2^{1-2n})(1-\lambda_2)^{-1} > \Delta > (1-\lambda_2^{1-2n})(1-\lambda_2)^{-1}$. В каждой области P_{2n+1} , в свою очередь, выделяются с помощью условий $T_1^{m_1} T_2^{2n+1} a < a$, $\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{2n+1} > -1$ (см. рис. 1е) области существования устойчивых неподвижных точек $x_{m_1, 2n+1}^*$ ($m_1=1, 2, \dots$). В пространстве Λ_{16} эти области задаются условиями $\Delta > (1-\lambda_2^{2n+1})(1-\lambda_2)^{-1}[-\lambda_2^{2n+1} - (\lambda_1^{m_1} - 1)(1-\lambda_1)^{-1}]^{-1}$, $\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{2n+1} > -1$ и между собой не пересекаются, ибо область с номером m_1 находится в слое, для которого $-\lambda_1 > \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{2n+1} > -1$.

Отметим еще, что область существования устойчивой неподвижной точки x_{23}^* целиком принадлежит области существования устойчивой неподвижной точки x_{11}^* , не имея общих точек с областью существования устойчивой неподвижной точки x_{13}^* , так как $\delta_1(m=2; q=1) > \Delta_1(n=1)$.

Таким образом, преобразование Q_6 может иметь из простых неподвижных точек лишь одну устойчивую неподвижную точку $x_{p, 2q+1}^*$ ($p=1, 2, \dots, q=0, 1, 2, \dots$), за исключением того случая, когда неподвижная точка x_{23}^* устойчива. Тогда преобразование Q_6 может иметь одновременно две простые устойчивые неподвижные точки x_{11}^* и x_{23}^* . Если Q_6 имеет простую устойчивую неподвижную точку и $\lambda_1^m \lambda_2^2 < 1$, то устойчивых кратных неподвижных точек это преобразование иметь не может. Если одновременно $\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{2n+1} < -1$ и $\lambda_1^{m_1} \lambda_2^2 > 1$ в области, где $0 < T_1^m T_2 b < a$ и $a > T_1 T_2^{2n+1} a > T_1 T_2 b$, то преобразование Q_6 вообще не может иметь устойчивых неподвижных точек, а изображающая точка совершает устойчивые по Пуассону неперiodические движения. Наконец, в том случае, когда $\lambda_1^m \lambda_2^2 < 1$, вопрос о возможности существования устойчивых кратных неподвижных точек преобразования Q_6 остается открытым.

Преобразование Q_7 , имеющее место в Λ_{17} , где $a < x_2^*$ и $T_1 T_2 b > 0$, переводит точки интервала $(T_1 T_2 b, a)$ в точки этого же интервала и распадается на линейные преобразования $T_1 T_2^{2n}$, $T_1 T_2^{2n+2}$, ..., $T_1 T_2^{2n}$ ($n_1 \geq n$, $n=1, 2, \dots$), если $T_1 T_2 b < T_1 T_2^{2n} T_1 T_2 b < a$, $T_1 T_2 b < T_1 T_2^{2n} a < a$. Из диаграммы Ламерея (рис. 1ж) следует, что простые неподвижные точки преобразования Q_7 могут быть устойчивыми лишь в том случае, если $n_1 = n$. При этом область существования устойчивой неподвижной точки $x_{1, 2n}^*$ определяется из условий $T_1 T_2 b < T_1 T_2^{2n} T_1 T_2 b$, $T_1 T_2^{2n} a < a$, которые в Λ_{17} выделяют область $\sigma_2 < \Delta < \sigma_1$, где $\sigma_1 = (1-\lambda_2^{-2n})(1-\lambda_2)^{-1}$,

$\sigma_2 = (1 - \lambda_2)^{-1} [1 - \lambda_2^{2-2n} - \lambda_1(1 - \lambda_2^2)]$. Так как $\sigma_1(n) - \sigma_2(n) = (1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2^{2n}) > 0$ при $\lambda_1 \lambda_2^{2n} < 1$, то эти области действительно существуют, а в силу того, что $\sigma_1(n+1) - \sigma_1(n) = -\lambda_2^{2-2n}(1 + \lambda_2) > 0$ и $\sigma_2(n+1) - \sigma_2(n) = -\lambda_1(1 + \lambda_2) > 0$, они не имеют общих точек, т. е. преобразование Q_7 не может иметь одновременно несколько устойчивых простых неподвижных точек.

Обозначим области существования устойчивых неподвижных точек $x_{1,2j}^*$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) соответственно через P_{1j} . Нетрудно обнаружить, что все P_{1j} принадлежат той области пространства Λ_{17} , для которой $\Delta < (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)^{-1}$. Области P_{1j} с различными j попарно не пересекаются, поэтому между P_{1j} и $P_{1, j+1}$ остаются пока неисследованные области S_{1j} , к которым мы вернемся ниже.

В тех областях пространства Λ_{17} , для которых $T_1 T_2 b < T_1 T_2^{2n} T_1 T_2 b < a$, $T_1 T_2 b < T_1 T_2^{2n} a < a$ и $\lambda_1 \lambda_2^{2n} > 1$, причем $n_1 > n$, преобразование Q_7 устойчивых неподвижных точек иметь не может и изображающая точка совершает неперiodические устойчивые по Пуассону движения. Если же $\lambda_1 \lambda_2^{2n} < 1$, то, как будет показано ниже, Q_7 в той части Λ_{17} , где $\Delta > (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)^{-1}$, простых устойчивых неподвижных точек иметь не может, а вопрос о возможности существования кратных устойчивых неподвижных точек преобразования Q_7 остается открытым.

Преобразование Q_8 , имеющее место в Λ_{18} , где $a < x_2^*$ и $T_1 T_2 b < 0$, переводит точки интервала $(0, a)$ в точки этого же интервала и распадается на линейные преобразования $T_1^m T_2^2$, $T_1^{m-1} T_2^2$, ..., $T_1 T_2^2$, $T_1^m T_2^4$, ..., $T_1 T_2^4$; ..., $T_1^m T_2^{2n}$, ..., $T_1 T_2^{2n}$ ($m > 1$, $m_1 \leq m$, $n = 1, 2, \dots$), если $0 < T_1^m T_2 b < a$ и $T_2 b < T_2^{2n} a < a$ (рис. 13). Из анализа диаграммы Ламе-рея следует, что преобразование Q_8 может иметь простыми устойчивыми неподвижными точками неподвижные точки $x_{m,2p}^*$ преобразований $T_1^m T_2^{2p}$ ($p = 1, 2, \dots$), области существования которых определяются из условия $T_1^m T_2 b < x_{m,2p}^* < a$. Отсюда в предположении, что $\lambda_1^m \lambda_2^{2p} < 1$, следует: $\alpha_1 < \Delta < \alpha_2$, где $\alpha_1 = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_1^m)^{-1}(1 - \lambda_2)^{-1}[1 - \lambda_2^{2-2p} + \lambda_1^m(\lambda_2^2 - 1)]$, $\alpha_2 = (\lambda_2^{2p} - 1)(1 - \lambda_2)^{-1}[\lambda_2^{2p} - (1 - \lambda_1^{1-m})(1 - \lambda_1)^{-1}]^{-1}$, если $\lambda_2^{2p} - (1 - \lambda_1^{1-m})(1 - \lambda_1)^{-1} > 0$.

Проверим, при каких m и p эти области действительно существуют. Для этого, заменив λ_2 на $-\lambda$, рассмотрим разность

$$\sigma_2 - \alpha_1 = (1 + \lambda)^{-1}(1 - \lambda_1^m)^{-1}[\lambda^{2p} - (1 - \lambda_1^{1-m})(1 - \lambda_1)^{-1}]^{-1}\lambda_1^{1-m}\lambda^{-2p}\gamma,$$

где $\gamma = \lambda^2 + \lambda_1^{m-1}\lambda^{2p+2} + \lambda_1^m\lambda^{2p} - \lambda^{2p} - \lambda_1^m\lambda^{2p+2} - \lambda_1^{m-1}\lambda^2$. Исследуем $\text{sgn } \gamma$ на интервале $\lambda_1 \in (0, \lambda^{-2p/m})$. Величина $\gamma(\lambda_1 = 0) = \lambda^2 - \lambda^{2p} \leq 0$ при $n \leq 2$. С другой стороны, $\gamma(\lambda_1 = \lambda^{-2p/m}) = (1 - \lambda^{2p})(1 - \lambda^{2-2p+2p/m})$ положительна, если $p < m(m-1)^{-1}$, и отрицательна, если $p > m(m-1)^{-1}$. В выражении $d\gamma/d\lambda_1 = \lambda^2\lambda_1^{m-2}\varphi$ через φ обозначим величину, равную $1 - m - m\lambda^{2p}\lambda_1 + m\lambda_1\lambda^{2p-2} + (m-1)\lambda^{2p}$, и найдем, сколько нулей может иметь φ при $\lambda_1 \in (0, \lambda^{-2p/m})$. Так как $\varphi(\lambda_1 = 0) = (1 - m)(1 - \lambda^{2p}) > 0$, $d\varphi/d\lambda_1 = m\lambda^{2p-2}(1 - \lambda^2) < 0$, то на указанном интервале φ может иметь не более одного нуля. Обозначим теперь $\varphi(\lambda_1 = \lambda^{-2p/m}) = 1 - m - m\lambda^{2p-2p/m} + m\lambda^{2p-2-2p/m} + (m-1)\lambda^{2p}$ через ψ . В силу того, что $\psi(1) = 0$ и $d\psi/d\lambda = \lambda^{2p-1}[2p(1-m)(\lambda^{-2p/m}-1) + m(2p-2-2p/m)\lambda^{-2-2p/m}] > 0$ при $p \geq m(m-1)^{-1}$, $\psi(\lambda) > 0$ для $\lambda > 1$, если $p \geq m(m-1)^{-1}$. Поэтому φ в интервале $\lambda_1 \in (0, \lambda^{-2p/m})$ нулей не имеет, $\gamma < 0$ и $\alpha_2 - \sigma_1 < 0$, если $p \geq m(m-1)^{-1}$.

Таким образом, устойчивыми могут быть лишь те неподвижные точки $x_{m,2p}^*$, для которых $p < m(m-1)^{-1} = 1 + (m-1)^{-1} \leq 2$, т. е. $p = 1$, а $m = 1, 2, \dots$. Области $P_{i,1}$ ($i = 2, 3, 4, \dots$) существования устойчивых

неподвижных точек $x_{i_1 i_2}^*$ находятся в той части пространства Λ_{18} , где $\Delta < (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)^{-1}$ и попарно не пересекаются, так как $\alpha_1(m) - \alpha_2(m+1) = (1 + \lambda_2)(1 - \lambda_1)(\lambda_1^{-m} - 1)^{-1} \lambda_2^2 [-\lambda_2^2 + (1 - \lambda_1^{-m})(1 - \lambda_1)^{-1}]^{-1} > 0$. Кроме того, область P_{21} и область P_{11} существования устойчивой неподвижной точки x_{12}^* преобразования Q_7 тоже не имеют общих точек, так как $\alpha_2(1) - \alpha_1(2) = -\lambda_1(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_1)^{-1} > 0$. Обозначим области, находящиеся между $P_{i-1,1}$ и $P_{i,1}$, через $S_{i,1}$, а область между P_{21} и P_{11} — через S_{21} .

Пусть $\lambda_1^m \lambda_2^2 > 1$. Тогда в той части пространства Λ_{18} , где $0 < T_1^m T_2 b < a$, преобразование Q_8 устойчивых неподвижных точек иметь не может и изображающая точка совершает устойчивые по Пуассону непериодические движения. Если же $\lambda_1^m \lambda_2^2 < 1$, то в области, где $0 < T_1^m T_2 b < a$ и $\Delta > (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)^{-1}$, преобразование Q_8 простых устойчивых неподвижных точек иметь не может, а вопрос о возможности существования устойчивых кратных неподвижных точек преобразования Q_8 остается открытым.

Рассмотрим теперь ту область пространства Λ , где $\Delta < (1 - \lambda_1) \times (1 - \lambda_2)^{-1}$. В этой области, как показано выше, расположены попарно непересекающиеся области существования устойчивых неподвижных точек x_{i_1, j_1}^* преобразований Q_7 и Q_8 . Области P_{i_1, j_1} отделены друг от друга областями S_{i_1, j_1} , причем область S_{i_1, j_1} находится между P_{i_1, j_1} и $P_{i_1 - \eta_1, j_1 + 1 - \eta_1}$, где $\eta_1 = \begin{cases} 1, & i_1 > 1 \\ 0, & i_1 = 1 \end{cases}$. В той части области S_{i_1, j_1} , где $\lambda_1^{i_1 - \eta_1} \lambda_2^{j_1 + 1 - \eta_1} < 1$, очевидно, $\lambda_1^{i_1} \lambda_2^{j_1} < 1$; поэтому соответствующее преобразование (Q_7 или Q_8) имеет одну точку разрыва непрерывности и распадается на два линейных преобразования $T_{i_1, j_1} = T_1^{i_1} T_2^{j_1}$ и $T_{i_1 - \eta_1, j_1 + 1 - \eta_1} = T_1^{i_1 - \eta_1} T_2^{j_1 + 1 - \eta_1}$.

Подобное преобразование прямой в прямую было исследовано в работе [1]. Согласно [1], области S_{i_1, j_1} заполнены попарно непересекающимися областями $P_{i_1, j_1, i_2, j_2} \dots P_{i_N, j_N}$ ($N = 2, 3, \dots$) существования устойчивых неподвижных точек $x_{i_1, j_1, i_2, j_2}^* \dots x_{i_N, j_N}^*$ преобразований $T_{i_1, j_1, i_2, j_2} \dots T_{i_N, j_N} = T_{i_1, j_1, \dots, i_{N-1}, j_{N-1}}^{i_N, j_N} T_{i_1, j_1, \dots, i_{N-2}, j_{N-2}, i_{N-1}, j_{N-1}}^{i_N, j_N} T_{i_1, j_1, \dots, i_{N-1}, j_{N-1}}^{i_N, j_N}$, где $i_{N-1} = \begin{cases} 1, & i_{N-1} > 1 \\ 0, & i_{N-1} = 1 \end{cases}$. При этом в областях $P_{i_1, j_1, \dots, i_N, j_N}$ преобразования Q_7 и Q_8 неподвижных точек иметь не могут, а движения изображающей точки непериодические, устойчивые по Пуассону. Можно показать, подобно тому, как это было сделано в [2], что все области $P_{i_1, j_1, \dots, i_N, j_N}$ ($N = 2, 3, \dots$) находятся в той части пространства параметров Λ , где $\Delta < (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)^{-1}$.

Таким образом, в той части пространства Λ , где $0 < \lambda_1 < 1$, $\lambda_2 < 0$, выделены области существования устойчивых неподвижных точек преобразований T_2 , $T_1^m T_2$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), $T_1 T_2^{2n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $T_1^2 T_2^3$, $T_1^m T_2^{2n-1}$ ($m = 2, 3, 4, 5, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$), $T_{i_1, j_1, \dots, i_N, j_N}$ ($N = 1, 2, \dots$), а, тем самым, области существования соответствующих им устойчивых циклов, а также области отсутствия устойчивых неподвижных точек, где изображающая точка совершает устойчивые по Пуассону непериодические движения. При этом могут одновременно существовать устойчивые неподвижные точки преобразований $T_1 T_2$ и $T_1^2 T_2^3$, а также преобразований $T_1 T_2^{2n+1}$ и $T_1 T_2^{2n+3}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Пространство параметров изображено на рис. 2.

1. $6(\lambda_1 > 1, \lambda_2 < 0)$. В этой части пространства параметров Λ преобразование Π имеет две простые неподвижные точки $x_1^* = a(1 - \lambda_1)^{-1}$ и $x_2^* = b(1 - \lambda_2)^{-1}$. При этом неподвижная точка x_1^* преобразования T_1

* Заметим, что i_1 и j_1 одновременно больше единицы быть не могут.

в данном случае всюду неустойчива, а неподвижная точка x_2^* преобразования T_2 устойчива, если $\lambda_2 > -1$, и неустойчива, если $\lambda_2 < -1$.

Рассмотрим сначала тот случай, когда $\lambda_2 > -1$ и x_2^* устойчива. Если, кроме того, $T_2 a > 0$, т. е. $\Delta < -\lambda_2^{-1}$, то преобразование Π имеет только две неподвижные точки x_1^* и x_2^* , причем интервал $(x_1^*, T_2^{-1}x_1^*)$ является областью притяжения точки x_2^* , а остальная часть оси x — областью притяжения бесконечности. Если же $T_2 a < 0$, то преобразование Π может иметь кратные неподвижные точки. Заметим, что $T_2 a > x_1^*$. Поэтому та часть оси x , для которой $x < x_1^*$ или $x > T_2^{-1}x_1^*$, является областью притяжения бесконечности, а интервал $(x_1^*, T_2^{-1}x_1^*)$ является областью ограниченных движений, которую изображающая точка в процессе движения покинуть не может.

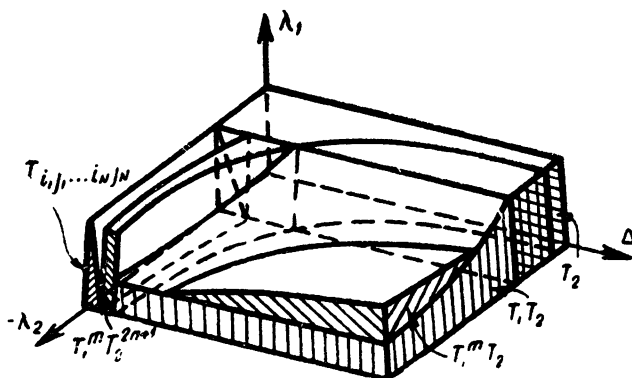


Рис. 2. Области существования устойчивых неподвижных точек преобразований T_2 , $T_1 T_2$, $T_1^m T_2$ ($m = 2, 3, \dots$), $T_1^m T_2^{2n+1}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$; $n = 1, 2, 3, \dots$), $T_{i_1 j_1 \dots i_N j_N}$ ($N = 1, 2, 3, \dots$).

Для изучения кратных неподвижных точек преобразования Π рассмотрим преобразование V , переводящее точки интервала $(T_2^{-1}0, a)$ в точки этого же интервала и распадающееся на линейные преобразования $T_1 T_2$, $T_1^2 T_2$, ..., $T_1^m T_2$. Из соответствующей диаграммы Ламерея (рис. 3а) следует, что преобразование V может иметь лишь одну устойчивую неподвижную точку, а именно — неподвижную точку x_{11}^* преобразования $T_1 T_2$, если $T_1 T_2 a > T_2^{-1}0$, т. е. если $\lambda_1 \lambda_2 > -1$ и $\Delta > -\lambda_2^{-1}$. При этом интервал $(x_1^*, T_2^{-1}x_1^*)$ разбивается сепаратрисами, идущими в точку разрыва непрерывности преобразования Π , на области притяжения устойчивой точки x_2^* и устойчивого цикла x_{11}^* , $T_2 x_{11}^*$. В том случае, если $T_1 T_2 a < T_2^{-1}0$, преобразование V устойчивых неподвижных точек иметь не может, и весь интервал $(x_1^*, T_2^{-1}x_1^*)$, за исключением некоторого множества M , является областью притяжения устойчивой неподвижной точки x_2^* . Мера множества M , если $T_1^{m+1} T_2 a > a$ и $T_1^m T_2 a < T_2^{-1}0$, вычисляется довольно просто, подобно тому, как это делалось в [2], и равна нулю. Если же из указанных неравенств хотя бы одно несправедливо, то мера множества M непосредственно не вычисляется.

Пусть теперь $\lambda_2 < -1$. Неподвижная точка x_2^* становится неустойчивой, а преобразование Π устойчивых кратных неподвижных точек иметь уже не может. Если $\Delta < 1$ и $T_2 b > x_1^*$ или $\Delta > 1$ и $T_2 a > x_1^*$, то ин-

тервал $(x_1^*, T_2^{-1}x_1^*)$ является областью ограниченных движений, из которого изображающая точка в процессе движения выйти не может, причем движение изображающей точки непериодическое, устойчивое по Пуассону. В том случае, если $T_2b < x_1^*$ или $T_2a < x_1^*$, интервал $(x_1^*, T_2^{-1}x_1^*)$, за исключением некоторого точечного множества M , является областью притяжения бесконечности. Пространство параметров изображено на рис. 3б.

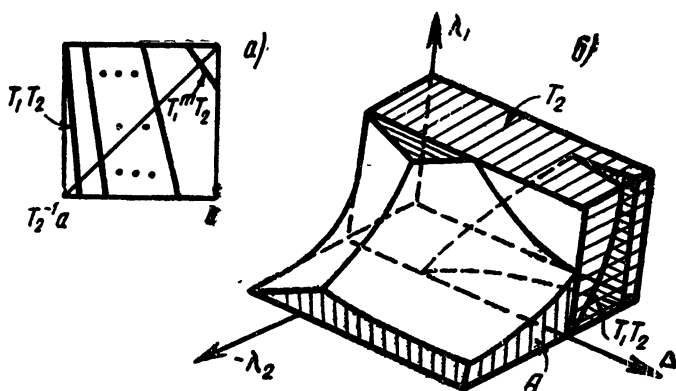


Рис. 3. а) Диаграмма Ламерея преобразования V , б) области существования устойчивых неподвижных точек преобразований T_2, T_1T_2 (A —ограниченные непериодические устойчивые по Пуассону движения).

1. 9 ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$). В этом случае преобразование Π имеет опять только одну простую неподвижную точку x_2^* . Если $\lambda_2 > -1$, то x_2^* устойчива, а из кратных неподвижных точек преобразование Π может иметь лишь две двукратные точки x_{11}^* и $T_2x_{11}^*$, образующие двучленный цикл. Если они устойчивы, что имеет место при $\lambda_1\lambda_2 < 1$, то область их существования определяется условием $\Delta > -\lambda_2^{-1}$; если же неустойчивы ($\lambda_1\lambda_2 > 1$) — то условием $\Delta < -\lambda_2^{-1}$.

В рассматриваемой части пространства параметров Λ в области $\lambda_1\lambda_2 < 1, \Delta < -\lambda_2^{-1}$ существует лишь одна простая устойчивая неподвижная точка x_2^* , областью притяжения которой является вся ось x . В области $\lambda_1\lambda_2 < 1, \Delta > -\lambda_2^{-1}$ преобразование Π имеет одновременно устойчивую неподвижную точку x_2^* и устойчивый цикл $T_2x_{11}^*, x_{11}^*$; при этом интервал $(0, T_2^{-1}0)$ является областью притяжения точки x_2^* , а остальная часть оси x — областью притяжения устойчивого двучленного цикла. В области $\lambda_1\lambda_2 > 1, \Delta < -\lambda_2^{-1}$ двучленный цикл преобразования Π неустойчив, интервал $(T_2x_{11}^*, x_{11}^*)$ является областью притяжения точки x_2^* , а остальная часть оси x — областью притяжения бесконечности. Наконец, в области $\lambda_1\lambda_2 > 1, \Delta > -\lambda_2^{-1}$ преобразование Π двучленного цикла не имеет, интервал $(0, T_2^{-1}0)$ является областью притяжения точки x_2^* , а остальная часть оси x — областью притяжения бесконечности.

Пусть теперь $\lambda_2 < -1$. Как в случае 3, для удобства исследования разделим рассматриваемую область в пространстве параметров Λ на

области Λ_{2i} , в каждой из которых вместо преобразования Π будем рассматривать соответствующее преобразование U_i .

Преобразование U_1 , имеющее место в Λ_{21} , где $a < x_2^*$ и $T_1 T_2 b < x_2^*$, отображает точки интервала $(a, T_1 T_2 b)$ в точки этого же интервала, является разрывным, кусочно-линейным и распадается на преобразования $T_1 T_2^{2n}$, $T_1 T_2^{2n+2}$, ..., $T_1 T_2^{2n_i}$ ($n = 1, 2, \dots; n_i \geq n$), если $T_1 T_2 b > T_1 T_2^{2n} a > a$ и $a < T_1 T_2^{2n_i} T_1 T_2 b < T_1 T_2 b$ (рис. 4а). Простая неподвижная точка $x_{1, 2n}^*$ преобразования U_1 существует, если $a < T_1 T_2^{2n} a$, $T_1 T_2^{2n} T_1 T_2 b < T_1 T_2 b$, и устойчива, если $\lambda_1 \lambda_2^{2n} > -1$. Из этих условий получаем выражение для области существования и устойчивости неподвижной точки $x_{1, 2n}^*$: $\xi_1 < \Delta < \xi_2$, где $\xi_1 = (1 - \lambda_2)^{-1} [1 - \lambda_2^{2-2n} - \lambda_1 (1 - \lambda_2^2)]$, $\xi_2 = (1 - \lambda_2^{-2n})(1 - \lambda_2)^{-1}$. Поскольку при этом $\xi_2(n) - \xi_1(n) = (1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2^{-2n}) > 0$, $\xi_2(n+1) - \xi_2(n) = -\lambda_2^{-2-2n}(1 + \lambda_2) > 0$, $\xi_2(n) - \xi_1(n+1) = -\lambda_1(1 + \lambda_2) < 0$, указанные области действительно существуют и попарно пересекаются. Неподвижные точки $x_{1, 2n}^*$, $x_{1, 2n+2}^*$, ..., $x_{1, 2(n+m)}^*$ могут существовать одновременно, если $\xi_2(n) - \xi_1(n+m) = (1 - \lambda_2)^{-1} \lambda_2^{-2n} \delta > 0$, где $\delta = \lambda_2^{-2n} - 1 + \lambda_1 \lambda_2^{2n} (1 - \lambda_2^2)$.

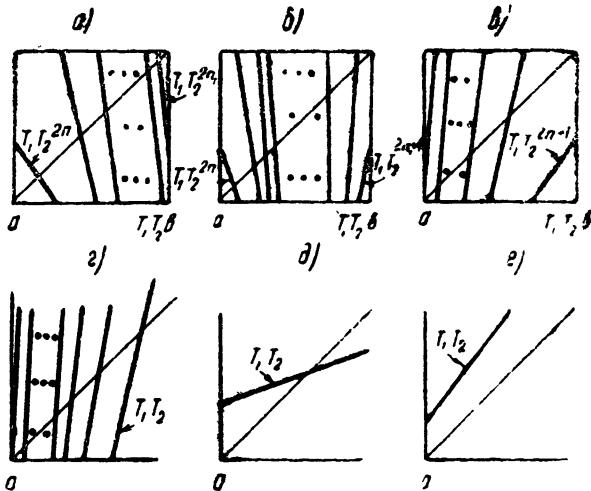


Рис. 4. Диаграммы Ламерея преобразований U_i ($i=1, 2, 3, 4$).

Пусть неподвижная точка $x_{1, 2n}^*$ устойчива. Какие неподвижные точки из одновременно существующих с ней также могут быть устойчивыми? Допустим, что точка $x_{1, 2(n+k)}^*$ устойчива, т. е. $\lambda_1 \lambda_2^{2n+2k} > -1$. Тогда неподвижные точки $x_{1, 2n}^*$, ..., $x_{1, 2(n+k)}^*$ ($1 \leq k \leq m$) могут существовать одновременно и будут устойчивыми, если $\delta > 0$. Однако два неравенства $\delta > 0$ и $\lambda_1 \lambda_2^{2n+2k} > -1$ совместны лишь в том случае, если $f(\mu) = \mu^{m-k+1}(\mu^{k-1} - 1) + \mu^{m-k} - \mu < 0$, где $\mu = \lambda_2^2$. Очевидно, $\mu^{k-1} - 1 \geq 0$ при $k \geq 1$, а $\mu^{m-k} - \mu \geq 0$ при $k \leq m-1$. Если $k=m$, то $f(\mu) = \mu^m - 2\mu + 1$, а это выражение может быть отрицательным лишь при $m=1$. Следовательно, преобразование U_1 может иметь одновременно не более двух устойчивых неподвижных точек $x_{1, 2n}^*$, $x_{1, 2n+2}^*$. Если преобразование U_1 имеет одну или две устойчивые неподвижные точки типа $x_{1, 2n}^*$,

то в силу того, что области определения соответствующих преобразований $T_1 T_2^{2n}$ являются областями притяжения неподвижных точек этих преобразований, U_1 устойчивых неподвижных точек, отличных от точек типа $x_{1,2n}^*$, иметь не может. В той части Δ_{21} , где $a < T_1 T_2^{2n} a < T_1 T_2 b$ и $\lambda_1 \lambda_2^{2n} < -1$, преобразование U_1 устойчивых неподвижных точек иметь не может, и изображающая точка совершает устойчивые по Пуассону непериодические движения. Следует также отметить, что области существования устойчивых неподвижных точек $x_{1,2n}^*$ ($n = 1, 2, \dots$) находятся в той части пространства Δ_{21} , где $\Delta < (1 + \lambda_1) \times (1 - \lambda_2)^{-1}$.

Преобразование U_2 , имеющее место в Δ_{22} , где $a < x_2^*$, $x_2^* < T_1 T_2 b < b$, отображает точки интервала $(a, T_1 T_2 b)$ в точки этого же интервала и распадается на линейные преобразования $T_1 T_2^{2n}$, $T_1 T_2^{2n+2}$, ..., $T_1 T_2^{2i}, \dots$; ..., $T_1 T_2^{2i+1}$, ..., $T_1 T_2^{2n+1}$ (рис. 4б), если $a < T_1 T_2^{2n} a < T_1 T_2 b$, $a < T_1 T_2^{2n+1} T_1 T_2 b < T_1 T_2 b$. Из простых неподвижных точек устойчивой может быть лишь точка $x_{1,2n}^*$. Вопросы существования и расположения областей устойчивости неподвижных точек $x_{1,2n}^*$ рассмотрены выше, при исследовании преобразования U_1 . Если неподвижная точка $x_{1,2n}^*$ неустойчива, т. е. $\lambda_1 \lambda_2^{2n} < -1$, и если $\lambda_1 \lambda_2^{2n+1} > 1$, то преобразование U_2 в области, где $a < T_1 T_2^{2n} a < T_1 T_2 b$ и $a < T_1 T_2^{2n+1} T_1 T_2 b < T_1 T_2 b$, устойчивых неподвижных точек иметь не может; движение изображающей точки в этом случае непериодическое, устойчивое по Пуассону. Если точка $x_{1,2n}^*$ устойчива, а $\lambda_1 \lambda_2^{2n+1} > 1$, то точка $x_{1,2n}^*$ является единственной устойчивой неподвижной точкой преобразования U_2 . Если же $\lambda_1 \lambda_2^{2n+1} < 1$, то вопрос о возможности существования устойчивых кратных неподвижных точек преобразования U_2 остается открытым.

Преобразование U_3 , имеющее место в Δ_{23} , где $a > x_2^*$, $T_1 T_2 b < b$, отображает точки интервала $(a, T_1 T_2 b)$ в точки этого же интервала и распадается на преобразования $T_1 T_2^{2n+1}$, $T_1 T_2^{2n+3}$, ..., $T_1 T_2^{2n+1}$ (рис. 4в), если $a < T_1 T_2^{2n+1} T_1 T_2 b < T_1 T_2 b$, $a < T_1 T_2^{2n+1} a < T_1 T_2 b$. Из диаграммы Ламерея следует, что преобразование U_3 может иметь единственную устойчивую простую неподвижную точку $x_{1,2n+1}^*$, если $a < T_1 T_2^{2n+1} a$, $T_1 T_2^{2n+1} T_1 T_2 b < T_1 T_2 b$. Эти условия выделяют в Δ_{23} область P_n существования устойчивой неподвижной точки $x_{1,2n+1}^*$, для которой $(1 - \lambda_2^{-1-2n})(1 - \lambda_2)^{-1} < \Delta < (1 - \lambda_2)^{-1} [1 - \lambda_2^{1-2n} - \lambda_1 (1 - \lambda_2^2)]$.

Нетрудно проверить, что области P_n ($n = 0, 1, \dots$) общих точек не имеют и все находятся в той части Δ_{23} , где $\Delta > (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)^{-1}$. Расположенную между P_{j_1} и P_{j_1+1} область, для которой $\Delta > (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)^{-1}$, обозначим через S_{j_1} . Для той части области S_{j_1} , где $\lambda_1 \lambda_2^{2j_1+3} < 1$, очевидно, $\lambda_1 \lambda_2^{2j_1+1} < 1$; поэтому преобразование U_3 имеет лишь одну точку разрыва непрерывности и распадается на два преобразования $T_{1j_1} = T_1 T_2^{2j_1+1}$ и $T_{1,j_1+1} = T_1 T_2^{2j_1+3}$.

Согласно [1], область S_{j_1} заполнена попарно непересекающимися областями $P_{j_1 i_2 j_2 \dots i_N j_N}$ ($N = 2, 3, \dots$) существования устойчивых неподвижных точек $x_{1,2j_1+1, i_2 j_2 \dots i_N j_N}^*$ преобразований $T_{1j_1 i_2 j_2 \dots i_N j_N} = T_{1j_1 \dots i_{N-1} j_{N-1}}^{i_N} T_{1j_1 \dots i_{N-2} j_{N-2} \dots i_{N-1} j_{N-1} j_{N-1}+1 \dots i_{N-1} j_{N-1}}^{j_N}$, где $i_{N-1} = \begin{cases} 1, & i_{N-1} > 1 \\ 0, & i_{N-1} = 1 \end{cases}$, причем для областей $P_{j_1 i_2 j_2 \dots i_k j_k}$ преобразование U_3 неподвижных точек иметь не может, а движение изображающей точки непериодическое, устойчивое по Пуассону. Можно также показать [2], что все

области $P_{j_1 j_2 \dots j_N}$ находятся в той части пространства параметров Λ , где $\Delta > (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)^{-1}$. Иных неподвижных точек в этой области у преобразования U_2 быть не может.

Пусть теперь $\Delta < (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)^{-1}$. Тогда при $\lambda_1 \lambda_2^{2n+1} > 1$ в области $T_1 T_2 b > T_1 T_2^{2n+1} T_1 T_2 b > a$ преобразование U_3 устойчивых неподвижных точек иметь не может; движение изображающей точки непериодическое, устойчивое по Пуассону. Если же $\lambda_1 \lambda_2^{2n+1} < 1$, то в указанной области преобразование U_3 может, вообще говоря, иметь устойчивые кратные неподвижные точки; однако вопрос о возможности их существования остается открытым.

В том случае, если $a < x_2^*$, $T_1 T_2 b > b$, что имеет место в области, где $1 - \lambda_1(1 + \lambda_2) < \Delta < (1 - \lambda_2)^{-1}$, преобразование U_3 устойчивых неподвижных точек иметь не может, ибо неравенства $1 - \lambda_1(1 + \lambda_2) < (1 - \lambda_2)^{-1}$ и $|\lambda_1 \lambda_2^n| < 1$ при $n \geq 1$ несовместны; вся ось x , за исключением некоторого точечного множества, является областью притяжения бесконечности.

Если $a > x_2^*$, $T_1 T_2 b > b$, то преобразование U_4 , переводящее точки полупрямой (a, ∞) в точки этой же полупрямой, распадается на преобразования $T_1 T_2, T_1 T_2^3, \dots, T_1 T_2^{2n+1}$ и может принимать один из видов, изображенных на рис. 4г, д, е. В этом случае преобразование U_4 может иметь лишь одну неподвижную точку x_{11}^* , если $T_1 T_2 a > a$ и $\lambda_1 \lambda_2 < 1$. Областью притяжения устойчивого цикла $T_2 x_{11}^*, x_{11}^*$ является вся ось x , за исключением точки x_2^* . В остальной части области, для которой $a > x_2^*$, $T_1 T_2 b > b$, преобразование U_4 устойчивых неподвижных точек иметь не может, а вся ось x , за исключением некоторого точечного множества, является областью притяжения бесконечности.

Таким образом, в той области пространства Λ , где $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, выделены области существования устойчивых неподвижных точек преобразований $T_2, T_1 T_2, T_1 T_2^{2n}$ ($n=1, 2, \dots$), $T_{1j_1 j_2 \dots j_N}$ ($N=2, 3, \dots$), а тем самым, области существования соответствующих им циклов, а также области отсутствия устойчивых неподвижных точек, где изображающая точка совершает устойчивые по Пуассону непериодические движения. При этом могут одновременно существовать устойчивые неподвижные точки преобразований T_2 и $T_1 T_2$, а также преобразований $T_1 T_2^{2n}$ и $T_1 T_2^{2n+2}$ ($n=1, 2, \dots$). Пространство параметров изображено на рис. 5.

При условии (II) $a < 0$, $b > 0$, случаи 1—8 интереса не представляют, так как преобразование Π при этом кратных неподвижных точек иметь не может, а движения изображающей точки—либо сходящиеся к простым устойчивым неподвижным точкам, либо уходящие в бесконечность.

В случае II. 9 ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) преобразование Π имеет две простые неподвижные точки x_1^* и x_2^* . Если $\lambda_1 > -1$ и $\lambda_2 > -1$, то они обе устойчивы; так как преобразование Π в этом случае сжимающее, то вся ось x разбивается сепаратрисами, идущими в точку разрыва непрерывности преобразования Π , на области притяжения этих устойчивых точек. Если $\lambda_1 < -1$ и $\lambda_2 < -1$, то x_1^* и x_2^* неустойчивы, а преобразование Π устойчивых кратных неподвижных точек иметь не может. Для той части пространства параметров, в которой одновременно $T_2 b > a$ и $T_1 a < b$, т. е. $-(1 + \lambda_1)^{-1} > \Delta > -(1 + \lambda_2)$, интервал (a, b) оси x является областью ограниченных непериодических движений, устойчивых по Пуассону. В процессе движения изображающая

точка не может покинуть этот интервал. Интервал (a, b) имеет свою область притяжения $T_2 x_{11}^* < x < x_{11}^*$, где x_{11}^* — неустойчивая неподвижная точка преобразования $T_1 T_2$. Остальная часть оси x является областью притяжения бесконечности. В том случае, если выполнено одно из неравенств $T_2 b < a$, $T_1 a > b$ или выполнены оба неравенства, вся ось x , за исключением некоторого точечного множества, является областью притяжения бесконечности.

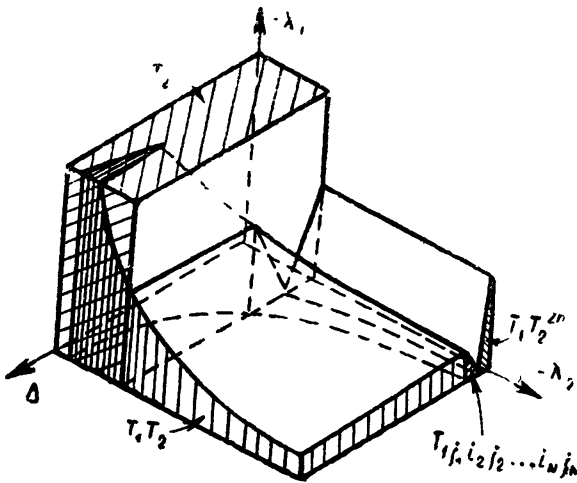


Рис. 5. Области существования устойчивых неподвижных точек преобразований T_2 , $T_1 T_2$, $T_1 T_2^{2n}$ ($n=1, 2, \dots$), $T_{1j_1 i_2 j_2 \dots i_N j_N}$ ($N = 1, 2, \dots$).

Случай, когда $\lambda_1 < -1$, $\lambda_2 > -1$, подстановкой (2) приводится к случаю, когда $\lambda_1 > -1$, $\lambda_2 < -1$. Здесь неподвижная точка x_{11}^* устойчива, а x_{11}^i — неустойчива. Если $T_2 b > T_1^{-1} 0$, т. е. $\Delta > \lambda_1(1 + \lambda_2)$, то преобразование Π может иметь двучленный цикл $T_2 x_{11}^i$, x_{11}^* , а неподвижных точек большей кратности преобразование иметь не может. Указанный двучленный цикл неустойчив, так как неподвижная точка $x_{11}^* = (a + \lambda_1 b)(1 - \lambda_1 \lambda_2)^{-1}$ должна находиться на положительной полуоси x , а это возможно лишь при $\lambda_1 \lambda_2 > 1$. При этом интервал $(T_2 x_{11}^i, x_{11}^*)$ является областью притяжения устойчивой неподвижной точки x_{11}^* , а остальная часть оси x — областью притяжения бесконечности. Если же $T_2 b < T_1^{-1} 0$, то преобразование Π может иметь кратные неподвижные точки. Для их изучения рассмотрим преобразование W , переводящее точки полупрямой $(0, \infty)$ в точки этой же полупрямой, распадающееся на преобразования $T_1 T_2^2$, $T_1 T_2^4$, ..., $T_1 T_2^{2^i}$, ..., ..., $T_1 T_2^{2^{i+1}}$, ..., $T_1 T_2^3$, $T_1 T_2$. Соответствующие диаграммы Ламерея изображены на рис. 6а для случая $T_1 T_2 b > b$ и на рис. 6б для случая $T_1 T_2 b < b$. Преобразование W может иметь при $\lambda_1 \lambda_2 > 1$ неустойчивую неподвижную точку x_{11}^* , а преобразование Π — соответствующий двучленный цикл, разделяющий ось x на область ограниченных движений и область притяжения бесконечности. Если существует неустойчивая точка x_{11}^* , то преобразование W устойчивых простых или кратных неподвижных точек иметь не может и весь интервал $(T_2 x_{11}^i, x_{11}^*)$, за исключением некоторого точечного множества, является областью притяжения устойчивой неподвижной точки x_{11}^* .

вижной точки x_1^* . Если же $\lambda_1 \lambda_2 < 1$, то бесконечность неустойчива и все движения приводят изображающую точку в ограниченную область, содержащую точку $x = 0$. При этом преобразование W может иметь единственную устойчивую простую неподвижную точку x_{12}^* , если $T_1 T_2^2 0 < < T_2^{-2} T_1^{-1} 0$, т. е. $\Delta < \lambda_1(1 + \lambda_2)$, $\lambda_1 \lambda_2^2 > -1$, а преобразование Π может иметь устойчивый трехчленный цикл $T_2^2 x_{12}^*$, $T_2 x_{12}^*$, x_{12}^* . Области притяжения устойчивой неподвижной точки x_1^* и устойчивого трехчленного цикла разделяются сепаратрисами точки разрыва непрерывности преобразования Π .

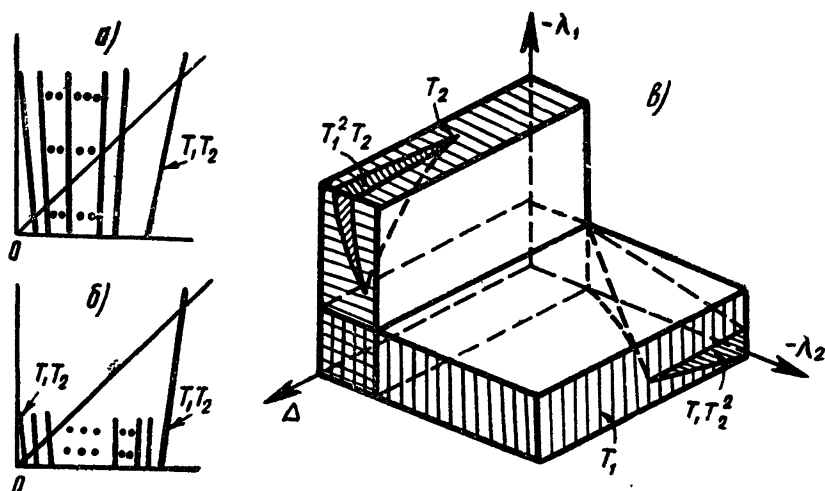


Рис. 6. а), б) Диаграммы Ламерея преобразования W , в) области существования устойчивых неподвижных точек преобразований T_1 , T_2 , $T_1^2 T_2^2$.

Итак, преобразование Π в этом случае может иметь устойчивые неподвижные точки x_1^* , x_2^* , устойчивый трехчленный цикл $T_2^2 x_{12}^*$, $T_2 x_{12}^*$, x_{12}^* и ограниченные, устойчивые по Пуассону, непериодические движения изображающей точки. Трехчленный устойчивый цикл может существовать лишь одновременно с одной устойчивой простой неподвижной точкой; простые неподвижные точки x_1^* и x_2^* могут существовать одновременно, а непериодическое, устойчивое по Пуассону, движение изображающей точки может существовать лишь в том случае, если преобразование Π не имеет устойчивых неподвижных точек. Пространство параметров изображено на рис. 6в.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 942 (1959).
2. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 496 (1960).
3. А. С. Алексеев, Н. А. Железцов, И. М. Клибанова, Труды ГИФТИ и радиофака ГГУ, 30, 206 (1956).
4. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 2, 95 (1958).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
8 марта 1960 г.

БЕССУММАТОРНЫЕ СХЕМЫ ОДНОТАКТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ДВОИЧНЫХ КОДОВ ИЗ ПРЯМОЙ ФОРМЫ В ДОПОЛНЕНИЕ И ОБРАТНО

Е. И. Мамонов

Предложены две логические схемы однотоктного бессумматорного преобразования параллельных двоичных кодов, основанные на том, что перевод двоичного числа из прямой формы в дополнение и обратно может осуществляться простой передачей всех подряд расположенных нулей и первой встретившейся единицы со стороны младших разрядов—в неизменном, а остальных цифр старших разрядов—в обратном виде. В одной из схем дополнение образуется в процессе передачи, в другой—на том же регистре, где до этого хранился исходный код.

Максимальный выигрыш времени по сравнению с сумматорным методом преобразования может достигать на практике до трех раз. Схемы открывают возможности повысить скорость выполнения операций и гибкость логической структуры автоматических вычислительных машин дискретного действия.

Преобразование прямого двоичного кода в дополнение и обратно является распространенной операцией вычислительного процесса в ряде типов автоматических цифровых счетных машин и специальных устройств управления.

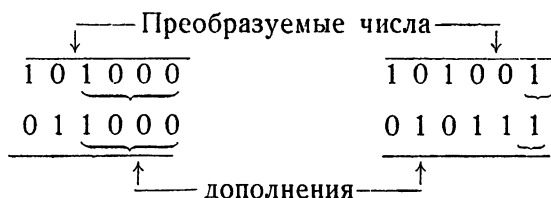
Известно, что r -ым дополнением какого-либо числа является другое число, каждая цифра которого получена путем вычитания цифр соответствующих разрядов из величины $r-1$ и последующего прибавления 1 в его младший разряд. Значение r представляет основание счисления, выбираемое из условия $r \geq 2$.

Для двоичной системы счисления вычитание цифры каждого разряда данного числа из $r-1$, т. е. из 1, в результате дает дополнение до 1 в каждом разряде. Такое число называют „обратным“, так как оно может быть получено простой заменой каждой цифры разряда на цифру, представленную обратным символом (0 на 1 и наоборот).

Применяемый в настоящее время способ получения дополнительного двоичного кода в машинах параллельного принципа действия содержит следующие такты: 1) получение обратного кода с передачей его на сумматор; 2) прибавление 1 в младший разряд числа на сумматоре. В том случае, если в итоге передачи во всех разрядах образовались 1, прибавление 1 в младший разряд вызовет сплошной поразрядный перенос (и передачу импульса по цепочке сквозного переноса в конструкциях, где она есть) с переключением триггеров. Следовательно, необходимое для одного преобразования время может быть равно максимальной длительности операции сложения. Когда необходимо оба исходных, участвующих в операции числа преобразовать в дополнение, а результат — в прямой код, требуется шесть тактов. Однако обход указанных выше преобразований за счет использования обратных кодов не всегда удобен и выгоден.

Описываемые ниже логические схемы позволяют осуществить преобразование параллельных двоичных кодов из прямого в дополнительный или обратно за один такт. При этом необходимость прибавления 1 в младший разряд и потребность в использовании сумматора совер-

шенно отпадает, что имеет существенное значение, особенно при работе с устройствами, где нет сумматора. В процессе преобразования с помощью этих схем используется известное свойство двоичной системы: все сплошь расположенные цифры младших разрядов числа, являющиеся нулями, и первая цифра 1 в следующем младшем разряде (слева от указанных нулей) передаются в состав дополнительного кода без изменений (см. фигурные скобки на примерах, указанных ниже). Все цифры остальных разрядов, находящиеся в более старших разрядах, левее от указанной единицы изменяются на обратные.



1. ЛОГИЧЕСКАЯ СХЕМА ОБРАЗОВАНИЯ ДОПОЛНЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ПЕРЕДАЧИ КОДА С РЕГИСТРА

Цепочка логических ключей I_1^* , управляемых по одному из входов напряжениями с плеч триггеров $T_0 \div T_{n-2}$ регистра, имеющих в состоянии 0 высокие потенциалы, предназначается для автоматического определения, в каком из младших разрядов числа на регистре хранится 1. Импульс „Доп“ образования дополнительного кода проходит по указанной цепочке I_1 до того разряда, триггер которого находится в положении 1. При этом со всех младших разрядов, находящихся в состоянии 0, в дополнительный код будут выданы нули, обычно изображаемые отсутствием импульсов. (Ключи I_2 , связанные с этими разрядами, будут закрыты.) Что касается следующего из младших разрядов (слева), в котором оказался на хранении код 1 (на рис. 1 разряд с триггером T_2), то импульсом, прошедшим через ключ I_2 по цепи А на выход, в состав дополнительного кода будет выдан импульс, означающий 1. Упомянутый импульс по цепи Б через разделительные ключи ИЛИ** будет воздействовать на вторые входы ключей I_3 , связанные с теми же плечами триггеров регистра, что и I_1 . Этот импульс обеспечивает через ключи I_3 выдачу обратных кодов цифр со всех старших находящихся слева от него разрядов; с тех разрядов указанной части числа, где на хранении были нули (ключи I_3 открыты по первым входам, связанным с плечами триггеров), в состав дополнительного кода будут выданы единицы, а с разрядов, где хранились единицы (ключи I_3 закрыты по первым входам), будут выданы нули. Для хранящегося на регистре (рис. 1) числа 0...1 1 0 выданным кодом будет 1...0 1 0.

Для случая, когда число имеет 1 только в старшем разряде (T_{n-1}), прошедший через всю цепочку опроса I_1 импульс достигает второго входа ключа I_2^1 , связанного с этим старшим разрядом и открытого по первому входу. Дополнительный код будет иметь то же значение 1...0 0 0.

Временные задержки импульсов, обусловленные прохождением через цепи ключей И и ИЛИ, должны быть подогнаны в заданные пределы посредством надлежащего выбора и расчета цепей. Сообразно

* Кроме применяемого названия «ключи И» подобные элементы носят название «схема совпадения», «вентиль», «клапан» и др.

** Кроме применяемого названия «ключ ИЛИ» подобные элементы носят названия «схемы объединения и разъединения», «сборка» и др.

Преобразование параллельных двоичных чисел из прямой формы в дополнение на комбинационных сумматорах несколько отличается от случая, когда используется для этой цели накопитель. На один из регистров, управляющих комбинационным сумматором, должно быть передано преобразуемое двоичное число в обратном коде. На другом регистре устанавливается код 1. По истечении времени, необходимого для суммирования, в результате получается дополнение, которое должно быть передано в накопитель или на какой-нибудь другой регистр. Здесь требуется большее количество передач и, следовательно, большее время, чем при использовании для этих целей накопителей. Это обусловлено тем, что комбинационные сумматоры не обладают функцией хранения кодов.

Предложенные цепи могут быть приспособлены также для применения с регистрами на некоторых типах динамических триггеров. В отличие от статических триггеров, входящих в схемы регистров на рис. 1 и 2, с динамических триггеров необходимо образовать два выхода, позволяющих снимать прямой и обратный коды. Это осуществляется посредством параллельного подключения к выходу динамического триггера каждого разряда ключей *И* и *НЕТ*; ключи *НЕТ* обеспечивают каналы для выдачи обратного кода.

В связи с тем, что импульсы в процессе прохождения по цепочкам *И* и *ИЛИ* запаздывают по времени, следует предусматривать сфазирование импульсов опроса и состояний триггеров.

Сокращение времени образования дополнений в обеих схемах может быть получено также за счет разбиения цепочки опроса на ряд групп.

Применение описанных схем в цифровых вычислительных машинах может быть оправдано повышением гибкости логики и выигрышем во времени за счет незначительного усложнения оборудования. В ряде устройств управления этот способ преобразования позволит исключить сумматор и, тем самым, упростить оборудование.

ФЕРРИТОДИОДНЫЕ ИМПЕДАНСНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ И ИХ СИНТЕЗ

А. М. Нечаев

Рассматривается ферритодиодный элемент с быстродействием не менее 500 кГц, с помощью которого можно построить любую логическую схему. Работа схемы любой сложности осуществляется за два такта. Разработан регулярный метод синтеза ферритодиодных схем на основе такого элемента. Рассматриваются примеры синтеза наиболее употребительных в счетнорешающих устройствах схем, выполняющих логические операции.

Настоящая статья посвящена описанию схем на ферритодиодных элементах специального типа и алгебраического метода построения таких схем. При разработке этого метода были использованы результаты работы [1]. Схемы подобного рода в [2] называются импедансными схемами с расщепленной обмоткой или схемами типа БИМАГ. Примеры таких схем имеются также в [3]. В статье приводится описание работы таких схем и значения основных параметров элементов, использованных в эксперименте. Методика технического расчета элементов в статье не приводится; необходимые указания имеются, например, в [3]. Все описываемые в статье примеры схем были собраны и проверены экспериментально.

1. В схемах с расщепленной обмоткой используется принцип изменения импеданса обмотки за счет наводимой в ней противо-ЭДС при перемангничивании тороидального сердечника T (рис. 1а). Возбуждающая обмотка сердечника разбита на две равные части v и u , включенные навстречу друг другу. Питание обмоток сердечников производится от генератора синусоидального напряжения. Начало каждой обмотки для удобства будем обозначать точкой, выходную обмотку обозначим через w .

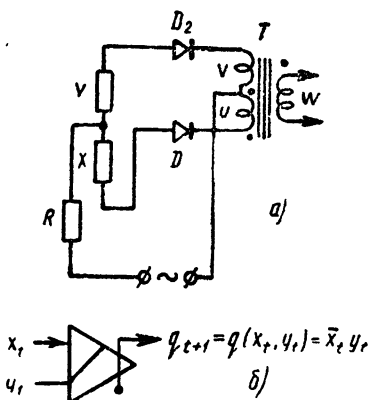


Рис. 1.

Предположим, что диоды D_1 и D_2 проводят токи в полупериодах с номерами $t, t+2, t+4, \dots$ и не проводят токов в полупериодах с номерами $t+1, t+3, \dots$. Сопротивление R служит для ограничения величины этих токов. Буквами X и Y обозначены импедансы выходных обмоток других элементов того же типа.

Работа элемента происходит следующим образом.

В полупериоде с номером t оба диода, как уже было сказано, открыты и токи в обмотках v и u определяются импедансами X и Y . При равенстве этих импедансов результирующее магнитное поле, на-

водимое этими обмотками, равно нулю и тор T не изменит своего магнитного состояния. Начальное же магнитное состояние тора T выбирается таким образом, чтобы перемагничивание сердечника происходило лишь тогда, когда ток в обмотке u существенно превышает ток в обмотке v , т. е. когда $X \ll Y$. В полупериоде $t+1$ обтекает ток выходная обмотка w . При этом направление тока выбирается таким, что перемагничивание в полупериоде $t+1$ происходит лишь в том случае, когда в полупериоде t также происходило перемагничивание. При перемагничивании сердечника импеданс обмотки w становится высоким, при сохранении магнитного состояния — низким. Поставим в соответствие импедансу выходной обмотки w в момент $t+1$ величину q_{t+1} , полагая $q_{t+1} = 1$, если этот импеданс имеет высокий уровень, и $q_{t+1} = 0$ при низком уровне импеданса. Величину q назовем приведенным импедансом.

Аналогичным образом импедансам X и Y в полупериоде t мы поставим в соответствие величины x_t , y_t , также принимающие значения 0 и 1. Тогда работа элемента опишется равенством*

$$q_{t+1} = q(x_t, y_t) = \bar{x}_t y_t. \quad (1)$$

На рис. 16 приведено условное обозначение элемента с расщепленной обмоткой, который мы назовем элементом типа q . На этом рисунке не обозначена средняя точка обмоток v и u , так как она всегда подключена к источнику питания. Условимся также обозначать точкой концы обмоток, подключаемые к источнику питания.

Следует отметить, что работа схем с расщепленной обмоткой не зависит, начиная с некоторой воличины, от напряжения источника питания. В самом деле, если при повышении напряжения питания тор T перемагнитится раньше, чем окончится полупериод тока, то далее автоматически происходит выравнивание импедансов двух параллельных ветвей цепи связи, так что дальнейшее изменение магнитного состояния тора T не происходит.

Описываемые схемы работали на частоте 500 кГц при напряжении источника питания 10÷15 в. По-видимому, схемы данного типа могут работать при частотах порядка 1÷2 мГц.

Элемент типа q , использованный в нашей работе, имеет следующие параметры: сердечник — феррит марки Л-2 ($3 \times 2 \times 1,4$)**, обмотка w — 40 витков, обмотки u и v по 7 витков. Для случая, когда обмотка u соединена непосредственно с источником питания, она имеет 7 витков, а v — 10 витков (при этом между обмоткой u и источником питания следует ставить дополнительное сопротивление, которое служит для выравнивания импедансов двух параллельных ветвей цепи связи, когда тор T не перемагничивается). При реализации схем следует отдать предпочтение диодам с низким прямым сопротивлением. Мы, например, использовали диоды $D-9D$. Балластные сопротивления имели величину 27 ом.

Заметим теперь, что если обмотки сердечников с импедансами x и y соединены параллельно, то общий приведенный импеданс такой цепи выразится равенством

$$z = xy. \quad (2)$$

Если же эти обмотки соединены последовательно, то***

$$z = xVy. \quad (3)$$

* В этой формуле черта над буквой обозначает логическое отрицание (инверсию); точкой, которую мы далее будем опускать, обозначена конъюнкция.

** Необходимо тщательно отбирать сердечники по максимуму ЭДС индукции и по минимуму помехи.

*** Знаком V обозначена дизъюнкция.

Формулы (2) и (3) позволяют строить сети, являющиеся аналогом контактных сетей [4]. Одна из этих сетей осуществляет питание входа u , другая — питание входа v .

Приведем теперь примеры построения простейших функций алгебры логики. На рис. 2а показано, как можно реализовать конъюнкцию трех переменных. Буквами x , y , z обозначены импедансы выходных обмоток других элементов того же типа. Реализация дизъюнкции показана на рис. 2б. Заметим, что практически число последовательно включенных обмоток не должно превышать 4—5. В случае надобности иметь дизъюнкцию большего числа переменных необходимо ввести дополнительные сердечники. Операция отрицания выполняется так, как это изображено на рис. 2в. Сердечник T_1 перемагничивается в каждом периоде, и, следовательно, его выходная обмотка всегда имеет высокий импеданс, т. е. по обмотке v тора T всегда течет малый ток. Применение тора T_1 позволяет улучшить отношение сигнал-помеха до 10:1 благодаря выравниванию импедансов плеч при перемагничивании тора T_2 .

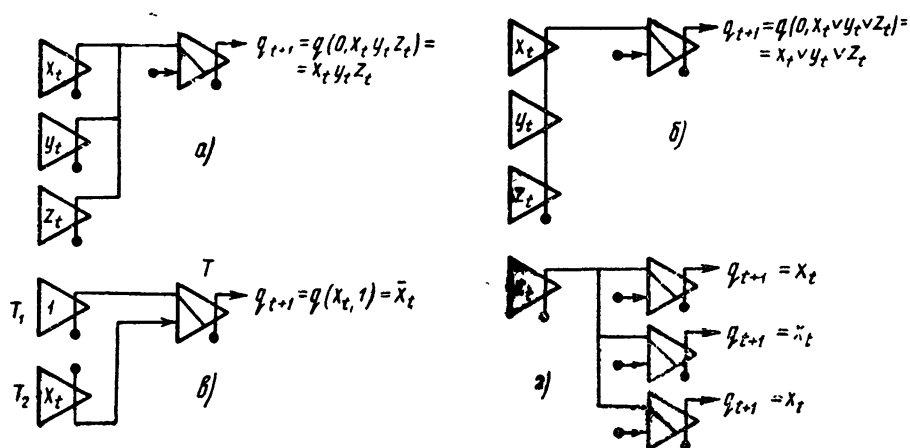


Рис. 2.

Информация с одного сердечника может передаваться на несколько сердечников (в нашем эксперименте — до 7). На рис. 2г изображена ветвь на 3 сердечника. При реализации больших ветвей полезно уменьшать сопротивление R . Одну и ту же точку ветвления следует соединять или только с обмотками u , или только с обмотками v других торов. Если схема требует смешанного соединения, то необходимо ввести дополнительный сердечник.

2. На основе элемента типа q можно реализовать любую функцию алгебры логики. При этом все функции алгебры логики могут быть реализованы за один полупериод работы генератора синусоидального напряжения. Для доказательства этого утверждения, следуя [1], рассмотрим произвольную функцию n переменных $f(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$. Известно, что любую функцию можно представить в дизъюнктивной совершенной нормальной форме*:

* Символом $\bigwedge_{i=1}^n [x_i^i]^{a_i}$ здесь обозначается выражение вида $[x_1^1]^{a_1} [x_2^2]^{a_2} \dots [x_n^n]^{a_n}$.

$$f(x_1^1, \dots, x_t^n) = \bigvee_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \bigwedge_{i=1}^n [x_t^i]^{\alpha_i}, \quad (4)$$

где $[a]^b = ab \vee \bar{a}\bar{b}$, т. е. $[a]^1 = a$, $[a]^0 = \bar{a}$. Минимальное число тактов, необходимых для реализации этой функции, совпадает с числом тактов, необходимых для реализации функции вида

$$\bigwedge_{i=1}^n [x_t^i]^{\alpha_i}, \quad (5)$$

поскольку дизъюнкция достигается последовательным соединением обмоток.

Нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$[x]^a = \bar{a} q(x, 1) \vee a q(0, x);$$

поэтому

$$\bigwedge_{i=1}^n [x_t^i]^{\alpha_i} = \bigwedge_{i=1}^n [\bar{\alpha}_i q(x_t^i, 1) \vee \alpha_i q(0, x_t^i)]. \quad (6)$$

Равенство (6) показывает, что функция вида (5), а с ними и любая функция $f(x_1^1, \dots, x_t^n)$ может быть реализована за один такт на элементах типа q . Поскольку при реализации систем с обратной связью существенно необходимо иметь два такта, то при этом приходится вводить дополнительные задержки. Учитывая это, мы будем все функции получать за два такта, тем более, что это часто позволяет сократить число элементов. Введение этой задержки приводит к формуле

$$f_{t+2} = f(x_1^1, \dots, x_t^n) = \bigvee_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) q \times \\ \times \left\{ 0, \bigwedge_{i=1}^n [\bar{\alpha}_i q(x_t^i, 1) \vee \alpha_i q(0, x_t^i)] \right\}. \quad (7)$$

Назовем эту формулу нормальной q -формой представления логической функции.

При реализации функций алгебры логики часто оказывается возможным обойтись меньшим числом сердечников, чем это требуется при реализации непосредственно нормальной q -формы.

Для упрощения оказываются полезными некоторые формулы, приводимые ниже:

$$q(x, x) = 0; \quad (8)$$

$$\bigvee_i q(R, y^i) = q(R, \bigvee_i y^i); \quad (9)$$

$$\bigvee_i q(x^i, R) = q(\bigvee_i x^i, R); \quad (10)$$

$$\bigwedge_i q(R, y^i) = q(R, \bigwedge_i y^i); \quad (11)$$

$$\bigwedge_i q(x^i, R) = q(\bigwedge_i x^i, R); \quad (12)$$

$$q(x, 1) q(0, y) = q(x, y). \quad (13)$$

Нетрудно показать также справедливость тождеств

$$q(a \vee b, c) \vee q(b, ac) = q(b, c); \quad (14)$$

$$q(a, b) \vee q(a \vee b, c) = q(a, b \vee c). \quad (15)$$

Следующая формула позволяет исключать несущественные переменные:

$$\bigvee_{a_1, \dots, a_n} q \left\{ a, b \ \& \ \bigwedge_{i=1}^n [a_i q(0, x^i) \vee \bar{a}_i q(x^i, 1)] \right\} = q(a, b), \quad (16)$$

где a, b, c — произвольные выражения. В частности, для $n=1$ получим:

$$q[a, bq(0, x)] \vee q[a, bq(x, 1)] = q(a, b).$$

Отметим также, что иногда оказываются полезными соотношения

$$q[R, q(0, a) \vee q(b, 1)] = q[q(a, b) \vee R, 1]; \quad (17)$$

$$q[R \vee q(0, a) \vee q(b, 1), 1] = q[R, q(a, b)], \quad (18)$$

где R — любая функция,

$$q(0, a) [q(x, y) \vee q(z, t)] = q(x, ay) \vee q(z, at); \quad (19)$$

$$\bigvee_{i, j=1}^n q(x^i, x^j) = q \left(\bigwedge_{k=1}^n x^k, \bigvee_{k=1}^n x^k \right). \quad (20)$$

Для $n=2$ имеем:

$$q(x^1, x^2) \vee q(x^2, x^1) = q(x^1 x^2, x^1 \vee x^2).$$

В качестве примера применения этих формул сделаем синтез двоичного дешифратора. Схема имеет 3 входа и 8 выходов, управляемых по законам, которые удобно записать в виде:

$$f^{a_3, a_2, a_1} = [x^1]^{a_1} [x^2]^{a_2} [x^3]^{a_3}, \quad (21)$$

где a_1, a_2, a_3 принимают значения 0 или 1 независимо друг от друга. Так как для получения всех 8 выходных функций нам понадобится реализовать все 8 произведений вида (21), мы воспользуемся для синтеза формулой (7):

$$f^{a_3, a_2, a_1} = q \left\{ 0, \bigwedge_{i=1}^3 [\bar{a}_i q(x^i, 1) \vee a_i q(0, x^i)] \right\}.$$

Соответствующая схема, где точки с одинаковыми буквами предполагаются непосредственно соединенными, приведена на рис. 3.

Для того, чтобы перейти к синтезу непримитивных схем, выведем формулы перехода к q -формам непосредственно от соответствующих матриц, аналогично тому, как это сделано в [1]. Известно, что для двухтактных схем можно написать уравнения непримитивной схемы в форме:

$$f_{t+2}^i = f^i(x_t^1, \dots, x_t^n, \varphi_t^1, \dots, \varphi_t^s) \quad (i = 1, 2, \dots, p);$$

$$\varphi_{t+2}^j = \varphi^j(x_t^1, \dots, x_t^n, \varphi_t^1, \dots, \varphi_t^s) \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Для получения искомых формул разложим выражение

$$\varphi^j(x_t, \varphi_t) = \bigvee_{\substack{\alpha_{s'} \dots \alpha_1; \beta_{s'} \dots \beta_1 \\ \beta_{s'} \dots \beta_1; \beta_j=1}} \alpha_{s'} \dots \alpha_1 \bigwedge_{i=1}^n [\varphi_t^i]^{\alpha_i}$$

по переменным $x^1, x^2, \dots, x^n$.

$$\varphi^j(x_i, \varphi_i) = \bigvee_{\substack{\alpha_{s'}, \dots, \alpha_1 \\ \beta_{s'}, \dots, \beta_1; \beta_j=1 \\ \gamma_{n'}, \dots, \gamma_1}} a_{\alpha_{s'}, \dots, \alpha_1; \beta_{s'}, \dots, \beta_1} (\gamma_{n'}, \dots, \gamma_1) \bigwedge_{i=1}^s \bigwedge_{k=1}^n [\varphi_i^j]^{\alpha_i} [x_t^k]^{\gamma_k}.$$

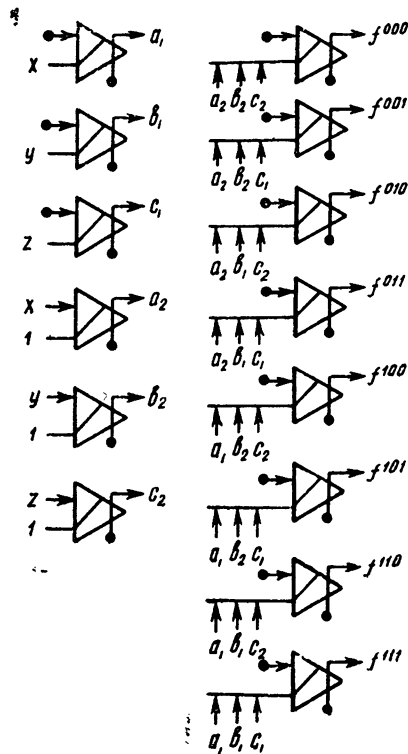


Рис. 3.

Нормальная q -форма будет иметь вид:

$$\varphi^j(x_i, \varphi_i) = \bigvee_{\substack{\alpha_{s'}, \dots, \alpha_1 \\ \beta_{s'}, \dots, \beta_1; \beta_j=1 \\ \gamma_{n'}, \dots, \gamma_1}} a_{\alpha_{s'}, \dots, \alpha_1; \beta_{s'}, \dots, \beta_1} (\gamma) q \left\{ 0, \bigwedge_{i=1}^s \bigwedge_{k=1}^n [\bar{a}_i q(\varphi_i^j, 1) \vee \right. \\ \left. \vee a_i q(0, \varphi_i^j)] [\bar{\gamma}_k q(x_t^k, 1) \vee \gamma_k q(0, x_t^k)] \right\}; \quad (22)$$

аналогично для выходов

$$f^i(x_i, \varphi_i) = \bigvee_{\substack{\alpha_{n'}, \dots, \alpha_1 \\ \beta_{n'}, \dots, \beta_1; \beta_i=1 \\ \gamma_{s'}, \dots, \gamma_1}} l_{\alpha_{n'}, \dots, \alpha_1; \beta_{n'}, \dots, \beta_1} (\gamma) q \left\{ 0, \bigwedge_{j=1}^n \bigwedge_{k=1}^s [\bar{a}_j q(x_t^j, 1) \vee \right. \\ \left. \vee a_j q(0, x_t^j)] [\bar{\gamma}_k q(\varphi_i^k, 1) \vee \gamma_k q(0, \varphi_i^k)] \right\}. \quad (23)$$

Для иллюстрации применения этих формул построим схему, логи-

чески эквивалентную схеме магнитного пускателя. Матрица состояний имеет вид:

$$A(x, y) = \left\| \begin{array}{cc} \bar{x} V y & x \bar{y} \\ y & \bar{y} \end{array} \right\|,$$

а соответствующая q -форма (по формуле (22)):

$$\varphi = \bigvee_{\alpha, \beta=1} a_{\alpha, \beta}(\gamma_1, \gamma_2) q \{ 0, [\alpha q(\varphi, 1) \vee \alpha q(0, \varphi)] \times \\ \times [\bar{\gamma}_1 q(x, 1) \vee \gamma_1 q(0, x)] [\bar{\gamma}_2 q(y, 1) \vee \gamma_2 q(0, y)] \}.$$

Поскольку $a_{01}(1,1)=a_{01}(0,1)=a_{01}(0,0)=a_{11}(1,1)=a_{11}(0,1)=0$, а $a_{01}(1,0)=a_{11}(0,0)=a_{11}(1,0)=1$, то получим:

$$\varphi = q[0, q(0, x) q(y, 1) q(\varphi, 1)] \vee q[0, q(x, 1) q(y, 1) q(0, \varphi)] \vee \\ \vee q[0, q(0, x) q(y, 1) q(0, \varphi)].$$

Последовательно пользуясь формулами (11) – (13), (9), (14) и (15), упростим это выражение:

$$\varphi = q[0, q(0, x) q(y \vee \varphi, 1)] \vee q[0, q(x \vee y, 1) q(0, \varphi)] \vee q[0, q(0, x \varphi) q(y, 1)] = \\ = q[0, q(y \vee \varphi, x)] \vee q[0, q(x \vee y, \varphi)] \vee q[0, q(y, x \varphi)] = \\ = q[0, q(y \vee \varphi, x) \vee q(x \vee y, \varphi) \vee q(y, x \varphi)] = \\ = q[0, q(y \vee \varphi, x) \vee q(y, \varphi)] = q[0, q(y, x \vee \varphi)].$$

Схема магнитного пускателя показана на рис. 4*.

Проведем синтез схемы последовательного сумматора. Матрица состояний и матрица реакций соответственно имеют вид:

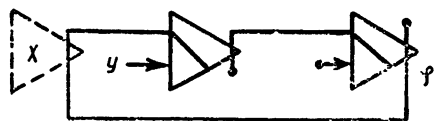


Рис. 4.

$$A(x, y) = \left\| \begin{array}{cc} \bar{x} V \bar{y} & x y \\ \bar{x} \bar{y} & x V y \end{array} \right\|;$$

$$L(\varphi) = \left\| \begin{array}{cc} \bar{\varphi} & \varphi \\ \varphi & \bar{\varphi} \end{array} \right\|.$$

Воспользовавшись формулами (22) и (23), получаем нормальные q -формы:

$$\varphi = q[0, q(0, x) q(0, y) q(\varphi, 1)] \vee q[0, q(0, x) q(y, 1) q(0, \varphi)] \vee \\ \vee q[0, q(x, 1) q(0, y) q(0, \varphi)] \vee q[0, q(0, x) q(0, y) q(0, \varphi)]; \\ f = q[0, q(x, 1) q(y, 1) q(0, \varphi)] \vee q[0, q(0, x) q(0, y) q(0, \varphi)] \vee \\ \vee q[0, q(x, 1) q(0, y) q(\varphi, 1)] \vee q[0, q(0, x) q(y, 1) q(\varphi, 1)].$$

* Элемент, выходной импеданс которого обозначен буквой x , на рис. 4 показан пунктиром для того, чтобы пояснить реализацию дизъюнкции $x \vee \varphi$.

С помощью формул (11) — (15) и (9) для φ и (11)—(13), (19) и (20) для f упростим эти выражения и получим:

$$\varphi = q[0, q(0, xy) \vee q(0, x\varphi) \vee q(0, y\varphi)];$$

$$f = q[q(0, x) q(y\varphi, y \vee \varphi), q(0, x) \vee q(y\varphi, y \vee \varphi)].$$

Схема сумматора приведена на рис. 5*.

Синтезируем бинарное пересчетное устройство. Эта схема имеет один вход и 2^s состояний (0, 1, 2, ..., 2^s-1). При отсутствии возбуждения входа состояние схемы сохраняется. При возбуждении входа схема переходит в следующее состояние, причем для состояния 2^s-1 им является состояние с номером 0. Схема имеет s обратных связей и матрицу состояний

$$A(x) = \left\| \begin{array}{cccccc} \bar{x} & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{x} & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{x} & x \\ x & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{x} \end{array} \right\|.$$

После упрощения нормальных q -форм, полученных с помощью формулы (22), имеем:

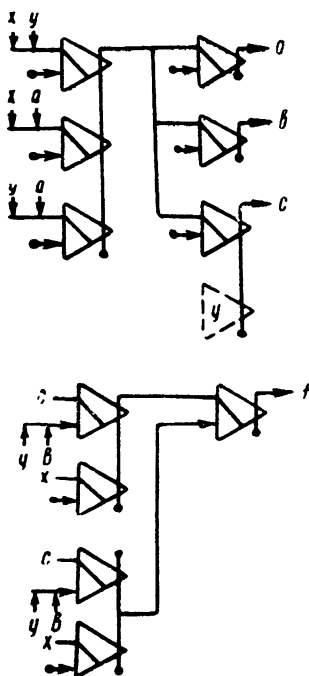


Рис. 5.

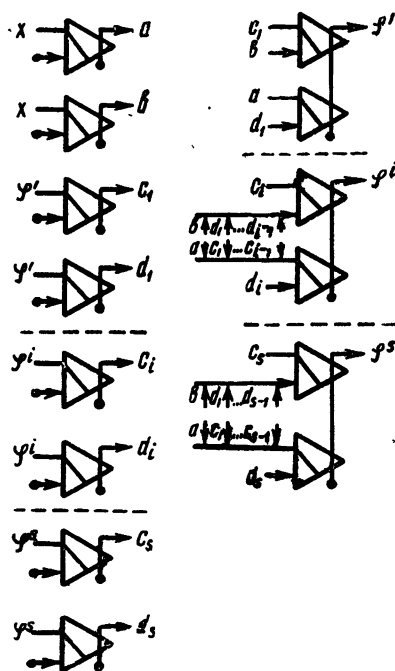


Рис. 6.

* Элемент, обозначенный пунктиром, введен из тех же соображений, что и на рис. 4.

$$\varphi^i(x, \varphi^1, \dots, \varphi^s) = q \left[q(0, x) \&_{k=1}^{i-1} q(0, \varphi^k), q(0, \varphi^i) \right] V \\ V q \left[q(0, \varphi^i), q(0, x) \&_{k=1}^{i-1} q(0, \varphi^k) \right].$$

Соответствующая схема изображена на рис. 6. Точки с одинаковыми буквами предполагаются непосредственно соединенными.

В заключение автор выражает признательность М. Л. Цетлину и Л. М. Шехтману, предложившим тему работы и давшим ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Цетлин и Л. М. Шехтман, Проблемы кибернетики, 3, 89 (1960).
2. W. Miehle, J. Paivinen, J. Wyle, Convent. Record IRE, 3, 4, 70 (1955).
3. З. И. Заволокина, Магнитные элементы в цифровых вычислительных устройствах, Госэнергоиздат, М., 1958.
4. В. И. Шестаков, ЖТФ, 11, 532 (1941).

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
29 декабря 1959 г.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

О ВЛИЯНИИ ГЕОМАГНИТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ДРЕЙФ ИОНИЗИРОВАННОГО ГАЗА В ВЕРХНЕЙ АТМОСФЕРЕ

В. П. Докучаев

В ряде работ экспериментально исследована корреляция скоростей дрейфа ионизированного газа в ионосфере с вариациями напряженности магнитного поля Земли на ее поверхности [1—4]. Установлено, что с ростом геомагнитной активности, которую удобно характеризовать K -индексом, увеличиваются скорости дрейфа ионосферной плазмы. В E -области ионосферы это возрастание скорости дрейфа незначительно, в то время как в F -области, и особенно в области, ответственной за мерцание радиозвезд, оно хорошо заметно.

На рис. 1 приведены экспериментальные данные о корреляции скоростей дрей-

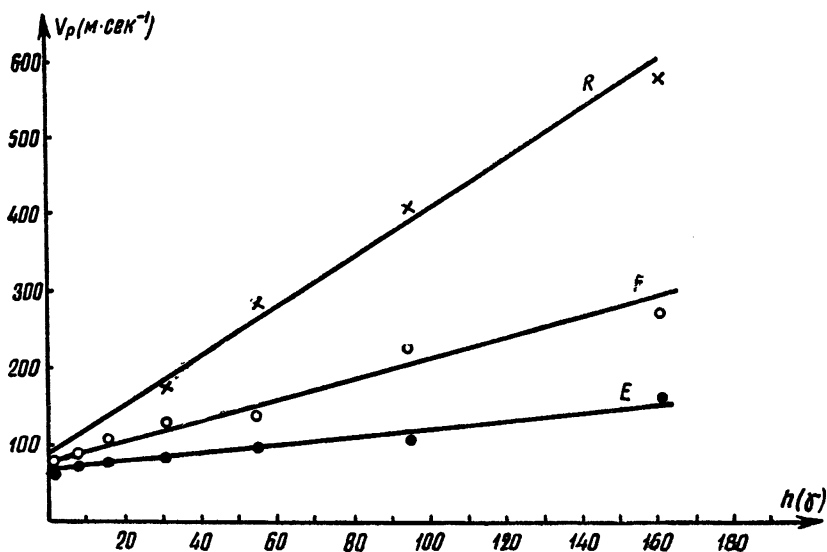


Рис. 1. Зависимость величины скорости дрейфа V_p от амплитуды геомагнитного возмущения h : E —для E -области ионосферы; F — для F -области; R —для области, которой обусловлено мерцание радиозвезд.

фа в различных областях ионосферы с геомагнитными возмущениями. На этом рисунке представлена зависимость величины скорости дрейфа V_p от h —средней амплитуды возмущения напряженности магнитного поля Земли H_0 . Заметим, что обычно в работах приводят зависимость скорости непосредственно от K -индекса, который является, в свою очередь, нелинейной функцией усредненной амплитуды геомагнитного возмущения.

Из данных, представленных на рис. 1, можно сделать следующие выводы. Во всех областях ионосферы связь между величиной скорости дрейфа и амплитудой геомагнитного возмущения является линейной. Исключение составляют данные работы [4] для E -области. Коэффициент пропорциональности между V_p и h увеличивается с ростом высоты исследуемой области. Наконец, точки пересечения прямых линий с осью ординат расположены тем выше, чем выше над поверхностью Земли находится область ионосферы.

Все эти результаты эксперимента можно сравнительно легко объяснить, исходя из следующих физических представлений о связи геомагнитных возмущений со скоростями дрейфа.

Известно, что геомагнитные возмущения обусловлены воздействием солнечных корпускулярных потоков на внешнюю атмосферу Земли (экзосферу) [5—7]. Низкочас-

тотные возмущения в экзосфере с квазипериодом больше 10 сек носят магнитогиродинамический характер. В нижележащие области атмосферы и в ионосферу эти возмущения распространяются путем диффузии электромагнитных полей и, достигая поверхности Земли, обуславливают вариации геомагнитного поля. С другой стороны, известно также, что электрическое поле вызывает дрейф ионизированного газа в ионосфере [8]. Таким образом, солнечные корпускулярные потоки возбуждают магнитогиродинамические возмущения в экзосфере, которые распространяются через ионосферу в виде электромагнитных волн и создают на поверхности Земли вариации геомагнитного и электрического полей. Электрические поля этих возмущений при прохождении ими ионосферы вызывают дрейф ионизированного газа.

Рассмотрим с количественной стороны этот механизм влияния низкочастотных электромагнитных полей на движение плазмы в различных областях ионосферы. При этом будем интересоваться только компонентой напряженности электрического поля, перпендикулярной к силовым линиям магнитного поля Земли, так как продольная компонента $E_{\parallel}$ испытывает сильное поглощение. Уравнение, описывающее процесс распространения электрического поля $E_{\perp}$, имеет вид [9]:

$$\nabla^2 E_{\perp} = \frac{4\pi\sigma_{\perp}}{c^2} \frac{\partial E_{\perp}}{\partial t}, \quad (1)$$

где $\sigma_{\perp}$ — электропроводность среды в направлении, перпендикулярном к магнитному полю H_0 [9]. Связь между напряженностями электрического и магнитного полей в возмущении, а также токи проводимости, вызываемые ими в ионосфере, определяются известными уравнениями:

$$\operatorname{rot} h = \frac{4\pi}{c} j; \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial h}{\partial t}; \quad j = \sigma_{\perp} E_{\perp}. \quad (2)$$

Всюду мы пренебрегаем токами смещения, так как рассматриваем экстремально низкочастотные процессы, когда $\omega \ll \sigma_{\perp}$. Уравнение движения ионизированной компоненты ионосферной плазмы имеет вид [10]:

$$\rho_p \nu_{im} V_p = \frac{1}{c} [j H_0], \quad (3)$$

где $\rho_p = Nm_i$ — плотность ионов в плазме, ν_{im} — число соударений ионов с молекулами (или атомами).

Будем рассматривать отдельную гармоническую составляющую электромагнитного возмущения, для которой $h, E_{\perp} \sim e^{i(\omega t - kz)}$. При этом из уравнения (1) легко установить дисперсионную связь между частотой ω и волновым числом k : $k^2 = 4\pi i \omega \sigma_{\perp} / c^2$. Из уравнений (2) и (3) находим связь скорости дрейфа V_p с электрическим полем геомагнитного возмущения:

$$V_p = \frac{\sigma_{\perp}}{\rho_p \nu_{im} c} [E_{\perp} H_0]. \quad (4)$$

Далее из уравнений (2), воспользовавшись дисперсионным соотношением, легко установить связь величины скорости дрейфа с напряженностью магнитного поля в волне:

$$V_p = \left[\frac{H_0^2}{4\pi \rho_p c} \frac{\sqrt{2\pi \sigma_{\perp} \omega}}{\nu_{im}} \right] \frac{h}{H_0}. \quad (5)$$

Исходя из этой формулы, можно оценить коэффициент пропорциональности между скоростью V_p и напряженностью магнитного поля h и сравнить с экспериментальными данными, представленными на рис. 1.

В F -области ионосферы, принимая $\sigma_{\perp} = 3 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}$, $\nu_{im} = 0,1 \text{ сек}^{-1}$, $T = 1,08 \cdot 10^4 \text{ сек}$, $N = 10^6 \text{ см}^{-3}$, $H_0 = 0,4 \text{ эрстед}$, получим, что $V_p = 1,8h$, где V_p измеряется в $\text{м} \cdot \text{сек}^{-1}$ и h — в гаммах ($1\gamma = 10^{-5} \text{ эрстед}$). Экспериментальные данные рис. 1 дают $V_p = 1,4h$. Для E -области ионосферы $\sigma_{\perp} = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$, $\nu_{im} = 6 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$, $N = 2,5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$; при этом получается, что $V_p = 0,4h$. Экспериментальное значение коэффициента пропорциональности, найденное из рис. 1, равно 0,5. Особенно хорошо видно на рис. 1 возрастание наклона прямой линии по отношению к оси h для области мерцания радиозвезд. Однако отсутствие надежных данных для ν_{im} , $\sigma_{\perp}$ и N для этой области не позволяет провести оценок этого эффекта. Большое значение коэффициента пропорциональности для этой области является, на наш взгляд, косвенным подтверждением того факта, что область, ответственная за мерцание радиозвезд, расположена выше F_2 -области ионосферы. При $h=0$ скорость тем больше, чем выше расположена исследуемая область.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. H. Briggs, M. Spencer, Rep. Progr. Phys., **17**, 245 (1954).
2. K. Tsukamoto, J. Ogato, Rep. Ionosph. Sp. Res. Japan, **13**, 48 (1959).
3. В. А. Чеча, В. Е. Зеленков, сб. Дрейфы и неоднородности в ионосфере, изд. АН СССР, 1959, стр. 50.
4. J. H. Chapman, Canadian J. Phys., **31**, 120 (1953).
5. J. W. Dungey, Ionosph. Res. Lab. Pens. State Union, Sci. Rep., 69 (1954).
6. T. Obayashi, Rep. Ionosph. Res. Japan, **12**, 301 (1958).
7. J. H. Piddington, Geophys. J., **2**, 173 (1959).
8. D. F. Martyn, Phil. Trans. Roy. Soc., **A246**, 306 (1953).
9. Б. Н. Гершман, В. П. Докучаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 843 (1959).
10. Б. Н. Гершман, В. Л. Гинзбург, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 8 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
23 июня 1960 г.

РАССЕЯНИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ ВОЛН НА СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

В. А. Зверев

Изучение распространения модулированной волны позволяет определить степень корреляции флуктуаций волн на разных частотах. Определить степень корреляции можно, например, на основании измерения среднего квадрата фазового инварианта [1]

$$\Theta = \varphi_0 - (\varphi_1 + \varphi_2) / 2, \quad (1)$$

где φ_0 —фаза несущей, $\varphi_{1,2}$ —фаза боковых составляющих.

При полной корреляции флуктуаций фазы флуктуации фазового инварианта отсутствуют; в случае полного отсутствия корреляции

$$\overline{\Theta^2} = (3/2) \overline{\varphi^2}. \quad (2)$$

В ряде случаев о величине $\overline{\varphi^2}$ можно судить по среднему квадратичному значению флуктуаций уровня принимаемого сигнала.

Измерения фазового инварианта дают сведения о степени корреляции флуктуаций фазы. Однако в случае рассеяния на слабых неоднородностях корреляционные функции рассеянного поля, фазы и амплитуды на большом расстоянии от рассеивающего объема совпадают. Достаточным условием совпадения корреляционных функций поля и фазы является малость модуля среднеквадратичной флуктуации комплексной фазы.

Определим корреляции рассеянных полей на разных частотах. Будем считать, что угол ϑ , под которым наблюдается рассеяние, не зависит от частоты и что в среде отсутствует дисперсия.

В предположении, что рассеяние происходит на слабых неоднородностях на большом расстоянии от рассеивающего объема, рассеянное поле можно записать в виде:

$$E = \frac{E_0 k_0^2 \sin \alpha}{4\pi R} \varepsilon_k, \quad (3)$$

где E_0 —амплитуда падающей волны, k_0 —волновой вектор падающей волны, α —угол, характеризующий поляризацию, R —расстояние до рассеивающего объема,

$$\varepsilon_k = \int_V \Delta\varepsilon(x, y, z) e^{iKr}. \quad (4)$$

Здесь $\Delta\varepsilon$ —флуктуация показателя преломления; $K = k_0 - k$, где k —волновой вектор рассеянного поля и

$$|K| = 2k_0 \sin(\vartheta/2). \quad (5)$$

Искомую корреляцию определим как

$$\overline{E(k_1) E(k_2)} = \frac{E_0^2 k_1^2 k_2^2 \sin \alpha}{(4\pi R)^2} \frac{1}{\varepsilon_{k_1} \varepsilon_{k_2}^*}. \quad (6)$$

Остается вычислить величину, обозначенную нами через $\overline{\varepsilon_{k_1} \varepsilon_{k_2}^*}$. На основании (4) имеем:

$$\overline{\varepsilon_{k_1} \varepsilon_{k_2}^*} = \iiint_V \Delta \varepsilon(x_1, y_1, z_1) \Delta \varepsilon(x_2, y_2, z_2) e^{i(K_1 r_1 - K_2 r_2)} dV_1 dV_2. \quad (7)$$

Обозначим

$$K_1 - K_2 = \Delta K; \quad r_1 - r_2 = r. \quad (8)$$

При этом, так как $K_1 \parallel K_2$, $|\Delta K| = 2\Delta k \sin(\theta/2)$. Пусть функция корреляции флуктуаций показателя преломления имеет вид:

$$\overline{\Delta \varepsilon(x_1, y_1, z_1) \Delta \varepsilon(x_2, y_2, z_2)} = (\overline{\Delta \varepsilon})^2 \rho(r).$$

Тогда

$$\overline{\varepsilon_{k_1} \varepsilon_{k_2}^*} = \iiint_V (\overline{\Delta \varepsilon})^2 \rho(r) e^{iK_1 r} e^{i\Delta K r_2} dV_1 dV_2. \quad (9)$$

В (8) можно провести интегрирование по разностям координат. Обозначим через $(\varepsilon_k)^2$ величину

$$(\varepsilon_k)^2 = (\overline{\Delta \varepsilon})^2 V \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r) e^{iK_1 r} d\xi d\eta d\zeta, \quad (10)$$

где ξ, η, ζ — разности координат. С учетом (9) выражение (8) можно переписать в виде:

$$\overline{\varepsilon_{k_1} \varepsilon_{k_2}^*} = (\varepsilon_k)^2 \frac{1}{V} \int_V e^{i\Delta K r_2} dV. \quad (11)$$

Интеграл в (10) представляет собою фурье-сопряженную от формы всего рассеивающего объема. Измерив частотную корреляцию, можно получить сведения об этой фурье-сопряженной, а следовательно, и о форме рассеивающего объема.

Для получения оценочных формул предположим, что рассеивающий объем имеет сферическую форму с радиусом R . В таком случае

$$\overline{\varepsilon_{k_1} \varepsilon_{k_2}^*} = (\varepsilon_k)^2 \frac{2}{(\Delta k R)^2} \left[\frac{\sin(\Delta k R)}{\Delta k R} - \cos(\Delta k R) \right], \quad (12)$$

где величина Δk равна $2c^{-1}(\omega_1 - \omega_2) \sin(\theta/2)$.

Для модулированных колебаний $\omega_1 - \omega_2 = \Omega$, где Ω — частота модуляции. Величина $\Delta k R$ при неизменном θ пропорциональна отношению поперечника рассеивающего объема $2R$ к длине волны на частоте модуляции. В случае, если длина волны на частоте модуляции больше поперечника рассеивающего объема, рассеянные несущая и боковые частоты будут коррелированы и флуктуации величины θ будут очень малы. В случае же, если длина волны на частоте модуляции значительно меньше поперечника рассеивающего объема (так что $\Delta k R \gg 1$), флуктуации θ будут достигать максимальной величины.

Таким образом, изучение рассеяния модулированных волн может дать информацию о порядке величины рассеивающего объема (и об его форме), что важно при экспериментальном решении вопроса о механизме возникновения рассеянного поля.

Частотная корреляция флуктуаций определяется мгновенной конфигурацией показателя преломления внутри рассеивающего объема. В силу этого рассмотренный эффект не зависит от движения неоднородностей в том случае, если это движение медленное по сравнению с процессом распространения волн через объем.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Зверев, ДАН СССР, **91**, 791 (1953).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 мая 1960 г.

О ВОЗМОЖНОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ СВОБОДНОЙ ЯДЕРНОЙ ИНДУКЦИИ УЛЬТРАЗВУКОВЫМ ИМПУЛЬСОМ

Н. Г. Колоскова, У. Х. Копвиллем

В последнее время стационарные методы акустического магнитного резонанса широко используются для исследования спин-решеточного взаимодействия $H_{\text{ср}}$ в кристаллах [1,2]. В настоящей заметке с целью выяснения возможностей использования

импульсной ультразвуковой техники для возбуждения спин-системы парамагнетика и измерения величины взаимодействия $H_{\text{ср}}$ рассмотрен характер изменения макроскопических компонент намагниченности $\langle \mu_\alpha \rangle$ вдоль осей $\alpha = x, y, z$ под действием звукового импульса длительности Δt , несущая частота $n\omega_0$ ($n = 1, 2$) которого кратна частоте $\omega_0 = \gamma H_0$ ларморовой прецессии спинов s в сильном статическом магнитном поле $H_0 \parallel z$ (γ — гиромагнитное отношение).

Пусть продольная звуковая волна распространяется вдоль оси (110) цилиндрического образца кристалла с кубической решеткой, содержащего N одинаковых магнитных ядер, обладающих электрическим квадрупольным моментом Q . Направления z и y определим соответственно сферическими координатами, θ, φ и $3\pi/2 + \theta, \varphi$, где (110) — полярная ось и φ — азимутальный угол, отсчитываемый от (001). Предположим, что для времен поперечной (T_2), продольной (T_1) парамагнитной релаксации и установления стоячих звуковых волн в кристалле (t_v) выполнены неравенства $T_1, T_2 \gg t_v$, $\Delta t \gg 2\pi/\omega_0$. Мы получим тогда следующие уравнения движения для величин $\langle \mu_\alpha \rangle_n$ ($n = 1, 2$) при $s = 3/2$ в зависимости от Δt :

$$\langle \mu \rangle_1 = \frac{\sqrt{3} N \gamma \hbar \zeta}{4} \left\{ \zeta \sin(2\sqrt{3} \omega_1 \Delta t) [x \cos(\omega_0 t) - y \sin(\omega_0 t)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} [\cos(2\sqrt{3} \omega_1 \Delta t) + 4] z \right\} \quad (\zeta = \gamma \hbar H_0 / kT); \quad (1)$$

$$\langle \mu \rangle_2 = N \gamma \hbar \zeta [\cos(2\sqrt{3} \omega_2 \Delta t) + 1] z; \\ \omega_1 = [-16s(2s-1)\hbar]^{-1} 9eQ(1-\gamma_\infty) C_{11} \sin(2\theta) E_{01}; \\ \omega_2 = [-8s(2s-1)\hbar]^{-1} eQ(1-\gamma_\infty) \left[\frac{3}{4} + \frac{C_{44}}{C_{11}} \right] C_{11} E_{02}; \quad (2) \\ E_{0n} \sim \frac{n\omega_0 A_0}{v}; \quad W_n = \frac{1}{2} \rho v^3 E_{0n}^2.$$

Формула (2) относится к случаю $x \parallel (110)$. Здесь W_n — мощность звуковой волны, приходящаяся на 1 см^2 , ρ — плотность кристалла, v — скорость распространения продольной звуковой волны, A_0 — обусловленная звуком амплитуда смещения основания цилиндра (см. [3]), C_{11} и C_{44} — элементы тензора, связывающего градиент электрического поля на ядрах с тензором деформаций, обусловленных ультразвуком [3], e — заряд электрона, γ_∞ — постоянная антиэкранирования [4], x, y, z — единичные орты, k — постоянная Больцмана и T — температура. Предполагается, что $C_{44}/C_{11} = 3/4$ [3].

После выключения звукового генератора x - и y -компоненты макроскопического вектора $\langle \mu \rangle_1$ будут осциллировать с частотой ω_0 и затухать за время спиновой „фазовой памяти“, которое определяется диполь-дипольными и другими спин-спиновыми взаимодействиями $H_{\text{ср}}$.

Конкретные расчеты, выполненные для ядер Br^{79} в кристалле KBr , показывают, что интенсивность сигнала (1) равна интенсивности обычного сигнала ядерной индукции при комнатной температуре, если $T \sim 1,4^\circ \text{K}$ и $H_0 \sim 10^4$ гс. Компонента $\langle \mu_z \rangle_n$ ($n = 1, 2$) может быть измерена при комнатных температурах, если ее „повернуть“ мощным высокочастотным магнитным импульсом в плоскость xu .

Отметим, что ультразвуковой импульс возбуждает также осцилляции неравновесных компонент электрического квадрупольного момента спин-системы. Однако интенсивности соответствующих сигналов очень мала, и они могут быть непосредственно обнаружены только при $T \sim 10^{-5}^\circ \text{K}$.

Измерение интенсивности сигнала $\langle \mu_x x + \mu_y y \rangle_1$ или „повернутых“ сигналов $\langle \mu_z z \rangle_n$ позволит найти значения коэффициентов C_{11}, C_{44} и тем самым изучать ядерное спин-решеточное взаимодействие в кристаллах. Отличие импульсного метода от обычного стационарного ультразвукового резонанса состоит в том, что первый метод позволяет отделить взаимодействие $H_{\text{ср}}$ от $H_{\text{ср}}$.

Авторы выражают благодарность С. А. Альтшулеру, Р. А. Даутову и Б. И. Коцелаву за ценные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Альтшулер, ЖЭТФ, 28, 38, 49 (1955).
2. M. Menes, D. I. Bolef, Phys. Rev., 109, 218 (1958).
3. E. F. Taylor, N. Bloembergen, Phys. Rev., 113, 431 (1958).
4. R. M. Sternheimer, H. M. Foley, Phys. Rev., 102, 731 (1956).

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ОДНОРОДНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫМ МЕТОДОМ*

А. И. Штыров, А. Г. Медокс

В работе [1] было высказано предположение о возможности использования интерференционного метода для определения местоположения отдельных неоднородностей в периодических структурах в режиме стоячих волн. Для экспериментальной проверки этой возможности была собрана установка, состоящая из сигнал-генератора, работающего в диапазоне длин волн 16 ± 33 см, аттенюатора-тройника, с помощью которого осуществлялось синфазное возбуждение пары электрических антенн, и прямоугольной гребенки с высотой $h = 3,8$ см. Специальный перемещающий механизм обеспечивал регулировку необходимого расстояния между антеннами и передвижение их вдоль гребенки. Измерения проводились на волне $\lambda = 16,5$ см, что соответствовало отношению скорости света в вакууме к фазовой скорости волны c/v_{ϕ} , равному 2,7.

В исследуемую гребенку вносилась неоднородность (закрывалась одна щель) и снималась сначала картина стоячих волн обычным методом подвижного индикаторного зонда. Характер стоячих волн ясен из рис. 1, где по оси абсцисс отложена величина тока $I_{\text{дет}}$ в детекторе зонда (в относительных единицах), а по оси ординат — расстояние z от возбуждающего штыря до индикаторного зонда; местоположение единичной неоднородности соответствовало $z = 26$ мм. Как показывает рис. 1, определить местоположение неоднородности лишь по искажению картины стоячих волн весьма трудно. Задача еще более усложняется в случае нескольких неоднородностей.

Далее гребенка с той же неоднородностью исследовалась интерференционным методом, с помощью двух подвижных синфазных антенн, расстояние между которыми равно $\Delta/2$ (Δ — длина замедленной волны в гребенке). При движении жестко связанной пары

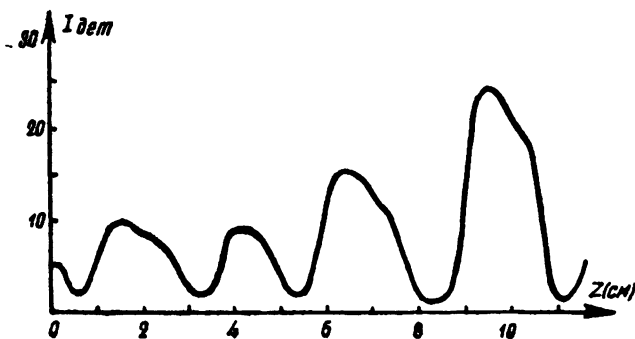


Рис. 1.

возбуждающих антенн в области, занятой неоднородностью, симметрия возбуждения нарушалась и индикатор отмечал „всплеск“ интенсивности интерференционной картины. Рис. 2 иллюстрирует наблюдаемый „всплеск“ в месте расположения неоднородности

Необходимо отметить, что величина „всплеска“ зависит от положения замыкающего плунжера на конце гребенки.

Перемещая плунжер в пределах $\Delta/4$, можно получить максимальную амплитуду „всплеска“. Форма плунжера выбирается в зависимости от конструкции исследуемой структуры. При этом качество контакта плунжера со структурой роли не играет; однако желательно, чтобы он обеспечивал хотя бы частичное отражение. В настоящем эксперименте в качестве плунжера использовалась тонкая металлическая пластинка, свободно вставленная в щель гребенки.

Аналогичные измерения проводились для случая неоднородности, образованной двумя проволоками, замыкающими две соседние щели на глубине, равной половине длины зуба гребенки.

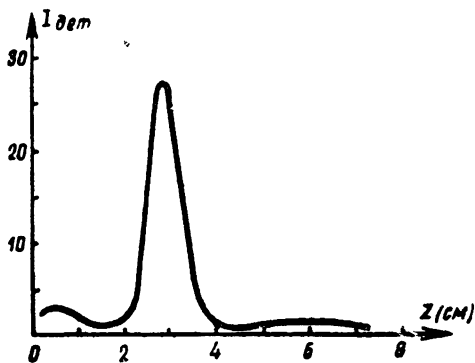


Рис. 2.

* Доклад на конференции по радиоэлектронике, посвященной пятидесятилетию Саратовского университета им. Н. Г. Чернышевского.

Как показали многочисленные опыты по определению положения единичных неоднородностей, вносимых в различные участки структуры, измерения рекомендуется производить следующим образом: определив длину волны в системе на однородном участке по нулевой интерференционной картине, перемещают возбуждающие антенны вдоль структуры до появления всплеска. Если амплитуда всплеска очень мала и фиксация его затрудняется, перемещением замыкающего плунжера на конце структуры в пределах $\Delta/4$ добиваются максимальной амплитуды „всплеска“.

В заключение отметим, что описанный способ позволяет определять положение неоднородности с точностью до размеров „вилки“, образуемой парой возбуждающих антенн, т. е. с точностью до $\Delta/2$. Для уменьшения размеров „вилки“ рекомендуется производить измерения в режиме возможно больших замедлений, при которых еще удается выделить в исследуемой структуре участки с нулевой интерференционной картиной.

Авторы выражают благодарности В. И. Калинину и Г. М. Герштейну. за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Штыров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 3, 104 (1958).

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
17 декабря 1959 г.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРОХОЖДЕНИЯ ОДИНОЧНЫХ РАДИОСИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЗАМЕДЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ ФАЗОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

В. И. Тверской

В работе [1] было получено выражение для напряжения на выходе замедляющей системы с дисперсией при воздействии на ее вход одиночных радиосигналов произвольного вида в случае, когда а) затухание в полосе спектра постоянно, б) относительное изменение второй производной фазы по частоте мало, в) длительность сигнала мала по сравнению с разностью времен задержек для крайних частот эффективной полосы его спектра. Было показано, что эти условия являются достаточными для непосредственного воспроизведения спектра сигнала на выходе системы.

Здесь рассматривается более общая задача прохождения одиночных радиосигналов через замедляющие системы с произвольной нелинейной фазовой характеристикой $\beta(\omega)$ при одном лишь ограничении, согласно которому зависимость времени задержки от частоты имеет монотонный характер (иначе говоря, вторая производная фазы нигде в полосе пропускания системы не обращается в нуль). Предполагается также, что система обладает достаточно большой электрической длиной l и что модуль ее коэффициента передачи $K(\omega)$ может быть произвольной функцией частоты, непрерывной и отличной от нуля в некотором конечном интервале частот $[\omega_1, \omega_2]$. (В настоящей работе полностью сохранены все обозначения статьи [1].)

Напряжение на выходе системы определится общим выражением (17) статьи [1]. При этом учет непостоянства модуля коэффициента передачи $K(\omega)$ приводит к тому, что в разложении для $h(\omega_0)$ значения производных $d^n \omega / du^n$ должны быть заменены на величины

$$\frac{d^n}{du^n} \left\{ K(\omega(u)) \frac{d\omega}{du} \right\}.$$

Предполагая, что удовлетворяется неравенство (20) статьи [1]

$$\left| \frac{d^2}{2l\beta''(\omega_0)} \right| \ll 1, \quad (1)$$

можно показать, что в выражении для $h(\omega_0)$ всеми членами, кроме первого, можно пренебречь, причем их сумма при увеличении l будет уменьшаться как $1/\sqrt{l}$:

$$h(\omega_0) = \sqrt{2} K(\omega_0) \int_{-u_1}^{u_2} e^{-ju^2} du + 0 \left(\frac{1}{\sqrt{l\beta''(\omega_0)}} \right). \quad (2)$$

Далее, поскольку неравенство (22) работы [1] уже не имеет места, нетрудно заключить, что величина $h(t-\lambda)/\sqrt{l\beta''[\omega_0(t-\lambda)]}$ существенно зависит от $(t-\lambda)$. (Заметим, что при этом в выражении для $h(t-\lambda)$ пренебрежение всеми членами, кроме первого,

возможно при значительном увеличении l по сравнению со случаем воспроизведения спектра, рассмотренным в работе [1].)

Представим показатель степени в подынтегральном выражении (17) статьи [1] в виде разложения Тейлора с интегральным остаточным членом:

$$-\varphi[\omega_0(t-\lambda)] = t\omega_0(t) - l\beta[\omega_0(t)] - \lambda\omega_0(t) + \frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{(\lambda-x) dx}{\sqrt{l\beta''[\omega_0(t-x)]}}.$$

Воспользовавшись затем конечностью сигнала во времени и разложив в ряд Тейлора по степеням λ функцию

$$\frac{h(t-\lambda)}{\sqrt{l\beta''[\omega_0(t-\lambda)]}} \exp \left\{ \frac{j}{2} \int_0^\lambda \frac{(\lambda-x) dx}{l\beta''[\omega_0(t-x)]} \right\},$$

с учетом очевидного равенства

$$F^{(n)}(\omega) = (-j)^n \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n f(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda$$

получаем:

$$\begin{aligned} g(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} < e^{jt\omega_0(t) - j l \beta[\omega_0(t)]} \left\{ l l(t) F[\omega_0(t)] - j \frac{dH}{dt} \Big|_{\lambda=0} F'[\omega_0(t)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 h}{dt^2} \Big|_{\lambda=0} + \frac{jH(t)}{l\beta''[\omega_0(t)]} \right) F''[\omega_0(t)] - \frac{j}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{d^3 H}{dt^3} \Big|_{\lambda=0} + j \frac{H(t)\beta'''[\omega_0(t)]}{3l^2\beta''[\omega_0(t)]^3} - \right. \\ \left. - j \frac{1}{l\beta''[\omega_0(t)]} \frac{dH}{dt} \Big|_{\lambda=0} \right) F'''[\omega_0(t)] + \dots \Big>, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$H(t) = h(t) / \sqrt{l\beta''[\omega_0(t)]}.$$

Определив из уравнения (13) работы [1] (при $\lambda=0$)

$$t = l\beta'(\omega_0) \quad (4)$$

значения производных

$$\frac{d\omega_0}{dt} = \frac{1}{l\beta''[\omega_0(t)]}; \quad \frac{d^2\omega_0}{dt^2} = -\frac{1}{l^2} \frac{\beta'''[\omega_0(t)]}{\beta''[\omega_0(t)]^3} \quad (5)$$

и т. д., можно с учетом (2) показать, что при достаточно большом значении l и при условии ограниченности производных спектральной функции $F^{(n)}(\omega)$ напряжение на выходе системы будет определяться выражением:

$$\begin{aligned} g(t) = \operatorname{Re} < \frac{2K[\omega_0(t)] |F[\omega_0(t)]|}{\sqrt{2\pi l\beta''[\omega_0(t)]}} \exp \left\{ jt\omega_0(t) - \right. \\ \left. - j l \beta[\omega_0(t)] + j \psi[\omega_0(t)] - j \frac{\pi}{4} \right\} >. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $|F(\omega_0)|$ — модуль, а $\psi(\omega_0)$ — фаза спектральной функции сигнала.

Из (6) для огибающей выходного напряжения $g_0(t)$ и его мгновенной частоты $\omega_m(t)$ с учетом (4) находим:

$$g_0(t) = \frac{2K[\omega_0(t)]}{\sqrt{2\pi l |\beta''[\omega_0(t)]|}} |F[\omega_0(t)]|; \quad (7)$$

$$\omega_m(t) = \frac{d}{dt} \{ t\omega_0(t) - l\beta[\omega_0(t)] + \psi[\omega_0(t)] \} = \omega_0(t) + \frac{\psi'[\omega_0(t)]}{l\beta''[\omega_0(t)]}. \quad (8)$$

Поскольку $\beta''(\omega_0)$ нигде в полосе пропускания системы не обращается в нуль, то $\beta'(\omega_0)$ является либо возрастающей, либо убывающей функцией ω_0 . В соответствии с этим $\omega_0(t)$ будет однозначным образом зависеть от t и $g_0(t)$ и $\omega_m(t)$ могут быть интерпретированы как функции аргумента ω_0 (при соответствующей деформации масштаба по оси t).

Из рассмотрения соотношений (7) и (8) следует, что для весьма длинной линии с сильной дисперсией могут быть поставлены две задачи: 1) определение спектраль-

ных характеристик сигнала при известных параметрах линии, 2) нахождение свойств линии при известных спектральных характеристиках сигнала.

При решении первой из этих задач, как следует из (6), модуль спектральной функции может быть определен либо путем умножения огибающей выходного напряжения $g_0(t)$ на известную функцию времени $v(t) = \sqrt{1/|\beta''[\omega_0(t)]|} / K[\omega_0(t)]$, либо путем включения последовательно с замедляющей системой четырехполюсника, коэффициент передачи которого зависит от частоты по закону $K_1(\omega) = \sqrt{1/|\beta''(\omega)|} / K(\omega)$. Производная фазы спектральной плотности может быть найдена после того, как с помощью частотного детектора определен закон изменения частоты в выходном сигнале, поскольку зависимости $\omega_0(t)$ и $\beta''[\omega_0(t)]$ предполагаются известными.

Остановимся на второй из поставленных задач. Подобрать зондирующий радиоимпульс таким образом, что величина $\psi'(\omega)$ равна нулю, получаем: $\omega_m(t) = \omega_0(t)$ (с помощью (5) нетрудно показать, что сюда может быть включен случай, когда $\psi'(\omega)$ равна малой постоянной величине). Далее, с учетом (5) после определения закона изменения частоты в выходном сигнале находим, дифференцируя $\omega_0(t)$, величину $1/\beta''[\omega_0(t)]$. Модуль коэффициента передачи линии может быть затем найден путем сопоставления величины $1/\sqrt{1/\beta''[\omega_0(t)]}$ и известной функции $|F[\omega_0(t)]|$ с огибающей выходного напряжения $g_0(t)$.

Преимущество этого способа определения параметров весьма длинных линий с дисперсией состоит в том, что длительность одного измерения примерно равна разности задержек Δt для крайних частот исследуемой полосы системы. Для сравнения укажем, что при определении, например, $K(\omega)$ обычным способом с использованием свип-генератора длительность одного измерения, во избежание искажений, связанных с дисперсией в системе, должна быть много больше Δt . Отсюда ясно, что указанный способ может быть более предпочтительным при исследовании линий с изменяющимися во времени параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Тверской, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 724 (1959).

Поступила в редакцию
8 июля 1959 г.

О ВОЗБУЖДЕНИИ АВТОКОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ФАЗОВОЙ АУТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Л. Н. Белюстина

В системе фазовой автоподстройки частоты учет инерционности за счет избирательных свойств колебательных контуров, включенных в цепь, а также использование схем фазовых детекторов с настроенными контурами приводят к учету временного запаздывания. Коэффициент передачи идеального звена запаздывания равен $e^{-T_1 p}$, где T_1 —время запаздывания. Дифференциальное уравнение системы фазовой автоподстройки с фильтром низкой частоты, коэффициент передачи которого равен $K(p)$, при нелинейной фазовой характеристике $F(\varphi)$ и учете звена запаздывания имеет вид:

$$p\varphi + \Omega K(p) e^{-T_1 p} \dots F(\varphi) = \delta\omega. \quad (1)$$

Здесь φ —разность фаз подстраиваемого и эталонного генераторов, Ω , $\delta\omega$ —параметры системы (Ω —максимальная расстройка, создаваемая фазовым детектором и реактивной лампой, $\delta\omega$ —расстройка подстраиваемого генератора относительно эталонного).

При синусоидальной характеристике $F(\varphi) = \sin \varphi$ и интегрирующем фильтре $K(p) = 1/(1+Tp)$, где T —постоянная времени, уравнение (1) имеет вид:

$$p'^2 \varphi + kp' \varphi + e^{-T' p'} \sin \varphi = \gamma, \quad (2)$$

где $p' \equiv \sqrt{T/\Omega} p$, $k \equiv 1/\sqrt{T\Omega}$, $T' = \sqrt{\Omega/T} T_1$, $\gamma = \delta\omega/\Omega$. Нелинейное уравнение (2) эквивалентно при $T' > 0$ нелинейному дифференциальному уравнению бесконечного порядка.

После введения новой переменной $\varphi_1 = \varphi - \varphi_0$, где $\varphi_0 = \arcsin \gamma$ ($0 \ll \varphi_0 \ll \pi/2$), с учетом соотношения $e^{-ap} \sin \varphi(t) = \sin \varphi(t-a)$ имеем вместо (2) уравнение:

$$(p')^2 \varphi_1 + kp' \varphi_1 + \cos \varphi_0 \sin \varphi_1(t - T') + \sin \varphi_0 \cos \varphi_1(t - T') = \gamma.$$

Линеаризация этого уравнения приводит к системе двух линейных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$d\varphi_1/dt = y, \quad dy/dt = -\lambda y - \sqrt{1-\gamma^2} \varphi_1(t - T'). \quad (3)$$

Предполагая решение системы (3) в виде [1,2]:

$$\varphi_1 = \Sigma A k e^{\lambda k t}, \quad y = \Sigma B k e^{\lambda k t},$$

получим для λ_k уравнение $\lambda^2 + k\lambda + \sqrt{1-\gamma^2} e^{-\lambda T'} = 0$ или

$$r^2 + k T' r + \gamma_2 e^{-r} = 0, \quad (4)$$

где $r = \lambda T'$, $\gamma_2 = \sqrt{1-\gamma^2} T'^2$.

Положив $r = i\omega$, имеем в плоскости параметров γ , $d \equiv T'/k$ кривую, точкам которой соответствуют чисто мнимые корни:

$$\gamma = \sqrt{1 - k^4 \gamma \operatorname{tg}^2 \omega \sin^2 \omega}; \quad d = (\omega/k^2) \operatorname{tg} \omega. \quad (5)$$

Эта кривая распадается на бесконечное множество ветвей, каждая из которых соответствует некоторому промежутку ω . Ближайшая к оси $d=0$ ветвь E кривой (5) при фиксированном k ($k=0,01, 1, 3, 5$) представлена на рис. 1. При пересечении кривой

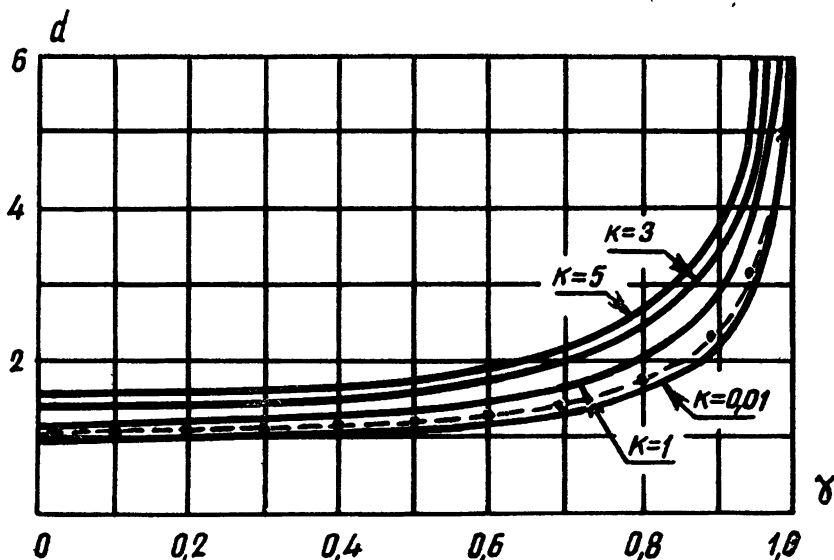


Рис. 1.

$E(d \equiv d_E)$ от $d < d_E$ к $d > d_E$ действительная часть одного из корней (4) меняет знак, становясь положительной. Область устойчивости в малом уравнения (2) определяется неравенствами

$$0 \leq \gamma < 1; \quad 0 \leq d < d_E. \quad (6)$$

Если ограничиться первыми степенями (двумя первыми членами) разложения степенной функции $e^{-T'p'}$, т. е. ограничиться приближенным учетом запаздывания, то уравнение (2) заменится уравнением [3]:

$$p'^2 \varphi + k p' \varphi + (1 - T' p') \sin \varphi = \gamma. \quad (7)$$

Качественное исследование нелинейного уравнения (7) дано в работе [4]. При этом установлено, что система (7) устойчива в малом для точек области пространства параметров, определенной неравенством

$$d \equiv T'/k \leq 1/\sqrt{1-\gamma^2}, \quad (8)$$

и при пересечении с ростом d границы области (8) в системе (7) появляются автоколебания (биения при совпадении частот). Граница области (8) представлена на рис. 1 пунктирной линией.

Принимая во внимание этот результат и учитывая расположение границ областей устойчивости (6) и (8) (рис. 1), приходим к выводу о том, что при условиях $d > d_E$, $\gamma < 1$ в системе (2) следует ожидать возбуждения автоколебаний в мягком режиме.

1. А. А. Андронов и А. Г. Майер, Собрание трудов А. А. Андропова, изд. АН СССР, 1956, стр. 346.
2. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, ЛКВВИА, 1949.
3. М. В. Капранов, Радиотехника, 12, 37 (1956).
4. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 247 (1959).

Поступила в редакцию
28 июня 1960 г.

И. М. Иванова, Ю. Л. Кетков, Т. С. Ямпольская

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & N_0 & & N_1 & & N_2 & & & & & & & & & & & \\
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & & & & & & & & \\
 \frac{a_1 a_{n-1}}{a_n} & \frac{a_2 a_{n-1}}{a_n} & \frac{a_3 a_{n-1}}{a_n} & \frac{a_4 a_{n-1}}{a_n} & \dots & \frac{a_{n-3} a_{n-1}}{a_n} & \frac{a_{n-2} a_{n-1}}{a_n} & a_n & a_{n-1} & & & & & & & & & \\
 \frac{a_1 a_{n-2}}{a_n} & \frac{a_2 a_{n-2}}{a_n} & \frac{a_3 a_{n-2}}{a_n} & \frac{a_4 a_{n-2}}{a_n} & \dots & \frac{a_{n-3} a_{n-2}}{a_n} & a_n & \frac{a_{n-1} a_{n-2}}{a_n} & a_{n-2} & & & & & & & & & \\
 \frac{a_1 a_{n-3}}{a_n} & \frac{a_2 a_{n-3}}{a_n} & \frac{a_3 a_{n-3}}{a_n} & \frac{a_4 a_{n-3}}{a_n} & \dots & \dots & \dots & \frac{a_{n-2} a_{n-3}}{a_n} & \frac{a_{n-1} a_{n-3}}{a_n} & a_{n-3} & & & & & & & & \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & & & & \\
 \frac{a_1 a_4}{a_n} & \frac{a_2 a_4}{a_n} & \frac{a_3 a_4}{a_n} & a_n & \dots & \dots & \frac{a_{n-3} a_4}{a_n} & \frac{a_{n-2} a_4}{a_n} & \frac{a_{n-1} a_4}{a_n} & a_4 & & & & & & & & \\
 \frac{a_1 a_3}{a_n} & \frac{a_2 a_3}{a_n} & a_n & \frac{a_4 a_3}{a_n} & \dots & \dots & \frac{a_{n-3} a_3}{a_n} & \frac{a_{n-2} a_3}{a_n} & \frac{a_{n-1} a_3}{a_n} & a_3 & & & & & & & & \\
 \frac{a_1 a_2}{a_n} & a_n & \frac{a_3 a_2}{a_n} & \frac{a_4 a_2}{a_n} & \dots & \dots & \frac{a_{n-3} a_2}{a_n} & \frac{a_{n-2} a_2}{a_n} & \frac{a_{n-1} a_2}{a_n} & a_2 & & & & & & & & \\
 a_n & \frac{a_2 a_1}{a_n} & \frac{a_3 a_1}{a_n} & \frac{a_4 a_1}{a_n} & \dots & \dots & \frac{a_{n-3} a_1}{a_n} & \frac{a_{n-2} a_1}{a_n} & \frac{a_{n-1} a_1}{a_n} & a_1 & & & & & & & &
 \end{array}$$

Для того, чтобы первая строка матрицы A_{ij} являлась кодом Баркера, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- $$\begin{aligned} 1) \quad S(A_i) &= 0 & (i = 1, 2, \dots); \\ 2) \quad |S(N_i)| &= 1 & (i = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Матрицу A_{ij} , удовлетворяющую этим условиям, будем называть оптимальной.

В [1] показано, что коды Баркера, а следовательно, и оптимальные матрицы не существуют для $n=4k \pm 1$ при $n > 13$. В настоящей заметке исследуется вопрос существования кодов Баркера для $n=4k+2$ и приводятся некоторые свойства оптимальных матриц для $n=4k$.

Не теряя общности, можно ограничиться исследованием случая $a_n = +1$. Рассмотрим некоторые свойства оптимальной матрицы. Будем называть знаком диагонали произведение всех ее элементов. Выписывая выражения для знаков нулевых диагоналей, получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} A_1 &= -1 = \alpha_1 (a_2 a_{n-1}); \\ \operatorname{sgn} A_2 &= +1 = -(a_3 a_{n-2}) (a_4 a_{n-3}); \\ \operatorname{sgn} A_3 &= -1 = (a_5 a_{n-4}) (a_6 a_{n-5}); \\ &\dots \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(a_{2l+1} a_{n-2l}) (a_{2l+2} a_{n-(2l+1)}) = -1. \quad (1)$$

Аналогичные выражения для знаков ненулевых диагоналей в силу (1) дают:

$$\operatorname{sgn} N_l = (-1)^l a_{2l+1} a_{n-2l}. \quad (2)$$

Свойство 1. В оптимальной матрице в случае $n=4k$ имеет место соотношение.

$$\operatorname{sgn} N_l = \operatorname{sgn} \frac{N_{n-2}}{2} - l.$$

Действительно, в силу (2)

$$\operatorname{sgn} \frac{N_{n-2}}{2} - l = (-1)^{2k-l-1} a_{n-(2l+1)} a_{2l+2} = -(-1)^l a_{n-(2l+1)} a_{2l+2},$$

а из (1) следует, что

$$-a_{n-(2l+1)} a_{2l+2} = a_{2l+1} a_{n-2l}.$$

Поэтому знаки N_l и $\frac{N_{n-2}}{2} - l$ совпадают.

Свойство 2. Для оптимальной матрицы в случае $n=4k$ справедливо равенство

$$S(N_l) + S\left(\frac{N_{n-2}}{2} - l\right) = 0.$$

Действительно, диагональ N_l содержит $2l+1$ элементов, из которых, в силу оптимальности матрицы, l элементов одного знака и $l+1$ противоположного знака; диагональ $\frac{N_{n-2}}{2} - l$ содержит соответственно $2k-l$ и $2k-l-1$ элементов противоположных зна-

ков. Возможны два случая: 1) либо диагональ N_l содержит l отрицательных членов и при этом $\operatorname{sgn} N_l = (-1)^l$ и $S(N_l) = 1$; в силу свойства 1

$$\operatorname{sgn} \frac{N_{n-2}}{2} - l = (-1)^l = (-1)^{2k-l}$$

и, следовательно, $S\left(\frac{N_{n-2}}{2} - l\right) = -1$; 2) либо диагональ N_l содержит $l+1$ отрицательных членов и при этом $\operatorname{sgn} N_l = (-1)^{l+1}$ и $S(N_l) = -1$; в силу свойства 1

$$\operatorname{sgn} \frac{N_{n-2}}{2} - l = (-1)^{l+1} = (-1)^{2k-l-1}$$

и, следовательно, $S\left(\frac{N_{n-2}}{2} - l\right) = 1$. Таким образом, в обоих случаях свойство 2 справедливо.

Теорема. Для $n=4k+2$ ($k=1,2,\dots$) оптимальной матрицы, а следовательно, и кода Баркера не существует.

Доказательство. Рассмотрим первую и последнюю нулевые диагонали A_1 и $A_{\frac{n-2}{2}}$. Очевидно, что

$$\operatorname{sgn} A_1 = -1 = a_2 (a_1 a_{n-1});$$

тогда

$$\operatorname{sgn} A_{\frac{n-2}{2}} = a_{n-2} (a_{n-3} a_{n-1}) (a_{n-4} a_{n-2}) \dots (a_2 a_4) (a_1 a_3) = a_{n-1} a_2 a_1 = -1.$$

Но, с другой стороны, диагональ $A_{\frac{n-2}{2}}$ содержит $4k+2-2=4k$ членов, и так как $A_{\frac{n-2}{2}}$ является нулевой диагональю, то в ней содержится $2k$ положительных и $2k$ отрицательных элементов. Поэтому

$$\operatorname{sgn} A_{\frac{n-2}{2}} = (-1)^{2k} = 1.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Путем проверки обнаружено, что коды Баркера не существуют для $n=8, 12, 16, 20$. В общем случае для $n=4k$ ($k=2, 3, \dots$) вопрос о существовании кодов Баркера остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Поляк, Р. В. Мошкетов, Научные труды радиотехн. ин-та АН СССР, 1, 124 (1959).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
4 июня 1960 г.