

СОДЕРЖАНИЕ

Татарский В. И. Радиофизические методы изучения атмосферной турбулентности (обзор)	551
Разин В. А. К теории спектров радиоизлучения дискретных источников на частотах ниже 30 мгц	584
Виткевич В. В. Структура неоднородностей и регулярное магнитное поле сверхкороны Солнца	595
Саломонович А. Е., Атаев О. М. Тепловое излучение и поглощение в земной атмосфере радиоволн 8-мм диапазона	606
Зинченко Н. С., Усиков А. Я. Отражение радиоволн миллиметрового диапазона от слоя снега	614
Денисов Н. Г. Статистические параметры электромагнитной волны, прошедшей через неоднородный слой магнитоактивной плазмы	619
Ковнер М. С. Кинетическое рассмотрение взаимодействия потока заряженных частиц с неподвижной плазмой в магнитном поле. I	631
Андронов А. А. О естественном вращении плохости поляризации звука	645
Скроцкий Г. В., Кокин А. А. О возможной роли когерентных явлений в магнитном резонансе	650
Конторович В. М. К теории мазера с бегущей волной	656
Троицкий В. С., Цейтлин Н. М. Метод измерения коэффициента рассеяния и фоновых шумов антенн. Абсолютные измерения яркости фона на СВЧ	667
Степанов Н. С. Распространение радиоволн в недиоптергирующей системе с переменными параметрами	672
Ильин В. С. Вариационный метод расчета симметричных четырехполюсных неоднородностей в прямоугольных радиоволноводах	683
Неймарк Ю. И и Киняпин С. Д. О состоянии равновесия, расположенному на поверхности разрыва	694
Алексеев А. С. Метод точечных преобразований в задаче составления оптимального графика ритмичного производства двух типов изделий на одном оборудовании	705
Акиндиров В. В. О геометрической интерпретации двоичного кода, исправляющего кратные и одиночные ошибки	716
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Молчанов А. П. Метод измерения потоков радиоизлучения Луны и Солнца	722
Зверев В. А. Диисперсионные свойства сред, содержащих случайные неоднородности	723
Левитский С. М., Баранчук Н. С. К вопросу о распространении электромагнитных волн вдоль плазменного стержня	725

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

(обзор)

B. I. Татарский

Хорошо известно, что атмосферная турбулентность оказывает существенное влияние на распространение радиоволн в атмосфере, вызывая рассеяние и флюктуации параметров (фазы, частоты, амплитуды) радиоволн. Поэтому в настоящее время изучению атмосферной турбулентности посвящено значительное количество работ.

Весьма ценные сведения об атмосферной турбулентности можно получить, анализируя эксперименты по распространению радиоволн в атмосфере. Такой анализ в настоящей статье производится; его результаты сопоставляются с пока еще немногочисленными прямыми измерениями параметров турбулентности в тропосфере и нижней ионосфере.

I. ХАРАКТЕРИСТИКИ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Основной характеристикой атмосферной турбулентности, которая имеет значение для проблемы распространения радиоволн и будет нас интересовать в дальнейшем, является корреляционная функция флюктуаций показателя преломления $\delta n(r, t)$:

$$\overline{\delta n(r, t) \delta n(r', t')} = B_n(r, r', t, t'). \quad (1.1)$$

В большей части приложений достаточно рассматривать случай $t = t'$; при этом, если турбулентность можно считать стационарной, корреляционная функция от t не зависит:

$$\overline{\delta n(r, t) \delta n(r', t)} = B_n(r, r'). \quad (1.2)$$

В случае статистически однородной турбулентности $B_n(r, r')$ зависит лишь от $r - r' = \rho$; в статистически изотропном случае $B_n(\rho)$ зависит лишь от $\rho = |\rho|$. Статистически однородная турбулентность может быть удобно описана и при помощи спектральной плотности (трехмерной) $\Phi_n(x)$, связанной с $B_n(\rho)$ формулой Хинчина

$$B_n(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \cos(\kappa \rho) \Phi_n(x) d^3 x. \quad (1.3)$$

В случае очень больших чисел Рейнольдса Re , согласно теории Колмогорова — Обухова, структурные функции D_v скорости ветра $v(r)$ в некотором интервале масштабов имеют вид:

$$D_v(r) = \overline{[v(r + r_1) - v(r_1)]^2} = A \epsilon^{2/3} r^{2/3} \quad (l_0 \ll r \ll L_0), \quad (1.4)$$

где ϵ — скорость диссипации энергии турбулентности в единице массы. При $r \ll l_0$ имеет место формула

$$D_v(r) = (\epsilon/3\nu) r^2, \quad (1.5)$$

где ν — кинематическая вязкость. Величина l_0 определяет размер наименьших неоднородностей поля скоростей и равна

$$l_0 = \sqrt[4]{\nu^3/\epsilon}; \quad (1.6)$$

L_0 представляет собой размер наиболее крупных неоднородностей; L_0 и l_0 связаны соотношением $L_0/l_0 \sim (\text{Re})^{3/4}$.

Аналогичные закономерности имеют место при больших числах Рейнольдса для микроструктуры флюктуаций показателя преломления в тропосфере и концентрации электронов N в E -слое ионосферы:

$$D_n(r) = [n(r + r_1) - n(r_1)]^2 = C_n^2 r^{2/3} \quad (l_0 \ll r \ll L_0); \quad (1.7)$$

$$D_N(r) = [N(r + r_1) - N(r_1)]^2 = C_N^2 r^{2/3} \quad (l_0 \ll r \ll L_0). \quad (1.8)$$

Такому виду структурной функции соответствует спектральная плотность

$$\Phi_n(x) = 0,033 C_n^2 x^{-11/3} \quad \left(\frac{2\pi}{L_0} \ll x \ll \frac{2\pi}{l_0} \right); \quad (1.9)$$

$$\Phi_N(x) = 0,033 C_N^2 x^{-11/3} \quad \left(\frac{2\pi}{L_0} \ll x \ll \frac{2\pi}{l_0} \right). \quad (1.10)$$

В области же $x \geq 2\pi/l_0$ спектральная плотность $\Phi_n(x)$ (или $\Phi_N(x)$) убывает значительно быстрее. Однако закон убывания $\Phi_N(x)$ в этой области до сих пор теоретически не выяснен. Вид спектральной плотности $\Phi_n(x)$ при $x < 2\pi/L_0$ не является универсальным и может зависеть от конкретных особенностей метеорологической обстановки. В тропосфере величина $l_0 \sim 1 \text{ см}$, $L_0 \sim 100 \text{ м}$; значения этих величин для слоя E ионосферы будут приведены ниже.

В случае стационарной турбулентности величину C_n можно выразить через характеристики осредненного профиля скорости ветра, температуры и показателя преломления, т. е. через функции $\bar{v}(z)$, $\bar{T}(z)$ и $\bar{n}(z)$, $\bar{N}(z)$. Можно показать [1], что имеет место соотношение *:

$$C_n^2 = a^2 (\text{Ri}) L_0^{4/3} (\text{grad } \bar{N})^2, \quad (1.11)$$

где Ri — число Ричардсона, характеризующее влияние архimedовых сил на интенсивность турбулентности:

$$\text{Ri} = \frac{g}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}/dz + \gamma_a}{(d\bar{u}/dz)^2 + (d\bar{v}/dz)^2}. \quad (1.12)$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, \bar{T} — средняя температура в шкале Кельвина, \bar{u} и \bar{v} — горизонтальные компоненты средней скорости ветра и $\gamma_a = g/C_p \approx 0,01 \text{ град} \cdot \text{м}^{-1}$ — адиабатический градиент температуры. Функция $a^2(\text{Ri})$, экспериментально определенная в приземном слое атмосферы [2], изображена на рис. 1. При положительных значениях Ri , соответствующих устойчивой стратификации, функция $a^2(\text{Ri})$,

* Под L_0 здесь можно понимать для определенности величину $L_0 = \infty$ $\left| \frac{d\bar{v}}{dz} / \frac{d^2\bar{v}}{dz^2} \right|$, где $\kappa \approx 0,4$ — постоянная Кармана.

а следовательно, и интенсивность флюктуаций, быстро падает с ростом Ri .

2. РАССЕЯНИЕ РАДИОВОЛН В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ И ФЛЮКТУАЦИИ ФАЗЫ И АМПЛИТУДЫ В ПРОХОДЯЩЕЙ ВОЛНЕ

Рассматривая рассеяние радиоволн на турбулентных неоднородностях показателя преломления, в случае малых флюктуаций можно получить простую формулу для эффективного поперечника рассеяния в телесный угол $d\Omega$ из единицы рассеивающего объема:

$$d\sigma_0 = 2\pi k^4 \sin^2 \chi \Phi_n(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s) d\Omega. \quad (2.1)$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$, \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_s — волновые векторы соответственно падающей и рассеянной волн, χ — угол между электрическим вектором падающей волны и вектором \mathbf{k}_s . Вектор $\mathbf{K} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s$ часто называют вектором рассеяния. Его абсолютная величина равна

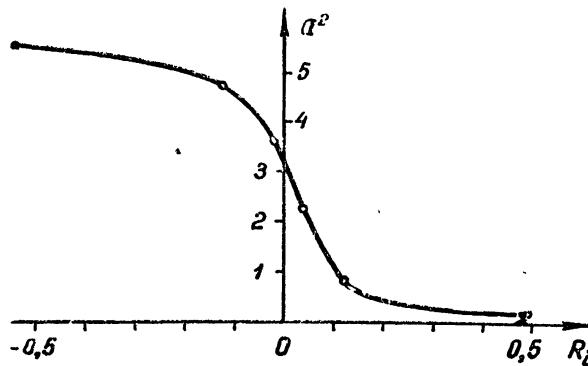


Рис. 1. Зависимость коэффициента a^2 , характеризующего интенсивность флюктуаций температуры, от числа Ричардсона Ri [2].

$$K = 2k \sin(\theta/2); \quad \frac{2\pi}{K} = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta/2)}, \quad (2.2)$$

где θ — угол рассеяния ($\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_s = k^2 \cos \theta$).

Из формулы (2.1) следует, что эффективный поперечник рассеяния $d\sigma_0$ определяется спектральной плотностью показателя преломления $\Phi_n(\mathbf{x})$, взятой для точки $\mathbf{x} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s$. Следует отметить, что при выводе формулы (2.1) (см., например, [1]) не использовалось предположение об изотропности турбулентности. Таким образом, изучая рассеяние радиоволн для различных по величине и направлению значений вектора $\mathbf{K} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s$, можно получить непосредственно значения спектральной плотности турбулентности $\Phi_n(\mathbf{x})$ для различных \mathbf{x} .

Формуле (2.1) можно придать несколько более удобный для практических расчетов вид.

Пусть мощность передатчика равна P_0 , усиление его антенны G_0 , величина рассеивающего объема V , эффективное сечение приемной антенны * S_1 , расстояния от рассеивающего объема до антенн передатчика и приемника r_0 и r_1 . Тогда величина принятой мощности P_s выразится формулой

* Величины S и G связаны известным соотношением $\lambda^2 G = 4\pi S$. Кроме того, для остронаправленных антенн $G \approx 4\pi/\gamma_1\gamma_2$, где γ_1 и γ_2 характеризуют ширину диаграммы направленности антенн в главных направлениях.

$$\frac{P_s}{P_0} = \frac{S_1 G_0 V}{4\pi r_0^2 r_1^2} \frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{S_1 G_0 V}{2r_0^2 r_1^2} k^i \sin^2 \chi \Phi_n(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s). \quad (2.3)$$

Формула (2.3) позволяет определять $\Phi_n(\mathbf{x})$ по измеренному отношению $T = P_0/P_s$.

Обратимся теперь к флюктуациям амплитуды и фазы волн, распространяющихся в турбулентной атмосфере. Предполагая, что передающая и приемная антенны находятся в зоне прямой видимости и что можно пренебречь отражениями от земной поверхности, можно получить простые соотношения, связывающие характеристики флюктуаций фазы и амплитуды радиоволн с видом спектральной плотности флюктуаций показателя преломления δn .

Приводимые ниже формулы получены в предположении, что $\lambda \ll l_0$; однако в действительности нарушение этого условия, по-видимому, существенно не влияет на окончательные выражения [3].

Наиболее просто связаны с $\Phi_n(\mathbf{x})$ двухмерные спектральные плотности флюктуаций фазы $F_\varphi(z_2, z_3)$ и логарифма амплитуды $F_A(z_2, z_3)$, представляющие собой разложение Фурье (двухмерное) соответствующих корреляционных функций в плоскости $x = \text{const}$, перпендикулярной направлению распространения волны:

$$F_\varphi(z_2, z_3) = \pi k^2 L \left[1 + \frac{k}{z^2 L} \sin \frac{z^2 L}{k} \right] \Phi_n(0, z_2, z_3); \quad (2.4)$$

$$F_A(z_2, z_3) = \pi k^2 L \left[1 - \frac{k}{z^2 L} \sin \frac{z^2 L}{k} \right] \Phi_n(0, z_2, z_3). \quad (2.5)$$

В этих формулах $z^2 \equiv z_2^2 + z_3^2$, L — расстояние, проходимое волной в неоднородной турбулентной среде. Формулы (2.4) и (2.5) справедливы и в случае статистически неизотропной среды. Они легко обобщаются (так же, как и формула (2.3)) на случай статистически неоднородной среды (т. е. на случай, когда статистические характеристики турбулентной среды зависят от координат). Соответствующие выражения можно найти в [1].

Следует, однако, отметить, что простые выражения (2.4) и (2.5) не очень удобны для решения обратной задачи — определения спектра флюктуаций показателя преломления, поскольку пространственные спектральные плотности $F_\varphi(z_2, z_3)$ и $F_A(z_2, z_3)$ трудно доступны непосредственному измерению. Сравнительно легко могут быть измерены или частотные (временные) спектры флюктуаций амплитуды и фазы, или же средние квадраты флюктуаций разности фаз в двух точках $[\varphi(M_1) - \varphi(M_2)]^2 = \Delta\varphi^2$ или средний квадрат флюктуаций амплитуды поля $(A - \bar{A})^2$. Все эти величины связаны со спектральной плотностью флюктуаций показателя преломления $\Phi_n(\mathbf{x})$ более сложными формулами, содержащими интегралы от $\Phi_n(\mathbf{x})$. Поэтому решение обратной задачи о нахождении функции $\Phi_n(\mathbf{x})$ по флюктуациям амплитуды или фазы волны более затруднительно, чем на основании формулы (2.3).

Можно, однако, задать общий вид функции $\Phi_n(\mathbf{x})$, с одной стороны, достаточно простой, чтобы можно было провести вычисления до конца, и с другой стороны, содержащий некоторое количество свободных параметров, что позволяет соответствующим их выбором хорошо аппроксимировать экспериментальные зависимости. Мы будем использовать формулу

$$\Phi_n(x) = P_n x^{-(\alpha+3)} \quad (0 < \alpha < 2). \quad (2.6)$$

Заметим, что спектральной плотности (2.6) соответствует структурная функция показателя преломления

$$D_n(r) = C_n^2 r^\alpha,$$

где

$$C_n^2 = 4\pi^2 P_n / \Gamma(\alpha + 2) \sin(\pi\alpha/2). \quad (2.7)$$

Случай $\alpha = 2/3$ соответствует колмогоровскому спектру. Используя (2.6), после интегрирования можно получить следующие выражения:

$$\bar{\chi}^2 = (\overline{\ln A - \ln \bar{A}})^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} F_A(z_2, z_3) dz_2 dz_3 = A(\alpha) C_n^2 L^{\frac{3+\alpha}{2}} k^{\frac{3-\alpha}{2}}, \quad (2.8)$$

где

$$A(\alpha) = \pi \Gamma(\alpha + 2) \sin(\pi\alpha/2) / 8 \Gamma\left(\frac{\alpha + 5}{2}\right) \cos[\pi(1 - \alpha)/4];$$

$$\begin{aligned} \overline{[\varphi(M_1) - \varphi(M_2)]^2} = D_\varphi(\rho) = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(z_2 \eta + z_3 \eta)] \times \\ \times F_\varphi(z_2, z_3) dz_2 dz_3 \simeq B(\alpha) C_n^2 k^2 L \rho^{\alpha+1}; \end{aligned} \quad (2.9)$$

ρ — расстояние между точками M_1 и M_2 ;

$$B(\alpha) = \sqrt{\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{3 + \alpha}{2}\right).$$

Формула (2.9) справедлива при $\rho \geq \sqrt{\lambda L}$. При $\rho \ll \sqrt{\lambda L}$ численный коэффициент $B(\alpha)$ заменяется на $B(\alpha)/2$. Кроме того, предполагается, что $\sqrt{\lambda L} \gg l_0$ и $\sqrt{\lambda L} \ll L_0$. Последние условия необходимы для того, чтобы в наиболее существенной (для флюктуаций амплитуды) области $x \sim 2\pi/\sqrt{\lambda L}$ спектр $\Phi_n(x)$ действительно можно было аппроксимировать степенной функцией.

Анализируя формулы (2.4) и (2.5), можно установить, что в случае, когда $l_0 \ll \sqrt{\lambda L} \ll L_0$, радиус корреляции флюктуаций амплитуды в плоскости, перпендикулярной лучу, равен по порядку величины $\sqrt{\lambda L}$, а радиус корреляции флюктуаций фазы в той же плоскости совпадает с L_0 , т. е. с радиусом корреляции флюктуаций показателя преломления.

Из формул (2.8) и (2.9) видно, что, измеряя зависимость $\bar{\chi}^2 = f(L)$, $\bar{\chi}^2 = f(k)$ или $\bar{\Delta\varphi}^2 = f(\rho)$, мы можем определить величину α , а затем и вторую характеристику спектра турбулентности — величину C_n^2 . Таким образом, измерения $\bar{\chi}^2$ и $\bar{\Delta\varphi}^2$ позволяют найти $\Phi_n(x)$. Следует иметь в виду, что в отличие от метода определения $\Phi_n(x)$ при помощи измерений рассеяния от ограниченного объема (формула (2.3)) этот метод дает осредненное по всей трассе значение $\Phi_n(x)$. (Величина $\Phi_n(x)$, полученная на основании фазовых измерений, оказывается осредненной с одинаковым весом по всей трассе, в то время как величина $\Phi_n(x)$, полученная на основании амплитудных измерений, осреднена по трассе с переменным весом, равным нулю в точке приема и возрастающим по мере удаления от этой точки [1,4].)

Остановимся также на частотных (временных) спектрах флюктуаций. Если производить измерения частотного спектра флюктуаций показателя преломления при помощи быстро движущегося датчика (например, датчика, установленного на самолете), то измеряемый таким образом частотный спектр $S_n(f)$ в случае локально изотропной турбулентности будет связан с $\Phi_n(x)$ соотношением [1]:

$$\Phi_n(x) = - \frac{v^2}{16\pi^3 x} S'_n\left(\frac{xv}{2\pi}\right); \quad (2.10)$$

$$S'_n(f) = - \frac{32\pi^4}{v^3} f \Phi_n\left(\frac{2\pi f}{v}\right),$$

где v — скорость движения датчика относительно среды. Здесь $\Phi_n(x)$ определяется формулой (1.3), а $S_n(f)$ связано с временной автокорреляционной функцией флюктуаций $\delta n(t)$ соотношением

$$\tilde{B}_n(\tau) = \int_0^\infty S_n(f) \cos(2\pi f \tau) df. \quad (2.11)$$

Пользуясь первой из формул (2.10), можно на основании экспериментально измеренных частотных спектров $S_n(f)$ строить $\Phi_n(x)$. Если $\Phi_n(x)$ выражается формулой (2.6), то $S_n(f)$ имеет вид:

$$S_n(f) = \frac{2(2\pi)^{1-\alpha}}{1+\alpha} v^\alpha P_n f^{-(\alpha+1)}, \quad (2.12)$$

причем P_n связано с C_n^2 формулой (2.7).

Рассмотрим также вопрос о частотном спектре флюктуаций фазы и разности фаз. Временные изменения фазы в точке наблюдения в основном обусловлены переносом неоднородностей показателя преломления поперек луча (продольное их движение не вызывает изменений фазы, за исключением небольшого „краевого“ эффекта). Поэтому имеет место соотношение $[\varphi(t+\tau) - \varphi(t)]^2 = [\varphi(r + v_n \tau) - \varphi(r)]^2$, связывающее изменение фазы во времени с ее пространственной структурой (v_n — нормальная к лучу составляющая скорости ветра). Поскольку правая часть последнего равенства определяется формулой (2.9) с $\rho = v_n \tau$, то

$$\overline{[\varphi(t+\tau) - \varphi(t)]^2} = B(\alpha) C_n^2 k^2 L v_n^{\alpha+1} \tau^{\alpha+1}, \quad (2.13)$$

откуда частотный спектр флюктуаций фазы [1,3]

$$S_\varphi(f) = Q(\alpha) C_n^2 k^2 L v_n^{\alpha+1} f^{-(\alpha+2)}, \quad (2.14)$$

где

$$Q(\alpha) = \pi^{-(\alpha+2)} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \left[\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \right]^2.$$

Частотный спектр флюктуаций разности фаз на базе b связан с $S_\varphi(f)$ соотношением [1,3]:

$$S_{\Delta\varphi}(f) = 4 \sin^2(\pi b f / v_n) S_\varphi(f). \quad (2.15)$$

При $f \geq v_n/b$ за счет множителя $\sin^2(\pi b f / v_n)$ в $S_{\Delta\varphi}$ должны были бы быть минимумы; однако в действительности величина v_n также является случайной, и после осреднения по ее флюктуациям следует

заменить множитель $\sin^2(\pi bf/v_n)$ на его среднее значение, равное $1/2$. Таким образом,

$$S_{\Delta\varphi}(f) = \begin{cases} 4 \left(\frac{\pi b}{v_n} \right)^2 f^2 S_\varphi(f) & \text{при } f \ll v_n/b \\ 2S_\varphi(f) & \text{при } f \geq v_n/b \end{cases} \quad (2.16)$$

Для случая $\alpha=2/3$, соответствующего колмогоровскому спектру турбулентности, формулы (2.8) — (2.14) принимают вид [1, 26]:

$$\overline{\chi^2} = 0,31 C_n^2 L^{11/6} k^{7/6} \quad (l_0 \ll V \lambda L \ll L_0); \quad (2.7a)$$

$$\overline{\Delta\varphi^2} = 2,9 k^2 C_n^2 L \rho^{5/3} \quad (l_0 \ll \rho \ll L_0); \quad (2.9a)$$

$$S_n(f) = 0,073 C_n^2 v^{2/3} f^{-5/3} \quad (1/L_0 \ll f/v \ll 1/l_0); \quad (2.12a)$$

$$S_\varphi(f) = 0,033 C_n^2 k^2 L v_n^{5/3} f^{-8/3} \quad (1/L_0 \ll f/v_n \ll 1/l_0). \quad (2.14a)$$

3. ЭКСПЕРИМЕНТЫ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

С целью проверки соотношений (2.1), (2.8), (2.9), (2.14) и некоторых более специальных вопросов проводился ряд экспериментов по распространению света и звука в приземном слое атмосферы, где характеристики турбулентности могут быть достаточно точно определены независимым образом.

Остановимся прежде всего на экспериментах по рассеянию звука, проведенных Каллистратовой [5, 6]. Теория этого явления аналогична теории рассеяния электромагнитных волн. Для не очень больших углов θ рассеяние в основном обусловлено пульсациями скорости ветра. В этом случае эффективный поперечник рассеяния на угол θ в телесный угол $d\Omega$ равен [7]

$$d\sigma(\theta) = 2\pi k^4 \cos^2 \theta \cos^2(\theta/2) V \frac{E[2k \sin(\theta/2)]}{c_s^2} d\Omega, \quad (3.1)$$

где $E(x)$ — пространственная спектральная плотность турбулентных флюктуаций скорости ветра и c_s — скорость звука. Для $2\pi/L_0 \ll x \ll 2\pi/l_0$ $E(x)$ имеет вид [1]:

$$E(x) = 0,06 C_v^2 x^{-11/3}. \quad (3.2)$$

Величина C_v^2 в приземном слое атмосферы зависит от высоты над землей z : $C_v^2(z) \sim z^{-2/3}$ [8, 1]. В упомянутых экспериментах высота рассеивающего объема и сама величина V зависели от угла рассеяния θ :

$$z \sim \operatorname{tg}(\theta/2);$$

$$V \sim \frac{c_s T_0}{2 \sin(\theta/2)} \frac{D \gamma}{\sin \theta} \frac{D \gamma}{\cos(\theta/2)},$$

где T_0 — длительность рассеивающегося импульса, D — расстояние между излучателем и приемником звука, γ — угловая ширина диаграммы направленности излучателей и приемников ($\gamma \approx 1,5^\circ$). Следовательно,

$$d\sigma(\theta) \sim \cos^2 \theta \cos^2(\theta/2) V(\theta) [z(\theta)]^{-2/3} [\sin(\theta/2)]^{-11/3} \sim \cos^2 \theta [\cos(\theta/2)]^{2/3} [\sin(\theta/2)]^{-19/3}. \quad (3.3)$$

На рис. 2 экспериментальные результаты, полученные в [6], сравниваются с функцией (3.3). По оси ординат в дБ отложено отношение принятой за счет рассеяния мощности P_s к мощности P_0 , принимаемой при наведении излучателя и приемника друг на друга. Сплошная кривая построена по формуле (3.3) и проведена через экспериментальную точку, соответствующую $\theta = 25^\circ$. Как видно из рис. 2, экспериментальные данные хорошо согласуются с зависимостью (3.3). Более детальный анализ эксперимента, проделанный Каллистратовой, показал, что экспериментальные данные согласуются с теорией не только в отношении зависимости от угла, но и количественно. Таким образом, явление рассеяния звуковых волн на турбулентных неоднородностях

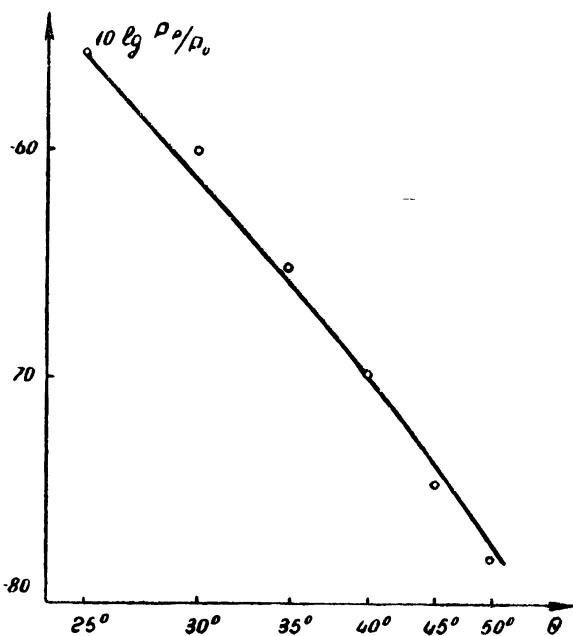


Рис. 2. Индикаторика рассеяния звука в приземном слое атмосферы [5].

атмосферы может быть практически использовано для измерений спектра турбулентности. Можно также надеяться, что достаточно аккуратно поставленные эксперименты по рассеянию радиоволн в тропосфере и ионосфере смогут дать сведения о спектре флюктуаций показателя преломления. Следует, однако, иметь в виду, что зачастую (особенно в опытах по дальнему распространению УКВ в тропосфере) на измеряемое рассеянное поле могут накладываться поля, обусловленные другими эффектами, что может сильно искажить результаты.

В этом отношении более „чистыми“ являются опыты по измерению флюктуаций фазы и амплитуды волны, проходящей (в пределах прямой видимости, но без отражений от земной поверхности) через турбулентную атмосферу. Опыты по измерению характеристик таких флюктуаций проводились в приземном слое атмосферы Красильниковым [9–11] и некоторыми другими авторами [3, 12–14] для звуковых волн и для света (см. рис. 3–5). Основные результаты этих экспериментов хорошо согласуются с теоретическими выводами, основанными на

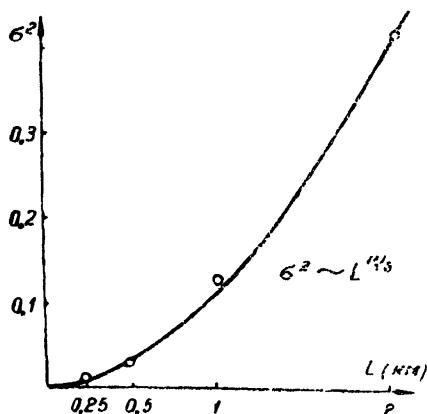


Рис. 3. Зависимость интенсивности мерцания источника света σ^2 от расстояния L , проходимого светом в турбулентной среде [13,14].

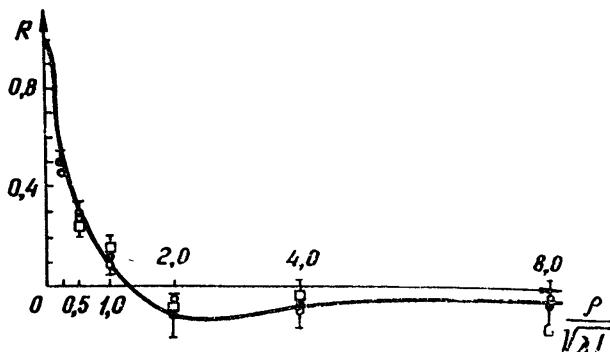


Рис. 4. Экспериментальная корреляционная функция флюктуаций интенсивности света в плоскости, перпендикулярной лучу. Различными знаками обозначены точки, полученные при разных $V\sqrt{L}$ [13,14].

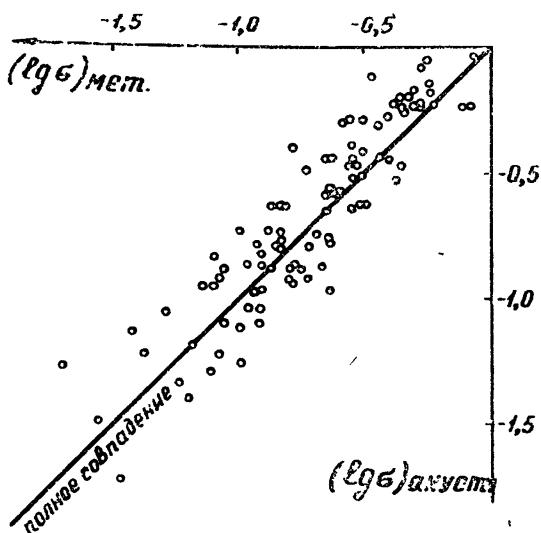


Рис. 5. Сопоставление рассчитанных по метеорологическим данным и измеренных величин флюктуаций амплитуды звука [13].

предположениях о справедливости колмогоровской теории турбулентности. Обзор большей части этих работ содержится в монографии автора [1], и здесь мы не будем повторять его. Приведем лишь несколько графиков (рис. 6, 7), позволяющих произвести сопоставление экспериментальных результатов с теоретическими выводами.

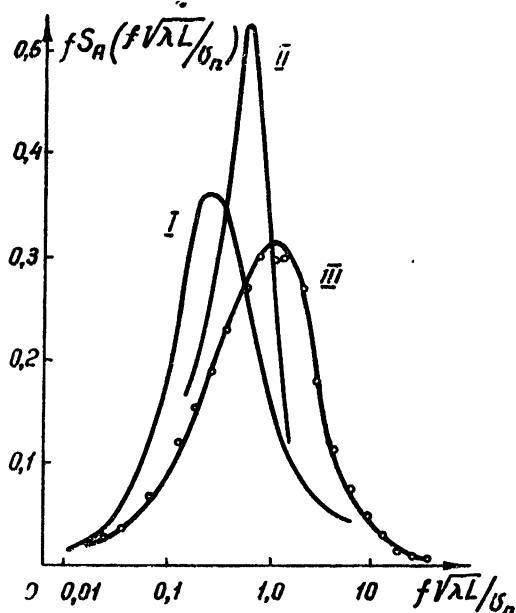


Рис. 6. Частотные спектры флюктуаций амплитуды световых и звуковых волн [3]:

I — свет, II — теоретический спектр, III — звук.

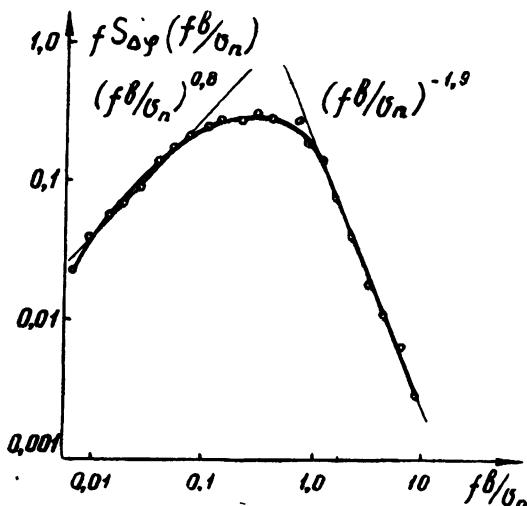


Рис. 7. Частотный спектр флюктуаций разности фаз звуковых волн [3].

Приведенные результаты свидетельствуют об удовлетворительном согласии экспериментальных и теоретических данных. Это дает возможность поставить обратную задачу об определении характеристик турбулентности на основании экспериментальных данных о распространении радиоволн в тропосфере и ионосфере.

4. ФЛЮКТУАЦИИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ТРОПОСФЕРЫ

Изучению микроструктуры показателя преломления тропосферы посвящено большое количество экспериментальных работ. Первоначально основное внимание уделялось определению наиболее грубых характеристик: среднего квадрата флюктуаций $\overline{\delta n^2}$ и радиуса корреляции флюктуаций L_0 . Это было связано с тем, что в первую теорию рассеяния радиоволн на турбулентных неоднородностях тропосферы, развитую Букером и Гордоном [15], входили именно эти два параметра, вернее, их отношение $\overline{\delta n^2}/L_0$. Для величины L_0 (определенной при аппроксимации корреляционной функции $\overline{\delta n \delta n'}$ экспонентой вида $\overline{\delta n^2} e^{-\rho/L_0}$) получалось обычно значение от 50 до 100 м. Это значение L_0 с точки зрения теории турбулентности можно трактовать как внешний масштаб турбулентности. Величина $\overline{\delta n^2}$ сильно меняется от случая к случаю и претерпевает резкие изменения с высотой.

Сведения о структуре турбулентности, заключенные в этих двух параметрах, весьма скучны. Если перевести их на „спектральный язык“, то

$$\overline{\delta n^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x) d^3x, \text{ а } 2\pi/L_0 \text{ характеризует величину того интер-}$$

вала спектра, на котором сосредоточена основная доля „энергии“ флюктуаций. В реальных условиях основная часть „энергии“ турбулентных пульсаций сосредоточена в крупномасштабных неоднородностях (при $x \lesssim 2\pi/L_0$). Если же нас интересует вид спектра $\Phi_n(x)$ при $x > 2\pi/L_0$, то параметры $\overline{\delta n^2}$ и L_0 не характеризуют его. Действительно, легко можно построить корреляционные функции с одинаковыми $\overline{\delta n^2}$ и L_0 , но с совершенно различным видом $\Phi_n(x)$ при $x > 2\pi/L_0$.

В более поздних работах по экспериментальному изучению флюктуаций показателя преломления большее внимание уделялось измерениям вида частотного спектра δn . На рис. 8а, б, в приведены частотные спектры δn , полученные на самолете [16], а на рис. 8г, д — в наземных измерениях [17]. Как видно из рисунков, экспериментальные частотные спектры можно хорошо аппроксимировать степенной функцией вида (2.12). Показатель степени m в множителе f^{-m} близок к 5/3, хотя в отдельных измерениях и отличается от этого значения*.

Следует иметь в виду, что самолетные измерения δn дают горизонтальную структуру неоднородностей и „горизонтальные“ спектры. В то же время при рассеянии радиоволн вектор $K = k_0 - k_s$ обычно направлен вертикально, т. е. для задачи о рассеянии радиоволн существенное значение имеет вертикальная структура неоднородностей и „вертикальный“ спектр. Вообще говоря, возможна анизотропия турбулентности, приводящая к различию ее спектров по различным направлениям. Однако такую анизотропию можно ожидать лишь в области спектра $x < 2\pi/L_0$, относящуюся к крупным масштабам.

На основании графиков рис. 8г, д можно оценить величину C_n , если воспользоваться формулой (2.12а). Эта величина оказывается равной $5 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-1/3} = 0,05 \text{ N-ед. см}^{-1/3}$ для случая г) и $0,09 \text{ N-ед. см}^{-1/3}$ для случая д).

* См. примечание при корректуре в конце статьи.

Сравним эту величину с другими наземными измерениями. В работе [18] проводились многочисленные измерения структурных функций температурного поля в приземном слое. Для величины C_T , входящей в выражение для структурной функции температурного поля ($(T_1 - T_2)^2 = C_T^2 r^{2/3}$), в этой работе при различных метеорологических условиях были получены значения от нуля приблизительно до $0,150 \text{ град} \cdot \text{см}^{-1/3}$. Как известно, величина показателя преломления n атмосферного воздуха связана с его температурой T (в $^{\circ}\text{К}$), давлением P (в миллибараах) и влажностью e (в миллибараах) формулой $(n-1) \cdot 10^6 = (79/T)(P+4800e/T)$. Если рассчитать, какое значение C_n будет обусловлено такими флюктуациями температуры, то мы получим $C_n = (0 + 0,15) N \cdot \text{ед} \cdot \text{см}^{-1/3}$. Таким образом, величина C_n , рассчитанная по единичным измерениям частотных спектров показателя преломления вблизи земной поверхности [17], хорошо укладывается в пределы, найденные по нескольким сотням измерений, проведенных при различных метеорологических условиях.

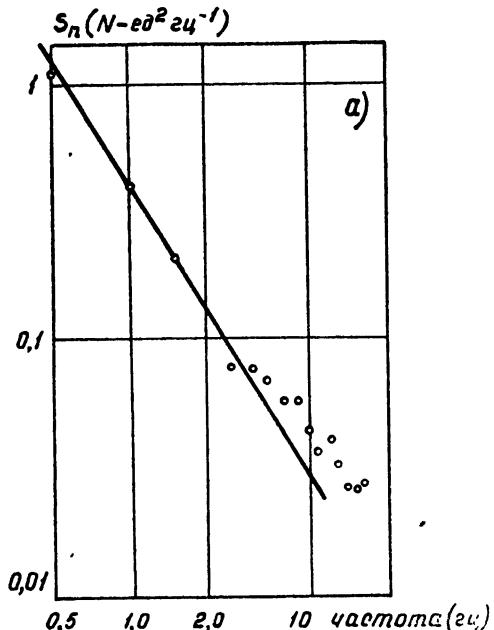
Следует, однако, отметить, что флюктуации показателя преломления вблизи земной поверхности (в первых нескольких десятках метров) значительно интенсивнее, чем в свободной тропосфере. Величина $C_n(z)$ (z — высота над земной поверхностью) при $z \leq 50 \text{ м}$ убывает с высотой как $z^{-1/3}$ [1,8]; при больших значениях z закон изменения C_n может быть и другим. Но несомненно, что типичные значения C_n для свободной тропосферы намного меньше, чем в приземном слое.

Измерений флюктуаций показателя преломления в свободной тропосфере, по которым можно было бы получить данные о спектре этих флюктуаций, немного. Результаты обработки одного из таких экспериментов приведены на рис. 8а, б, в; однако по этим графикам невозможно определить величину C_n , поскольку на них отложены нормированные величины. В работе Цванга [19] приводятся результаты измерений частотных спектров флюктуаций температуры на высотах до 5 км. Полученные в этой работе спектры (общим числом 26) хорошо согласуются с „законом 2/3“, и рассчитанная по ним величина C_n лежит в пределах от $0,004$ до $0,010 N \cdot \text{ед} \cdot \text{см}^{-1/3}$. В действительности эта величина может быть и больше за счет флюктуаций влажности.

Перейдем теперь к оценкам флюктуаций показателя преломления тропосферы на основании анализа флюктуаций фазы и амплитуды радиоволн и света.

Рис. 8. Частотный спектр флюктуаций показателя преломления.
а) — самолетные измерения [16]

В настоящее время имеет-
ся довольно большое количество наблюдений за мерцанием и дрожа-
нием изображений звезд. Согласно формуле (2.8), средний квадрат



флюктуаций логарифма амплитуды волны, а при сравнительно малых флюктуациях, которые наблюдаются в действительности, и средний квадрат флюктуаций интенсивности волны зависят от пути L в турбулентной атмосфере посредством множителя $L^{(\alpha+3)/2}$. При наблюдениях мерцания звезд $L \sim \sec \theta$, где θ — зенитный угол звезды. Поэтому, наблюдая зависимость величины мерцания звезд от $\sec \theta$, можно получить величину α . В действительности, однако, положение осложняется

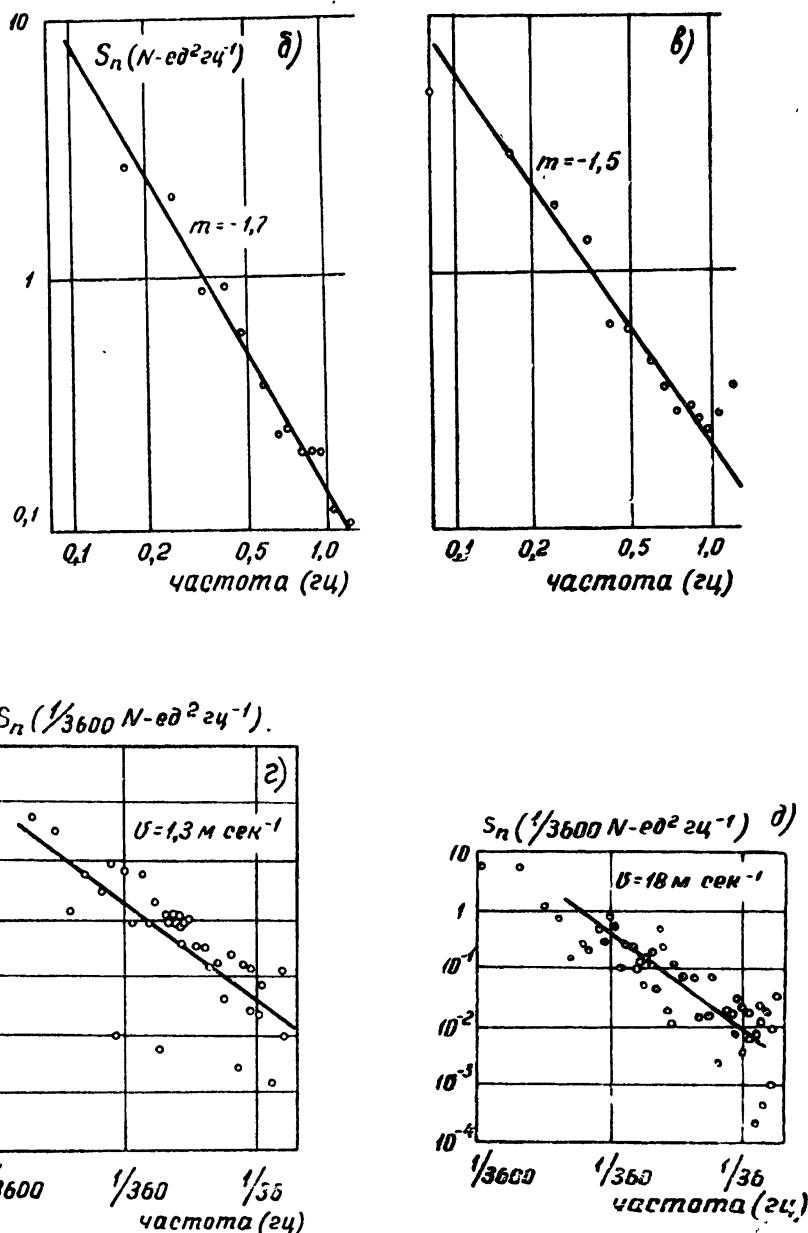


Рис. 8. Частотные спектры флюктуаций показателя преломления:
б), в) — самолетные измерения [16], г), д) — наземные измерения [17].

двумя обстоятельствами: для того, чтобы получить зависимость $\chi^2 = f(\theta)$ в „чистом“ виде, необходимо производить измерения мерцания при помощи достаточно малого по диаметру телескопа ($D < 3 \text{ см}$) и в монохроматическом свете (или в достаточно узком спектральном интервале). При нарушении первого из этих условий зависимость $\chi^2 = f(\theta)$ искажается за счет „осредняющего“ действия поверхности объектива телескопа, при нарушении второго — за счет неодинаковой при разных θ некоррелированности мерцаний в различных участках оптического спектра (подробнее см. [20]). Наблюдений мерцания, удовлетворяющих обоим требованиям, по-видимому, не производилось. Дело, однако, несколько облегчается тем, что „хроматический“ эффект начинает сказываться лишь при зенитных углах, больших 60° (см. рис. 9). Поэтому для определения α можно использовать наблюдения мерцания в интегральном („белом“) свете при $\theta < 60^\circ$. Наблюдения, проведенные с малым диаметром D диафрагмы телескопа дают зависимость $\chi^2 \sim (\sec \theta)^{1.8}$, откуда $\alpha = 0.6$. Полученное значение α относится к масштабам неоднородностей порядка 30 см и меньше (масштабы

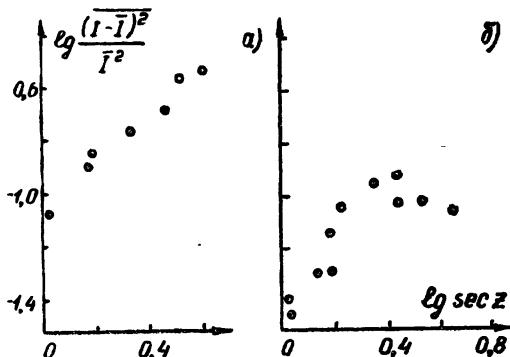


Рис. 9. Зависимость мерцания звезды от зенитного угла:
а) — в узком участке спектра (90 Å), б) — в интегральном свете [47].

определяются величиной $\sqrt{\lambda L} \simeq 10 \text{ см}$) и хорошо согласуется со значением 2/3. Оценки величины C_n по данным о мерцании и дрожании изображений звезд, основанные на решении системы уравнений (2.8), (3.8) относительно C_n и L , приводят к значению $C_n \simeq 0,007 \text{ N-eJ} \cdot \text{см}^{-1/3}$. Эта величина, обусловленная в основном температурными флюктуациями (влажность воздуха не оказывает влияния на показатель преломления в оптическом диапазоне), по порядку величин хорошо согласуется с прямыми измерениями Цванга [19].

Рассмотрим теперь эксперименты по измерению характеристик флюктуаций фазы сантиметровых радиоволн. Такие измерения произошли в марте—июне 1955 г. в США вблизи Колорадо Спрингс [17, 21], а также в ноябре 1956 г. на острове Мауи (Гавайи) [22].

В работе Гербстрайта и Томсона [17] приводится зависимость среднеквадратичного значения флюктуаций разности фаз на базе 150 м от частоты (см. рис. 10). Как видно из приведенного графика, зависимость $\Delta\Phi^2 \sim k^2$, которая должна выполняться при любом виде спектра турбулентности, хорошо оправдывается на опыте.

На рис. 11 приведен частотный спектр флюктуаций фазы дециметровых радиоволн ($f = 1046 \text{ мГц}$) на пути $L=18,5 \text{ км}$. Трасса проходила от вершины Pikes Peak (высота 4300 м) до пункта Garden of the Gods (высота 1950 м). Прямая линия на графике соответствует степенному виду спектра $S_\phi(f)$; ее наклон соответствует формуле $S_\phi(f) \sim f^{-8/3}$. Данные графика свидетельствуют о том, что в указанном диапазоне частот хорошо оправдывается формула (2.14а).

Этот результат трудно было ожидать заранее. Действительно, „закон 2/3“ для флюктуаций показателя преломления, вообще говоря,

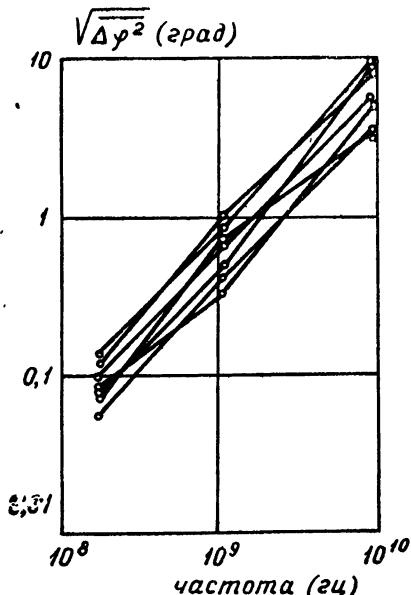


Рис. 10. Зависимость флюктуаций разности фаз на базе 150 м от частоты [17].

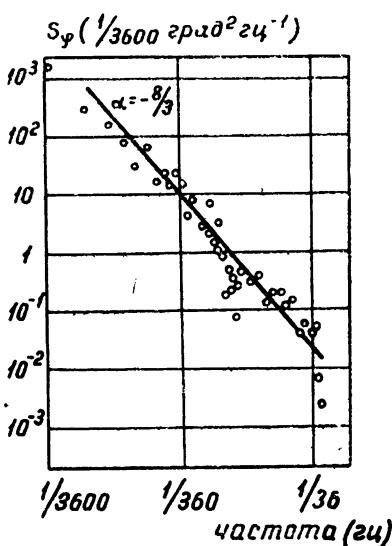


Рис. 11. Частотный спектр флюктуаций фазы ($f = 1046 \text{ мГц}$, $L=18,5 \text{ км}$, $v = 2,7 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$) [17].

должен быть справедлив для масштабов, меньших внешнего масштаба турбулентности L_0 , т. е. для частот $f > v/L_0$. В рассматриваемом случае величина $v \approx 3 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ (см. стр. 567). Поэтому диапазон частот $1/3600 \div 1/36 \text{ гц}$ соответствует расстояниям от 100 м до 10 км, которые значительно превышают величину L_0 . Таким образом, частотный спектр на рис. 11 дает нам сведения о сравнительно крупномасштабном участке спектра турбулентности, для которого нет достаточно надежной теории. Однако на основании этого эксперимента можно утверждать, что в рассматриваемом случае структура турбулентных неоднородностей описывается „законом 2/3“ и в этой области масштабов.

Поскольку вид частотного спектра $S_\phi(f)$ хорошо соответствует „закону 2/3“, можно ожидать, что в экспериментах Гербстрайта и Томсона для флюктуаций разности фаз на некоторой базе b будет справедлива формула (2.9а), основанная на предположении о справедливости того же закона. Это позволяет нам оценить величину C_n на основании данных рис. 10. Эти данные получены на трассе длиной 6,5 км и базе 150 м. Взяв $k = 0,22 \text{ см}^{-1}$ и $6,1 \cdot 10^{-3} \text{ радиан} < \sqrt{\Delta\phi^2} < 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ радиан}$ (что соответствует разбросу точек на графике 10 для $f = 1046 \text{ мГц}$), получим на основании формулы (2.9), что C_n меняется от $0,007 N \cdot \text{ед} \cdot \text{см}^{-1/3}$ до $0,019 N \cdot \text{ед} \cdot \text{см}^{-1/3}$.

В работе [17] изучались также величины $\Delta_1(\mathbf{r}, \tau) = \varphi(\mathbf{r}, t + \tau) - \varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\Delta_2(\mathbf{r}, \tau) = [\varphi(\mathbf{r}, t + 2\tau) - \varphi(\mathbf{r}, t + \tau)] - [\varphi(\mathbf{r}, t + \tau) - \varphi(\mathbf{r}, t)]$ (первая и вторая времененная разность фаз в некоторой точке). Легко выразить эти величины через частотный спектр флюктуаций фазы $S_\varphi(f)$:

$$\overline{\Delta_1^2} = 2 \int_0^\infty [1 - \cos(2\pi f \tau)] S_\varphi(f) df; \quad (4.1)$$

$$\overline{\Delta_2^2} = 2 \int_0^\infty [3 - 4\cos(2\pi f \tau) + \cos(4\pi f \tau)] S_\varphi(f) df. \quad (4.2)$$

В случае, если $S_\varphi(f) = \text{const } f^{-n}$, интегралы легко вычисляются и мы получаем формулу

$$\overline{\Delta_2^2}/\overline{\Delta_1^2} = 4(1 - 2^{n-3}). \quad (4.3)$$

Таким образом, соотношение величин $\overline{\Delta_2^2}$ и $\overline{\Delta_1^2}$ зависит только от вида частотного спектра S_φ . На основании приведенных в [17] значений $\sqrt{\overline{\Delta_1^2}} = 4^\circ.92$, $\sqrt{\overline{\Delta_2^2}} = 2^\circ.83$ ($\tau = 300$ сек) можно при помощи (4.3) определить величину n . Она оказывается равной 2,87, что близко к полученному выше значению $8/3 = 2,67$.

В работе Гербстрайта и Томсона приводятся также корреляционные функции вида

$$\rho_1(b) = \frac{\overline{\Delta_1(\mathbf{r} + \mathbf{b}, \tau) \Delta_1(\mathbf{r}, \tau)}}{\overline{\Delta_1^2}}, \quad \rho_2(b) = \frac{\overline{\Delta_2(\mathbf{r} + \mathbf{b}, \tau) \Delta_2(\mathbf{r}, \tau)}}{\overline{\Delta_2^2}}.$$

Приняв гипотезу „замороженной“ турбулентности, легко выразить величины ρ_1 и ρ_2 через структурную функцию фазы $D_\varphi(\mathbf{r}) = [\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_1)]^2$:

$$\rho_1(b) = \frac{D_\varphi(|v\tau + b|) + D_\varphi(|v\tau - b|) - 2D_\varphi(b)}{2D_\varphi(v\tau)}; \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \rho_2(b) = & \frac{D_\varphi(|2v\tau + b|) + D_\varphi(|2v\tau - b|) - 4D_\varphi(|v\tau + b|)}{2D_\varphi(2v\tau) - 8D_\varphi(v\tau)} \\ & - \frac{4D_\varphi(|v\tau - b|) + 6D_\varphi(b)}{2D_\varphi(2v\tau) - 8D_\varphi(v\tau)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь v — эффективная скорость движения неоднородностей показателя преломления.

Авторы [17] сравнивают экспериментальные результаты с теорией, развитой в [23] на основании аппроксимации корреляционной функции показателя преломления функцией e^{-r/L_0} . Для того, чтобы добиться хорошего согласия экспериментальных данных с теорией, они полагают $L_0 = 360$ м для кривой $\rho_1(b)$. Однако, чтобы добиться хорошего согласия и по кривой $\rho_2(b)$, им приходится положить $L_0 = 146$ м, что в 2,5 раза меньше первого значения. Это свидетельствует просто о неудачном выборе функции e^{-r/L_0} в качестве корреляционной функции показателя преломления. Если принять для $D_\varphi(\rho)$ выражение $D_\varphi(\rho) = \text{const } \rho^{5/3}$, соответствующее измеренному в этой работе спектру флюктуаций фазы и согласующееся с теорией, то выражения (4.4) и (4.5) примут вид:

$$\rho_1(b) = \frac{1}{2} \left[\left| 1 + \frac{b}{v\tau} \right|^{5/3} + \left| 1 - \frac{b}{v\tau} \right|^{5/3} - 2 \left(\frac{b}{v\tau} \right)^{5/3} \right]; \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \rho_2(b) = & \frac{1}{4(2^{2/3}-2)} \left[\left| 2 + \frac{b}{v\tau} \right|^{5/3} + \left| 2 - \frac{b}{v\tau} \right|^{5/3} - 4 \left| 1 + \frac{b}{v\tau} \right|^{5/3} - \right. \\ & \left. - 4 \left| 1 - \frac{b}{v\tau} \right|^{5/3} + 6 \left(\frac{b}{v\tau} \right)^{5/3} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

На рис. 12 изображены экспериментальные данные Гербстрайта и Томсона вместе с кривыми, построенными по формулам (4.6) и (4.7). Для того, чтобы совместить экспериментальные точки с теоретическими кривыми, мы приняли $v\tau = 320$ м. При этом значении $v\tau$ экспериментальные точки и теоретические кривые сближаются одновременно для обеих величин ρ_1 и ρ_2 , в отличие от аналогичного графика в [17], где авторам пришлось брать различные значения L_0 . На основании полученного значения $v\tau$ и известного $\tau = 300$ сек можно определить эффективную скорость переноса неоднородностей $v = 2,7$ м·сек⁻¹. Она оказывается заключенной между скоростью ветра в верхней точке трассы ($v \approx 18$ м·сек⁻¹) и скоростью ветра в нижней точке ($v \approx 2$ м·сек⁻¹).

Используя это значение v , мы можем определить величину C_n на основании частотного спектра $S_\varphi(f)$ (рис. 11), а также исходя из измеренного значения $\bar{\Delta}_1^2$.

Воспользовавшись формулой (2.14а) и подставляя в нее $k = 0,22$ см⁻¹, $L = 18,5$ км, $v = 2,7$ м·сек⁻¹, получим $C_n = 0,021$ Н-ед·см^{-1/3}. Для того, чтобы найти величину C_n по измеренному значению $\bar{\Delta}_1^2$, перепишем формулу (2.9а), положив $b = v\tau$:

$$\bar{\Delta}_1^2 = 2,9k^2L(v\tau)^{5/3}C_n^2.$$

На основании значений $\sqrt{\bar{\Delta}_1^2} = 4^\circ,92$, $v\tau = 820$ м и прежних значений k и L получим $C_n = 0,015$ Н-ед·см^{-1/3}, что с точностью в 30% согласуется с предыдущим значением.

Одновременно с измерениями Гербстрайтом и Томсоном флюктуации фазы проводились измерения флюктуаций разности фаз на нескольких базах от 5,5 м до 150 м на длине волны 3,2 см [21]. Приведенные в этой работе экспериментальные структурные функции фазы имеют сравнительно большой разброс, вследствие чего по ним трудно определить вид структурной функции флюктуаций фазы. Во всяком случае, он не противоречит формуле (2.9). Среднеквадратичное значение разности фаз на базе 150 м колеблется от 1° до 8°. В этих опытах $L = 5,5$ км, $\lambda = 3,2$ см. Определенная по формуле (2.9) вели-

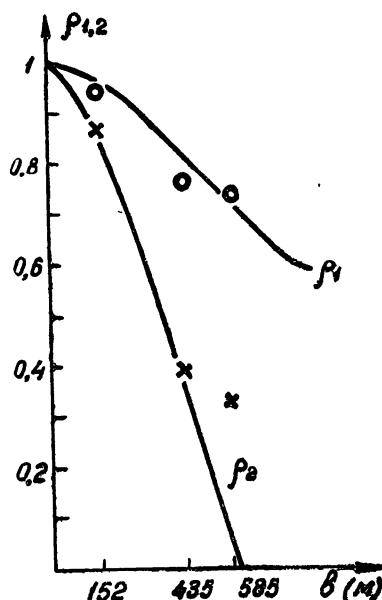


Рис. 12. Пространственные корреляционные функции для первой и второй временной разности фаз:

сплошные линии — теоретические кривые; точки — экспериментальные данные из работы [17].

чина C_n колеблется от $0,002 \text{ N-ед.см}^{-1/3}$ до $0,018 \text{ N-ед.см}^{-1/3}$. Эта оценка C_n по порядку величины хорошо согласуется с предыдущими.

В статье Нортон [22] приводятся спектры флюктуаций фазы сантиметровых радиоволн ($\lambda = 3,2 \text{ см}$), измеренные на трассе протяженностью 30 км на острове Мауи (Гавайи) (см. рис. 13 и 14). Прямые линии на графике соответствуют зависимости $S_\varphi(f) \sim f^{-8/3}$ и хорошо согласуются с экспериментальными данными. Таким образом, спектры на рис. 13 и 14 дают тот же результат, что и спектр из работы [17] на рис. 11. Однако спектры рис. 13 и 14 относятся к более высоким частотам (масштабы от 1 м до 2 км), чем спектр на рис. 11, и охватывают больший интервал масштабов. Высокочастотная часть этих

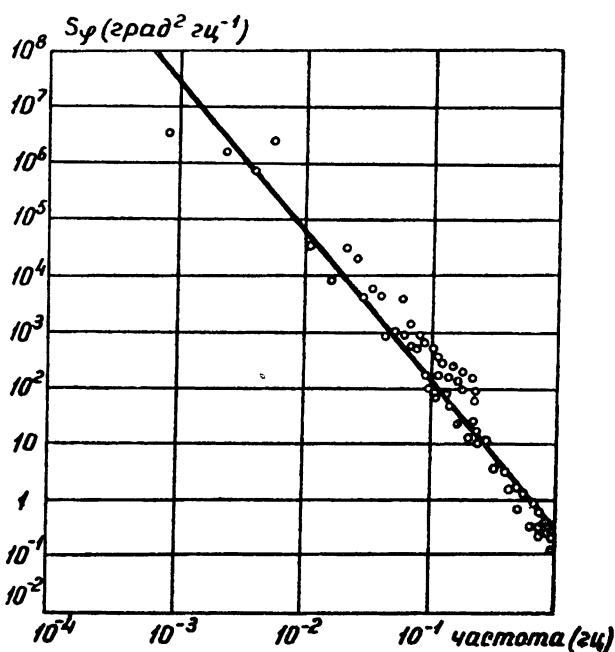


Рис. 13. Частотный спектр флюктуаций фазы $(f = 9414 \text{ мгц}, L = 30 \text{ км}, v = 2,2 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$, Гавайи, 13 час [22]).

спектров, несомненно, относится к инерционному участку спектра турбулентности (т. е. к участку, на котором должен выполняться „закон 2/3“); для этого участка показатель степени $-8/3$ в $S_\varphi(f)$ является вполне естественным. Тот факт, что вид функции $S_\varphi(f)$ не меняется существенно и в области более низких частот, говорит о том, что в данном случае „закон 2/3“ выполняется до сравнительно больших масштабов, так же, как это было и на рис. 11.

По данным рис. 13 и 14 можно найти величину C_n . Воспользовавшись формулой (2.14а), получим, что $C_n = 0,130 \text{ N-ед.см}^{-1/3}$ для графика на рис. 14, относящегося к ночных наблюдениям, и $C_n = 0,180 \text{ N-ед.см}^{-1/3}$ для графика на рис. 13, относящегося к полуденным часам. Полученные значения C_n на порядок больше, чем типичные для свободной тропосфера в умеренных широтах значения, и сравнимы с максимальными наземными значениями, полученными в [18]. Возможно, что такие аномально большие значения C_n связаны с климатическими особенностями района Гавайских островов; не исключено,

однако, что некоторое завышение величины C_n имело место за счет неточности измерений скорости ветра.

В заключение этого параграфа рассмотрим рассеяние радиоволн в тропосфере. В настоящее время имеется большое количество теоретических и экспериментальных работ по этому вопросу [24]. Дальнее распространение ультракоротких радиоволн за пределы прямой видимости связывают с рассеянием радиоволн на турбулентных неоднородностях показателя преломления. Как уже отмечалось выше (см. (2.3)), интенсивность рассеяния радиоволн определяется спектральной плотностью флюктуаций показателя преломления $\Phi_n(k_0 - k_s)$. Поэтому

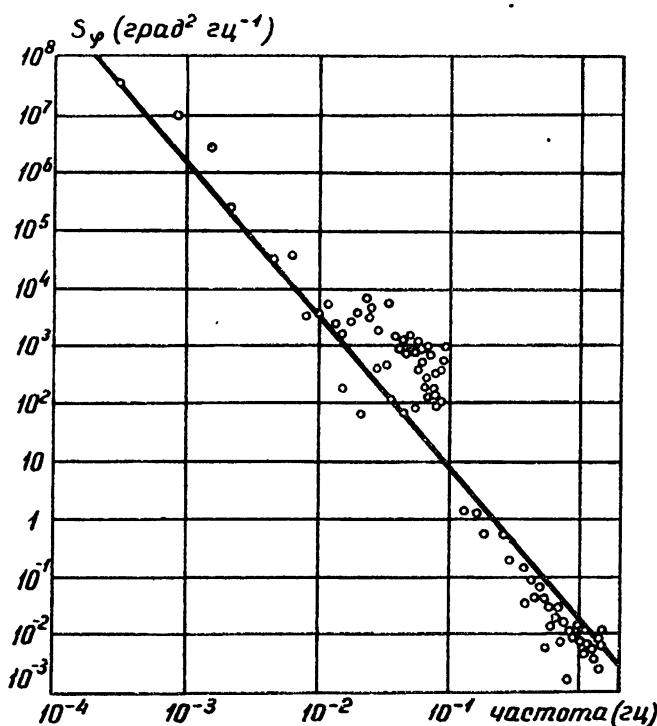


Рис. 14. Частотный спектр флюктуаций фазы ($f = 9414$ мгц, $L = 30$ км, $v = 0,5$ м · сек $^{-1}$, Гавайи, 0,2 часа [22]).

данные о рассеянии радиоволн в атмосфере могут дать сведения об этой величине.

Дело, однако, сильно осложняется тем обстоятельством, что эффект дальнего тропосферного распространения радиоволн, по-видимому, вызывается не только "чистым" рассеянием радиоволн на турбулентных неоднородностях атмосферы, но также одновременным действием нескольких других механизмов (таких как отражения от слоев инверсий, частичные отражения от вертикально неоднородной атмосферы и некоторые другие). Поэтому непосредственно использовать данные о дальнем тропосферном распространении радиоволн для нахождения $\Phi_n(x)$ затруднительно. Для выяснения роли рассеяния в дальнем тропосферном распространении можно привести следующие рассуждения. Предположим, что весь эффект дальнего тропосферного распространения обусловлен рассеянием, и на основании измеренных значений $T = P_0/P_s$ оценим величину $\Phi_n(x)$. Считая,

что для $\Phi_n(x)$ выполняется соотношение (1.9), мы сможем оценить величину C_n , необходимую для объяснения наблюдаемого поля при дальнем тропосферном распространении ультракоротких волн. Такая оценка, проведенная в [1], приводит к значению C_n , меняющемуся в пределах от $0,002 \text{ N-eд} \cdot \text{см}^{-1/3}$ до $0,080 \text{ N-eд} \cdot \text{см}^{-1/3}$. Для сравнения этой величины с оценками C_n , приведенными выше, можно использовать таблицу 1.

Таблица 1

№	$C_n (\text{N-eд} \cdot \text{см}^{-1/3})$	На основании каких данных получена приводимая оценка
1	$0,004 \pm 0,010$	Прямые измерения спектров флюктуаций температуры на самолете [19].
2	0,020	Прямые измерения спектров флюктуаций показателя преломления на самолете [48].
3	$0,050^*$	Спектр флюктуаций показателя преломления (Garden of the Gods, Колорадо, США, июнь, 05–06 часов [17]).
4	$0,090^t$	Спектр флюктуаций показателя преломления (Pikes Peak, Колорадо, США, июнь, 05–06 часов [17]).
5	$0 \pm 0,150^*$	Измерения структурной функции температуры в приземном слое атмосферы [18].
6	0,007	Мерцание и дрожание звезд [1].
7	$0,007 \pm 0,019$	Флюктуации разности фаз на базе 150 м на частотах от 173 до 9350 мгц (Колорадо, США, март, 15 часов [17]).
8	$0,002 \pm 0,018$	Флюктуации разности фаз на базах до 150 м $\lambda = 3 \text{ см}$ (Колорадо, США, март [21]).
9	0,021	Частотный спектр флюктуаций фазы $\lambda = 30 \text{ см}$ (Колорадо, США, июнь [17]).
10	0,015	Изменчивость фазы за 5 мин на $\lambda = 30 \text{ см}$ (Колорадо, США, июнь [17]).
11	0,180	Спектр флюктуаций фазы на $\lambda = 3 \text{ см}$ (Гавайи, 13–14 часов [22]).
12	0,130	Спектр флюктуаций фазы на $\lambda = 3 \text{ см}$ (Гавайи, 02–03 часа [22]).
13	$0,002 \pm 0,080$	Значения, необходимые для объяснения дальнего тропосферного распространения УКВ при помощи механизма рассеяния [1].

Если рассматривать значения C_n , относящиеся к свободной атмосфере (т. е. исключить величины, относящиеся к приземному слою), то для умеренных широт по всем хорошо согласующимся между собой оценкам мы получим пределы изменения C_n от 0,002 до $0,020 \text{ N-eд} \cdot \text{см}^{-1/3}$. Следует, однако, отметить, что эти оценки получены по отрывочным измерениям и по ним трудно судить о действительных пределах изменения C_n . В то же время величины, помещенные в последней строке, найдены в результате двухлетних регулярных наблюдений. Величина сигнала, соответствующего значению $C_n = 0,080 \text{ N-eд} \cdot \text{см}^{-1/3}$, наблюдается лишь в течение одного летнего месяца; в остальные месяцы значения P_s/P_0 намного меньше максимального

* Значения C_n относятся к приземному слою атмосферы.

(см. рис. 15) и вполне могут быть объяснены значениями C_n , получаемыми другими методами (табл. 1).

Таким образом, если судить лишь по абсолютным значениям P_s/P_0 , то можно считать гипотезу о связи дальнего распространения УКВ с рассеянием на турбулентных неоднородностях не противоречащей наблюдаемым фактам.

Если, однако, обратиться к частотной зависимости рассеянного поля, то оказывается, что ее трудно объяснить лишь одним эффектом рассеяния на турбулентных неоднородностях. В работе Больджиано [16] приводятся результаты эксперимента, специально поставленного с целью выяснения частотной зависимости при дальнем тропосферном распространении. Для этой цели производилось одновременное измерение рассеянного поля на двух частотах (417 и 2290 мГц) на одной

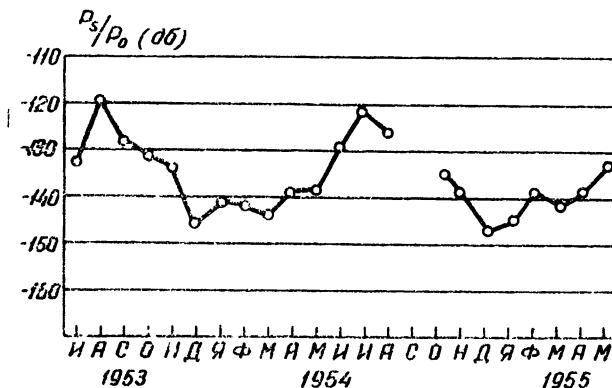


Рис. 15. Годовой ход уровня поля при дальнем тропосферном распространении УКВ.

и той же трассе, причем размеры антенн относились между собой как длины волн (последнее обеспечило одинаковую величину рассеивающего объема и усиления антенн). В этом случае отношение мощностей на двух частотах зависит лишь от вида спектральной плотности $\Phi_n(x)$. Если предположить, что $\Phi_n(x)$ имеет вид

$$\Phi_n(x) = \text{const } x^{-(\alpha+3)},$$

то на основании (2.1) $d\sigma_0 \sim \lambda^{1-\alpha} = \lambda^n$, где $n = 1 - \alpha$. В этом случае $\Delta L \equiv P_s(\lambda_1)/P_s(\lambda_2) = (\lambda_1/\lambda_2)^n$; поэтому, измеряя отношение $P_s(\lambda_1)/P_s(\lambda_2)$, можно получить величину n . Оказалось, что n меняется в значительных пределах (от $-1,5$ до $+2,5$), что соответствует значениям α от $+2,5$ до $-1,5$ (см. рис. 16, на котором приведена кривая распределения величины n). Приблизительно в 90% случаев n превышает значение $-1/3$, соответствующее теории турбулентного перемешивания Обухова. Автор [16] пытается объяснить это отступление влиянием температурной стратификации на вид спектра турбулентности [25] и обнаруживает корреляцию между величиной n и числом Ричардсона (см. (1.12)). К сожалению, в [16] не приводится никаких данных о трассе, что затрудняет оценку этого эксперимента (указана лишь значения частот: $f_1 = 417$ мГц, $f_2 = 2290$ мГц).

Нет, конечно, никаких сомнений в том, что эффект рассеяния радиоволн на турбулентных неоднородностях существует. На основании данных таблицы 1 можно сделать вывод, что наблюдаемые в атмосфере турбулентные флюктуации показателя преломления должны вызывать рассеянное поле, которое проявляется при дальнем тро-

посферном распространении как слабый сигнал, существующий большую

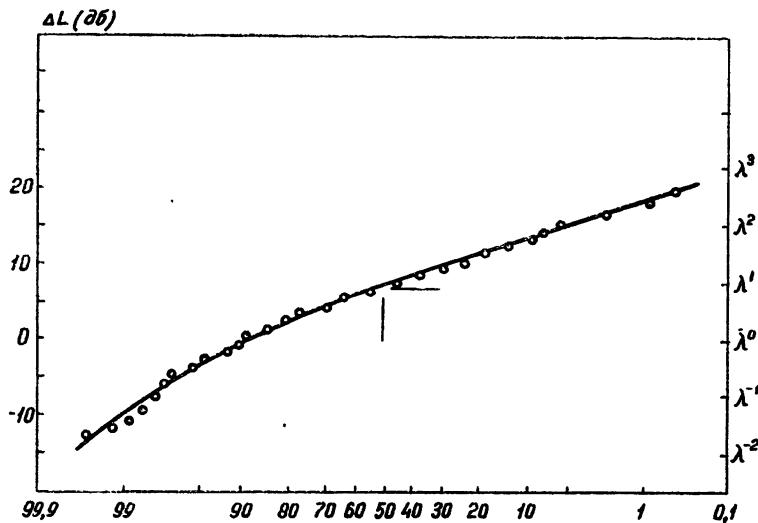


Рис. 16. Функция распределения показателя степени в частотной зависимости при дальнем тропосферном распространении УКВ [16] (по оси абсцисс отложен процент случаев, когда ΔL превышает ординату).

часть времени. Тем не менее, вполне возможно, что более редкие и интенсивные поля при дальнем тропосферном распространении вызваны другими механизмами распространения радиоволн.

5. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ E -СЛОЯ ИОНОСФЕРЫ

В настоящее время имеются прямые доказательства существования турбулентности в нижней ионосфере. К ним относятся измерения скоростей дрейфа метеорных следов и неоднородностей ионосферы, рассеяние радиоволн в E -слое, измерение электронной концентрации при помощи ракет и некоторые другие данные. Наиболее интенсивная турбулентность наблюдается в E -слое. Здесь числа Рейнольдса имеют порядок $5 \cdot 10^3 \div 10^4$ (см. ниже).

В области слоя F также наблюдаются неоднородности, однако их характер сильно отличается от характера неоднородностей в более низких слоях атмосферы. Числа Рейнольдса здесь намного меньше, чем в области слоя E . Возможным механизмам возникновения неоднородностей в области слоя F посвящен ряд работ [27–29]. Ниже мы будем рассматривать лишь область E -слоя ионосферы.

До высот порядка $130 \div 140$ км в первом приближении можно не учитывать влияние на турбулентность магнитного поля Земли [30], однако, как следует из экспериментальных данных, турбулентность в области E -слоя является анизотропной.

Весьма подробные сведения о турбулентности нижней ионосферы можно получить из анализа скорости дрейфа и законов диффузии метеорных следов. Обширные исследования в этом направлении проводились за последнее время в Англии [31–33].

Для измерений скорости дрейфа метеорных следов, которые в основном образуются на высотах $80 \div 100$ км, применялась установка с одним передающим и двумя приемными пунктами, расположенными

на расстоянии 3,6 км или 20 км (пункты O и C на рис. 17). Эта схема позволяет одновременно измерить скорости дрейфа метеорного следа в точках X и Y , разделенных по высоте на расстояние $h = AX$. По индивидуальным значениям скоростей u_o и u_c определялось среднее за час значение горизонтальной составляющей ветра \bar{u} , получаемое осреднением приблизительно ста индивидуальных значений. Затем находились отклонения скорости ветра от среднего значения $\delta u_o = \bar{u} - u_o$, $\delta u_c = \bar{u} - u_c$. Таким образом в [31] было обработано приблизительно 900 пар эхо.

По величинам δu_c определялось среднеквадратичное значение турбулентной скорости

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{n} \sum \delta u_c^2}.$$

Величина σ_v меняется от 15 до 45 м·сек⁻¹ со средним значением 25 м·сек⁻¹. Определялись также величины вертикального градиента скорости ветра. Эта величина в среднем равна 10 м·сек⁻¹ км⁻¹ = = 10⁻² сек⁻¹, хотя в некоторых случаях встречаются значения 10⁻¹ сек⁻¹.

Вычислялась также пространственная корреляционная функция

$$g = \left(\sum \delta u_o \delta u_c \right) \left(\sum \delta u_o^2 \sum \delta u_c^2 \right)^{-1/2}.$$

Величина g зависит фактически от двух аргументов: разности высот $h = AX$ (см. рис. 17) и расстояния $r = XY$ вдоль следа. Оказывается, что турбулентность на уровне 80–100 км сильно анизотропна. Сравнивая пары эхо с одинаковым h , но разными r (такие пары могут быть получены при разных базах OC), можно оценить максимальные горизонтальные масштабы турбулентности, которые оказываются порядка 100–200 км. В то же время вертикальный радиус корреляции имеет порядок 6–7 км (см. рис. 18, на котором представлена функция $g(h)$). В действительности различным значениям h на рис. 18 соответствуют различные r , меняющиеся от 0,6 км до 7,8 км. Однако,

поскольку эти значения r много меньше радиуса корреляции неоднородностей в горизонтальном направлении, можно считать, что падение корреляции с увеличением расстояния обусловлено в основном вертикальным разносом h .

Сведения о горизонтальной структуре неоднородностей можно получить из временной автокорреляционной функции турбулентной компоненты скорости дрейфа. Такая корреляционная функция представлена на рис. 19. Характерное время T_0 (такое, что $g(T_0) = 0$) оказывается равным $6 \cdot 10^3$ сек (1,7 часа). Отсюда можно получить характер-

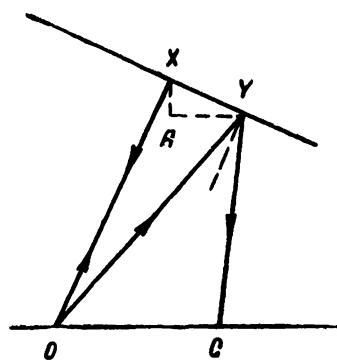


Рис. 17. Схема измерений скорости дрейфа метеорного следа в двух точках [32].

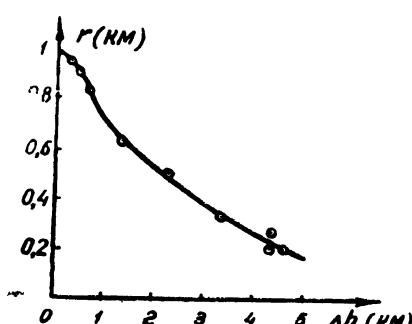


Рис. 18. Вертикальная корреляционная функция скорости ветра по метеорным наблюдениям [32].

ный горизонтальный размер неоднородностей $L_{0r} = \sigma_v T_0 = 150 \text{ км}$. Этот масштаб в 20 раз превышает вертикальный масштаб турбулентности $L_{0v} = 7 \text{ км}$. В связи с сильной анизотропией турбулентности можно ожидать, что статистические характеристики вертикальной компоненты турбулентной скорости ветра будут значительно отличаться от характеристик горизонтальной компоненты. Однако на основании данных, приводимых в работах [31–33], трудно сказать что-либо более определенное об этом различии.

В статье [32] производится сопоставление среднеквадратичных значений σ_v со средним ветром и с градиентом скорости ветра и отмечается несколько неожиданный факт отсутствия корреляции между этими величинами. Объяснение этого факта можно искать в анизотропии турбулентности. По-видимому, величина σ_v обусловлена в основ-

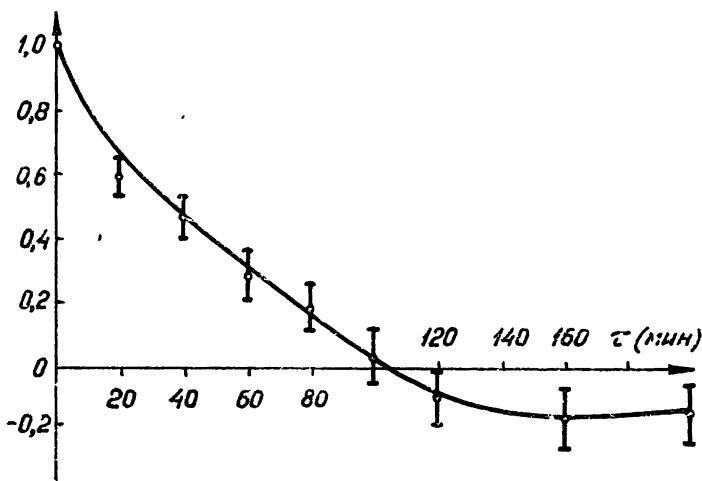


Рис. 19. Временная автокорреляционная функция турбулентной составляющей скорости ветра по метеорным наблюдениям [32].

ном флюктуациями горизонтальной компоненты скорости и поэтому слабо связана с ее вертикальным градиентом.

Оценим также числа Рейнольдса для движений различного масштаба. В качестве характерной скорости возьмем величину σ_v , так что получаемое Re будет иметь смысл „внутреннего“ числа Рейнольдса для соответствующего масштаба. Взяв $\sigma_v = 25 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$, $v = 2,5 \cdot 10^5 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$, получим $Re = 7000$ для вертикальных движений масштаба $L_{0v} = 7 \text{ км}$ и $Re = 150000$ для горизонтальных движений с $L_{0r} = 150 \text{ км}$ (величина σ_v в обоих случаях взята одинаковой). Оба значения Re достаточно велики и свидетельствуют о том, что в области E -слоя должна существовать развитая турбулентность с заметным инерционным интервалом. Однако „интенсивность“ турбулентности, характеризуемая скоростью диссипации энергии турбулентности в единице массы жидкости ϵ , должна быть значительно меньшей, чем при тех же условиях в тропосфере, так как в области слоя E температурная стратификация устойчива.

На основании результатов метеорных наблюдений можно оценить величину числа Ричардсона Ri (см. (1.12)), определяющего влияние температурной стратификации на характеристики турбулентности. Подставляя в (1.12) $\gamma_a = 10^{-2} \text{ град}\cdot\text{м}^{-1}$, $dT/dz \approx 10^{-3} \text{ град}\cdot\text{м}^{-1}$ (см. [34]), $du/dz \approx 10^{-2} \text{ сек}^{-1}$, $g = 9,8 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-2}$, $T \approx 200^\circ \text{K}$, получим

$$Ri \approx 5.$$

Как видно из формулы (1.11) и из рис. 1, при прочих равных условиях для положительных значений Ri интенсивность турбулентных флюктуаций меньше, чем для отрицательных Ri . Значениям $Ri \approx 5$ соответствуют весьма малые значения функции $a^2(Ri)$ (см. (1.11)) или аналогичной функции, определяющей интенсивность флюктуаций скорости [35].

График функции $a^2(Ri)$, изображенной на рис. 1, представлен на рис. 20 в логарифмическом масштабе. Положительным значениям Ri соответствует кривая, которая может быть хорошо аппроксимирована формулой

$$a^2(Ri) = 0,1/Ri.$$

Считая, что эта формула справедлива и при больших значениях Ri (эта часть кривой изображена на рис. 20 пунктиром), получим для $Ri \approx 5$ значение $a^2(5) \approx 0,02$. Таким образом, при значениях Ri , наблюдавшихся в E -слое атмосферы, интенсивность турбулентных флюктуаций

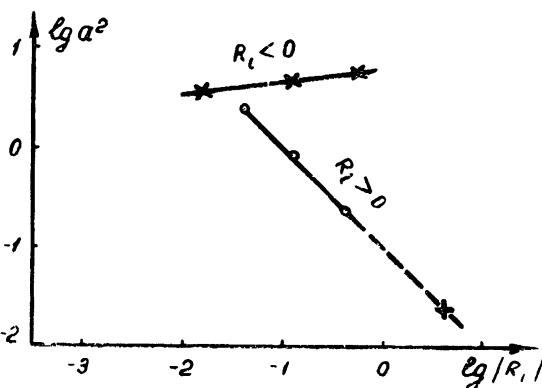


Рис. 20. Зависимость интенсивности турбулентных флюктуаций температуры в приземном слое атмосферы от числа Ричардсона.

электронной концентрации на два порядка меньше, чем при безразличной температурной стратификации.

Приведенные рассуждения относительно роли Ri относятся к флюктуациям концентрации свободных электронов N . Однако такие же соображения можно привлечь и при оценках величины ϵ по "внешним" характеристикам турбулентности L_0 , T_0 . Здесь, однако, нам неизвестна функция, аналогичная $a^2(Ri)$, поэтому более или менее уверенных оценок ϵ по этим величинам сделать нельзя. В [32] Гринхойзен оценивает оценку ϵ на основании соотношения $\epsilon \approx \sigma_\theta^2/T_0$, что приводит к значению $\epsilon \sim 10^3$. Следует, однако, иметь в виду, что в этой формуле в качестве множителя может стоять функция от Ri , значение которой при больших положительных Ri может сильно отличаться от единицы.

Более надежные оценки ϵ могут быть получены из анализа турбулентности малых масштабов. Как следует из теории Колмогорова, при малых значениях r поперечная структурная функция флюктуаций скорости имеет вид [39]:

$$\overline{(\delta u_{t_1} - \delta u_{t_2})^2} = (2/15) (\epsilon/v) r^2. \quad (5.1)$$

Здесь u_{t_1} и u_{t_2} — проекции скорости в точках M_1 и M_2 на направление, перпендикулярное M_1M_2 . Из рис. 16 видно, что измерения радиальных скоростей дрейфа в точках X и Y дают как раз значения u_t . Следовательно, если величина r достаточно мала, то по измеренным значениям u можно определить ε . Раскрывая левую часть (5.1), получим:

$$\overline{\delta u_{t_1}^2} - 2\overline{\delta u_{t_1}\delta u_{t_2}} + \overline{\delta u_{t_2}^2} \approx 2\overline{\delta u_t^2} - 2g(r)\overline{\delta u_t^2} = (2/15)(\varepsilon/v)r^2.$$

Отсюда

$$g(r) = 1 - \varepsilon r^2 / 15v\overline{\delta u_t^2}. \quad (5.2)$$

В [31] функция $g(r)$ при малых r представлена в виде $g(r) = 1 - r^2/\lambda^2$, причем для λ приводится величина 2400 м. Сравнивая это выражение с (2.5), получим

$$\varepsilon = 15v\overline{\delta u_t^2}\lambda^{-2}. \quad (5.3)$$

Подставляя $\overline{\delta u_t^2} = \sigma_v^2 = (25 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1})^2$, $v = 2,5 \cdot 10^5 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$, $\lambda = 2400 \text{ м}$ получим:

$$\varepsilon \approx 400 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-3}. \quad (5.4)$$

На основании полученного значения ε можно оценить параметр l_0 (см. (1.5)), характеризующий размер наименьших неоднородностей

$$l_0 = \sqrt[4]{v^3/\varepsilon} = 25 \text{ м}. \quad (5.5)$$

Масштаб скорости, соответствующий размеру l_0 , равен

$$v_0 = \sqrt[4]{\varepsilon v} = 1 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}, \quad (5.6)$$

и „время жизни“ наименьших неоднородностей

$$\tau_0 = \sqrt{v/\varepsilon} = 25 \text{ сек}. \quad (5.7)$$

Следует отметить, что приведенный способ оценки ε , хотя и более надежен, чем первый ($\varepsilon \sim \sigma_v^2/T$), однако также содержит величину σ , характеризующую крупномасштабную турбулентность и поэтому уступает в надежности способам, использующим только „внутренние параметры турбулентности“. Одним из таких способов является предложенный Букером [36] метод определения величины ε по наблюдениям скорости диффузии метеорных следов. Следует отметить, однако, что предлагаемые в [36] формулы для определения ε , которыми воспользовался Гринхой в [33], выведены лишь с точностью до числового множителя, который в данном случае оказывается очень существенным.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. В случае, если диаметр метеорного следа мал по сравнению с внутренним масштабом турбулентности, увеличение величины l происходит под действием молекулярной диффузии по закону

$$\bar{l}^2 = 4Dt \quad \text{или} \quad d\bar{l}^2/dt = 4D. \quad (5.8)$$

Если же величина l превышает внутренний масштаб турбулентности l , диаметр следа l начнет увеличиваться и за счет наличия турбулентных разности скоростей в пределах следа. Этот эффект „турбулентной диффузии“ можно учесть, если заменить коэффициент диффузии коэффициентом турбулентной диффузии $\kappa_T \sim \Delta v_l l \sim (\varepsilon l)^{1/3} l \sim \varepsilon^{1/3} l^{4/3}$, т. е.

$$\bar{l}^2 = A \varepsilon^{1/3} t^{4/3}, \quad (5.9)$$

где $\bar{l} = \sqrt{\bar{l}^2}$ и A — численный коэффициент. Эта формула была получена эмпирически Ричардсоном [37] и теоретически обоснована Обуховым [38] на основании теории локально изотропной турбулентности. Используя (5.9), получим: $d\bar{l}^2/dt = 4A \varepsilon^{1/3} (\bar{l}^2)^{2/3}$. Интегрируя это уравнение, найдем:

$$\bar{l}^2 = (4A/3)^3 \varepsilon t^3. \quad (5.10)$$

Таким образом, при турбулентной диффузии диаметр следа возрастает пропорционально $t^{3/2}$. Для того, чтобы сравнивать формулу (5.10) с экспериментом, необходимо знать величину численного коэффициента A . Его можно оценить из следующих простых соображений.

Турбулентная диффузия метеорного следа связана в основном с „продольной“ разностью скоростей в двух точках. Если расстояние r между этими точками мало, т. е. $r \ll l_0$, то средний квадрат продольной разности скоростей равен [39]

$$D_{rr}(r) = (1/15)(\varepsilon/\nu) r^2. \quad (5.11)$$

Если же $r \gg l_0$, то

$$D_{rr}(r) = C \varepsilon^{2/3} r^{2/3}. \quad (5.12)$$

Найдем такое l_1 , для которого оба эти выражения дают одно и то же значение:

$$(1/15)(\varepsilon/\nu) l_1^2 = C \varepsilon^{2/3} l_1^{2/3},$$

откуда

$$l_1 = \sqrt[4]{(15C\nu)^{3/\varepsilon}}$$

(l_1 отличается от l_0 лишь численным множителем). Естественно предположить, что закон диффузии $\bar{l}^2 = 4Dt$ переходит в закон (5.10) при том же самом значении $l = l_1$, при котором (5.11) переходит в (5.12). В этом случае из уравнений $l_1^2 = 4Dt_1$, $l_1^2 = (4A/3)^3 \varepsilon t_1^{3/2}$ легко получаем $A = (1/5C) D/\nu$. Пренебрегая незначительной разницей между D и ν , получим:

$$A = 1/5C. \quad (5.13)$$

Согласно экспериментальным данным [35], $C \approx 1,07$, что дает $A \approx 0,2$.

К близкому значению константы A можно прийти и из других соображений. Согласно Ричардсону [37], $A \varepsilon^{1/3} \approx 0,4 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$. Эта величина является средней для большого диапазона масштабов в тропосфере. Согласно Бренту [40] (см. также [41]), среднее для тропосфера значение ε равно $5 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-3}$. Отсюда можно найти $A \approx 0,23$. Заметим, что в формулу (5.10) входит A^3 , поэтому неоправданная замена значения $A = 0,2$ на $A = 1$ может изменить величину ε в 125 раз. Подставляя значение A в формулу (5.10), получим

$$\bar{l}^2 = 0,02\varepsilon t^3. \quad (5.14)$$

Наблюдения турбулентной диффузии проводились Гринхоу [33]. На рис. 21 приведена зависимость диаметра следа от времени наблюдения. Для длительных следов (с временем жизни более 100 сек) наблюдается быстрый рост диаметра следа со временем, удовлетворительно согласующийся с законом турбулентной диффузии $\bar{l}^2 \sim t^3$. Как видно из графика на рис. 21, этот закон достаточно хорошо описывает экспериментальные данные.

Этот факт служит прямым подтверждением того, что в E -слое ионосферы существует развитая турбулентность, подчиняющаяся закономерностям колмогоровской схемы турбулентности. Поскольку коэффициент пропорциональности в (5.14) зависит лишь от ϵ , данные рис. 20 позволяют определить эту величину. Она оказывается равной $3000 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-3}$. (Заметим, что Гринхоу, не учитывавший правильного значения константы A , получил значение $\epsilon = 70 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-3}$, что сильно расходится с другими оценками).

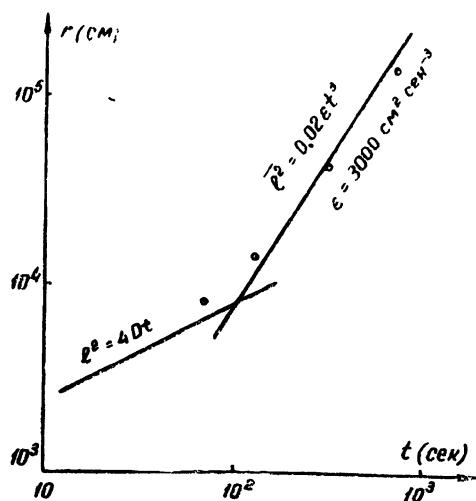


Рис. 21. Зависимость диаметра длительного метеорного следа от времени [33].

В своей работе [41] Букер рассматривает оценки параметров турбулентности, исходя из предположений, что в E -слое ионосферы $Ri = 1$ и постоянная времени крупных вихрей $T_0 = 50 \text{ сек}$. При этом он получает явно завышенную оценку для ϵ ($\epsilon = 2,5 \cdot 10^5 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-3}$). В действительности для существования стационарной турбулентности условие $Ri = 1$ не является необходимым. Эксперименты в приземном слое атмосферы свидетельствуют о том, что турбулентность (правда, слабая) существует и при больших значениях Ri . Кроме того, оценка величины T_0 на основании предположения $Ri = 1$ дает постоянную времени, не имеющую отношения к крупномасштабным неоднородностям, вызванным динамической неустойчивостью. Поэтому оценки ϵ , проведенные в [41] и давшие завышенное на два порядка значение ϵ , не могут быть признаны корректными. Аналогичное замечание относится и к работе [42].

Перейдем теперь к оценкам флюктуаций концентрации свободных электронов в E -слое. В первую очередь проанализируем данные о рассеянии ультракоротких радиоволн в E -слое.

Здесь прежде всего следует остановиться на работе Букера [43]. В описываемых им экспериментах изучалось ионосферное рассеяние УКВ одновременно на частотах 30, 40, 50, 74 и 108 мгц. Измерения проводились в режиме непрерывного излучения. Ширина диаграмм направленности как передающих, так и приемных антенн на всех частотах была одинакова и составляла $\gamma = 6^\circ$. Расстояние между корреспондирующими пунктами $D = 1300 \text{ км}$. Угол возвышения оси диаграммы направленности антенн над горизонтом $e = 4,6^\circ$; угол рассеяния $\theta = 21^\circ$; оси диаграмм направленности антенн пересекались на высоте 85 км. На основании этих данных можно оценить размеры

значение $\epsilon = 3000 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-3}$, что сильно расходится с другими оценками). Значение ϵ , получаемое последним методом, является, по-видимому, наиболее надежным. Оценим также параметры l_1 , τ_0 , v_0 , характеризующие интервал диссипации турбулентности. Взяв $\nu = 4 \cdot 10^4 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$ (в работе [33] приводится именно это значение ν , что свидетельствует о том, что экспериментальные данные получены на высоте 90 км), получим ($l_1 = \sqrt[4]{(15\nu C)^3/\epsilon} \approx 5l_0$): $\epsilon = 3000 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-3}$, $l_1 = 30 \text{ м}$, $\tau_0 = 15 \text{ сек}$, $v_0 = 2 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$. По порядку величины эти значения согласуются с оценками (4.5) — (7.5), но являются, по-видимому, более надежными.

рассеивающего объема. Его продольный размер $a \approx 380 \text{ км}$, поперечный размер $b \approx 70 \text{ км}$. Вертикальный размер рассеивающего объема Букер принимает равным толщине E -слоя (10 км). Считая горизонтальное сечение рассеивающего объема эллипсом с осями a и b , найдем величину рассеивающего объема $V = 2 \cdot 10^{14} \text{ м}^3$.

Все применяющиеся частоты были намного выше критической частоты как E -слоя, так и F -слоя. Поэтому, как следует из формулы

$$n^2 - 1 = -\omega_k^2 / \omega^2 \quad (\omega_k^2 = 4\pi Ne^2/m), \quad (5.15)$$

$n - 1 \ll 1$ и $n \approx 1$. Следовательно, флюктуации показателя преломления δn связаны с флюктуациями концентрации электронов δN соотношением

$$\delta n \approx \frac{1}{2} \frac{\omega_k^2}{\omega^2} \frac{\delta N}{N}, \quad (5.16)$$

а их энергетические спектры — формулой:

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{4} \frac{\omega_k^4}{\omega^4} \frac{\Phi_N(x)}{N^2}. \quad (5.17)$$

Подставляя это выражение в (2.3), получим для „потерь передачи“ T формулу

$$\frac{1}{T} = \frac{P_s}{P_0} = \frac{G_0 S_1 V \sin^2 \gamma}{8r_0^2 r_1^2} \left(\frac{\omega_k^2}{C^2 N} \right)^2 \Phi_N(k_0 - k_s) \quad (f \gg f_k). \quad (5.18)$$

В отличие от тропосферного рассеяния, эта формула содержит частоту лишь под знаком функции Φ_N . Применим формулу (5.18) к эксперименту, описанному Букером [43]. В рассматриваемом случае антенны на разных частотах имели одинаковый коэффициент усиления $G_0 \approx 4\pi/\gamma^2 \approx 1,1 \cdot 10^3$, но разные эффективные поперечники $S_i = \lambda_i^2 G_0 / 4\pi^2$. На основании (5.18) можно выразить спектральную плотность флюктуаций δN через наблюдаемые потери передачи $T(f)$ на частоте f :

$$\Phi_N \left(\frac{4\pi f}{C} \sin \frac{\theta}{2} \right) = -\frac{8r_0^2 r_1^2 N^2 C^4}{G_0^2 V \sin^2 \gamma \omega_k^4} \frac{(2\pi f/C)^2}{T(f)}. \quad (5.19)$$

В статье [13] приводится суточный ход величин сигналов, наблюдавшихся в течение 10%, 50% и 90% всего времени наблюдения. Соотношение между этими величинами для дневного времени очень хорошо согласуется с релеевским законом распределения вероятностей. Средние значения величины T (в дБ), полученные в этих экспериментах для полудня, приведены в таблице 2.

Таблица 2

f (мГц)	30	40	50	74	108
T (дБ)	154	162	173	185	198

Подставляя полученные значения T в (5.19) и полагая $r_0 = r_1 = 690 \text{ км}$, $G = 1,1 \cdot 10^3$, $V = 2 \cdot 10^{14} \text{ м}^3$, $\sin \gamma = 1$, $\omega_k = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 \text{ гц}$, $N = 1,1 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$, получим значения $\Phi_N(x)$, указанные в таблице 3.

Таблица 3

f (мгц)	30	40	50	74	108
$\chi (\text{м}^{-1})$	0,23	0,30	0,38	0,56	0,71
$\Phi_N (\text{м}^{-3})$	$2,8 \cdot 10^{18}$	$5,9 \cdot 10^{17}$	$8,1 \cdot 10^{16}$	$1,2 \cdot 10^{16}$	$1,2 \cdot 10^{15}$
$\Phi_N / N^2 (\text{м}^3)$	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$4,9 \cdot 10^{-5}$	$6,7 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$

Заметим, что полученные спектральные плотности относятся к масштабам от 9 до 27 м , т. е. к „интервалу диссипации“ турбулентности (к масштабам, меньшим внутреннего масштаба турбулентности). Поэтому неудивительно, что $\Phi_N (\chi)$ падает с ростом χ не как $\chi^{-11/3}$, а значительно быстрее (как χ^{-6}). На основании данных таблицы 3 функцию $\Phi_N (\chi)$ можно представить эмпирической формулой

$$\Phi_N (\chi) = \frac{Q}{\chi^6}, \quad (5.20)$$

где $Q = 3,9 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-9} = 3,9 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-9}$.

Данные о спектральной плотности $\Phi_N (\chi)$ приведены на рис. 22 (в отличие от таблицы 3, на рис. 22 приведены не максимальные полууденные, а средние за день значения $\Phi_N (\chi)$). Прямая на графике

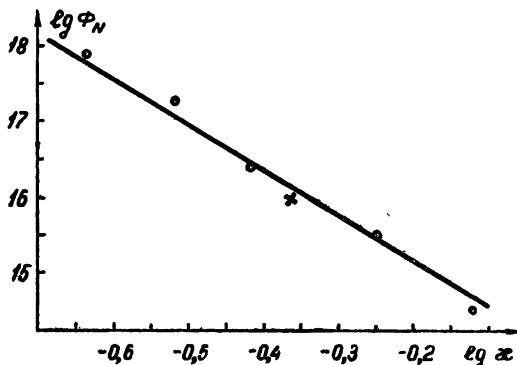


Рис. 22. Спектральная плотность флюктуаций концентрации свободных электронов в E -слое ионосферы (Φ_N — в м^{-3} , χ — в м^{-1}):
— — Букер; $\times \times$ — Бейли.

соответствует закону $\Phi_N (\chi) \sim \chi^{-6}$. На тот же график нанесена точка, полученная на основании измерений Бейли [44]. (Значение Φ_N для этого случая найдено по приводящемуся в [45] значению эффективного поперечника рассеяния для опыта Бейли.) Хорошее согласие результатов, полученных разными авторами, свидетельствует о достаточной надежности этой оценки.

На основании полученного вида функции $\Phi_N (\chi)$ в области $\chi > 2\pi/l_0$ можно оценить $\Phi_N (\chi)$ при меньших значениях χ . Мы можем воспользоваться тем обстоятельством, что при $\chi \ll 2\pi/l_0$ $\Phi_N (\chi)$ имеет вид $\Phi_N (\chi) = 0,033 C_N^2 \chi^{-11/3}$. (Это утверждение подтверждается хорошим согласием закона диффузии длительных метеорных следов с теоретическими выводами, основанными на предположении о справедливости

колмогоровской схемы турбулентности.) Для $\kappa = 2\pi/l_1$ (см. вывод формулы (5.13)) значения этой функции и функции (5.20) должны приблизительно совпадать. Основываясь на этом, мы можем найти величину C_N , характеризующую флюктуации δN в „инерционном“ интервале спектра турбулентности. Приравнивая при $\kappa = \kappa_1$ выражения (5.20) и (1.10), получим:

$$Q \kappa_1^{-6} = 0,033 C_N^2 \kappa_1^{-11/3}, \quad (5.21)$$

откуда $C_N^2 = 30 Q \kappa_1^{-7/3}$. Подставляя $\kappa_1 = 2\pi/30 \text{ м}^{-1}$ (диффузия метеорных следов) и $Q = 3,9 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-9}$, получим $C_N^2 = 5 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-20/3}$, т. е.

$$C_N = 7,1 \cdot 10^8 \text{ м}^{-10/3} = 1,5 \cdot 10^2 \text{ см}^{-10/3}. \quad (5.22)$$

Оценим теперь ту же величину C_N на основании данных о распределении средних значений N и о масштабах турбулентных движений. Для этого применим формулу (1.11): $C_N^2 = a^2 (\text{Ri}) L_0^{4/3} (\text{grad } \bar{N})^2$. Так как флюктуации δN обусловлены вертикальным турбулентным перемешиванием E -слоя, то в качестве масштаба L_0 мы должны взять вертикальный радиус корреляции флюктуаций скорости $L_0 = 7 \text{ км}$. Взяв $d\bar{N}/dz = 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ [46] (дневное значение градиента) и $a^2 (\text{Ri}=5) = 0,02$ (см. стр. 575), получим:

$$C_N = 1,1 \cdot 10^2 \text{ см}^{-10/3}. \quad (5.23)$$

Эта величина хорошо согласуется с (5.22). Оба этих значения относятся к дневному максимуму $d\bar{N}/dz$; в другое время величина C_N может упасть в несколько раз по сравнению с максимальным.

Для того, чтобы было удобнее сравнивать флюктуации показателя преломления E -слоя ионосферы и тропосферы, перейдем от величины C_N к C_n . Как следует из (5.17),

$$\dot{C}_n = \frac{\omega_k^2}{2\omega^2} \frac{C_N}{N} = \frac{e^2}{2\pi m f^2} C_N. \quad (5.24)$$

Таким образом, флюктуации показателя преломления быстро падают с ростом частоты. В таблице 4 приведены значения C_n , рассчитанные для различных частот, исходя из величины $C_N = 1,5 \cdot 10^2 \text{ см}^{-10/3}$.

Таблица 4

$\lambda (\mu)$	0,1	0,3	1	3	10	30
$C_n (N \cdot \text{ед.} \cdot \text{см}^{-1/3})$	0,0005	0,005	0,05	0,5	5	50

Как было установлено в разделе 4, величина C_n для тропосферы порядка $0,002 \div 0,020$. Таким образом, для волн длинее 30 см „ионосферные“ флюктуации показателя преломления намного превышают „тропосферные“.

Если рассматривать вопрос о рассеянии радиоволн турбулентным неоднородностям, то помимо величины C_n большую роль играют расстояния от точки нахождения антенн до рассеивающего объема. Если рассеивающий объем находится на высоте h над земной поверхностью, то он виден с расстояния $L = \sqrt{2ah}$, где a — радиус Земли. В формулу (2.3), определяющую потери передачи, входит отношение $C_n^2 / r_0^2 r_1^2 \sim C_n^2 / L^4 \sim C_n^2 / h^2$. Следовательно, интенсивность тропосферного и ионосферного рассеяния будет одинаковой в том случае, если $(C_n/h)_{\text{троп}} \simeq (C_n/h)_{\text{ион}}$. В тропосфере $C_n \sim 10^{-2} N \cdot \text{ед.} \cdot \text{см}^{-1/3}$ и $h \sim 1 \text{ км}$.

для ионосферы $h = 100 \text{ км}$. Следовательно, заметное по величине ионосферное расстояние будет наблюдаться для таких частот, для которых $C_n = 10^{-2} \cdot 100 \text{ км}/1 \text{ км} \sim 1$. Как видно из таблицы 4, такие значения C_n могут быть в метровом диапазоне. Этот вывод хорошо согласуется с известными фактами о дальнем тропосферном и ионосферном распространении радиоволн. Если же мы будем рассматривать вопрос о флюктуациях фазы в проходящей волне, то, как известно [1], действие различных неоднородностей на пути распространения суммируется. В этом случае ионосферные неоднородности будут играть решающую роль для всех длин волн, превышающих 1 м.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
2. Л. Р. Цвант, Изв. АН СССР, сер. геофиз. (в печати).
3. А. С. Гурвич, Г. С. Голицын, В. И. Татарский, Акустич. ж., 6, 187 (1960).
4. В. И. Татарский, Докл. АН СССР, 120, 289 (1958).
5. М. А. Каллистратова, Докл. АН СССР, 125, 69 (1959).
6. М. А. Каллистратова, Акустич. ж., 5, 496 (1959).
7. R. H. Kraghspel, J. Acoust. Soc. Amer., 25, 1096 (1953).
8. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 49 (1951).
9. В. А. Красильников, Докл. АН СССР, 46, 108 (1945).
10. В. А. Красильников, К. М. Иванов-Шиц, Докл. АН СССР, 47, 639 (1949).
11. В. А. Красильников, Докл. АН СССР, 88, 657 (1953).
12. Б. А. Сучков, Акустич. ж., 4, 85 (1958).
13. А. С. Гурвич, В. И. Татарский, Л. Р. Цвант, Докл. АН СССР, 123, 655 (1958).
14. А. С. Гурвич, В. И. Татарский, Л. Р. Цвант, Труды совещания по исследованию мерцания звезд, изд. АН СССР, М.—Л., 1959.
15. H. G. Booker, W. E. Gordon, Proc. IEE, 38, 401 (1950).
16. R. Bolgiano, A meteorological interpretation of wavelength dependence in trans-horizon propagation. School of Electr. Eng., Cornell Univers. Ithaca, New York, Research Report EE 385.
17. J. W. Herbstreit, M. C. Thompson, Proc. IRE, 43, 1391 (1955).
18. В. И. Татарский, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6, 689 (1956).
19. Л. Р. Цвант, Изв. АН СССР, сер. геофиз. (в печати).
20. В. И. Татарский, Л. Н. Жуков, Докл. АН СССР, 124, 567 (1959).
21. A. P. Deam, B. M. Rappaport, Proc. IRE, 43, 1402 (1955).
22. K. A. Norton, J. Atm. Terr. Phys., 15, 206 (1959).
23. R. B. Muchmore, A. D. Wheeler, Proc. IRE, 43, 1437 (1955).
24. Д. М. Высоковский, Некоторые вопросы дальнего широкосферного распространения ультракоротких радиоволн, изд. АН СССР, М., 1958.
25. R. Bolgiano, J. Geophys. Res., 64, 2225 (1959).
26. В. А. Красильников, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 13, 33 (1949).
27. Б. Н. Гершман, В. Л. Гинзбург, Астрон. ж., 32, 201 (1955).
28. Б. Н. Гершман, В. Л. Гинзбург, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, 8 (1959).
29. Б. Н. Гершман, В. П. Докучаев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, 843 (1959).
30. G. S. Golitsyn, J. Geophys. Res., 64, 2212 (1959).
31. J. S. Greenhow, E. L. Neufeld, Proc. Phys. Soc. London, 74, 1 (1959).
32. J. S. Greenhow, E. L. Neufeld, J. Geophys. Res., 64, 2129 (1959).
33. J. S. Greenhow, J. Geophys. Res., 64, 2208 (1959).
34. M. Nicolle, J. Geophys. Res., 64, 2092 (1959).
35. А. С. Гурвич, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 7, 1042 (1960).
36. H. G. Booker, R. Cohen, J. Geophys. Res., 61, 707 (1956).
37. L. F. Richardson, J. Roy. Soc., A 60, 709 (1926).
38. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 4—5, 453 (1941).
39. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1944.
40. D. Brunt, Physical and Dynamical Meteorology; Cambridge, University Press, 1941.
41. H. G. Booker, J. Geophys. Res., 61, 673 (1956).
42. N. Matutaga, T. Nagata, Rept. Ionosphere Res. Japan, 12, 147 (1958).

43. H. G. Booker, J. Geophys. Res., **64**, 2164 (1959).
44. D. K. Bailey, Phys. Rev., **86**, 141 (1952).
45. F. Villars, V. F. Weisskopf, Proc. IRE, **43**, 1232 (1955).
46. J. A. Ratcliffe, J. Geophys. Res., **64**, 2102 (1959).
47. Л. Н. Жукова, Труды совещания по исследованию мерцания звезд, изд. АН СССР, М.-Л., 1959, стр. 116.
48. Statistical methods in radio wave propagation, Pergamon Press, 1960, p. 197, Frank N. Edmonds, Jr. An Analysis of Airborne Measurements of Tropospheric Index of Refraction Fluctuations.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
5 мая 1960 г.

Примечание при корректуре. В работе [48] исследовано пятнадцать частотных спектров флюктуаций показателя преломления в свободной тропосфере на высотах от 2 до 6 км. В этой работе указывается, что частотные спектры хорошо описываются степенной функцией вида $S_n = \text{const} \cdot f^{-m}$, причем для m приводятся границы

$$1,52 < m < 1,62.$$

Это значение m , как отмечает автор [48], хорошо согласуется с теорией турбулентности Колмогорова—Обухова. По приводящимся в [48] частотным спектрам можно оценить и величину C_n . Она оказывается приблизительно равной $0,020 \text{ N-ед. см}^{-1/2}$.

К ТЕОРИИ СПЕКТРОВ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ НА ЧАСТОТАХ НИЖЕ 30 мгц*

B. A. Разин

Обсуждаются причины, которые могут привести к уменьшению интенсивности радиоизлучения дискретных источников на длинных волнах (поглощение радиоволн в межзвездной среде и в самих источниках, влияние среды на излучение релятивистских электронов, изменение их энергетического спектра из-за ионизационных потерь, реабсорбция излучения релятивистскими электронами).

В настоящее время спектры радиоизлучения некоторых дискретных источников более или менее хорошо известны в диапазоне частот $30 \div 10^4$ мгц [1]. Зависимость интенсивности радиоизлучения дискретных источников от частоты ν в довольно широких интервалах частот может быть записана в виде степенной функции $I \propto \nu^{-\alpha}$, где показатель степени α (спектральный индекс) различен для различных источников. Например, для Кассиопеи А $\alpha = 0,8$ в диапазоне частот $30 \div 10^4$ мгц; для Лебедя А $\alpha = 0,66$ в диапазоне $30 \div 350$ мгц и $\alpha = 1$ на частотах выше 350 мгц [1].

Данные об интенсивности дискретных источников на частотах, меньших 30 мгц, пока очень неполны и противоречивы. Согласно [2], в диапазоне частот $16,5$ мгц $\div 22,6$ мгц интенсивность Кассиопеи А и Лебедя А быстро уменьшается с уменьшением частоты. Спектры радиоизлучения Лебедя А и Кассиопеи А на этих частотах имеют соответственно вид $I_{\text{Леб}} \propto \nu^{1,6}$, $I_{\text{Касс}} \propto \nu^{4,4}$. Отношение $I_{\text{Леб}}/I_{\text{Касс}}$ растет с уменьшением частоты и становится больше единицы на частоте 16,5 мгц. По данным же работы [3] это отношение уменьшается с частотой и равно $\approx 0,5$ на $\nu = 12,5$ мгц, а интенсивность радиоизлучения Кассиопеи А и Лебедя А на частотах ниже 30 мгц спадает значительно медленнее, чем это указано в [2]. Уменьшение интенсивности радиоизлучения дискретных источников с частотой обнаружено также в работе [4], в которой приведены результаты измерений на частотах 10,05 мгц и 18,3 мгц. Таким образом, имеющиеся экспериментальные данные, хотя они и недостаточны для определения величины спектральных индексов источников на частотах ниже 30 мгц, свидетельствуют о существенном изменении характера спектров ряда дискретных источников на $\nu < 30$ мгц, а именно, об изменении знака их спектральных индексов.

Изменение знака спектрального индекса дискретного источника на низких частотах может быть связано как с поглощением радиоволн в межзвездной среде или в нем самом, так и с особенностями механизма генерации радиоизлучения в источнике **. На этот счет в литературе имеются лишь разрозненные указания. Цель настоящей работы — обсудить подробнее роль каждой из этих причин.

* Дополненный текст доклада, сделанного на расширенном пленуме Комиссии по радиоастрономии (ноябрь, 1957).

** Поглощение радиоволн в ионосфере (в ночное время) и межпланетном газе на частотах, о которых идет речь, мало.

1. Рассмотрим сначала влияние поглощения радиоволн в межзвездной среде и в самом источнике на характер наблюдаемого спектра радиоизлучения дискретного источника.

Коэффициент поглощения радиоволн в межзвездной среде равен [5]

$$\kappa_v = (10^{-2} N_e^2 / T^{3/2} v^2) [19,8 + \ln(T^{3/2}/v)], \quad (1)$$

где N_e — концентрация электронов в среде, T — их кинетическая температура. Для множителя, стоящего в квадратных скобках, примем значение 18 (поскольку $T \sim 10^{4.0}$ К, $v \sim 10^7$ Гц). Таким образом,

$$\kappa_v = 0,18 T^{-3/2} v^{-2} N_e^2. \quad (2)$$

Оптическая толщина поглощающей области

$$\tau_v = \int_0^R \kappa_v dl = 0,18 v^{-2} \int_0^R T^{-3/2} N_e^2 dl, \quad (3)$$

где R — расстояние до источника.

Регистрируемый на Земле спектр радиоизлучения дискретного источника, очевидно, таков:

$$I_v \propto v^{-\alpha} e^{-\tau_v}. \quad (4)$$

Чтобы получить представление о характере ожидаемого спектра радиоизлучения дискретного источника на низких частотах, заменим функцию $e^{-\tau_v}$ в некотором интервале значений τ_v степенной функцией. При изменении τ_v в пределах $0,7 \leq \tau_v \leq 2$ функция $e^{-\tau_v} \approx 0,37 \tau_v^{-1.3}$. Следовательно, если оптическая толщина поглощающей области заключена в указанных пределах, то интенсивность радиоизлучения дискретного источника пропорциональна $v^{-\alpha} \tau_v^{-1.3} \propto v^{2.6-\alpha}$. Как видно из формулы (3), область HII с $N_e \sim 10 \text{ см}^{-3}$, размером $d \sim 10 \text{ pc}$ и $T \sim 10^{4.0}$ К имеет на частоте $v \sim 2 \cdot 10^7$ Гц оптическую толщину $\tau_v \sim 1$. Поглощение радиоизлучения на $v = 19,7 \text{ мГц}$ областями HII было обнаружено в работе [6]. Таким образом, не приходится сомневаться в том, что поглощение радиоволн в областях HII деформирует спектры некоторых дискретных источников на $v < 30 \text{ мГц}$.

В работах [1-4,7] поглощение радиоволн в областях HII считается единственной причиной изменения спектров радиоизлучения дискретных источников на низких частотах. В работе [2] спектр радиоизлучения Кассиопеи А вида $I_v^{\text{Kass}} \propto v^{4.4}$ также объясняется поглощением радиоволн в областях HII . Однако, как ясно из сказанного выше, поглощение радиоволн в HII областях не может привести на начальных стадиях деформации спектра к существенно более быстрому спаду интенсивности дискретного источника с уменьшением частоты по сравнению со спадом, даваемым выражением $v^{2.6-\alpha}$. И если спектр радиоизлучения Кассиопеи А на частотах ниже 20 мГц действительно имеет вид $v^{4.4}$, то его нельзя объяснить только поглощением радиоволн в межзвездной среде.

Рассмотрим теперь возможность поглощения радиоволн в самом дискретном источнике. Предполагая, что излучательная способность постоянна во всем объеме источника и пропорциональна $v^{-\alpha}$, найдем:

* Поглощение радиоволн в межзвездной среде вне областей HII , по-видимому, невелико вплоть до частот 0,5 мГц ± 1 мГц [16].

$$I_v \sim v^{-\alpha} \iint_{V_{\text{ист}}} \exp \left[- \int_0^l z_v(\Omega, r') dr' \right] d\Omega dl, \quad (5)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла, l — расстояние от точки наблюдения до элемента объема источника и интегрирование производится по всему объему источника $V_{\text{ист}}$. Если $z_v = \text{const}$, то при наличии заметного поглощения радиоволн в источнике размер эффективно излучающей области вдоль луча зрения (существенной области интегрирования по l в формуле (5)) порядка $v^{-1} \sim v^2$. Но, как известно, интенсивность нетеплового радиоизлучения источника пропорциональна размеру излучающей области вдоль луча зрения. Следовательно, спектр радиоизлучения дискретного источника в этом случае будет иметь вид $I_v \propto v^{2-\alpha}$. Зная, на какой частоте начинает сказываться поглощение радиоволн в источнике, можно оценить с помощью формулы (2) величину $T^{-3/2} N_e^2 d$, где d — размер источника. Предполагая, что поглощение радиоизлучения в источнике начинает быть заметным ($z_v d \sim 1$) на $v \sim 2 \cdot 10^7$ гц, получим в качестве верхней границы для этого произведения величину $\sim 2 \cdot 10^{15}$. В случае Кассиопеи А $d \sim 1,3 \cdot 10^{19}$ см [14] и $N_e^2 \leq 1,5 \cdot 10^{-4} T^{3/2}$. Отсюда при $T = 10^4$ К $N_e \leq 12$ см $^{-3}$; при $T = 10^5$ К $N_e \leq 60$ см $^{-3}$. Как видно из приведенных оценок, не исключено, что на низкочастотном спектре Кассиопеи А сказывается поглощение радиоволн в самом источнике. Пока, однако, этот вопрос следует считать открытым. Поглощение радиоволн в Лебеде А на частотах $\sim 2 \cdot 10^7$ гц мало ($N_e \sim 10^{-2}$ см $^{-3}$, $d \sim 10^{23}$ см, $T \sim 10^4 \div 10^5$ К).

Далеко не всегда можно считать, что $z_v = \text{const}$ в источнике. Например, в расширяющейся оболочке Кассиопеи А обнаружено более 200 конденсаций диаметром $d \sim 10^{17}$ см, в большинстве из которых $N_e \sim 10^3$ см $^{-3}$, $T \sim 2 \cdot 10^4$ К [14]. Между конденсациями концентрация электронов значительно меньше. Это видно, в частности, из приведенной выше оценки для верхней границы величины N_e при $T \sim 10^4 \div 10^5$ К. Остановимся поэтому еще на такой модели дискретного источника, когда часть δ телесного угла, под которым он виден, экранируется конденсациями, расположенными на его периферии. В этом случае *

$$I_v \sim \delta d v^{-\alpha} e^{-\tau_k} + v^{-\alpha} \iint_{(1-\delta) V_{\text{ист}}} \exp \left[- \int_0^l z_v(\Omega, r') dr' \right] d\Omega dl, \quad (6)$$

где τ_k — средняя оптическая толщина конденсации. Интегрирование в формуле (6) производится по той части объема источника, которая не экранируется конденсациями. В Кассиопее А $\tau_k \sim 1$ на $v \sim 10^8$ гц. Таким образом, в спектре излучения Кассиопеи А в частотном интервале $\sim 5 \cdot 10^7 \div 5 \cdot 10^8$ гц следовало бы ожидать [7] заметных отклонений от простой зависимости $I_v \propto v^{-\alpha}$. Точность имеющихся экспериментальных данных, к сожалению, не достаточна для выяснения этого момента. Если величины τ_k для различных конденсаций сильно отличаются, то экранировка источника конденсациями проявится в уменьшении спектрального индекса источника в довольно широком интервале частот.

На низких частотах, когда преобладает второе слагаемое в формуле (6), спектр излучения источника будет таким же, как и при $z_v = \text{const}$.

* Предполагается, что поглощение радиоволн в конденсациях заметно уже на частотах, на которых поглощение радиоволн в пространстве между конденсациями еще очень мало

Может оказаться, что изменение спектра излучения дискретного источника на низких частотах связано с поглощением радиоволн в межзвездной среде и в нем самом. При этом спектр радиоизлучения дискретного источника на частотах, которым отвечает $\tau_s \sim 1$, будет иметь вид: $I_s \propto \nu^{4.6-\alpha}$.

2. Перейдем к обсуждению эффектов, обусловленных механизмом генерации радиоизлучения.

Если, как это общепринято в настоящее время, за нетепловое радиоизлучение дискретных источников ответственны релятивистские электроны, движущиеся в магнитном поле, то возможны, по крайней мере, три причины уменьшения интенсивности радиоизлучения дискретных источников на длинных волнах: 1) уменьшение интенсивности генерируемого релятивистскими электронами „синхротронного“ излучения на длинных волнах вследствие отличия показателя преломления среды от единицы [8]; 2) изменение в силу ионизационных потерь энергии релятивистских электронов их дифференциального энергетического спектра; 3) реабсорбция радиоизлучения релятивистскими электронами [13].

Рассмотрим влияние среды на интенсивность „синхротронного“ излучения релятивистских электронов. Показатель преломления n межзвездной среды и ионизированного газа в дискретных источниках меньше единицы, поэтому фазовая скорость электромагнитных волн в этих средах больше скорости света в вакууме. Это обстоятельство приводит к тому, что излучение релятивистского электрона на низких частотах, когда разность $1 - n$ делается достаточно большой, утрачивает особенности, свойственные излучению релятивистского электрона; в частности, интенсивность излучения резко уменьшается.

Будем считать, что $n < 1$; $1 - n \ll 1$ и отношение гирочастоты электронов ω_H к циклической частоте излучения ω много меньше единицы *. Последнее неравенство означает, что среду можно считать изотропной. Условия $1 - n \ll 1$ и $\omega_H / \omega \ll 1$ очень хорошо выполняются и в межзвездной среде, и в дискретных источниках радиоизлучения. При этих условиях выражение для компоненты Фурье векторного потенциала в волновой зоне можно записать в виде:

$$\mathbf{A}_\omega = e(2\pi)^{-1/2} R^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(t) \exp \{i[\omega t - (\omega n/c) s r(t)]\} dt, \quad (7)$$

где $\beta(t)$ — отношение скорости электрона к скорости света, R — расстояние от начала координат до точки наблюдения, s — единичный вектор в направлении радиуса-вектора точки наблюдения R , $r(t)$ — радиус-вектор электрона. Выражение (7) справедливо при $R \gg r$.

Проделав вычисления, аналогичные приведенным в работе [10], найдем, что энергия, излучаемая электроном за одну секунду в интервале частот 1 Гц , равна

$$P_\nu = 16(e^2/c) \omega_0(\omega/2\omega_0)^{1/3} I\{(\omega/2\omega_1)^{2/3} [1 + (1 - n^2)(E/mc^2)^2]\}, \quad (8)$$

где $\omega_0 = \omega_H(mc^2/E) \sin \theta$, θ — угол между направлением скорости электрона и направлением магнитного поля, $\omega_1 = (eH_\perp/mc)(E/mc^2)^2$, $H_\perp = H \sin \theta$, а функция $I(x)$ протабулирована в [10]. Из формулы (8) следует, что влияние среды на излучение энергии релятивистскими электронами несущественно при $1 - n^2 \ll (mc^2/E)^2$. Этот критерий совпадает с указанным в работе [8].

* В общем виде задача решена в работе [9].

Нетрудно показать, что удельная интенсивность радиоизлучения релятивистских электронов с энергетическим спектром $N(E) = KE^{-\gamma}$ в случае полной хаотичности направлений магнитного поля дается выражением (справедливым с точностью до коэффициента порядка единицы, медленно убывающим с понижением частоты):

$$I_v = \frac{R}{4\pi} \int_{mc^2}^{\infty} P_v N(E) dE = \quad (9)$$

$$= [3Re^3H_{\perp}K/\pi(mc^2)^{\gamma}] (\pi mc/eH_{\perp})^{\frac{1-\gamma}{2}} (H_{\perp}/ecN_e)^{\frac{\gamma-1}{2}} f(v', \gamma),$$

где R — размер излучающей области,

$$f(v', \gamma) = (v')^{(1-\gamma)/2} \int_0^{\infty} I(x + 1/v' \sqrt{x}) x^{(3\gamma-5)/4} dx, \quad (10)$$

$$v' = v H_{\perp}/ecN_e.$$

В этих формулах, а также в выражениях (19), (23) и (24), которые будут получены ниже, H_{\perp} есть среднее значение перпендикулярной к лучу зрения компоненты магнитного поля. Отличие формулы (10) от соответствующей формулы, выведенной при условии $n = 1$ [11], состоит лишь в том, что аргументом функции I является не x , а сумма $x + 1/v' \sqrt{x}$. Очевидно, если $(ecN_e/v' H_{\perp}) \ll 1$, то можно считать, что релятивистские электроны излучают в вакууме.

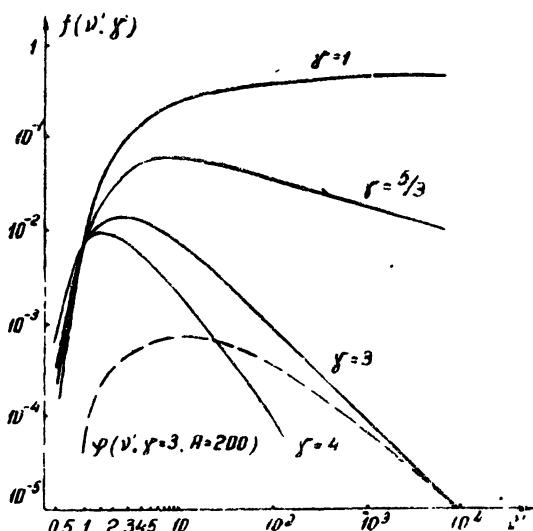


Рис. 1.

На рис. 1 показаны графики функции $f(v', \gamma)$ при $\gamma = 1, 5/3, 3$ и 4 . При $\gamma = 1$ интенсивность „синхротронного“ излучения на всех частотах убывает с понижением частоты. На высоких частотах это убывание медленное, на низких же частотах очень быстрое. Интенсивность излучения уменьшается на 50% от максимальной на частоте

$$\nu_1 \simeq 7,5ecN_e/H_{\perp} \simeq 10^3 N_e/H_{\perp}. \quad (11)$$

При других значениях γ в спектре излучения релятивистских электронов имеется максимум. В случае $\gamma = 5/3$ максимум излучения приходится на частоту

$$\nu_{\max} \simeq 10ecN_e/H_{\perp}; \quad (12)$$

при $\gamma = 3$ — на частоту

$$\nu_{\max} \simeq 2ecN_e/H_{\perp}; \quad (13)$$

при $\gamma = 4$ — на частоту

$$\nu_{\max} \simeq 1,5ecN_e/H_{\perp}. \quad (14)$$

На частотах ниже ν_{\max} интенсивность „синхротронного“ излучения релятивистских электронов весьма быстро убывает с частотой. Воспользовавшись асимптотическим выражением функции $I(x)$ при $x > 3: I(x) \simeq (\sqrt{2\pi}/16) x^{1/4} \exp\left(-\frac{4}{3}x^{3/2}\right)$ [10], и разложив ее аргумент

$\chi(x) = x + 1/\nu' \sqrt{x}$ (см. формулу (10)) в ряд около значения x , отвечающего минимуму $\chi(x)$, можно показать, что при значениях $\nu' \leqslant 0,5$ функция $f(\nu', \gamma)$ с точностью $\simeq 10\%$ равна

$$(\pi/8 \sqrt{6}) 2^{-(3\gamma-5)/6} (\nu')^{1-\gamma} \exp(-2\sqrt{3}/\nu'). \quad (10a)$$

Для выяснения роли ионизационных потерь энергии релятивистских электронов воспользуемся уравнением непрерывности в „пространстве энергий“. В стационарном случае и при условии, что за время пребывания электронов в источнике они теряют большую часть своей первоначальной энергии, это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial E} [\varphi(E) N(E)] = q(E), \quad (15)$$

где $\varphi(E)$ — функция, дающая величину потерь энергии релятивистских электронов в секунду, $q(E) dE$ — число релятивистских электронов с энергией $E \pm dE$, поставляемых в секунду их источниками.

Потери энергии релятивистских электронов сводятся в основном к ионизационным потерям и потерям на излучение в магнитном поле [11]. Энергия, теряемая релятивистским электроном на излучение в магнитном поле, дается выражением

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dt} \right)_M &= -\frac{2c}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 H_{\perp}^2 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 = \\ &= 0,98 \cdot 10^{-3} H_{\perp}^2 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \text{ эв} \cdot \text{сек}^{-1} = b\varepsilon^2 \quad (16) \\ &\quad (\varepsilon = E/mc^2). \end{aligned}$$

Ионизационные потери слабо зависят от энергии электронов. Для электронов с энергией $E \sim 10^8$ эв, движущихся в ионизированном водороде, их можно принять равными [11]

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{ион}} = 5,8 \cdot 10^{-7} N \text{ эв} \cdot \text{сек}^{-1} = a \text{ эв} \cdot \text{сек}^{-1}, \quad (17)$$

где N — концентрация газа. Если газ не ионизирован, то „ионизационные“ потери энергии электронов приблизительно вдвое меньше величины, даваемой формулой (17).

Полагая $q(E) = K'E^{-\gamma'}$, из уравнения (15) и соотношений (16) и (17) получаем (считая, что $\gamma' \neq 1$):

$$N(\varepsilon) = K_1/(a/b\varepsilon^2 + 1) \varepsilon^{\gamma'}, \quad (18)$$

где $\gamma = \gamma' + 1$, $K_1 = K'/(\gamma' - 1) (mc^2)^{\gamma'-2} b$.

При малых энергиях электронов, когда $a \gg b\varepsilon^2$, $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-\gamma'+1}$. Если же преобладают потери энергии на излучение в магнитном поле, то $N(\varepsilon) \sim E^{-\gamma'-1}$.

Рассмотрим для примера случай $\gamma' = 2$. При этом значении γ' энергетический спектр электронов деформируется от $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-3}$ к $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-1}$. Но при $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-1}$ отличие показателя преломления среды от единицы оказывается до весьма высоких частот; следовательно, для нахождения спектра „синхротронного“ излучения релятивистских электронов с учетом изменения их энергетического спектра из-за ионизационных потерь энергии необходимо принять во внимание отличие показателя преломления среды от единицы. Можно показать, что при энергетическом спектре релятивистских электронов, определяемом формулой (18), спектр синхротронного излучения дается выражением: *

$$I_v = [3Re^3H_\perp K/\pi (mc^2)^\gamma] (\pi mc/eH_\perp)^{(1-\gamma)/2} (H_\perp/ecN)^{(\gamma-1)/2} \varphi(\nu', \gamma, A), \quad (19)$$

где

$$\varphi(\nu', \gamma, A) = (\nu')^{(1-\gamma)/2} \int_0^\infty \frac{I(x + \rho/\nu' \sqrt{x}) x^{(3\gamma-5)/4} dx}{1 + (Ax^{3/2})/\nu'};$$

$$\rho = N_e/N;$$

$$K = K_1(mc^2)^{\gamma-1} = K' mc^2/(\gamma' - 1) b,$$

A — коэффициент, равный ≈ 200 , если среда ионизирована ($\rho = 1$), и равный ≈ 100 , если среда неионизирована ($\rho = 0$).

На рис. 1 пунктирной кривой показан график функции $\varphi(\nu', \gamma, A)$ при $A = 200$ и $\gamma = 3$. В этом случае интенсивность синхротронного излучения релятивистских электронов максимальна на частоте

$$\nu_{\max} \approx 10ecN/H_\perp. \quad (20)$$

На частотах ниже ν_{\max} интенсивность радиоизлучения быстро уменьшается, а не остается почти постоянной, как это предполагается в работах [11, 15, 16]. Отметим, что спектр излучения, выражаемый формулой (19) при $\gamma = 3$, заметно отличается от спектра $I_v \sim \nu^{-1}$ уже на частоте

$$\nu^* \sim 60ecN/H_\perp \sim 10^8 N/H_\perp. \quad (21)$$

На частотах $\nu' \geq 10^3$ ($\nu \geq 10^3 ecN/H_\perp$) функция $\varphi(\nu', \gamma = 3, A = 200)$ с точностью $\approx 5\%$ равна

$$0,087 \left(1 - \frac{200}{\nu'}\right) \frac{1}{\nu'}. \quad (22)$$

Обращает на себя внимание то, что в интервале частот $4 \cdot 10^2 \leq \nu' \leq 10^4$ $\varphi(\nu', 3, 200) \sim (\nu')^{-0.8}$. Этот факт может быть интересен с точки зрения интерпретации спектра нетеплового галактического радиоизлучения, о чем подробнее будет сказано в другой статье.

* Предполагается, что концентрация релятивистских электронов $N(E)$, концентрация газа N и степень ионизации $\rho = N_e/N$ не зависят от координат.

Подчеркнем, что сказанное выше о роли ионизационных потерь энергии релятивистских электронов в изменении спектра генерируемого ими радиоизлучения справедливо лишь в случае неэффективности процессов ускорения электронов во время их блуждания в дискретном источнике и при условии, что за время пребывания релятивистских электронов в источнике (T_{jk}) их энергетический спектр успевает заметно измениться в силу ионизационных потерь (т. е. при условии $(dE/dt)_{\text{ион}} T_{jk} \gg E$, где E — энергия электронов). В некоторых случаях удается выяснить вопрос о роли ионизационных потерь энергии релятивистских электронов, опираясь только на последнее условие и не касаясь сложного вопроса об эффективности ускорения релятивистских электронов на различных стадиях существования дискретных источников радиоизлучения. Например, условие $(dE/dt)_{\text{ион}} T_{jk} \gg E$ не выполняется для галактических источников типа остатков сверхновых звезд и, по-видимому, для источника Лебедь А, представляющего собой сталкивающиеся галактики. Ионизационные потери энергии релятивистских электронов могут, по всей вероятности, играть роль в метагалактических дискретных источниках, подобных нашей Галактике.

Формулы (11)–(14) и (20)–(21) наряду с соотношением $\rho u^2/2 \sim H^2/8\pi$, где u — скорость крупномасштабных вихрей газа, ρ — его плотность, могут быть полезны для оценок N и H в источниках радиоизлучения. Предположим, что уменьшение интенсивности радиоизлучения Кассиопеи А на частотах, меньших 20 мГц , связано с влиянием среды на излучение релятивистских электронов, и оценим N и H в этом источнике*. Скорости хаотических движений газа в Кассиопее А $u \sim 10^8 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$. В случае полной хаотичности направлений магнитных полей из соотношений (13) и $\rho u^2/2 \sim H^2/8\pi$ находим, что в Кассиопее А $N \sim 10^5 \text{ см}^{-3}$ и $H \sim 10^{-1} \text{ эрстед}$. Полученные значения N и H кажутся неправдоподобно большими, поэтому следует либо отказаться от объяснения низкочастотного спектра Кассиопеи А влиянием среды на излучение релятивистских электронов, либо принять, что плотность кинетической энергии газа в источнике превосходит на один-два порядка плотность магнитной энергии, либо, наконец, считать, что $H_\perp \ll H$. Для последних двух предположений пока не видно серьезных оснований, поэтому остается принять, что влияние среды на излучение релятивистских электронов в Кассиопее А мало.

3. Рассмотрим теперь возможность уменьшения интенсивности радиоизлучения дискретных источников на длинных волнах из-за реабсорбции радиоизлучения релятивистскими электронами **.

Поглощение излучения релятивистскими электронами связано с тем, что при энергетическом спектре релятивистских электронов, имеющем вид $N(E) \sim E^{-\gamma}$ ($\gamma > 0$) число актов индуцированного испускания меньше числа актов поглощения. Число актов поглощения при переходе электронов из нижнего состояния 1 в верхнее состояние 2 равно $Z'_n = B_{12} N_1 u_\omega$, где B_{12} — коэффициент пропорциональности, N_1 — число электронов в состоянии 1 и u_ω — плотность энергии излучения в единичном интервале частот. Число актов индуцированного испускания при переходе из состояния 2 в состояние 1 дается аналогичным выражением: $Z_{\text{инд}} = B_{21} N_2 u_\omega$, причем $B_{12} = B_{21}$, так как статистические веса состояний 1 и 2 одинаковы. Коэффициент B_{12} может быть выражен через вероятность

* Объясняют уменьшение интенсивности радиоизлучения Лебедя А тем, что показатель преломления среды $n \neq 1$, нельзя, так как в Лебеде А концентрация газа мала.

** Реабсорбция излучения релятивистскими электронами рассматривалась в работе [3]. Однако поскольку в этой работе приведена лишь приближенная формула для частного случая $\gamma = 2,8$, необходимо проделать вычисления заново.

спонтанного излучения $A_{21} = P_v / 2\pi\hbar\omega$ с помощью соотношения Эйнштейна *:

$$A_{21}/B_{12} = \hbar\omega^3/\pi^2c^3.$$

Число актов поглощения, измеряемое на опыте, равно $Z_n = Z'_n - Z_{\text{ион}}$ $= B_{12}n\omega (N_1 - N_2)$. Таким образом, поток падающего излучения $S = cu\omega$ уменьшается по прохождении пути dl на величину $dS = dl \int Z_n \hbar\omega dE$. Коэффициент поглощения излучения равен по определению $\kappa_v = -(1/S)(dS/dl)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \kappa_v &= \int_{mc^2}^{\infty} [N(E - \hbar\omega) - N(E)] \frac{B_{12}}{c} \hbar\omega dE = \\ &= \int_{mc^2}^{\infty} [N(E - \hbar\omega) - N(E)] \frac{P_v \pi c^2}{2\hbar\omega^3} dE. \end{aligned} \quad (23)$$

Предполагая, что $N(E) \propto KE^{-\gamma}$, найдем:

$$\kappa_v = \frac{\gamma\pi c^2}{2\omega^2} \int_{mc^2}^{\infty} K P_v E^{-(\gamma+1)} dE.$$

Интеграл в этой формуле легко преобразовать с помощью выражений (9) и (10), заменив γ на $\gamma + 1$. В результате получаем:

$$\kappa_v = \frac{6\gamma\pi c^2 e^3 H_{\perp} K}{(mc^2)^{\gamma+1}} \left(\frac{mc}{2eH_{\perp}} \right)^{-\gamma/2} \left(\frac{2\pi e c N}{H_{\perp}} \right)^{-(\gamma/2+2)} \psi(v', \gamma), \quad (23a)$$

где

$$\psi(v', \gamma) = (v')^{-(\gamma/2+2)} U(v', \gamma + 1);$$

$$U(v', \gamma) = \int_0^{\infty} I(x + 1/v' \sqrt{x}) x^{(3\gamma-5)/4} dx.$$

На частотах ниже $v' = 0,5$ с точностью $\approx 10\%$

$$\psi(v', \gamma) \approx (\pi/8 \sqrt{6}) 2^{-(3\gamma-5)/6} (v')^{-(\gamma+2)} \exp(-2\sqrt{3}/v').$$

Эта формула может быть получена таким же путем, как и формула (10a). С ее помощью нетрудно оценить частоту v'_{\max} , на которой коэффициент поглощения κ_v максимален: $v'_{\max} \approx 2\sqrt{3}/(\gamma + 2)$. На частотах ниже v'_{\max} коэффициент поглощения радиоволн релятивистским электронами быстро уменьшается. Но на этих частотах и интенсивность синхротронного излучения релятивистских электронов сильно уменьшается из-за отличия показателя преломления среды от единицы (см. формулы (12), (13) и (14))**. Поэтому интерес представляют значения κ_v , лишь на частотах, на которых можно полагать $n = 1$.

Значения функции $U(v', \gamma)$ при $\gamma = 2, 3, 4, 5$ и $v' \gg 1$ равны соответственно 0,125, 0,087, 0,079, 0,089. Так как речь идет только о

* Напомним, что рассматриваются лишь среды, для которых $1 - n \ll 1$.

** С помощью формулы (10a) можно оценить частоту, на которой излучение максимально: $v'_{\max} \approx 2\sqrt{3}/(\gamma - 1)$.

оценке κ_ν , ибо H_\perp и K известны лишь по порядку величины, можно положить $U(\infty, \gamma) = 0,1$ в интервале значений $\gamma = 2 \div 5$. Таким образом, при $n = 1$ и $\gamma = 1 \div 4$ коэффициент поглощения радиоволн релятивистскими электронами равен

$$\kappa_\nu \simeq 0,2(7,4 \cdot 10^9)^{\gamma} \gamma K(2\pi\nu)^{-(\gamma/2+2)} H_\perp^{\gamma/2+1}. \quad (24)$$

Если размер источника радиоизлучения d и $\kappa_\nu d \sim 1$ на частоте ν_1 , то на частотах, меньших ν_1 , спектр радиоизлучения источника будет иметь вид [13]:

$$\nu^{(1-\gamma)/2} \nu^{\gamma/2+2} = \nu^{5/2}.$$

Для Кассиопеи А $K \sim 6 \cdot 10^{-13}$ CGS, $H_\perp \sim 10^{-3}$ эрстед, $d \sim 1,3 \cdot 10^{19}$ см, $\gamma = 2,6$, так что $\nu_1 \sim 7 \cdot 10^6$ гц, т. е. спектр радиоизлучения Кассиопеи А на $\nu \sim 10$ мгц может измениться из-за реабсорбции радиоизлучения релятивистскими электронами. Вместе с тем, поскольку Кассиопея А находится вблизи галактической плоскости, весьма вероятно, что на частотах ниже 20 мгц ее радиоизлучение заметно поглощается в межзвездной среде (в областях HII). Учет этого поглощения при $\tau_\nu \sim 1$ дает фактор $\nu^{2,6}$. Таким образом, спектр радиоизлучения Кассиопеи А на частотах $\lesssim 10$ мгц может иметь вид $\nu^{2,5} \nu^{2,6} = \nu^{5,1}$.

На характере низкочастотного спектра радиоизлучения Лебедя А также, по-видимому, сказывается реабсорбция излучения релятивистскими электронами. В самом деле, для Лебедя А можно принять $K \sim 3 \cdot 10^{-15}$ CGS, $H_\perp \sim 10^{-4}$ эрстед, $d \sim 10^{23}$ см, $\gamma \sim 2,6$. Оценка с использованием формулы (24) приводит к значению $\nu_1 \sim 5 \cdot 10^6$ гц.

Следует отметить, что как в случае Кассиопеи А, так и в случае Лебедя А, трудно существенно увеличить ν_1 (например, вдвое) путем изменения значений K, H_\perp, d, γ в разумных пределах. Вероятно, на частотах ~ 20 мгц спектры радиоизлучения Лебедя А и Кассиопеи А изменяются из-за поглощения радиоволн в межзвездной среде, а на частотах $\lesssim 10$ мгц уже сказывается реабсорбция излучения релятивистскими электронами в источниках.

Может возникнуть вопрос, не является ли существенной реабсорбция излучения релятивистскими электронами в Галактике. По данным о спектре нетеплового галактического радиоизлучения $K \sim 5 \cdot 10^{-18}$ CGS, $H_\perp \sim 10^{-5} \div 10^{-6}$ эрстед, $d \sim 10^{23}$ см, $\gamma \simeq 2,6$. Подставив эти значения параметров в формулу (24), получим, что на $\nu = 10^6$ гц $\kappa_\nu d \ll 1$, т. е. на частотах, с которыми имеют дело в радиоастрономии, поглощение радиоволн релятивистскими электронами в Галактике пренебрежимо мало.

В заключение заметим следующее. Если релятивистские электроны распределены по энергиям таким образом, что их число растет с увеличением энергии ($N_2 > N_1$), то электромагнитные волны будут не поглощаться релятивистскими электронами, а усиливаться. Поэтому при немонотонном характере функции распределения релятивистских электронов по энергиям и некоторых дополнительных условиях [17] коэффициент поглощения радиоволн может стать отрицательным или, во всяком случае, заметно уменьшается по сравнению с вычисленным по формуле (24). Однако по данным о радиоизлучении дискретных источников энергетический спектр релятивистских электронов хорошо аппроксимируется функцией $N(E) \sim E^{-\gamma}$ ($\gamma > 0$) почти во всем существенном интервале интегрирования по энергии в выражении (23), так что отмеченная возможность уменьшения коэффициента поглощения радиоволн релятивистскими электронами в дискретных источниках, по-видимому, совершенно не проявляется.

Автор признателен В. Л. Гинзбургу за ценные замечания, сделанные им при чтении рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. R. Whitfield, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **117**, 680 (1957).
2. R. J. Lamden, A. C. B. Lovell, Phil. Mag., **1**, 725 (1956).
3. H. W. Wells, J. Geoph. Res., **61**, 541 (1956).
4. G. R. Ellis, G. Newstead, J. Atm. Terrest. Phys., **10**, 185 (1957).
5. В. Л. Гинзбург, Теория распространения радиоволн в ионосфере, Гостехиздат., М.-Л., 1949.
6. C. A. Shain, Austr. J. Phys., **10**, 195 (1957).
7. N. G. Roman, F. T. Haddock, Astroph. J., **124**, 35 (1956).
8. В. Л. Гинзбург, УФН, **51**, 343 (1953).
9. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, **34**, 131 (1958); **36**, 1335 (1959).
10. В. В. Владимировский, ЖЭТФ, **18**, 393 (1948).
11. В. Л. Гинзбург, УФН, **62**, 37 (1957).
12. И. С. Шкловский, Космическое радиоизлучение, Гостехиздат, М., 1956.
13. R. Q. Twiss, Phil. Mag., **45**, 249 (1954).
14. R. Minkowski, Paris Symposium on Radio Astronomy, Stanford Univ. Press, 1959.
15. С. И. Сыроватский, Астроном. ж., **36**, 17 (1959).
16. В. А. Разин, Астроном. ж., **35**, 829 (1958).
17. R. Q. Twiss, Austr. J. Phys., **11**, 561 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
28 февраля 1960 г.

СТРУКТУРА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ И РЕГУЛЯРНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ СВЕРХКОРОНЫ СОЛНЦА*

B. B. Виткевич

На основании данных наблюдений за радиоизлучением Крабовидной туманности в период покрытия ее сверхкороной Солнца с базами радиоинтерферометров, ориентированными под различными углами, измерены величины углового спектра рассеяния. Получены выражения для угла рассеяния радиоволн на неизотропных неоднородностях. Составлено интегральное уравнение для рассеяния радиоволн на радиальных неоднородностях в виде лучей и дано его решение. Приводятся новые соображения о влиянии сверхкороны на видимые угловые размеры активных областей радиоизлучения. Приводится оценка величины регулярного магнитного поля сверхкороны.

1. ВЫТЯНУТОСТЬ ЭЛЕКТРОННЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ СВЕРХКОРОНЫ СОЛНЦА

В предыдущей работе [1] по сверхкороне Солнца были подведены итоги наблюдений в Крымской научной станции ФИАН за 1951—1958 гг. Однако все приведенные данные были основаны на измерениях эффектов рассеяния, наблюдавшихся с интерференционными базами, расположенными в направлении восток—запад. Такие наблюдения в полной степени определяли бы данные о неоднородностях сверхкороны в том случае, если бы неоднородности были изотропны. Однако исследования последних лет показали, что имеет место другая картина: неоднородности и рассеяние неизотропны.

Еще в первой работе автора [2], посвященной этому кругу вопросов, указывалось на желательность постановки исследований с базами различной ориентировки. В 1954 году были предприняты первые попытки такого рода, когда на волне 5,8 м в Крымской станции ФИАН, кроме радиоинтерферометров с базами восток—запад, был установлен также интерферометр с базой, ориентированной близко к направлению север—юг. Наблюдения с этой базой, однако, не удалось провести надежно из-за помех, наводимых на антенны „косой“ базы. Эти наблюдения удалось успешно провести позднее на волне 3,5 м, о чем уже сообщалось в [3,4]. Результаты измерений показали, что неоднородности сверхкороны Солнца неизотропны; эффект рассеяния, который наблюдался, был различен для интерференционных баз с различной ориентировкой. Далее в 1959 г. эти наблюдения были проведены в Крымской и Серпуховской станциях ФИАН [5] на волнах 5,8 и 3,5 м. Результаты наблюдений еще раз вполне убедительно подтвердили тот факт, что неоднородности сверхкороны неизотропны. К аналогичному заключению также пришел Хэвиш [6], результаты измерений которого подтверждают наши выводы.

Наиболее надежные данные по рассматриваемому вопросу, пригодные для количественного анализа, получены в 1958 г. на волне 5,8 м [5]. В этой работе приведены значения глубины модуляции, наблюдавшиеся в период покрытия Крабовидной туманности сверх-

* Доклад на пленуме Комиссии по исследованию Солнца (Пулково, май, 1959).

короной Солнца, для базы восток—запад и для базы с направлением северо-восток и юго-запад, проекция которой на небесную сферу образует угол $14^\circ,5$.

Мы приведем сейчас расчет углов рассеяния, которые следуют из наблюдений для этих двух баз. Метод расчета уже был изложен подробно ранее [4]. Результаты сведены в таблицы 1 и 2, где через $M'J$ обозначена амплитуда наблюдаемой интерференционной картины во время затмения, отнесенная к амплитуде вне затмения, M_0 —глубина модуляции для данной базы D при наблюдении за Крабовидной туманностью вне затмения, $2\Phi_p$ —угол рассеяния.

Таблица 1

Наблюдения 1958 г. База восток—запад, $D=639$ м; $\lambda=5,8$ м; $\Delta\varphi=31,1$; $M_0=0,913$

	июнь											
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
$M'J$	1	0,95	0,75	0,42	0,31	—	0,13	—	0,48	—	1	
$2\Phi_p$	0	5,2	11,3	20	23,5	—	35,5	—	18,3	—	0	

Таблица 2

Наблюдения 1958 г. База $14^\circ,5$ к направлению север—юг (южная антenna восточнее северной); $\lambda=5,8$ м; $D=867$ м; $\Delta\varphi=23'$; $M_0=0,85$

	июнь																	
	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$M'J$	1	0,85	0,62	—	0,4	0,16	0,12	0,11	—	0,03	—	0,25	—	0,78	—	0,83/0,98	—	1
$2\Phi_p$	0	5,2	10,3	—	15,2	24	27,2	28,2	—	42	—	19,5	—	7,6	—	6/1	—	1

Приведенные таблицы показывают, что если при базе восток—запад эффект рассеяния наблюдается 11 июня (что находится в хорошем соответствии с аналогичными наблюдениями предыдущих лет), то для базы, ориентированной под углом $14^\circ,5$, эффект рассеяния примерно той же величины наблюдается уже 8 июня, т. е. на три дня раньше. В период, когда расстояние между источником радиоизлучения и Солнцем наименьшее, степень рассеяния на двух базах одного и того же порядка. При значительном удалении источника эффект рассеяния на косой базе снова превосходит эффект рассеяния на базе восток—запад.

На рис. 1 полученные результаты представлены графически. На рис. 2, полученном на основании данных рис. 1, в виде эллипсов указаны внешние границы рассеянного источника. Мы видим, что для сравнительно удаленных расстояний он имеет весьма вытянутую форму. Такая неизотропность рассеяния может быть объяснена тем, что неоднородности имеют форму лучей, вытянутых вдоль силовых линий магнитного поля. Очевидно, что рассеяние в направлении, перпендикулярном к направлению вытянутости неоднородностей, будет наименьшим, а в направлении, совпадающем с направлением вытянутости неоднородностей, в предельном случае не будет наблюдаться.

На рис. 3 приведены данные значения угла α между горизонталью и направлением большей оси эллипса рассеяния. На этом же графике приведена расчетная кривая значения углов α для случая, когда большая ось эллипса рассеяния перпендикулярна радиальному направлению:

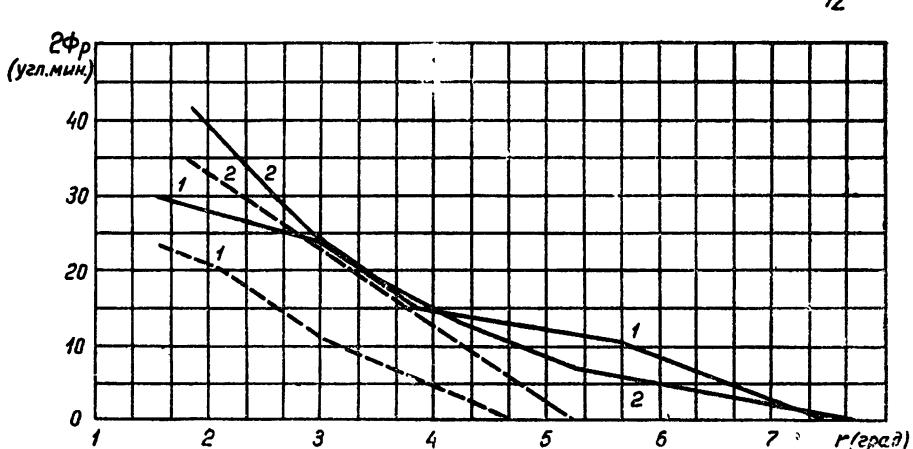


Рис. 1. Значения угла рассеяния $2\Phi_p$ в зависимости от расстояния r до центра Солнца (1958 г., волна 5,8 м):

1—первая фаза покрытия; 2—вторая фаза покрытия. База под углом 14° к линии север—юг—сплошная кривая; база восток—запад—пунктирная кривая.

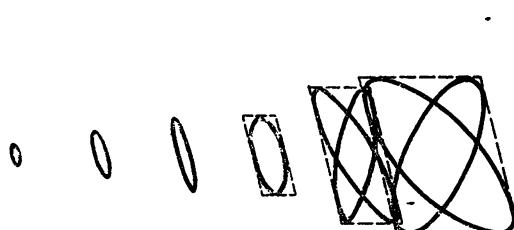


Рис. 2. Видимые размеры и форма Крабовидной туманности при различных расстояниях от Солнца (первая фаза затмения). Точка C — центр солнечного диска.

2. О РАССЕЯНИИ РАДИОВОЛН НА ВЫТЯНУТЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

Рассмотрим некоторую область R , заполненную неоднородностями; в направлении соответствующих осей неоднородности имеют размеры l_x , l_y , l_z . Пусть показатель преломления области, в которой находятся неоднородности, равен единице, а неоднородности имеют показатель преломления $1 + \Delta n$. Обозначим далее через k_x , k_y и k_z скважность неоднородностей соответственно в направлении оси x , y , z . (Предполагается, что каждое из значений k больше единицы.) Обозначим через ΔL среднеквадратичное отклонение оптической длины пути, вызванное наличием неоднородностей, через m и z_0 число неоднородностей и толщину рассеивающего экрана.

Пусть волна распространяется вдоль оси z . Мы ставим своей задачей оценить угол рассеяния $2\Phi_{py}$ в направлении y и $2\Phi_{px}$ в направлении x .

Для Φ_{px} находим следующее выражение:

$\Phi_{px} = \Delta L/l_x = \Delta n l_z \sqrt{mz}/l_x = \Delta n l_z \sqrt{z_0/k_z l_z k_x k_y}/l_x = \Delta n \sqrt{l_z z_0/l_x} \sqrt{k}$,
где $k = k_x k_y k_z$. Для Φ_{py} получаем:

$$\Phi_{py} = \Delta n \sqrt{l_z z_0}/l_y \sqrt{k},$$

и, следовательно, функции рассеяния Ψ имеют такой вид:

$$\begin{aligned}\Psi_x^2 &= \Delta n^2 l_z / l_x^2 k_x k_y k_z; \\ \Psi_y^2 &= \Delta n^2 l_z / l_y^2 k_x k_y k_z.\end{aligned}\quad (1)$$

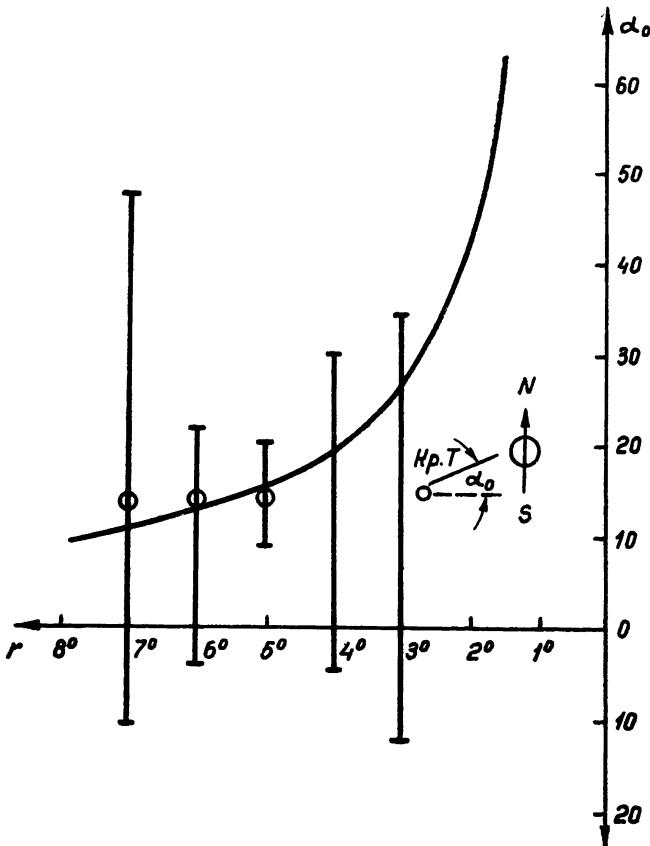


Рис. 3 Значения угла α_0 — угла между вертикалью и направлением большей оси эллипса рассеяния, в зависимости от расстояния.

Сплошная кривая — расчетная, для радиальной структуры электронных неоднородностей.
Вертикальные отрезки — пределы значений углов, полученные на основе наблюдений (первая фаза затмения)

Если мы желаем найти угол рассеяния в направлении угла φ ($\varphi=0$ соответствует оси x), то, принимая, что угол рассеяния изменяется по закону эллипса с полуосами Φ_{py} и Φ_{px} , и используя уравнение эллипса, найдем:

$$\Phi_{p\varphi}^2 = \frac{\Phi_{px}^2 \Phi_{py}^2}{\Phi_{px}^2 \sin^2 \varphi + \Phi_{py}^2 \cos^2 \varphi} = \frac{\Delta n^2 z_0 l_z}{k} \frac{1}{l_y^2 \sin^2 \varphi + l_x^2 \cos^2 \varphi}. \quad (2)$$

Это выражение справедливо для случая рассеяния на вытянутых не-

однородностях. Аналогичное выражение имеет место и для случая, когда мы имеем две системы бесконечно вытянутых взаимно перпендикулярных неоднородностей. В одной системе $l_x \rightarrow \infty$ и значения l_y конечны; при этом $\Phi_{py} \neq 0$, но $\Phi_{px} = 0$. Другая система имеет $\Phi_{px} \neq 0$, но $\Phi_{py} = 0$.

Мы можем прийти к следующему заключению: если экспериментально обнаружен такой эффект рассеяния, что видимое распределение яркости точечного рассеянного источника имеет форму эллипса, то неоднородности, ответственные за рассеяние, могут иметь вытянутую форму с отношением размеров

$$l_x / l_y = \Phi_{py} / \Phi_{px}; \quad (3)$$

другая возможность состоит в том, что за рассеяние ответственны бесконечно длинные, цилиндрические неоднородности, имеющие различную ориентацию. Простейший случай может состоять в том, что имеют место две системы неоднородностей, каждая из которых имеет неоднородности, вытянутые по направлению, перпендикулярному направлению соответствующих осей эллипса рассеяния.

Все предыдущие выражения написаны при условии, когда фронт падающей волны параллелен образующим цилиндрических неоднородностей, т. е. нормаль фронта параллельна оси z .

Предположим теперь, что нормаль фронта волны составляет с z угол α и лежит в плоскости xz . Тогда для случая бесконечно вытянутых неоднородностей найдем, что углы рассеяния при том же общем пути распространения волны в неоднородной среде увеличиваются в $1/\sqrt{\cos \alpha}$ раз ($\alpha = 0$ соответствует случаю, рассмотренному ранее). Это следует из того, что размер каждой неоднородности в направлении распространения волны увеличится в $1/\cos \alpha$ раз, а число неоднородностей (при неизменной общей длине пути z_0) уменьшится в то же число раз; но число неоднородностей входит в основное выражение под знаком корня, в то время как размер неоднородности входит линейно.

Таким образом, при наличии цилиндрических неоднородностей с образующими в плоскости xz и с образующими в плоскости yz соответственно найдем:

$$\Phi_{px\alpha} = \Delta n \sqrt{l_z z_0} / l_x \sqrt{k_x k_z} \sqrt{\cos \alpha_x}; \quad \Phi_{py\alpha} = \Delta n \sqrt{l_z z_0} / l_y \sqrt{k_y k_z} \sqrt{\cos \alpha_y}. \quad (4)$$

Мы видим, что при больших углах α $\Phi_{px\alpha}$ и $\Phi_{py\alpha}$ заметно возрастают в сравнении с Φ_{px} и Φ_{py} .

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РАССЕЯНИЯ РАДИОВОЛН НА РАДИАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ И ЕГО РЕШЕНИЕ

Используем полученные соотношения для рассмотрения интересующей нас задачи.

При наблюдении за источником радиоизлучения в период покрытия его сверхкороной мы наблюдаем рассеяние, создаваемое теми областями сверхкороны, которые находятся на расстояниях, равных и больших r_1 (рис. 4). На этом рисунке показано, каким образом волна P проходит через электронные неоднородности.

Будем считать, что функция рассеяния $\Psi(r)$ зависит только от расстояния до Солнца. Тогда в случае, если неоднородности изотропны и рассеяние по всем направлениям в плоскости фронта волны одинаково, формула для квадрата угла рассеяния имеет следующий вид [7]:

$$\Phi_p^2(r_1, r_2) = 2 \int_{r_1}^{r_2} \Psi^2(x) \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - r_1^2}}. \quad (5)$$

Здесь r_1 — минимальное расстояние от центра Солнца до луча зрения, соединяющего источник и наблюдателя, r_2 — радиус сверхкороны, который мы примем равным бесконечности. Однако теперь для радиальных неоднородностей необходимо учесть, что при различных расстояниях от Солнца изменяется угол α между направлением вытянутости неоднородности и направлением луча. Как видно из рис. 4, при минимальном расстоянии луча от Солнца ($r=r_1$) $\alpha=0$, в то время как на расстоянии r

$$\cos \alpha = r_1 / r.$$

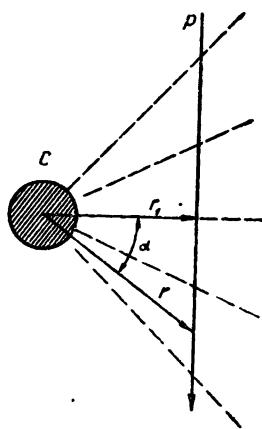


Рис. 4 Схема радиальных неоднородностей сверхкороны Солнца и обозначения.

Этот множитель необходимо учесть при написании интегрального уравнения для определения угла рассеяния $\Phi_{p\alpha}$ в направлении, перпендикулярном чертежу; в результате находим:

$$\Phi_{p\alpha}^2(r_1) = \frac{2}{r_1} \int_{r_1}^{\infty} \Psi^2(x) \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - r_1^2}}. \quad (6)$$

Подынтегральное выражение этого уравнения отличается от (5) тем, что текущая координата x входит под интегралом во второй степени, а ранее, при изотропных неоднородностях, в уравнение входила величина x в первой степени. Кроме того, перед интегралом в (6) появился множитель $1/r_1$.

Поскольку значение угла рассеяния известно для различных r_1 , задача состоит в том, чтобы найти функцию рассеяния $\Psi(r)$.

Интегральное уравнение (6) сводится к уравнению Абеля; это уравнение и его решение может быть представлено в виде:

$$F(r) = 2 \int_r^{\infty} \frac{xf(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx; \quad f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - r^2}} \frac{dF(x)}{dx} dx. \quad (7)$$

В нашем случае следует принять:

$$r \Phi_p^2(r) = F(r); \quad r \Psi^2(r) = f(r). \quad (8)$$

Тогда можно найти решение уравнения (6):

$$r \Psi^2(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{2 \Phi_p(x) \Phi'_p(x)x + \Phi_p^2(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx. \quad (9)$$

Отсюда для функции рассеяния находим выражение:

$$\Psi^2(r) = \frac{2}{\pi r} \int_{-\infty}^r \frac{\Phi_p(x) \Phi'_p(x)x}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx + \frac{1}{\pi r} \int_{-\infty}^r \frac{\Phi_p^2(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx. \quad (10)$$

Представив значение $\Phi_p(x)$ в виде степенного многочлена с показателями степени m_i , найдем:

$$\begin{aligned}\Phi_p(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{x^{m_i}}; \quad \Phi_p^2(x) = \sum_{i=1}^n \frac{k_i^2}{x^{2m_i}} + \sum_{\substack{i=1 \\ (i+j)}}^n \sum_{j=1}^n \frac{k_i k_j}{x^{m_i+m_j}}; \\ \frac{d\Phi_p(x)}{dx} &= \sum_{i=1}^n \frac{-m_i k_i}{x^{m_i+1}}; \\ 2\Phi_p(x) \frac{d\Phi_p(x)}{dx} &= - \sum_{\substack{i=1 \\ (i+j)}}^n \sum_{j=1}^n \frac{(m_i + m_j) k_i k_j}{x^{m_i+m_j+1}} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{k_i^2 m_i}{x^{2m_i+1}}.\end{aligned}\tag{11}$$

Определим теперь значение вспомогательного интеграла

$$I_m = \int_{-\infty}^r \frac{dx}{x^m \sqrt{x^2 - r^2}}.\tag{12}$$

Полагая для этого

$$x = r/\cos \varphi; \quad dx = \frac{r \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi; \quad \sqrt{x^2 - r^2} = r \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

получим, что

$$I_m = - \frac{1}{r^m} \int_0^{\pi/2} \cos^{m-1} \varphi d\varphi = - \frac{1}{r^m} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(m/2)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)},\tag{13}$$

где через $\Gamma(x)$ обозначена гамма-функция. Далее находим выражение для $\Psi^2(r)$:

$$\Psi^2(r) = \frac{1}{\pi r} \sum_{i=1}^n (-2m_i + 1) + k_i^2 I_{2m_i} + \frac{1}{\pi r} \sum_{\substack{i=1 \\ (i+j)}}^n \sum_{j=1}^n (-m_i - m_j + 1) k_i k_j I_{m_i+m_j}$$

или окончательно

$$\Psi^2(r) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^n \frac{(2m_i - 1) k_i^2 \Gamma(m_i)}{r^{2m_i+1} \Gamma\left(\frac{2m_i+1}{2}\right)} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{\substack{i=1 \\ (i+j)}}^n \sum_{j=1}^n \frac{(m_i + m_j - 1) k_i k_j \Gamma\left(\frac{m_i+m_j}{2}\right)}{r^{m_i+m_j+1} \Gamma\left(\frac{m_i+m_j+1}{2}\right)}.\tag{14}$$

Для частного случая, когда $\Phi_p = k/r^m$, имеем:

$$\Psi^2(r) = \frac{k^2(2m-1)}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m)}{r^{2m+1} \Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)}.\tag{15}$$

Таким образом, если $\Phi_p \simeq r^{-m}$, то $\Psi^2(r) \simeq r^{-2m-1}$. Далее, ввиду того, что $\Psi^2(r) \simeq N\epsilon^2(r)/k(r) l(r)$, для радиальных неоднородностей в виде конусов с вершинами в центре Солнца $k = \text{const}$, $l(r) \simeq r$ и, следовательно, $N\epsilon(r) \simeq r^{-m}$. Таким образом, электронная концентрация убывает по такому же закону, как и угол рассеивания.

Для другого случая, когда $l = \text{const}$ и $k(r) \simeq r^{-2}$, находим:

$$N\epsilon(r) \simeq r^{-m-3/2}.$$

Обратимся теперь к данным наблюдений.

На рис. 5 в логарифмическом масштабе приведены экспериментальные данные зависимости угла рассеяния $2\Phi_p$ от расстояния r в соответствии с таблицей 3 значений $2\Phi_p$, следующей из приведенных выше наблюдательных данных.

Таблица 3

r (град)	2	3	1	5	6	7	8
$2\Phi_p$ (угл. мин)	27–35	2	15	12,5	8	3	<1,5

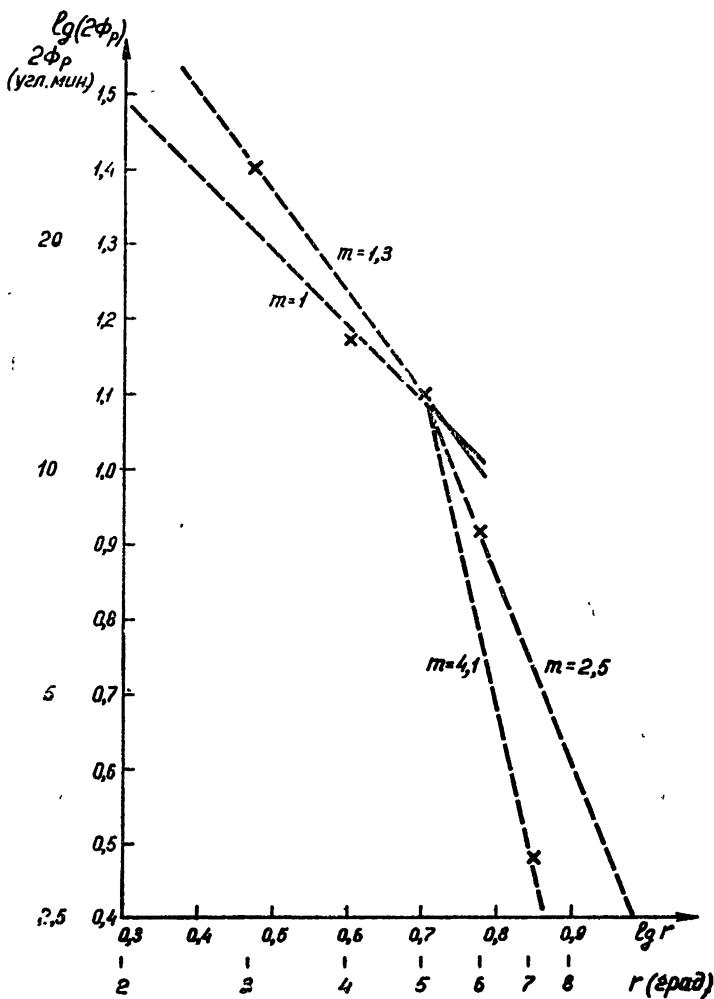


Рис. 5. Зависимость угла рассеяния $2\Phi_p$ (большей оси эллипса рассеяния) от расстояния (пунктирные кривые определяют граничные значения m для двух участков кривой: для $r < 5^\circ$ и для $r > 5^\circ$).

Мы видим, что $2\Phi_p$ уменьшается с расстоянием сначала сравнительно медленно, а затем быстрее. Пунктирные линии определяют предельные значения показателя степени зависимости $2\Phi_p$ от расстояния r (если принять, что $2\Phi_p \approx \frac{k}{r^m}$). Для $r \leq 5^\circ$ величина m лежит в пре-

делах между 1 и 1,3. Для больших r величина m заметно увеличивается и имеет значение $2,5 \div 4,1$. Если представить зависимость $2\Phi_p$ от r в виде двухчлена

$$2\Phi_p = \frac{k_1}{r^{m_1}} - \frac{k_2}{r^{m_2}},$$

то для сравнительно хорошей аппроксимации кривой можно принять следующие числовые значения: $m_1=3,5$; $m_2=4,5$; $k_1=3680$; $k_2=6630$. Эти величины параметров обеспечивают значения $2\Phi_p$, равные экспериментальным для r , лежащих в пределах $2^\circ \div 3^\circ$, а также в пределах $6^\circ \div 7^\circ$; для промежуточных значений r указанная аппроксимация дает меньшие значения $2\Phi_p$, чем получаемые экспериментально. Только введением новых членов (что, по-видимому, сейчас еще нецелесообразно ввиду малой точности наблюдательных данных) можно добиться лучшей аппроксимации.

Значения $\Psi^2(r)$ теперь можно легко написать, используя формулу (14), и, тем самым, получить функцию рассеяния для модели неоднородностей в виде радиальных лучей.

4. О ВЛИЯНИИ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ СВЕРХКОРоНЫ СОЛНЦА НА РАЗМЕРЫ АКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ СОЛНЦА

В статье [7] был поставлен вопрос о влиянии неоднородностей сверхкороны на принимаемое собственное радиоизлучение Солнца. В этой работе отмечалось, что неоднородности сверхкороны, на которых рассеиваются радиоволны, приводят к кажущемуся увеличению размеров активных областей на Солнце, к изменению распределения радиояркости спокойного Солнца и к увеличению длительности всплесков радиоизлучения. Однако при проведении первых оценок не был учтен множитель порядка $1/20 \div 1/30$, учитывающий конечность расстояния сверхкороны Солнца до источника радиоизлучения. Если учесть этот множитель, то, согласно расчетам, эффекты рассеяния могут быть заметны только на самых длинных волнах порядка $10 \div 15$ метров, а на более коротких волнах эффект рассеяния сравнительно мал. Так, на волне 5,8 м следует ожидать величины рассеяния порядка одной-двух угловых минут. Все указанные расчеты проводились, исходя из предположения, что неоднородности сверхкороны изотропны. Поскольку на самом деле, как мы убедились, имеет место другая картина, то указанные эффекты для ряда случаев должны, как легко показать, заметно возрасти.

Во-первых, при расчете электронной плотности неоднородностей на основании результатов наблюдений приводились заниженные данные в связи с тем, что наблюдения с базой интерферометра восток—запад давали только одну проекцию (при этом меньшую) эллипса рассеяния. Учет неизотропности электронных неоднородностей и, в частности, данных рассеяния, соответствующих большей оси эллипса рассеяния приводит к увеличению электронной концентрации. В настоящее время соответствующие пересчеты еще не выполнены, однако, ясно, что они приведут к увеличению эффекта рассеяния по направлениям, перпендикулярным к радиальным.

Во-вторых (и что наиболее существенно), ввиду вытянутости и приблизительной радиальности неоднородностей число неоднородностей, через которые пройдет волна, идущая примерно радиально от Солнца к наблюдателю, будет заметно меньше, чем при наблюдении рассеяния внешнего источника радиоизлучения (Крабовидной туман-

ности). Поскольку для этого случая значение $\cos \alpha$, о котором упоминалось выше, близко к нулю, необходимо учитывать множитель $1/\sqrt{\cos \alpha}$, который изменяет картину. Например, при $\alpha \approx 86^\circ$ $1/\sqrt{\cos \alpha} = 4$ и следует ожидать эффекта рассеяния порядка $4 \div 8$ угловых минут на волне $5,8 \text{ м}$. Величина такого порядка вполне измерима, причем, по-видимому, наиболее эффективное измерение может быть с этой целью проведено посредством измерения угловых размеров отдельных кратковременных всплесков радиоизлучения. Весьма вероятно, что наблюдаемые размеры этих всплесков ввиду их кратковременности будут определяться в основном эффектом рассеяния сверхкороны. Во всяком случае, на волнах порядка 5 м и длиннее такое влияние может быть весьма заметным. Весьма важно в связи с этим провести работу по определению угловых размеров кратковременных всплесков и сопоставить эти размеры с положением источников всплесков на диске Солнца.

5. О РЕГУЛЯРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ СВЕРХКОРОНЫ

Неоднородности плазмы сверхкороны Солнца, которые всегда окружают Солнце, быстро рассосались бы, если бы не было причин, удерживающих их от диссиляции. Вполне естественно считать, что неоднородности сдерживают от рассасывания магнитные поля. Поскольку неоднородности имеют регулярную структуру в виде лучей или струй, то ясно, что и магнитное поле имеет аналогичное строение.

Можно высказать следующие соображения о природе и величине магнитного поля. Как известно, до настоящего времени не обнаружено постоянного магнитного поля Солнца. Однако можно утверждать, что на поверхности Солнца магнитное поле, если оно и есть, то не превышает величины $0,1 \text{ эрстед}$. Следовательно, на расстояниях $10 \div 30$ солнечных радиусов магнитное поле может иметь значения порядка $10^{-4} \div 10^{-5} \text{ эрстед}$.

С другой стороны, как мы видели по результатам наблюдений, ориентировка неоднородностей приблизительно радиальна, а не следует форме статического поля диполя. Такая картина может создаться в результате того, что плазма, движущаяся от Солнца наружу приблизительно по радиальным направлениям, с одной стороны, сама двигается вдоль силовых магнитных линий, а с другой стороны, деформирует форму силовых линий, приближая их к радиальной. Для того, чтобы движение плазмы деформировало силовые магнитные линии, необходимо, чтобы кинетическая энергия движения была такого же порядка, как и энергия магнитного поля, т. е.

$$\rho \frac{v^2}{2} \simeq H^2 / 8\pi.$$

Из этого соотношения можно оценить значения скорости v . Принимая величину магнитного поля равной $10^{-4} \div 10^{-5} \text{ эрстед}$, число частиц $N = 10^4 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$, найдем, что $\rho = 1,7 \cdot 10^{-20} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ и скорость $v = 2 \div 0,2 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}$. Эти значения скоростей движения плазмы вдоль силовых магнитных линий поля находятся в хорошем соответствии со скоростями, оцененными, исходя из других соображений [1].

Насколько нам известно, данные о вытянутости неоднородностей дают первые надежные сведения о самом факте наличия постоянного магнитного поля Солнца. Значения $0,1 \text{ эрстеда}$ у поверхности Солнца и $10^{-4} \div 10^{-5} \text{ эрстед}$ на расстояниях $(10-30) R_\odot$ вполне допустимы с точки зрения наблюдательных данных, и такие поля, по-видимому, действительно имеют место.

В связи с наличием постоянного магнитного поля Солнца вполне возможно, что вблизи Солнца создаются магнитные ловушки, в которых удерживаются электроны и протоны, аналогично тому, как это имеет место в зонах повышенного количества космических частиц вблизи от Земли.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Виткевич, Астрон. ж. (в печати).
2. В. В. Виткевич, ДАН СССР, 77, 585 (1951).
3. В. В. Виткевич, Астрон. ж. (в печати).
4. В. В. Виткевич, Б. Н. Пановкин, Труды II конференции по радиоастроно-
мии, Москва, 1957 (в печати).
5. В. В. Виткевич, Б. Н. Пановкин, А. Г. Суховий, Изв. высш. уч. зав. —
Радиофизика (в печати).
6. A. Newish, Доклад на симпозиуме по радиоастрономии (Париж, август, 1958).
7. В. В. Виткевич, Астрон. ж., 33, 62 (1956).

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию
16 февраля 1960 г.

ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ В ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЕ РАДИОВОЛН 8-ММ ДИАПАЗОНА

A. E. Саломонович, O. M. Атаев

Приведены значения молекулярного поглощения радиоволн 8-мм диапазона, полученные по данным измерения собственного теплового излучения земной атмосферы. При определении коэффициентов поглощения принята сферически симметрическая модель влажной атмосферы, в которой не учитывается поглощение и рассеяние энергии радиоволн в конденсированной фазе. Для ясных дней, которые достаточно хорошо описываются этой моделью, получены следующие значения коэффициентов поглощения соответственно в кислороде и водяном паре: $\kappa_{01} = 0,0046 \text{ непер} \cdot \text{км}^{-1} = 0,04 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ и $\kappa_{02} = 0,00046 \text{ непер} \cdot \text{км}^{-1} = 0,004 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ на $1 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$. Полученные результаты позволяют судить о полном поглощении радиоволн 8-мм диапазона по величине абсолютной влажности воздуха и по расстоянию, проходимому радиоволнами в земной атмосфере.

В настоящее время для изучения условий распространения радиоволн в земной атмосфере широко используются радиоастрономические методы. В частности, поглощение в тропосфере радиоволн короче 1 см исследовалось по изменению интенсивности радиоизлучения Солнца, принимаемого при различных зенитных углах [1–6]. Недостатком этого метода является возможность проведения наблюдений только в утренние и вечерние часы суток, причем длительность сеанса наблюдений составляет 2–3 часа. Это требует высокой стабильности аппаратуры и затрудняет сопоставление с метеорологическими данными. Кроме того, при обработке результатов наблюдений приходится учитывать рефракционное ослабление сигнала и изменение видимых размеров Солнца.

Метод измерения поглощения по собственному тепловому излучению тропосферы [7–9] этих недостатков не имеет. Он, по существу, не является радиоастрономическим методом, но сходен с ним по используемой аппаратуре, причем применение этого метода связано с необходимостью абсолютной калибровки приемной аппаратуры.

В настоящей статье* исследуется поглощение радиоволн 8-мм диапазона в земной атмосфере по данным измерения ее собственного теплового излучения. Приводятся измеренные значения коэффициентов поглощения в кислороде и водяном паре, которые позволяют по величине абсолютной влажности определять полное поглощение в атмосфере в отсутствие гидрометеоров.

1. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ АТМОСФЕРЫ

Как известно [8], эффективная температура $T_a(z)$ антенны с узкой диаграммой, ось которой направлена под зенитным углом z , в предположении сферически симметричной слоистой атмосферы со стандартным градиентом температуры по высоте, равным $-6,5 \text{ град} \cdot \text{км}^{-1}$, и

* Работа выполнена в 1955–1957 гг.

в пренебрежении космическим радиоизлучением (что допустимо на волнах короче 10 см), определяется выражением:

$$T_a(z) = T_0(1 - e^{-\Gamma}) - \Delta T. \quad (1)$$

Здесь

$$\Delta T = 6,5 \int_0^{\infty} \sec z h \chi(h) e^{-\Gamma_h} dh, \quad (2)$$

T_0 — температура атмосферы на уровне земли, h — высота в км, $\chi(h) = \chi_{01} \exp(-h/H_1) + \chi_{02} \exp(-h/H_2)$ — эффективный коэффициент поглощения, χ_{01} и χ_{02} — коэффициенты поглощения соответственно кислорода и водяного пара на уровне земли, H_1 и H_2 — характеристические высоты для кислорода и водяного пара, $\Gamma = \int_0^{\infty} \sec z \chi(h) dh$ — полное поглощение атмосферы, $\Gamma_h = \int_0^{\infty} \sec z \chi(h) dh$.

Выражение (1) связывает наблюдаемую температуру излучения атмосферы $T_a(z)$ с поглощением, выраженным в неперах. Второй член в этом выражении учитывает наличие градиента температуры по высоте. Очевидно, что в изотермической атмосфере этот член обращается в нуль и о поглощении можно судить непосредственно по измеренной температуре $T_a(z)$.

При вычислении интеграла (2) в случае сантиметрового диапазона волн в работе [8] предполагается, что поглощение можно считать малым и не учитываются члены второго порядка малости относительно Γ . Для ΔT в этом случае получается выражение:

$$\begin{aligned} \Delta T = 6,5 & \left\{ (\gamma_{11} H_1 + \gamma_{12} H_2) [1 - (\gamma_{11} + \gamma_{12})] + \right. \\ & \left. + \gamma_{11}^2 \frac{H_1}{4} + \gamma_{12}^2 \frac{H_2}{4} \gamma_{11} \gamma_{12} \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\gamma_{11} = \sec z \chi_{01} H_1$ и $\gamma_{12} = \sec z \chi_{02} H_2$.

Разложение $e^{-\Gamma} \approx 1 - \Gamma$ (первое приближение) обеспечивает точность $\sim 25\%$ при определении $T_a(z)$, если $\Gamma = (\gamma_{11} + \gamma_{12}) = 0,6$. Согласно [8], на волне $\lambda = 3,2$ см $\chi_{01} = 0,001$ непер·км $^{-1}$ и $\chi_{02} = \rho \cdot 1,4 \cdot 10^{-4}$ непер·км $^{-1}$, где ρ — абсолютная влажность воздуха в г·м $^{-3}$. Для модели „влажной“ атмосферы, рассмотренной в [10] ($H_1 = 5,3$ км, $H_2 = 2,2$ км), даже при $z = 85^\circ$ и $\rho = 21$ г·м $^{-3}$ (3) дает $\gamma_{11} \sim 0,06$ и $\gamma_{12} \sim 0,07$, и, следовательно, можно пользоваться первым приближением.

В то же время, согласно результатам предварительных измерений поглощения в атмосфере по радиоизлучению Солнца, оказалось, что в 8-мм диапазоне $\chi_{01} \sim 0,006$ непер·км $^{-1}$ и $\chi_{02} = (\rho/n) \chi_{01}$, где $n = 7$ г·м $^{-3}$, так что при $z = 85^\circ$ и $\rho = 21$ г·м $^{-3}$ $\gamma_{11} = 0,37$, $\gamma_{12} = 0,45$ и ошибка при использовании первого приближения для определения $T_a(z)$ превышает 25%.

Таким образом, в 8-мм диапазоне волн при вычислении интеграла (2) для значения ρ вплоть до $\rho = 21$ г·м $^{-3}$ и $85^\circ > z > 80^\circ$ необходимо учитывать также члены второго порядка малости, т. е. полагать $\exp(-\Gamma_h) \approx 1 - \Gamma_h + \Gamma_h^2 / 2$. В этом случае выражение для ΔT оказывается более сложным, чем (3).

Для оценки порядка величины ΔT в реальных условиях были вычислены зависимости ΔT от абсолютной влажности ρ для нескольких значений z при $\chi_{01} = 0,006$ непер·км $^{-1}$ (рис. 1).

Как видно из рис. 1, величины ΔT при $z < 80^\circ$ сравнительно невелики. Это обстоятельство позволяет при многих радиоастрономических измерениях в 8-мм диапазоне, когда зенитные углы, при которых производятся наблюдения источников радиоизлучения, не превышают $\sim 75^\circ$, производить исправление на поглощение в земной атмосфере упрощенным способом, суть которого заключается в следующем.

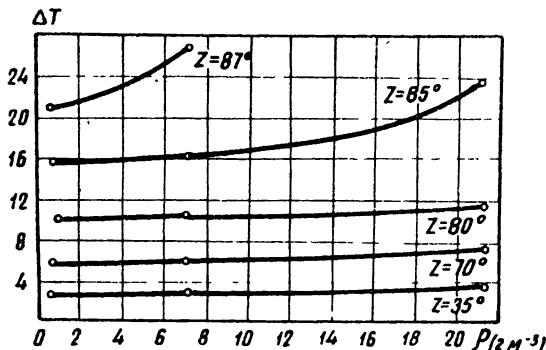


Рис. 1. Зависимость ΔT от ρ .

Вообще говоря (см. рис. 2),

$$\frac{n_1}{n_2} = -\frac{T_u e^{-r}}{T_0 - T_a},$$

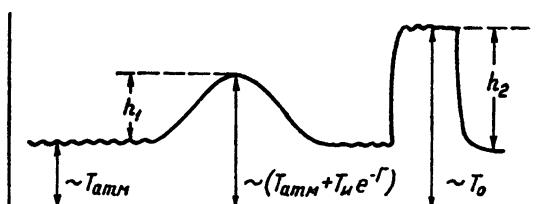


Рис. 2.

где n_1 — изменение показания выходного прибора приемника при прохождении мимо антенны источника радиоизлучения, n_2 — изменение показания при переключении приемника с антенны на согласованную нагрузку с температурой T_0 , а T_u — антennaя температура источника радиоизлучения, исправленная на поглощение. Используя (1), получим:

$$T_u = \frac{n_1}{n_2} T_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0 e^{-r}} \right). \quad (4)$$

В том случае, когда $\Delta T/T_0 e^{-r} \ll 1$, что выполняется тем лучше, чем меньше зенитный угол и влажность атмосферы,

$$T_u \simeq \frac{n_1}{n_2} T_0. \quad (5)$$

2. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ И ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Собственное излучение атмосферы на волне $\lambda = 8 \text{ мм}$ измерялось с помощью радиотелескопа с параболическим рефлектором диаметром 2 м и модуляционным радиометром. Калибровка выходного сигнала производилась переключением входа радиометра с антенны на холодный или горячий эквиваленты, разность температур которых $t_{\text{гор}} - t_{\text{хол}}$ измерялась термопарой.

Излучение атмосферы записывалось при различных зенитных углах, а затем производилась калибровка по эквивалентам. Образец такой записи приведен на рис. 3.

Полное поглощение в атмосфере вычислялось по формуле

$$\Gamma(z) = -\ln \left[1 - \frac{T_a(z) + \Delta T(z, \rho)}{T_0} \right], \quad (6)$$

получающейся непосредственно из (1) с учетом (2). Величина ΔT берется из графика рис. 1.

Контрольные измерения по радиоизлучению Солнца производились во время захода Солнца при неподвижном радиотелескопе (прохождения через диаграмму) или при сопровождении Солнца с периодическими отводами антенны для калибровки.

При обработке контрольных наблюдений по Солнцу использовалось известное соотношение

$$\Gamma(z) = -\ln (I_z/I_{z_0}), \quad (7)$$

где I_z и I_{z_0} — интенсивность излучения Солнца при зенитных углах z и z_0 .

Коэффициенты поглощения обычно определяются из соотношения

$$\Gamma(z) = 2(\chi_{01} \Delta L_1 + \chi_{02} \Delta L_2), \quad (8)$$

где ΔL_1 и ΔL_2 — разности эффективных путей, проходимых радиоволнами в кислороде и водяном паре соответственно при изменении зенитного расстояния от z до z_0 . Значения L_1 и L_2 для сферически симметричной модели атмосферы протабулированы в работе Жевакина и Троицкого [10]. Для определения доли, вносимой кислородом и водяным паром в полное поглощение, коэффициент χ_{02} удобно представить в виде $\chi_{02} = (\rho/n)\chi_{01}$, где n — абсолютная влажность, при которой на данной волне поглощение в водяном паре равно поглощению в кислороде. Тогда

$$\Gamma(z) = 2\chi_{01} \left(\Delta L_1 + \frac{\rho}{n} \Delta L_2 \right). \quad (9)$$

Обычно при исследованиях поглощения на волне $\lambda = 8$ м.м. полагают (следуя Ван-Флеку [11]) $n=7$ г·м⁻³. Очевидно, что значение n можно определить экспериментально по данным о поглощении при различной абсо-

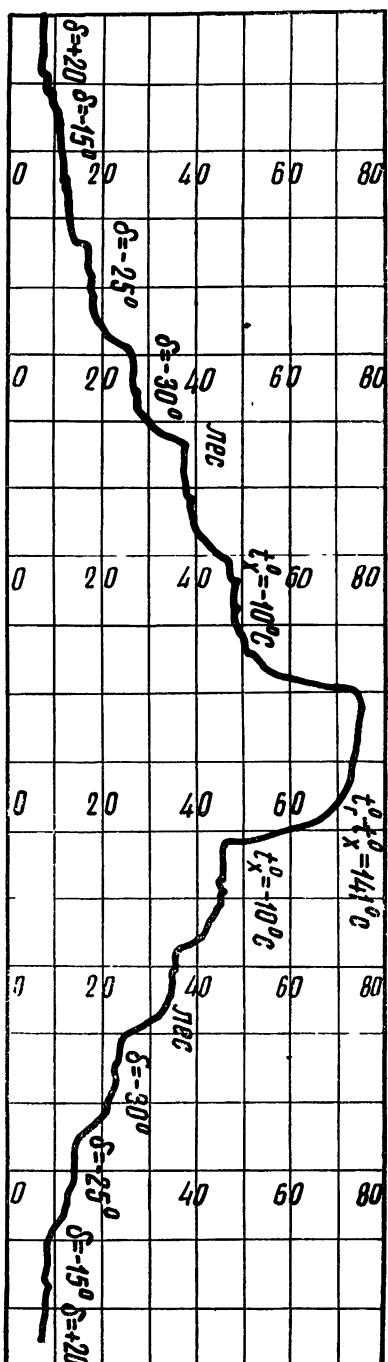


Рис. 3.

лютной влажности. Действительно, измеряя полное поглощение при двух значениях абсолютной влажности ρ_1 и ρ_2 и одинаковых зенитных углах, получаем:

$$\Gamma_1 = 2x_{01} \left(\Delta L_1 + \frac{\rho_1}{n} \Delta L_2 \right), \quad (10)$$

$$\Gamma_2 = 2x_{01} \left(\Delta L_1 + \frac{\rho_2}{n} \Delta L_2 \right),$$

откуда

$$x_{01} = \frac{\Gamma_1 \rho_2 - \Gamma_2 \rho_1}{(\rho_2 - \rho_1) 2 \Delta L_1}; \quad n = \frac{\Delta L_2}{\Delta L_1} \frac{(\Gamma_1 \rho_2 - \Gamma_2 \rho_1)}{\Gamma_2 - \Gamma_1}. \quad (11)$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения поглощения в атмосфере на волне 8 мкм по собственному излучению атмосферы проводились в Московской области в октябре—декабре 1956 г. и мае—июле 1957 г. Контрольные измерения для определения поглощения в атмосфере по радиоизлучению Солнца проводились летом 1957 г.*

Для определения полного поглощения $\Gamma(z)$ по излучению атмосферы были отобраны записи, сделанные в ясные дни, так как рассматриваемая модель атмосферы не учитывает наличия в атмосфере гидрометеоров. Полученные этим методом зависимости $\Gamma(z)$ сравнивались с соответствующими кривыми, построенными по записям радиоизлучения Солнца. На рис. 4 приведены зависимости $\Gamma(z)$ для двух

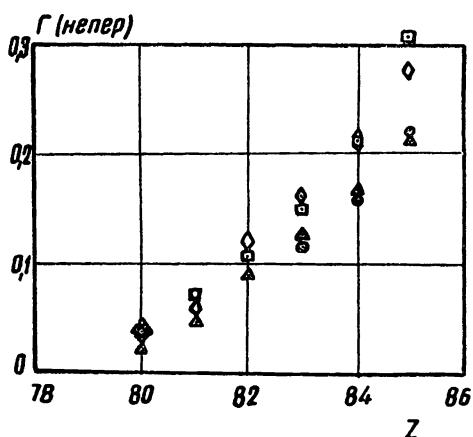


Рис. 4. Зависимость полного поглощения радиоволн длиной 8 мкм в атмосфере, определяемого по радиоизлучению Солнца и собственному тепловому излучению атмосферы, от зенитного угла:
 ○ — по Солнцу, $\rho = 13 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$; □ — по Солнцу, $\rho = 22 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$; △ — по атмосфере, $\rho = 1,7 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$; ◊ — по атмосфере, $\rho = 22,4 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$.

значений абсолютной влажности ρ , полученных обоими методами и осредненных за несколько дней с одинаковыми значениями ρ . Значения $\Gamma(z)$ достаточно хорошо согласуются между собой. Из этого следует, что определение полного поглощения радиоволн миллиметрового диапазона в земной атмосфере можно производить по измерению температуры излучения самой атмосферы с учетом поправки, обусловленной градиентом температуры по высоте.

Поскольку результаты определения поглощения по излучению атмосферы и по радиоизлучению Солнца совпадают, то для вычисле-

* Предварительные измерения поглощения по радиоизлучению Солнца были проведены в 1955 г.

ния коэффициентов χ_{01} и χ_{02} использовались осредненные по дням с одинаковой влажностью ρ кривые полного поглощения, полученные обоими методами. На рис. 5 приведены такие кривые для пяти значений влажности ($\rho = 7 \div 22 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$), полученные по результатам измерений, выполненных, в основном, летом 1957 г.; кривая 1 получена по радиоизлучению Солнца, а кривые 2—5—по излучению атмосферы.

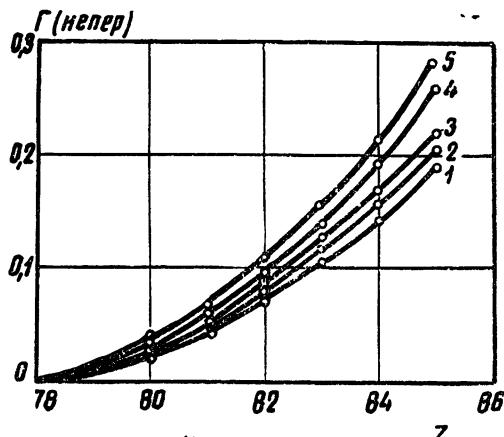


Рис. 5. Кривые зависимости полного поглощения радиоволны длиной 8 мм в атмосфере от зенитного угла для различных значений абсолютной влажности:

1— $\rho = 7 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$ (6); 2— $\rho = 10,6 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$ (3); 3— $\rho = 13,7 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$ (5); 4— $\rho = 17,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$ (5); 5— $\rho = 22,4 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$ (9) (в скобках указано число случаев).

Коэффициент поглощения χ_{01} в кислороде на уровне земли и значение n определялись по кривым $\Gamma(z)$ для 10 пар значений абсолютной влажности ρ ($\rho_2 - \rho_1 = 3,1 \div 16,4 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$). Из рис. 6 видно, что экспериментальные точки группируются вокруг прямых с наклоном $\chi_{01} = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ непер} \cdot \text{км}^{-1}$ и $n = 10 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$ соответственно. Таким образом, коэффициент поглощения в водяном паре оказывается равным $\chi_{02} = 4,6 \cdot 10^{-4} \text{ непер} \cdot \text{км}^{-1}$ на $1 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$. Точность определения χ_{01} и χ_{02} составляет примерно 25%.

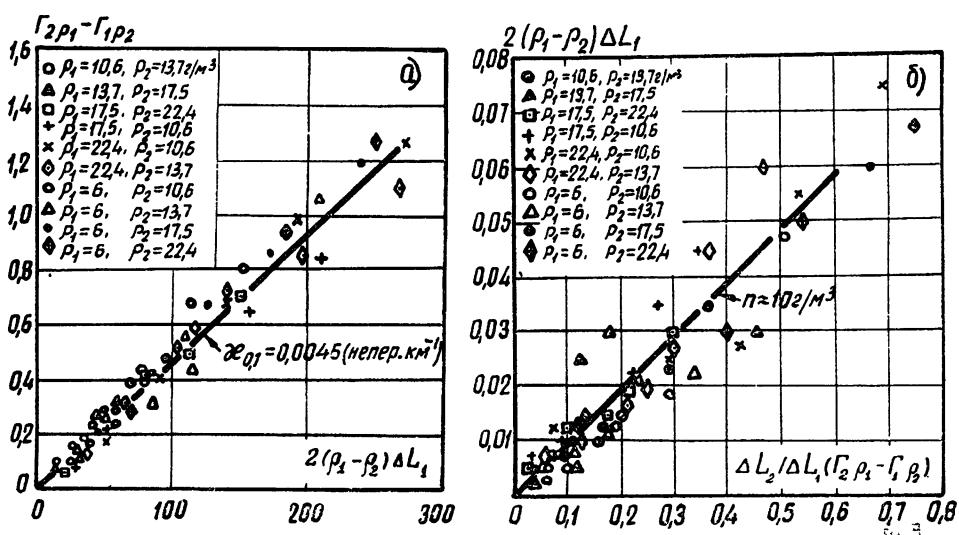


Рис. 6 а и б.

Так как коэффициент поглощения χ_{02} пропорционален абсолютной влажности ρ (вплоть до $\rho = 25 \div 30 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$), то по значениям χ_{01} , n , χ_{02}

можно построить график зависимости суммарного коэффициента поглощения κ от ρ . На рис. 7 приведен график, который позволяет определять поглощение радиоволн длиной 8 мм в атмосфере в ясный день, если известны длина трассы и один из метеорологических факторов—абсолютная влажность.

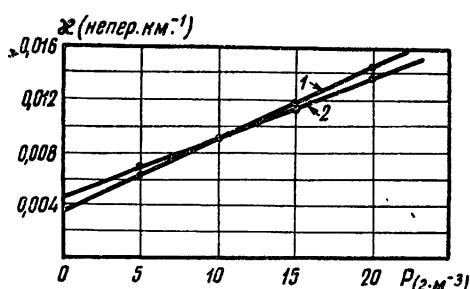


Рис. 7. Зависимость суммарного коэффициента поглощения в атмосфере на волне 8 мм на уровне земли от абсолютной влажности:

1— $n=7 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$; 2— $n=10 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$.

Как уже отмечалось выше, в сферически симметричной модели атмосферы не учитываются осадки и гидрометеоры, содержащиеся в атмосфере. Поэтому из измерений, проведенных в дни с осадками и сплошной облачностью, можно получить лишь сведения о полном поглощении. При прохождении отдельных облаков через диаграмму направленности антенны можно определить дополнительное поглощение, вызываемое этими облаками. В частности, дополнительное поглощение в отдельном кучево-дождовом облаке составляет $\sim 0,07 \text{ непер}$.

Представляет интерес сопоставить полученные выше значения коэффициентов поглощения в кислороде и водяном паре с имеющимися в литературе. Полученное нами значение для коэффициента поглощения в кислороде $\kappa_{01}=4,6 \cdot 10^{-3} \text{ непер} \cdot \text{км}^{-1}$ находится в удовлетворительном согласии с рассчитанными по Ван-Флеку [11] (при $\lambda=8 \text{ мм}$ $\kappa_{01}=-3,1 \cdot 10^{-3} \text{ непер} \cdot \text{км}^{-1}$) и данными наблюдений радиоизлучения Солнца на волне 8,7 мм ($\kappa_{01}=4,1 \cdot 10^{-3} \text{ непер} \cdot \text{км}^{-1}$ [1] и $\kappa_{01}=3,8 \cdot 10^{-3} \text{ непер} \cdot \text{км}^{-1}$ [5]). Поглощение по собственному излучению атмосферы на волне 8,2 мм определялось также в [9], причем автор приводит лишь значение полного поглощения в кислороде при вертикальном падении $\Gamma_1=0,024 \text{ непер}$. В нашем случае $\Gamma_1=\kappa_{01}$. $H_1=0,024 \text{ непер}$, т. е. имеет место хорошее совпадение. Что же касается поглощения в водяном паре, то значение $\kappa_{02}=\rho \cdot 4,6 \cdot 10^{-4} \text{ непер} \cdot \text{км}^{-1}$ согласуется с рассчитанным по Ван-Флеку $\kappa_{02}=\rho (\kappa_{\lambda=1,35 \text{ см}} + \kappa_{\text{отл}})=\rho (0,00022 + 0,0002) \text{ непер} \cdot \text{км}^{-1}= =\rho \cdot 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ непер} \cdot \text{км}^{-1}$, но в несколько раз меньше, чем по данным лабораторных измерений Беккера и Отлера [12], определявших эту величину резонаторным методом.

Следует, однако, заметить, что вычисление коэффициентов поглощения по данным о полном поглощении в атмосфере предполагает конкретную модель атмосферы, определяемую, в частности, характеристическими высотами H_1 и H_2 . Так как данные о полном поглощении, полученные разными авторами, хорошо согласуются с полученными нами значениями, в то время как коэффициенты поглощения в водяном паре несколько отличаются, то, по-видимому, модель „влажной“ тропосферы нуждается в уточнении.

В наблюдениях, выполненных в ходе настоящей работы, принимали участие Н. А. Аменицкий, С. К. Паламарчук и Н. Д. Долотенкова. Авторы выражают им свою благодарность. Авторы признательны также В. С. Троицкому за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. R. Marner, IRE Convent. Rec., **3**, № 1, 63 (1955).
2. R. N. Whitehurst, F. H. Mitchell, Proc. IRE, **44**, 1879 (1956).
3. H. H. Theissing, P. J. Caplan, J. Appl. Phys., **27**, 538 (1956).
4. R. N. Whitehurst, J. Copeland, F. N. Mitchell, J. Appl. Phys., **28**, 295 (1957).
5. J. Aarons, W. R. Barron, J. P. Castelli, Proc. IRE, **46**, 325 (1958).
6. R. J. Coates, Proc. IRE, **46**, 122 (1958).
7. R. H. Dicke, R. Beringer, R. L. Kuhl, A. B. Vane, Phys. Rev., **70**, 340 (1946).
8. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, № 2, 19 (1958).
9. G. R. Nicoll, Proc. IEE, **B104**, 519 (1957).
10. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, **4**, 21 (1959).
11. D. A. Van Vleck, Phys. Rev., **71**, 413, 425 (1946).
12. G. F. Becker, S. H. Autler, Phys. Rev., **70**, 300 (1946).

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию
3 января 1960 г.

ОТРАЖЕНИЕ РАДИОВОЛН МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА ОТ СЛОЯ СНЕГА

Н. С. Зинченко, А. Я. Усиков

Приводятся экспериментально полученные значения коэффициентов отражения радиоволн миллиметрового диапазона от слоя снега. Коэффициенты отражения относятся к широкому диапазону длин волн (пять длин волн) и углов падения (от 30° до 80°). Даётся объяснение обнаруженному аномально малому отражению радиоволны нижней части миллиметрового диапазона.

В данной работе излагаются результаты измерений коэффициентов отражения от слоя снега, полученные в широком диапазоне длин волн и углов падения. Измерение коэффициентов отражения проводилось на длинах волн 31,9; 13,6; 8,5; 6,7 и 4,4 мм.

Для этих измерений применялась методика поверхностного отражения в свободном пространстве. Измерительная установка состояла из передатчика и приемника, расположение которых схематически представлено на рис. 1. Эта установка позволяла изменять высоту

и наклон передатчика и приемника относительно отражающей поверхности. При изменении высоты передатчика и приемника изменялись углы ϑ падения радиоволн, так как оси антенн при этом направлялись в одну и ту же точку отражающей поверхности.

В качестве приемника применялся кристаллический детектор в волноводе и зеркальный гальванометр с малым внутренним сопротивлением

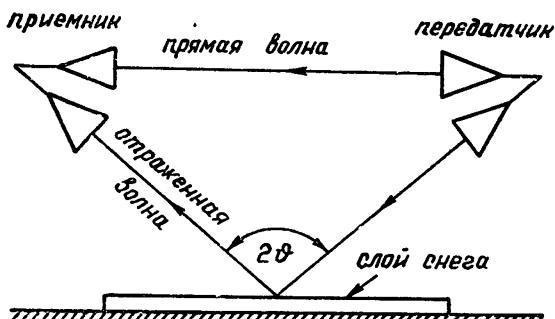


Рис. 1.

для индикации сигнала. Антennами служили пирамидальные рупоры одинаковых размеров для каждой длины волны. Ширина диаграммы направленности антенн, измеренная по половинной мощности составляла $\sim 6^\circ$ для всех длин волн, за исключением волны 31,9 мм, для которой она была $\sim 10^\circ$.

Установка допускала измерение коэффициентов отражения в интервале углов падения от 30° до 80° .

Коэффициенты отражения определялись путем измерения в приемнике мощности прямого и отраженного сигналов. При этом следует отметить, что характеристика детектора приемника была квадратичной при всех величинах сигналов. Поэтому модуль коэффициента отражения определялся как корень квадратный из отношения величины отраженного и прямого сигналов, деленный на косинус угла, дополнительного углу падения, т. е.

$$|R| = \sqrt{I_{\text{отр}}/I_{\text{пад}}} / \cos (90^\circ - \vartheta).$$

Постоянство излучаемой мощности во время измерения контролировалось. Измерения производились в волновой зоне антенны. Точность измерения коэффициентов отражения составляла $3 \div 5\%$ и проверялась по отражению от поверхности воды [1].

Для измерений, большинство которых проводилось при вертикальной поляризации волны, применялся снег различной структуры и плотности при разных температурах. Основные измерения выполнены при температуре от $-3,5^\circ$ до -8° С с фирновым снегом. Ровный слой снега находился на алюминиевом листе с отражающей поверхностью 140×170 см. В зависимости от длины волны и толщины слоя снега часть электромагнитной энергии могла проходить до алюминиевого листа и отражаться от него. При этом в слое снега происходили многочленные отражения.

В подобных случаях измеренные над поверхностью снега коэффициенты отражения представляли собой результирующие коэффициенты отражения, обусловленные отражением как от поверхности раздела воздух—снег, так и от поверхности снег—алюминий. О величине отражения от поверхности алюминия можно было судить по наличию максимумов и минимумов в интенсивности отраженной волны, вызванных интерференцией волн, отраженных от поверхности снега и поверхности алюминия. Наличие интерференции проверялось путем перемещения приемника в вертикальной плоскости, когда приемная антenna была установлена под углом, равным углу падения. На рис. 2 кружками обозначены измеренные значения результирующих коэффициентов отражения $|R|$ для $\lambda = 31,9$ мм, полученные для влажного снега

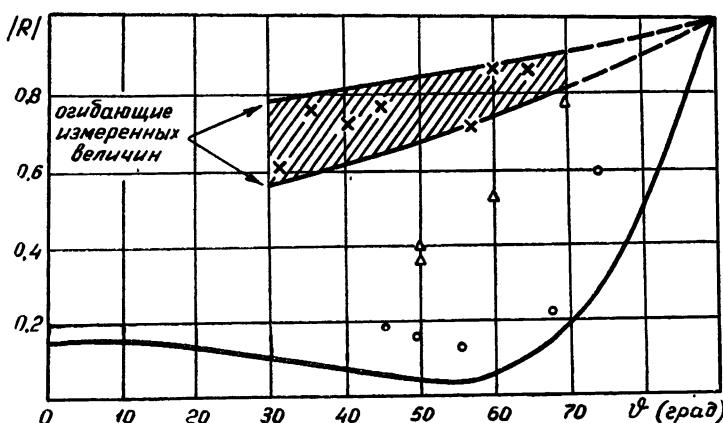


Рис. 2.

(т. е. при плюсовой температуре окружающего воздуха) при толщине слоя 14 см и плотности $\rho = 0,37$ г·см $^{-3}$. В заштрихованной области расположены значения результирующих коэффициентов отражения от сухого фирнового снега ($t = -5,5^\circ$ С) при толщине слоя снега 14 см и плотности $\rho = 0,5$ г·см $^{-3}$. На этом же рисунке треугольниками обозначены результирующие коэффициенты отражения $|R|$ от влажного снега (толщина слоя 14 см, $\rho = 0,37$ г·см $^{-3}$) для горизонтально поляризованной волны. Сплошная кривая на рис. 2 представляет расчетные значения коэффициентов отражения для бесконечно толстого

слоя снега (по формуле Френеля [2] для диэлектрической проницаемости, равной $\epsilon = 2 + i 0,001$ для снега с $\rho = 0,5 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$). Значение диэлектрической проницаемости взято из работы [3].

На рис. 3 представлены

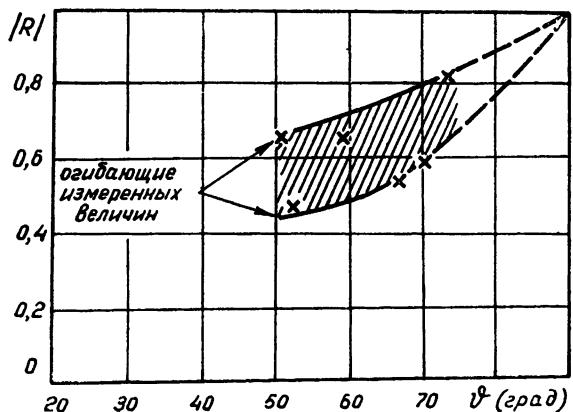


Рис. 3.

на кривая. На этой длине волн при указанной толщине слоя снега отражения от поверхности алюминия значительно меньше, чем в указанных выше измерениях. На данном рисунке точками отмечены коэффициенты отражения для волны $\lambda = 6,7 \text{ м} \cdot \text{м}$ (слой толщиной 30 см, $t = -3,5^\circ \text{ С}$ и $\rho = 0,5 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$).

Переходим к результатам измерения отражения, полученным для наиболее короткой волны $\lambda = 4,4 \text{ м} \cdot \text{м}$. На рис. 5 представлены измеренные коэффициенты отражения от слоя сухого ($t = -8^\circ \text{ С}$) фирнового снега толщиной 14 см ($\rho = 0,5 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$). Верхняя кривая представляет значения коэффициентов отражения для гладкой поверхности снега (с неровностями меньше λ). Нижняя кривая получена

для разрыхленной поверхности снега, в условиях, когда на поверхности были нанесены продольные и поперечные бороздки глубиною $\sim \lambda$. Из рисунка видно, что при гладкой поверхности в интервале углов падения от 30° до 60° коэффициенты отражения не превышают 0,1; для разрыхленной поверхности значения этих коэффициентов в интервале углов от 30° до 50° меньше в 2–3 раза, а для углов от 55° до 65° они равны нулю в пределах точности измерения.

На этой длине волн отражение от поверхности алюминия отсутствовало и, следовательно, полученные коэффициенты отражения определяются отражением от поверхности воздух—снег.

С целью сравнения значений коэффициентов отражения, измеренных для разных длин волн, на рис. 6 изображены кривые, характер-

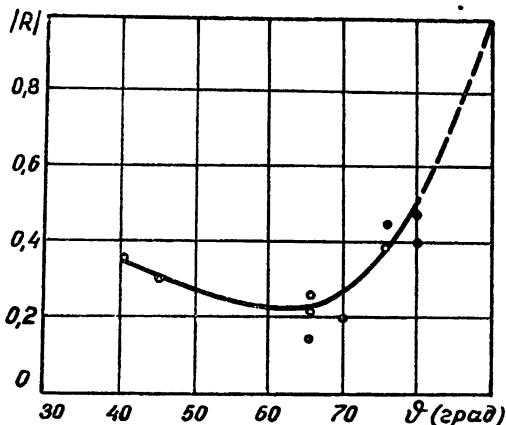


Рис. 4.

ризующие изменение коэффициентов отражения $|R|$ в зависимости от угла падения для $\lambda = 31,9; 13,6; 8,5$ и $4,4$ м.м.

На следующем рисунке (рис. 7) представлена зависимость коэффициентов отражения от длины волны. Значения коэффициентов отражения соответствуют углу падения, равному брюстровскому углу полной поляризации ($\vartheta = 55^\circ$) для слоя снега в 14 см. Этот рисунок показывает, что коэффициенты отражения уменьшаются с укорочением длины волны. Особенно резкое уменьшение имеет место при переходе от $\lambda = 13,6$ м.м. к $\lambda = 4,4$ м.м.

Такое уменьшение коэффициентов отражения нельзя объяснить только изменением диэлектрической проницаемости снега. Дело в том, что в рассматриваемом диапазоне длин волн диэлектрическая проницаемость снега не может заметно измениться, поскольку аномальная дисперсия льда, являющегося основной составной частью снега, как известно из работы [3], приходится на частоты, лежащие вблизи 6 кгц.

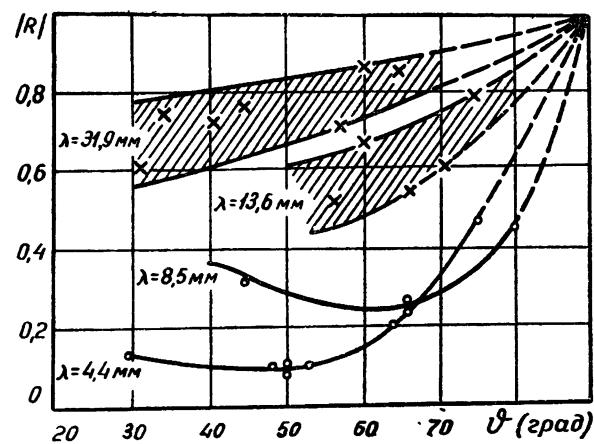


Рис. 6.

Рис. 5.

Малые значения коэффициентов отражения от слоя снега для волн короче 13,6 м.м., по-видимому, можно объяснить большим рассеянием электромагнитной энергии радиоволн указанного диапазона внутри слоя и на его поверхности.

Рассеивающие свойства частиц, как известно [4], определяются величиной $\alpha = 2\pi a/\lambda'$, где a — линейный размер частиц снега, а λ' — длина волны в снеге.

На рис. 7 наряду со значениями $|R|$ для $\vartheta = 55^\circ$ приведены значения α в функции длины волны. Значения α получены для фирнового снега, состоящего из частиц почти сферической формы, наиболее крупные из которых имели радиус $a = 1 \div 1,5$ м.м. и составляли около 30% массы слоя снега. При этом диэлектрическая проницаемость снега

принималась равной той, которая известна для длины волны, равной 32 м.м. Из рисунка ясно, что модуль коэффициента отражения от слоя снега уменьшается для тех длин волн, для которых параметр α за-

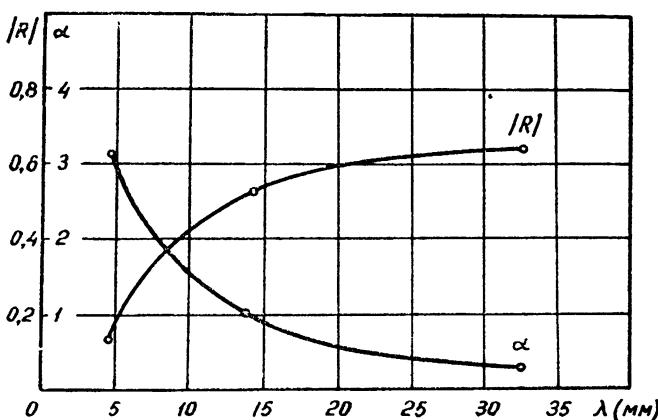


Рис. 7.

метно растет. Следовательно, коэффициенты отражения уменьшаются с ростом α . Рис. 8 иллюстрирует эту зависимость.

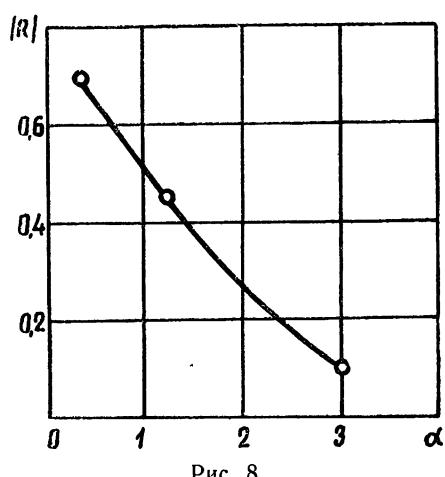


Рис. 8.

В заключение следует отметить, что коэффициенты отражения, полученные на $\lambda = 4,4$ м.м., мало отличаются от коэффициентов, которые рассчитаны для слоя бесконечной толщины на $\lambda = 31,9$ м.м. Это свидетельствует в пользу того, что измеренные коэффициенты отражения на $\lambda = 4,4$ м.м. действительно определяются условиями на границе раздела снег—воздух.

Данные, приведенные выше, явились результатом одной из работ, выполненных в Институте радиофизики и электроники АН УССР в 1952 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Зинченко, Труды радиофиз. фак-та ХГУ, 3, 81 (1959).
2. J. A. Saxton, Wireless Engineer, 27, 316 (1950).
3. W. A. Cumming, J. Appl. Phys., 23, 768 (1952).
4. М. Борн, Оптика, ОНТИ, М., 1937.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ, ПРОШЕДШЕЙ ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНЫЙ СЛОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Н. Г. Денисов

На основе решения, полученного методом малых возмущений, рассчитаны корреляционные функции флюктуаций амплитуды и фазы компонент поля электромагнитной волны, распространяющейся в хаотически неоднородном слое магнитоактивной плазмы. Расчет флюктуаций проведен как для отдельных нормальных волн, так и для волны, имеющей в начале слоя произвольную линейную поляризацию.

В подавляющем большинстве работ, посвященных расчету флюктуаций параметров волн, прошедшей через случайно неоднородный слой, обычно используется изотропная модель слоя. Однако при исследовании флюктуаций электромагнитных волн, проходящих через ионосферу или отражающихся от ионосферы, вообще говоря, необходимо учитывать влияние магнитного поля Земли. В этом случае приходится рассматривать рассеяние волн в анизотропной среде.

В работе [1] было получено решение, описывающее поле, рассеянное в слое магнитоактивной плазмы, и найден угловой энергетический спектр. На основе тех же решений можно рассчитать и другие статистические параметры случайного поля. В настоящей статье решения, полученные в [1], используются для расчета корреляционных функций флюктуаций амплитуды и фазы компонент поля волны, прошедшей через слой неоднородной магнитоактивной плазмы.

1. ПОЛЕ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим задачу о рассеянии электромагнитной волны, падающей нормально на слой магнитоактивной плазмы. Будем считать, что средние свойства плазмы плавно меняются с высотой z . Если случайные отклонения электронной концентрации от среднего значения малы, то рассеянное поле можно найти методом возмущений [1].

Запишем сначала невозмущенную волну, падающую на слой со стороны отрицательных z :

$$E_0(z) = C_1(z) e^{-i \int_0^z k_1 dz} + C_2 e^{-i \int_0^z k_2 dz}. \quad (1)$$

Здесь $k_{1,2}$ — волновые числа обычной и необычной волн, $C_1(z)$ и $C_2(z)$ — медленно меняющиеся амплитуды нормальных волн. Если на слой падает волна с амплитудой E_0 , то векторы $C_1(z)$ и $C_2(z)$ легко найти на основе хорошо известных геометрико-оптических решений [2]:

$$C_{1,2}(z) = \sqrt{\frac{1 - K_{1,2}^2(0)}{1 - K_{1,2}^2(z)}} \frac{C_{1,2}^{(0)}}{\sqrt{n_{1,2}(z)}}, \quad (2)$$

где

$$C_{x1}^{(0)} = \frac{K_2(0)E_{0x} - E_{0y}}{K_2(0) - K_1(0)}; \quad C_{x2}^{(0)} = \frac{E_{0y} - K_1(0)E_{0x}}{K_2(0) - K_1(0)}; \quad C_{y1,2}^{(0)} = K_{1,2}(z)C_{x1,2}^{(0)}. \quad (3)$$

В формулы (2), (3) входят коэффициенты поляризации нормальных волн $K_{1,2}$, которые определяются соотношениями

$$K_{1,2}(z) = ip_{1,2}(z) = i \left(\frac{s_c}{1-v} \pm \sqrt{\frac{s_c^2}{(1-v)^2} + 1} \right); \quad (4)$$

$$v = 4\pi e^2 N/m\omega^2; \quad s_c = \sqrt{u \sin^2 \alpha / 2 \cos \alpha}; \quad u = \omega_H^2/\omega^2.$$

Здесь ω_H — гирочастота электронов, α — угол между осью z и внешним магнитным полем $H^{(0)}$.

Если рассеивающий слой располагается между плоскостями $z = 0$ и $z = L_0$, то в любой плоскости $z = L \geq L_0$ угловой спектр рассеянного поля

$$a(x_1, x_2, L) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e(x, y, L) e^{-i(x_1 x + x_2 y)} dx dy$$

можно записать следующим образом [1]:

$$a_{x'} = \int_0^L \{ K'_2(0) b_{11} e^{i\varphi_{11}} + K'_2(0) b_{12} e^{i\varphi_{12}} - K'_1(0) b_{21} e^{i\varphi_{21}} - K'_1(0) b_{22} e^{i\varphi_{22}} \} f(x_1, x_2, z) dz; \quad (5)$$

$$a_{y'} = \int_0^L \{ b_{11} e^{i\varphi_{11}} + b_{12} e^{i\varphi_{12}} - b_{21} e^{i\varphi_{21}} - b_{22} e^{i\varphi_{22}} \} f(x_1, x_2, z) dz.$$

Здесь $f(x_1, x_2, z)$ — спектр флюктуаций параметра $v = 4\pi e^2 N/m\omega^2$;

$$b_{\alpha\beta} = \frac{ik_0^2 (A_\alpha P_\beta) e^{-iS_\alpha}}{2x_3(1-u) [K'_2(0) - K'_1(0)]}; \quad \varphi_{\alpha\beta} = \int_0^z (q_\alpha - k_\beta) dz; \quad (6)$$

$$S_\alpha = \int_0^L q_\alpha dz \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Векторы $A_{1,2}(z)$ представляют собой амплитуды нормальных волн, распространяющихся в направлении, противоположном вектору x , в среде с обратным направлением магнитного поля $H^{(0)}$ ($A_{x'}(L) = 1$); $q_{1,2}$ — вертикальные компоненты волновых векторов этих волн. Векторы $P_{1,2}$ пропорциональны векторам поляризации и равны [1]

$$P_{1,2} = \{ C_{1,2} - u h_0 (h_0 C_{1,2}) - i \sqrt{u} [h_0 C_{1,2}] \}; \quad h_0 = H^{(0)}/H^{(0)}. \quad (7)$$

В формуле (5) компоненты напряженности электрического поля рассеянной волны записаны в системе координат, ось z' которой ориентирована вдоль вектора x ; внешнее магнитное поле $H^{(0)}$ располагается в плоскостях xy и yz' ; $K'_{1,2}$ — коэффициенты поляризации нормальных волн, распространяющихся вдоль z' .

Ниже используются значения коэффициентов $|b_{11}|$ и $|b_{22}|$ при $x_1 = x_2 = 0$. При этом $K_{1,2} = K'_{1,2}$, а для функций $(A_\alpha P_\alpha)$ из формул, приведенных в [1], можно получить следующие выражения:

$$(A_{1,2}P_{1,2}) = A_{x1,2} C_{x1,2}(1-u) p_{1,2}^2(z) \left\{ 1 + \frac{uv^2 \sin^2 \alpha + (1-u)(1-v)^2}{(1-v)^2 [p_{1,2}(z) + \sqrt{u \cos \alpha}]^2} \right\};$$

$$(A_{1,2}P_{2,1}) = A_{x1,2} C_{x2,1} \frac{vu \sin^2 \alpha (1-u)}{(1-v) [1-u-v(1-u \cos^2 \alpha)]}; \quad (8)$$

$$A_{x1,2} = \sqrt{\frac{1+p_{1,2}^2(0)}{1+p_{1,2}^2(z)}} n_{1,2}^{-1/2}(z),$$

где для нормальных волн

$$A_{x1,2} C_{x1,2} = \frac{1+p_{1,2}^2(0)}{1+p_{1,2}^2(z)} \frac{E_{0x1,2}}{n_{1,2}(z)}; \quad (9)$$

$$A_{x1,2} C_{x2,1} = \sqrt{\frac{[1+p_1^2(0)][1+p_2^2(0)]}{[1+p_1^2(z)][1+p_2^2(z)]}} \frac{E_{0x2,1}}{\sqrt{n_1(z)n_2(z)}}.$$

На основе решения (5) можно рассчитать статистические параметры волны, прошедшей через неоднородный слой, например, угловой энергетический спектр [1], корреляционные функции флюктуаций амплитуды и фазы.

2. ФЛЮКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ

Поле волны по выходе из неоднородного слоя состоит из невозмущенного поля $E_0(L)$ и рассеянного поля e , спектр которого определяется формулами (5). Так как вектор e является случайной величиной, то за неоднородным слоем поле будет хаотически промодулировано по амплитуде и фазе. Здесь мы рассмотрим флюктуации амплитуды и фазы горизонтальных компонент напряженности электрического поля:

$$E_x = E_{0x}(L) + e_x; \quad E_y = E_{0y}(L) + e_y.$$

Флюктуации амплитуд и фаз компонент E_x и E_y можно определить следующим образом. Запишем компоненты поля в виде $E_{0x}(L) = E_{0x} e^{-is_{0x}}$; $E_{0y}(L) = E_{0y} e^{-is_{0y}}$, где E_{0x} и E_{0y} — действительные компоненты вектора E_0 в начале неоднородного слоя. Аналогично $E_x = |E_x| e^{-is_x}$; $E_y = |E_y| e^{-is_y}$. Тогда флюктуационные изменения амплитуд $\Delta |E_{x,y}|$ и фаз $\Delta S_{x,y}$ получаются из формул [3,4]

$$\frac{\Delta |E_{x,y}|}{E_{0x,y}} = \operatorname{Re} \left(\frac{e_{x,y}}{E_{0x,y}} e^{is_{0x,y}} \right); \quad (10)$$

$$\Delta S_{x,y} = -\operatorname{Im} \left(\frac{e_{x,y}}{E_{0x,y}} e^{is_{0x,y}} \right).$$

Ниже мы будем рассматривать рассеяние волн на крупномасштабных неоднородностях ($l \gg \lambda$). В таком случае можно ограничиться рассмотрением малых углов рассеяния. Тогда угол между осями z и z' будет мал, и мы можем приближенно записать: $K_{1,2} \approx K'_{1,2}$; $a_x \approx a_{x'}$; $a_y \approx a_{y'}$, где $a_{x'}$ и $a_{y'}$ определяются решением (5).

Рассмотрим вначале флюктуации амплитуды и фазы отдельных нормальных волн. Пусть в слое распространяется обыкновенная невозмущенная волна. В таком случае $C_z = 0$, все $b_{\alpha 2} = 0$ и формула (5) дает:

$$a_x \simeq a_{x'} = \int_0^L \{ K_2(0) b_{11} e^{i\varphi_{11}} - K_1(0) b_{21} e^{i\varphi_{21}} \} f(x_1, x_2, z) dz; \quad (11)$$

$$a_y \simeq a_{y'} = \int_0^L \{ b_{11} e^{i\varphi_{11}} - b_{21} e^{i\varphi_{21}} \} f(x_1, x_2, z) dz.$$

Учитывая, что $S_{0x} = \int_0^L k_1 dz$ и $E_{0y}(L) = i p_1 E_{0x}(L)$, найдем $S_{0y} = \int_0^L k_1 dz + \pi/2$.

Далее, как это видно из (6), аргумент комплексной функции $b_{\alpha\beta}$ определяется значениями $\arg(A_\alpha P_\beta)$ и S_α . Это дает возможность записать действительные и мнимые части искомых величин в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{a_x}{E_{0x1}} e^{iS_{0x}} \right) &= - \frac{1}{E_{0x1}} \int_0^L \{ p_2(0) |b_{11}(z)| \sin \Phi_{11}(z) - \\ &\quad - p_1(0) |b_{21}(z)| \sin \Phi_{21}(z) \} f(x_1, x_2, z) dz; \\ \operatorname{Im} \left(\frac{a_x}{E_{0x1}} e^{iS_{0x}} \right) &= \frac{1}{E_{0x1}} \int_0^L \{ p_2(0) |b_{11}(z)| \cos \Phi_{11}(z) - \\ &\quad - p_1(0) |b_{21}(z)| \cos \Phi_{21}(z) \} f(x_1, x_2, z) dz; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{a_y}{E_{0y1}} e^{iS_{0y}} \right) &= \frac{1}{E_{0y1}} \int_0^L \{ |b_{11}(z)| \sin \Phi_{11}(z) - \\ &\quad - |b_{21}(z)| \sin \Phi_{21}(z) \} f(x_1, x_2, z) dz; \\ \operatorname{Im} \left(\frac{a_y}{E_{0y1}} e^{iS_{0y}} \right) &= - \frac{1}{E_{0y1}} \int_0^L \{ |b_{11}(z)| \cos \Phi_{11}(z) - \\ &\quad - |b_{21}(z)| \cos \Phi_{21}(z) \} f(x_1, x_2, z) dz. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(z) &= \int_z^L (k_1 - q_1) dz + \arg(A_1 P_1); \\ \Phi_{21}(z) &= \int_z^L (k_2 - q_2) dz + \int_z^L (k_1 - k_2) dz + \arg(A_2 P_1). \end{aligned} \quad (13)$$

Из выражений (8) и (9) видно, что если в слое невозмущенная волна представлена одной обыкновенной волной, то $\arg(A_1 P_1) = \arg(A_2 P_1) = 0$. Кроме того, при малых углах рассеяния можно записать:

$$k_{1,2} - q_{1,2} \simeq \kappa^2 / 2k_{1,2} \quad (\kappa = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}).$$

В таком случае имеем:

$$\Phi_{11} = \frac{\kappa^2}{2k_0} \int_0^L \frac{dz}{n_1}; \quad \Phi_{21} = \frac{\kappa^2}{2k_0} \int_0^L \frac{dz}{n_2} + \int_0^L (k_1 - k_2) dz. \quad (14)$$

Здесь $n_{1,2}$ — показатели преломления плазмы для нормальных волн и

$k_0 = \omega/c$. Применяя обычную методику расчета [3], из (12) легко найти спектры корреляционных функций флюктуаций амплитуды

$$R_{Ax,y}(\xi, \eta) = \frac{\Delta |E_{x,y}(x, y)| \Delta |E_{x,y}(x + \xi, y + \eta)|}{E_{0x,y}^2}$$

и флюктуаций набега фазы

$$R_{Sx,y}(\xi, \eta) = \overline{\Delta S_{x,y}(x, y) \Delta S_{x,y}(x + \xi, y + \eta)}.$$

Например, спектр функции $\dot{R}_{Ax}(\xi, \eta)$ будет равен

$$\begin{aligned} F_{Ax1}(x_1, x_2) &= \frac{1}{E_{0x1}^2} \int_0^L \int \{ p_2(0) |b_{11}(z_1)| \sin \Phi_{11}(z_1) - \\ &- p_1(0) |b_{21}(z_1)| \sin \Phi_{21}(z_1) \} \{ p_2(0) |b_{11}(z_2)| \sin \Phi_{11}(z_2) - \\ &- p_1(0) |b_{21}(z_2)| \sin \Phi_{21}(z_2) \} \overline{(\Delta v)^2} F_0(x_1, x_2, z_1 - z_2) dz_1 dz_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$F_0(x_1, x_2, z_1 - z_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{\overline{\Delta v(r_1) \Delta v(r_2)}}{(\Delta v)^2} \times e^{-i(x_1 x + x_2 y)} dx dy$$

— спектр коэффициента корреляции флюктуаций параметра v .

После перемножения фигурных скобок в формуле (15) мы получим слагаемые, которые содержат множителями медленно изменяющиеся коэффициенты и тригонометрические функции. Для слоя, средние свойства которого на расстоянии порядка масштаба случайных неоднородностей изменяются незначительно, эти коэффициенты можно считать функциями центра точек z_1 и z_2 , например,

$$|b_{11}(z_1) b_{11}(z_2)| \overline{(\Delta v)^2} = C_{11} \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right). \quad (16)$$

Далее, так как $x \sim 1/l$ (l — масштаб случайных неоднородностей), то легко заключить, что при условии $l \gg \lambda$ функция $\Phi_{11}(z) = \frac{x^2}{2k_0} \int_z^L dz/n_1$

на расстояниях порядка l изменяется на очень малую величину. Следовательно, можно также считать, что $\sin \Phi_{11}(z_1) \sin \Phi_{11}(z_2) \approx \sin^2 \Phi_{11} \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right)$.

Легко видеть, что при $l(k_1 - k_2) \gg 1$ остальные слагаемые содержат быстро осциллирующие функции $\sin \Phi_{21}(z_{1,2})$ и в этих условиях все интегралы, содержащие такие функции, будут много меньше первого интеграла. Можно показать, что вклад этих интегралов будет малым и при $l(k_1 - k_2) \ll 1$, так как при этом $|b_{21}| \ll |b_{11}|$ (см. [1]). В результате формулу (15) можно приближенно записать в виде:

$$\begin{aligned} F_{Ax1}(x_1, x_2) &= \frac{p_2^2(0)}{E_{0x1}^2} \int_0^L \int C_{11} \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right) \sin^2 \Phi_{11} \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right) \times \\ &\times F_0(x_1, x_2, z_1 - z_2) dz_1 dz_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Производя далее обычное преобразование двойного интеграла (17) [3], найдем:

$$F_{Ax1}(x_1, x_2) = 2 \frac{p_2^2(0)}{E_{0,x1}^2} \int_0^L C_{11}(z) \sin^2 \Phi_{11}(z) dz \int_0^\infty F_0(x_1, x_2, \zeta) d\zeta, \quad (18)$$

где $p_2^2(0)$ — квадрат модуля коэффициента поляризации (см. (4)), а функция $C_{11}(z)$, согласно (16) и (6), равна

$$C_{11}(z) = \frac{k_0^2 |A_1 P_1|^2}{(\Delta v)^2} \frac{4(1-u)^2 [p_1(0) - p_2(0)]^2}{.} \quad (19)$$

В этой формуле мы учли тот факт, что при $l \gg \lambda$ рассеяние происходит под малыми углами (функция $\int_0^\infty F_0(x_1, x_2, \zeta) d\zeta$ является очень острой функцией углов, отличной от нуля лишь в малой окрестности начала координат $x_1 = x_2 = 0$). Плавную функцию углов $C_{11}(x_1, x_2)$ можно считать равной ее значению при $x_1 = x_2 = 0$. При этом, естественно, $K'_{1,2} = K_{1,2}$.

Аналогичные расчеты позволяют получить для спектров остальных корреляционных функций следующие выражения:

$$F_{Ay1}(x_1, x_2) = \frac{2}{E_{0,y1}^2} \int_0^L C_{11}(z) \sin^2 \Phi_{11}(z) dz \int_0^\infty F_0(x_1, x_2, \zeta) d\zeta; \quad (20)$$

$$F_{Sx1}(x_1, x_2) = \frac{2p_2^2(0)}{E_{0,x1}^2} \int_0^L C_{11}(z) \cos^2 \Phi_{11}(z) dz \int_0^\infty F_0(x_1, x_2, \zeta) d\zeta; \quad (21)$$

$$F_{Sy1}(x_1, x_2) = \frac{2}{E_{0,y1}} \int_0^L C_{11}(z) \cos^2 \Phi_{11}(z) dz \int_0^\infty F_0(x_1, x_2, \zeta) d\zeta. \quad (22)$$

Формулы, описывающие флюктуации параметров необыкновенной волны, получаются из выше приведенных заменой индексов 1 и 2. Здесь мы выпишем только основные величины, входящие в выражения, аналогичные (18), (20), (21), (22):

$$C_{22}(z) = \frac{k_0^2 |(A_2 P_2)|^2}{(\Delta v)^2} \frac{4(1-u)^2 [p_1(0) - p_2(0)]^2}{.}; \quad \Phi_{22}(z) = \frac{x^2}{2k_0} \int_z^L \frac{dz}{n_2}. \quad (23)$$

Корреляционные функции амплитуд и фаз компонент легко найти по их спектрам. При этом получаются формулы, по своей структуре сходные с теми, которые описывают флюктуации амплитуды и фазы в изотропной среде. Таким образом, все выводы, полученные для изотропной среды и касающиеся корреляционных соотношений, можно перенести на рассматриваемый случай. В связи с этим мы обсудим лишь основные особенности полученных результатов.

Во-первых, заметим, что, так как для обыкновенной волны $E_{0,y1}/E_{0,x1} = p_1(0) = -1/p_2(0)$, то корреляционные функции различных компонент, как это следует из (18) и (20), (21) и (22), получаются одинаковыми и равными

$$F_{Ay1}(x_1, x_2) = F_{Ax1}(x_1, x_2) = \frac{k_0^2}{2} \int_0^L \frac{(\Delta v)^2 G_1^2(z) \sin^2 \Phi_{11}(z) dz}{.} \int_0^\infty F_0(x_1, x_2, \zeta) d\zeta; \quad (24)$$

$$F_{Sy1}(x_1, x_2) = F_{Sx1}(x_1, x_2) = \frac{k_0^2}{2} \int_0^L (\Delta v)^2 G_1^2(z) \cos^2 \Phi_{11}(z) dz \int_0^\infty F_0(x_1, x_2, \zeta) d\zeta, \quad (25)$$

где

$$G_1^2(z) = \frac{|A_1 P_1|^2}{E_{0y1}^2 (1-u)^2 [p_1(0) - p_2(0)]^2}.$$

Используя далее формулы (8) и (9), функцию $G_1^2(z)$ можно представить в виде:

$$G_1^2(z) = \frac{1}{n_1^2(z) [1 + p_2^2(z)]^2} \left\{ 1 + \frac{uv^2 \sin^2 \alpha + (1-u)(1-v)^2}{(1-v)^2 [p_1(z) + \sqrt{u} \cos \alpha]^2} \right\}^2. \quad (26)$$

Спектры флюктуаций амплитуды и фазы компонент поля необыкновенной волны, так же, как и выражение для $G_2^2(z)$, получаются из выше приведенных формул заменой индекса 1 на 2.

Как и в случае изотропной среды [5], спектры корреляционных функций флюктуаций амплитуды и фазы связаны соотношением:

$$F_{Ax1} + F_{Sx1} = F_{Ay1} + F_{Sy1} = \frac{k_0^2}{2} \int_0^L (\Delta v)^2 G_1^2(z) dz \int_0^\infty F_0(x_1, x_2, \zeta) d\zeta, \quad (27)$$

и, следовательно, так же, как и соответствующие им корреляционные функции, не зависят от расстояния точки наблюдения $z = L$ до края рассеивающего слоя $z = L_0$ (поскольку при $z \geq L_0$ $\Delta v = 0$). Кроме того, спектры $F_A + F_S$ определяются спектром случайных неоднородностей среды.

Формулы (24) и (25) показывают, что поперечная корреляция флюктуаций амплитуд и фаз компонент существенно зависит от значений функций $\Phi_{11,22}(z) = \frac{x^2}{2k_0} \int_z^L dz / n_{1,2}$. Наиболее простые соотношения получаются в том случае, когда для любой точки слоя эти величины малы. Так как $x \sim 1/l$, то это означает, что $\lambda l^{-2} \int_0^L dz / n_{1,2} \ll 1$. При этом $\sin \Phi_{11,22}(z) \approx \Phi_{11,22}(z)$, а $\cos \Phi_{11,22}(z) \approx 1$. В этом приближении спектры искомых величин будут равны

$$F_{Ax1}(x_1, x_2) = F_{Ay1}(x_1, x_2) = \frac{k_0^2}{2} \int_0^L (\Delta v)^2 G_1^2(z) \times \quad (28)$$

$$\times \left\{ \frac{x^2}{2k_0} [\Gamma_1(L) - \Gamma_1(z)] \right\}^2 dz \int_0^\infty F_0(x_1, x_2, \zeta) d\zeta;$$

$$F_{Sx1}(x_1, x_2) = F_{Sy1}(x_1, x_2) = \frac{k_0^2}{2} \int_0^L (\Delta v)^2 G_1^2(z) dz \int_0^L F_0(x_1, x_2, \zeta) d\zeta. \quad (29)$$

Отсюда найдем корреляционные функции флюктуаций амплитуды и фазы:

$$R_{Ax}(\xi, \tau_1) = R_{Ay}(\xi, \tau_1) = \frac{1}{8} \int_0^L (\Delta v)^2 G_1^2(z) [\Gamma_1(L) - \Gamma_1(z)]^2 dz \int_0^\infty \Delta_\perp^2 \rho(\xi, \eta, \zeta) d\zeta; \quad (30)$$

$$R_{Sx}(\xi, \eta) = R_{Sy}(\xi, \eta) = \frac{k_0^2}{2} \int_0^L (\Delta v)^2 G_1^2(z) dz \int_0^\infty \rho(\xi, \eta, \zeta) d\zeta, \quad (31)$$

где $\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$, $\Gamma_1(z) = \int_0^z dz/n_1$ — групповой путь обыкновенного луча и $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ — коэффициент корреляции флюктуаций параметра $v = 4\pi e^2 N/m\omega^2$.

Таким образом, в области, где применима геометрическая оптика, корреляция амплитудных и фазовых флюктуаций для волн различного типа одинакова и определяется корреляцией флюктуаций электронной концентрации.

Однако средние квадраты флюктуаций амплитуды и фазы нормальных волн могут сильно отличаться друг от друга. Если концентрация электронов в слое изменяется так, что $0 < v < 1$, то для обыкновенной волны не существует области отражения. Если то же самое требование распространить и на необыкновенную волну, то должно быть $0 < v < 1 - \sqrt{u}$. При этом условии справедливы все выше приведенные формулы, описывающие рассеяние в слое. Если, кроме того, $u < 1$, то, как легко показать, используя формулу (26) и аналогичную ей для необыкновенной волны, $G_1^2 < G_2^2$. Для иллюстрации этого факта на рис. 1 построены функции $G_{1,2}^2(\alpha)$ при $v = 0,2$, $u = 0,25$ (сплошные кривые) и $v = 0,2$, $u = 1,50$ (пунктирные кривые).

Учитывая, кроме того, что $\Gamma_1(z) < \Gamma_2(z)$, легко видеть, что в рассматриваемом случае флюктуации амплитуды и фазы компонент поля в обыкновенной волне меньше, чем в необыкновенной. Таким образом, „включение“ внешнего магнитного поля (при $u < 1$) увеличивает флюктуации параметров необыкновенной волны и уменьшает их в случае распространения обыкновенной волны. Однако положение может измениться при $u > 1$. Как видно из рис. 1, наложение магнитного поля в этом случае может снизить уровень флюктуаций параметров обеих волн по сравнению с тем, что наблюдается в отсутствие внешнего магнитного поля, и, кроме того,

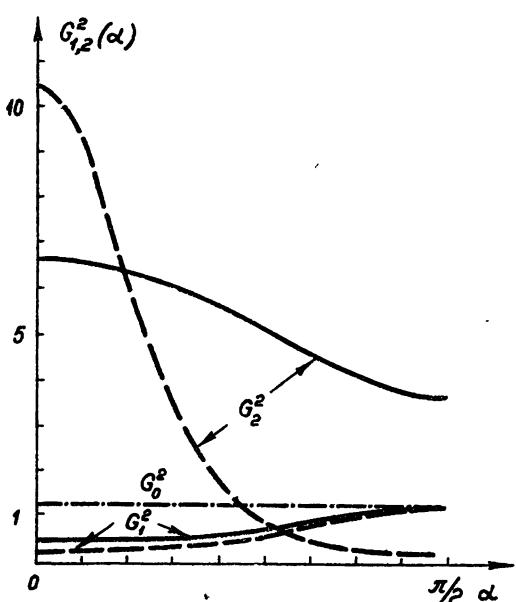


Рис. 1

изменить неравенство $G_1^2 < G_2^2$ на обратное.

Характер изменения функций G_1^2 и G_2^2 в зависимости от концентрации электронов (параметра v) можно проследить с помощью рис. 2, 3, где указанные функции построены для $\alpha = 0$ (продольное распростра-

нение) и $\alpha = \pi/4$. На этих рисунках сплошные кривые соответствуют значению $u = 0,25$, пунктирные — $u = 1,50$. На рис. 1, 2 $G_0^2 = 1/1 - v$ представляет собой функции $G_{1,2}^2(v)$ при $u = 0$, т. е. для изотропного слоя.

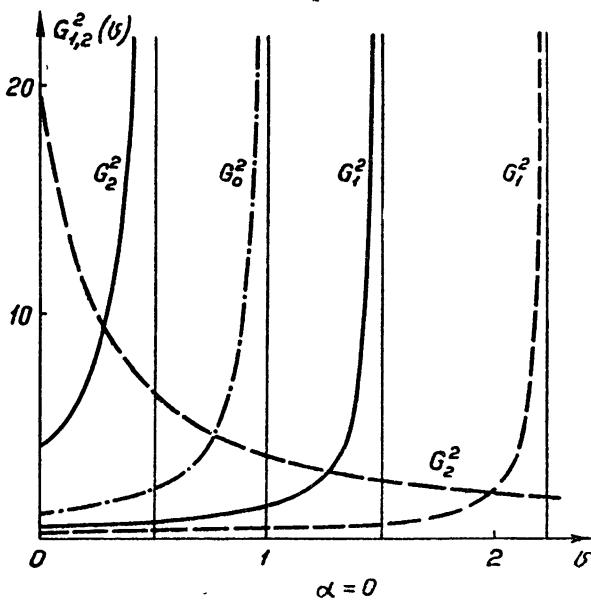


Рис. 2.

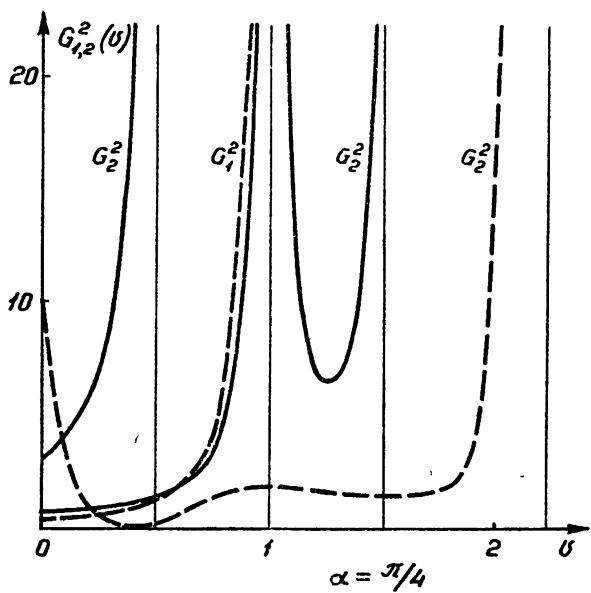


Рис. 3.

Следует отметить, что особые точки функции $G_{1,2}^2(v)$ (нули или полюса показателей преломления $n_{1,2}^2(v)$) не должны рассматриваться, так как в окрестности этих точек полученные решения становятся

непригодными. Это означает, что таким путем мы можем рассчитывать рассеяние в неоднородном слое, в котором не имеется уровней отражения ($n_{1,2} = 0$) или областей плазменного резонанса ($n_{1,2} = \infty$).

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи. Если невозмущенная волна распространяется вдоль силовых линий внешнего магнитного поля, то $\alpha=0$ и $p_{1,2} = 1$. Из формулы (26) найдем:

$$G_{1,2}^2 = \frac{1}{n_{1,2}^2(1 \pm \sqrt{u})^2}; \quad n_{1,2}^2 = 1 - \frac{v}{1 \pm \sqrt{u}}. \quad (32)$$

Отсюда видно, что для всех $v < 1 - \sqrt{u}$ ($u < 1$) и $v < (1+u)/\sqrt{u}$ ($u > 1$) $G_1^2 < G_2^2$ (см. рис. 2).

Если $\alpha \rightarrow 0$ (поперечное распространение), то $p_2 \rightarrow 0$, $p_1 \rightarrow \infty$. Из формулы (26) легко найти предельные значения $G_{1,2}^2$:

$$G_1^2 = \frac{1}{n_1^2}; \quad n_1^2 = 1 - v; \quad (33)$$

$$G_2^2 = \frac{1}{n_2^2} \left\{ \frac{u(1-u) + (1-u-v)^2}{(1-u-v)^2} \right\}^2; \quad n_2^2 = 1 - \frac{v(1-v)}{1-u-v}. \quad (34)$$

Когда $u < 1$, выражение в фигурных скобках больше единицы, а $n_2 < n_1$ в интервале $0 < v < 1 - u$. При этом $G_1^2 < G_2^2$.

В формулу (33) внешнее магнитное поле $H^{(0)}$ не входит, и, естественно, все статистические параметры обыкновенной волны совпадают с теми, которые получаются для волны, распространяющейся в изотропном слое.

3. ФЛЮКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ КОМПОНЕНТ СУММАРНОГО ПОЛЯ

Если на неоднородный слой падает волна, имеющая в начале слоя компоненты поля E_{0x} и E_{0y} , то в гиротропном слое невозмущенная волна будет представлена в виде суперпозиции обыкновенной и необыкновенной волн, амплитуды которых определяются формулами (2), (3). Компоненты невозмущенного поля в плоскости $z = L \geq L_0$ будут равны

$$E_{0x}(L) = C_{x1}(L)e^{-iS_1} + C_{x2}(L)e^{-iS_2} = |E_{0x}(L)|e^{-iS_{0x}}; \quad (35)$$

$$E_{0y}(L) = C_{y1}(L)e^{-iS_1} + C_{y2}(L)e^{-iS_2} = |E_{0y}(L)|e^{-iS_{0y}}, \quad (36)$$

где $S_{1,2} = \int_0^L k_{1,2} dz$, $k_{1,2} = k_0 n_{1,2}$.

Рассеянное поле определяется формулой (5), а флюктуации амплитуды и фазы компонент поля рассчитываются таким же путем, как и для отдельных нормальных волн. В качестве примера здесь мы рассмотрим флюктуации амплитуды и фазы одной компоненты E_x .

При малых углах рассеяния угловой спектр рассеянного поля определяется формулой (5), откуда можно получить ($a_x \approx a_x'$):

$$\frac{a_x e^{iS_{0x}}}{|E_{0x}(L)|} = \frac{i}{|E_{0x}(L)|} \int_0^L \{ p_2(0) |b_{11}(z)| e^{i\Phi_{x11}(z)} + p_2(0) |b_{12}(z)| e^{i\Phi_{x12}(z)} - p_1(0) |b_{21}(z)| e^{i\Phi_{x21}(z)} - p_1(0) |b_{22}(z)| e^{i\Phi_{x22}(z)} \} f(z_1, z_2, z) dz, \quad (37)$$

где

$$\Phi_{x\alpha\beta} = \int_0^z (q_\alpha - k_\beta) dz - \int_0^L q_\alpha dz + \arg(A_\alpha P_\beta) + S_{0x}. \quad (38)$$

Находя действительную и мнимую часть функции (37) и используя далее обычную методику усреднения, найдем для спектров корреляционных функций амплитуды и фазы следующие выражения:

$$\begin{aligned} F_{Ax}(z_1, z_2) = & -\frac{2}{|E_{0x}(L)|^2} \int_0^L \{ p_2(0) |b_{11}(z)| \sin \Phi_{x11}(z) - p_1(0) \times \\ & \times |b_{22}(z)| \sin \Phi_{x22}(z) \}^2 \overline{(\Delta v)^2} dz \int_0^\infty F_0(z_1, z_2, \zeta) d\zeta; \\ F_{Sx}(z_1, z_2) = & \frac{2}{|E_{0x}(L)|^2} \int_0^L \{ p_2(0) |b_{11}(z)| \cos \Phi_{x11}(z) - p_1(0) \times \\ & \times |b_{22}(z)| \cos \Phi_{x22}(z) \}^2 \overline{(\Delta v)^2} dz \int_0^\infty F_0(z_1, z_2, \zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (39)$$

Эти формулы получены в том же приближении, что и аналогичные им формулы (17) – (22), т. е. справедливы при $l \gg \lambda$ для слоя, средние свойства которого плавно меняются.

В зоне геометрической оптики

$$\Phi_{x\alpha\beta} \approx - \int_0^L k_\alpha dz + \arg(A_x P_\beta) + S_{0r}$$

и, следовательно, не зависит от z_1 и z_2 . Таким образом, спектры флюктуаций амплитуд и фаз компонент поля при $l \gg \lambda$ определяются только спектром случайных неоднородностей $\int_0^\infty F_0(z_1, z_2, \zeta) d\zeta$.

Окончательные формулы (39) несколько отличаются от соответствующих формул, описывающих флюктуации параметров отдельных нормальных волн и волны, распространяющейся в изотропной среде.

Для сравнения рассмотрим простейший случай, когда невозмущенная волна распространяется вдоль силовых линий внешнего магнитного поля ($z = 0$). В этом случае $p_{1,2} = \pm 1$ и $n_{1,2} = 1 - v/1 \pm \sqrt{u}$. Из формул (1) и (3) найдем значение вектора напряженности поля невозмущенной волны в плоскости $z = L$:

$$E_{0x}(L) = e^{-\frac{i(S_1+S_2)}{2}} \left[E_{0x} \cos \left(\frac{S_2 - S_1}{2} \right) + E_{0y} \sin \left(\frac{S_2 - S_1}{2} \right) \right], \quad (40)$$

где $S_{1,2} = \int_0^L k_{1,\zeta} dz$. Следовательно (см. (35)),

$$S_{0x} = \frac{S_2 + S_1}{2} = \frac{1}{2} \int_0^L (k_2 + k_1) dz.$$

Коэффициенты $b_{11,22}$ (см. (6)) определяются скалярным произведением $(A_{1,2} P_{1,2})$, которое выражается формулой (8). Поскольку для продольного распространения, как это следует из (3) и (8),

$$A_{x1,2} C_{x1,2} = \frac{E_{0r} \mp i E_{0y}}{2n_{1,2}},$$

для этих коэффициентов получаются следующие выражения:

$$|b_{11,22}| = \frac{k_0 E_0}{4n_{1,2}(1 \pm \sqrt{u})}; \quad \arg b_{11,22} = \mp \arctan \frac{E_{0y}}{E_{0x}} = \mp \varphi_0. \quad (41)$$

Далее имеем:

$$\Phi_{x\alpha\alpha} = \int_0^z (q_\alpha - k_\alpha) dz - \int_0^L q_\alpha dz + (-1)^\alpha \varphi_0 + \frac{1}{2} \int_0^L (k_2 + k_1) dz \quad (42)$$

$(\alpha = 1, 2).$

При малых углах рассеяния $k_\alpha - q_\alpha \approx x^2/2k_\alpha$ и формулу (42) можно записать в виде:

$$\Phi_{x\alpha\alpha} = \frac{x^2}{2k_0} [\Gamma_\alpha(L) - \Gamma_\alpha(z)] + (-1)^\alpha \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L (k_1 - k_2) dz + \varphi_0 \right\}, \quad (43)$$

где $\Gamma_\alpha(z) = \int_0^z dz/n_\alpha$ — групповой путь луча α . При этом выражения для спектров (39) существенно упрощаются:

$$F_{Ax} = \frac{k_0^2 E_0^2}{8 |E_{0x}(L)|^2} \int_0^L \frac{(\Delta v)^2}{(1 + \sqrt{u})^2} \left\{ \frac{\sin \Phi_{11}(z)}{(1 + \sqrt{u}) n_1} + \frac{\sin \Phi_{22}(z)}{(1 - \sqrt{u}) n_2} \right\}^2 dz \int_0^\infty F_0(x_1, x_2, \zeta) d\zeta;$$

$$F_{Sx} = \frac{k_0^2 E_0^2}{8 |E_{0x}(L)|^2} \int_0^L \frac{(\Delta v)^2}{(1 + \sqrt{u})^2} \left\{ \frac{\cos \Phi_{11}(z)}{(1 + \sqrt{u}) n_1} + \frac{\cos \Phi_{22}(z)}{(1 - \sqrt{u}) n_2} \right\}^2 dz \int_0^\infty F_0(x_1, x_2, \zeta) d\zeta. \quad (44)$$

Интересно отметить, что, если u не мало, то в зоне геометрической оптики (т. е. при выполнении условия $\frac{x^2}{2k_0} \Gamma_\alpha(L) \ll 1$) аргументы тригонометрических функций в (44), вообще говоря, также нельзя считать малыми, и, следовательно, флюктуации амплитуды компонент поля сравнимы с флюктуациями фазы. В этом отношении случай анизотропной среды отличается от изотропной, для которой, как известно, в зоне геометрической оптики (при $l \gg \lambda$) флюктуации амплитуды малы по сравнению с флюктуациями фазы.

Если $u \rightarrow 0$, формулы (44) переходят в известные спектры флюктуаций амплитуды и фазы волны, распространяющейся в изотропной среде, и, следовательно, условие $F_{Ax,y} \ll F_{Sxy}$ выполняется при $\sqrt{u} \ll 1$ и $\frac{x^2}{2k_0} \Gamma_\alpha(L) \ll 1$. Заметим также, что в дальней зоне $(x^2/2k_0) \Gamma_\alpha(L) \gg 1$ флюктуации амплитуды и фазы по порядку величины одинаковы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 393 (1960).
2. Я. П. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Файнберг, Распространение радиоволн, ГИТЛ, М., 1953.
3. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
4. Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 384 (1960).
5. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 316 (1959).
6. Н. Г. Денисов, В. А. Зверев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 521 (1959).

КИНЕТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОТОКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С НЕПОДВИЖНОЙ ПЛАЗМОЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. I

M. C. Kovner

Рассматривается распространение электромагнитных волн в системе, состоящей из неподвижной плазмы и потока заряженных частиц, движущегося в направлении внешнего магнитного поля H_0 . Предполагается, что возмущение распространяется в произвольном направлении. Получено общее дисперсионное уравнение; найдены критерии неустойчивости системы и коэффициенты нарастания (затухания) волн при слабых концентрациях потока.

Взаимодействие потока заряженных частиц с неподвижной плазмой исследовалось во многих работах (см., например, [1-9]). В отсутствие магнитного поля этот вопрос рассматривался в ряде работ ([1, 4, 6] и др.), часть из которых основывалась на уравнениях квазигидродинамического приближения [1, 5]; в других работах использовался метод кинетического уравнения [3, 4].

При наличии внешнего постоянного магнитного поля в работе [3] на основе метода кинетического уравнения был рассмотрен случай продольного распространения обычной и необычной волн (вдоль поля H_0). В упомянутой работе (см., кроме того, [1]) был также развит квантовый метод, дающий возможность сравнительно просто и наглядно определить условие неустойчивости системы. Однако в ряде случаев непосредственное использование квантового метода [3] существенно затрудняется или становится невозможным (при наличии сильного поглощения или интенсивного нарастания возмущений в тех случаях, когда тепловое движение частиц определяет характер распространения волн и др.).

В данной статье на основе метода кинетического уравнения рассматривается вопрос о неустойчивости потока заряженных частиц, пронизывающего неподвижную магнитоактивную плазму, и определяются условия, при которых волны в плазме нарастают. Предполагается, что плазма и поток не ограничены. Упорядоченная скорость потока v_0 направлена вдоль постоянного внешнего поля H_0 . Направление распространения возмущений, в отличие от [3], произвольно и определяется волновым вектором k , который составляет угол α с направлением поля H_0 (см. рис. 1).

В отсутствие потока при учете теплового движения возможно распространение трех типов волн: необычной, обычной и плазменной [10], которые мы будем называть основными. При наличии потока, концентрация частиц в котором N_s достаточно мала, коэффициент преломления волны n для отмеченных выше волн меняется незначительно; однако, в отличие от случая $v_0 = 0$, становится возможным их нарастание. Нужно, однако, иметь в виду, что при взаимодействии потока с плазмой порядок дисперсионного уравнения повышается, в силу чего становится возможным распространение новых типов волн, которые мы будем называть дополнительными. В от-

дельных случаях неустойчивость может быть связана с нарастанием этого типа волн (при $H_0=0$ в работе [1] исследовалось нарастание именно таких дополнительных волн).

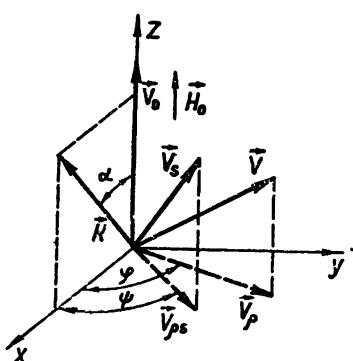


Рис. 1.

Ниже, в разделе 1, будет получено общее дисперсионное уравнение, определяющее распространение высокочастотных волн в магнитоактивной плазме. Далее, в разделе 2, на основе этого уравнения проводится рассмотрение устойчивости плазменных волн. В разделе 3 исследуется устойчивость и определяются коэффициенты нарастания (затухания) для необыкновенной и обычной волн. Отметим, что в разделах 2 и 3 рассматривается распространение волн в случае, когда существенен учет влияния теплового движения частиц в потоке (см. ниже). Общее рассмотрение

случая, когда влиянием теплового движения частиц в потоке можно пренебречь, будет дано в следующей статье.

Влияние движения ионов на распространение возмущений далее во внимание приниматься не будет, что допустимо для волн достаточно высокой частоты (см. [11]).

1. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Исходим из системы линеаризованных уравнений для неподвижной плазмы и потока заряженных частиц и уравнений электродинамики с самосогласованным полем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f - \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} &= -\nu f; \\ \frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f_s - \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial f_{0s}}{\partial \mathbf{v}_s} - \\ - \frac{e}{mc} \left\{ [\mathbf{v}_s \mathbf{H}_0] \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}_s} + [\mathbf{v}_s \mathbf{h}] \frac{\partial f_{0s}}{\partial \mathbf{v}_s} \right\} &= -\nu_s f_s; \quad (1.1) \\ \text{rot } \mathbf{H} = -\frac{4\pi e}{c} \int (\mathbf{v} f d\mathbf{v} + \mathbf{v}_s f_s d\mathbf{v}_s) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \text{div } \mathbf{H} = 0; \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \text{div } \mathbf{E} = -4\pi e \int (f d\mathbf{v} + f_s d\mathbf{v}_s), \end{aligned}$$

где — e — заряд электрона, \mathbf{E} и \mathbf{H} — самосогласованные электрическое и магнитное поля, m — масса электрона, ν и ν_s — эффективные частоты соударений электронов с другими частицами соответственно в плазме и в потоке. В (1.1) $f_0(\mathbf{v})$ и $f_{0s}(\mathbf{v}_s)$ — равновесные функции распределения, которые мы будем считать максвелловскими в системах координат, где средние скорости частиц равны нулю:

$$\begin{aligned} f_0 &= N \left(\frac{m}{2\pi\nu T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2\nu T}\right); \\ f_{0s} &= N_s \left(\frac{m}{2\pi\nu_s T_s} \right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_0)^2}{2\nu_s T_s}\right]. \quad (1.2) \end{aligned}$$

Здесь N и N_s — концентрации электронов в плазме и потоке, которые мы считаем независящими от координат; T и T_s — абсолютные температуры плазмы и потока; ν — постоянная Больцмана; $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ и $f_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}_s, t)$ — малые отклонения от равновесных функций распределения $f_0(\mathbf{v})$ и $f_{0s}(\mathbf{v}_s)$, (\mathbf{r} и \mathbf{r}_s — радиусы-векторы частиц, \mathbf{v} и \mathbf{v}_s — скорости частиц соответственно в плазме и потоке). Плазма и поток предполагаются квазинейтральными. При решении системы уравнений (1.1) можно использовать операционный метод, аналогично тому, как это было сделано Ландау при рассмотрении задачи о продольных волнах в плазме [12] (см. также [13, 14]).

Используя разложение функций E, H, f, f_s в пространственные интегралы Фурье (например, $E = \int E_k e^{ikr} dk$), перейдем к уравнениям для фурье-составляющих. Применяя к последним преобразование Лапласа, получим, опуская индексы разложения, следующие уравнения:

$$f(-i\omega + ik\mathbf{v} + \nu) - \frac{e}{m} E \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e}{mc} [\mathbf{v} H_0] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = g; \quad (1.3)$$

$$(f_s - i\omega + ik\mathbf{v} + \nu_s) - \frac{e}{m} E \frac{\partial f_{0s}}{\partial \mathbf{v}_s} - \frac{e}{mc} \left\{ [\mathbf{v}_s H_0] \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}_s} + \right. \\ \left. + [\mathbf{v}_s \mathbf{h}] \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}_s} \right\} = g_s;$$

$$E(k^2 c^2 - \omega^2) = -4\pi e i \omega \int (\mathbf{v} f d\mathbf{v} + \mathbf{v}_s f_s d\mathbf{v}_s) + \\ + k c^2 (\mathbf{k} E) - i\omega E_0 + i c [\mathbf{k} \mathbf{h}_0], \quad (1.4)$$

в которых $g, g_s, E_0, \mathbf{h}_0$ — значения соответственно функций f, f_s, E, \mathbf{h} в начальный момент времени ($t = 0$).

Выберем систему координат [13], в которой ось z направлена по направлению внешнего поля H_0 , волновой вектор \mathbf{k} лежит в плоскости (x, z) и составляет угол α с H_0 (см. рис. 1). Поток движется, как указывалось выше, в направлении поля H_0 . Поскольку проведенные нами вычисления для определения функций f и f_s совершенно аналогичны развитым в [13], а также в работах других авторов [14], мы опустим промежуточные операции и сразу же приведем конечный результат вычисления функций распределения f и f_s :

$$f = b(\psi) + \sum_i E_i C_i(\psi), \quad f_s = b_s(\varphi) + \sum_i E_i C_{is}(\varphi), \quad (1.5)$$

где

$$b_s(\varphi) = a(\varphi) \left\{ \frac{\exp(2\pi\varepsilon_s)}{1 - \exp(2\pi\varepsilon_s)} \int_0^{2\pi} \frac{g_s}{\omega_H a(\varphi')} d\varphi' + \int_0^\varphi \frac{g_s}{\omega_H a(\varphi')} d\varphi' \right\};$$

$$C_{xs} = a(\varphi) K_s \left(1 - \frac{k\mathbf{v}_0}{\omega} \right) v_{s\rho} \left\{ \frac{\exp(2\pi\varepsilon_s)}{1 - \exp(2\pi\varepsilon_s)} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi'}{a(\varphi')} d\varphi' + \int_0^\varphi \frac{\cos\varphi'}{a(\varphi')} d\varphi' \right\};$$

$$\begin{aligned}
 C_{zs} = & a(\varphi) K_s \left\{ \frac{\exp(2\pi\varepsilon_s)}{1 - \exp(2\pi\varepsilon_s)} \int_0^{2\pi} \left(v_{zs} - v_0 + \frac{v_0}{\omega} v_{ps} k \sin \alpha \cos \varphi' \right) \frac{d\varphi'}{a(\varphi')} + \right. \\
 & \left. + \int_0^{\varphi} \left(v_{zs} - v_0 + \frac{v_0}{\omega} v_{ps} k \sin \alpha \cos \varphi' \right) \frac{d\varphi'}{a(\varphi')} \right\}; \quad (1.6) \\
 K_s = & -\frac{e}{\omega_H \times T_s} \left(\frac{m}{2\pi \times T_s} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_s - v_0)^2}{2\pi T_s}}; \\
 a(\varphi) = & \exp(\varepsilon_s \varphi + \chi_s \sin \varphi); \\
 \varepsilon_s = & -\frac{-i\omega + ikv_{zs} + v_s}{\omega_H}; \quad \chi_s = -\frac{kv_{ps} \sin \alpha}{\omega_H}.
 \end{aligned}$$

В (1.6) $\omega_H = eH_0/mc$ — гирочастота электронов.

Величина C_{ys} получается из выражения, написанного для C_{xs} , заменой $\cos \varphi$ на $\sin \varphi$. Для перехода к соответствующим величинам $C_{x,y,z}$, относящимся к неподвижной плазме, надо в соотношениях (1.6) положить $v_0=0$. Подставляя систему уравнений (1.5) в (1.4), находим:

$$\begin{aligned}
 E(k^2 c^2 - \omega^2) + 4\pi e i \omega \sum_i E_i \int (v C_i dv + v_s C_{is} d v_s) - k c^2 (\mathbf{k} E) = & \\
 = -4\pi e i \omega \int (v b dv + v_s b_s d v_s) - i \omega E_0 + i c [\mathbf{k} h_0]. \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

Дисперсионное уравнение получается из условия равенства нулю определителя системы (1.7)

$$\begin{vmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xz} \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{yz} \\ d_{zx} & d_{zy} & d_{zz} \end{vmatrix} = 0, \quad (1.8)$$

в котором:

$$\begin{aligned}
 d_{xx} = & a_{xx} + \frac{k_x^2 c^2}{k^2 c^2 - \omega^2} - 1; \quad d_{xy} = a_{xy}; \quad d_{xz} = a_{xz} + \frac{k_x k_z c^2}{k^2 c^2 - \omega^2}; \\
 d_{yx} = & a_{yx}; \quad d_{yy} = a_{yy} - 1; \quad d_{yz} = a_{yz}; \\
 d_{zx} = & a_{zx} + \frac{k_x k_z c^2}{k^2 c^2 - \omega^2}; \quad d_{zy} = a_{zy}; \quad d_{zz} = a_{zz} + \frac{k_z^2 c^2}{k^2 c^2 - \omega^2}.
 \end{aligned}$$

Для a_{jk} имеем следующее выражение:

$$a_{jk} = -i \frac{4\pi \omega e}{k^2 c^2 - \omega^2} \int (v_j c_k dv + v_{js} C_{ks} d v_s). \quad (1.9)$$

Дисперсионное уравнение (1.8) носит весьма общий характер, и его исследование очень сложно. Поэтому для его исследования необходимо ввести ряд упрощающих предположений. Будем считать выполненным условие

$$\frac{\beta^2 n^2}{u} \sin^2 \alpha \ll 1, \quad (1.10)$$

где параметр $\beta^2 = \times T/mc^2$ предполагается малым ($\beta^2 \approx 1.7 \cdot 10^{-10} T$, так что при $T \ll 10^{10}$ градусов $\beta^2 \ll 1$). В (1.10) $u = \omega_H^2/\omega^2$; $n = ck/\omega$ — показатель преломления среды.

Неравенство (1.10) выполняется в случае достаточно сильного магнитного поля. Оно, как правило, нарушается только для слабо анизотропной плазмы ($u \ll 1$), когда эффекты, связанные с наличием магнитного поля H_0 , проявляются относительно слабо. Далее предполагаем выполненным условие:

$$|\omega - p\omega_H| \gg k \sqrt{\frac{zT}{m}} \cos\alpha \quad (p = 1, 2). \quad (1.11)$$

Последнее неравенство означает, что мы не рассматриваем области, лежащие непосредственно вблизи гирорезонансных частот $\omega = \omega_H, 2\omega_H$. Однако они не исключают полностью возможности исследования внутри области гирорезонанса, так как в условиях (1.11) степень отклонения частот от гирорезонансных определяется их доплеровскими сдвигами, и при малых величинах последних условия (1.11) могут быть совместны с требованием:

$$\left| \frac{\omega - p\omega_H}{\omega} \right| \ll 1 \quad (p = 1, 2). \quad (1.12)$$

Наконец, предполагается также, что

$$\nu \ll k \sqrt{\frac{zT}{m}} \cos\alpha; \quad \nu_s \ll k \sqrt{\frac{zT_s}{m}} \cos\alpha; \quad N_s \ll N. \quad (1.13)$$

Неравенства (1.12) означают, что в рассматриваемом случае соударения не играют определяющей роли в вопросе об определении неустойчивости системы.

При сделанных предположениях (1.10)–(1.13) дисперсионное уравнение (1.8) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) + i(\omega - \mathbf{k}v_0) \{ \gamma_s v_s [A + C + 2 \sin^2\alpha (\omega + \omega_H)(D + E)] e^{\delta_+^s} + \\ + \gamma_s v_s [A - C + 2 \sin^2\alpha (\omega - \omega_H)(D - E)] e^{\delta_-^s} + v_s [\gamma_1 B - \\ - 4\omega \gamma_s D \sin^2\alpha] e^{\delta_0^s} \} + i\omega v \{ \gamma [A + C + 2(\omega + \omega_H) \times \\ \times (D + E) \sin^2\alpha] e^{\delta_+} + \gamma [A - C + 2(\omega - \omega_H) (D - E) \sin^2\alpha] e^{\delta_-} + \\ + [\gamma_1 B - 4\omega \gamma D \sin^2\alpha] e^{\delta_0} \} = 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где

$$\delta_{\pm}^s = - \frac{m}{2zT_s} \frac{(\omega - \mathbf{k}v_0 \pm \omega_H)^2}{k^2 \cos^2\alpha};$$

$$\delta_0^s = - \frac{m}{2zT_s} \left(\frac{\omega - \mathbf{k}v_0}{k \cos\alpha} \right)^2;$$

$$\delta_{\pm} = - \frac{m}{2zT} \left(\frac{\omega \pm \omega_H}{k \cos\alpha} \right)^2;$$

$$\delta_0 = - \frac{m}{2zT} \left(\frac{\omega}{k \cos\alpha} \right)^2;$$

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) = & v\beta^2 n^6 \left\{ \cos^2 \alpha [3 \cos^2 \alpha (1-u) + \sin^2 \alpha] + \right. \\ & \left. + \frac{\sin^2 2\alpha (1+3u)}{4(1-u)^2} + \frac{3 \sin^4 \alpha}{1-4u} + \frac{\sin^2 2\alpha}{1-u} \right\} - \\ & - n^4 (1-u-v+uv \cos^2 \alpha) + n^2 [2v^2 + v(u+u \cos^2 \alpha - 4) + \\ & + 2(1-u)] + v^3 - 3v^2 + v(3-u) + u-1 + v_s(BA_{zz} - AA_{xx} - CA_{xy});\end{aligned}\quad (1.15)$$

$$A = -n^4 (1-u) \sin^2 \alpha + n^2 [(1-u)(1-v)(1+\cos^2 \alpha) + \\ + 2(1-u-v) \sin^2 \alpha] - 2(1-v)(1-u-v);$$

$$\begin{aligned}B = & (1-u) \left[-n^4 \cos^2 \alpha + n^2 (1+\cos^2 \alpha) \left(1 - \frac{v}{1-u} \right) - \right. \\ & \left. - \left(1 - \frac{v}{1-u} \right)^2 + \frac{uv^2}{(1-u)^2} \right];\end{aligned}$$

$$C = 2\sqrt{u}v(1-v-n^2 \sin^2 \alpha); \quad D = \frac{vn^2}{\omega};$$

$$E = \frac{n^2}{\omega_H} [(1-u)n^2 - (1-u-v)]; \quad v = \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2} \equiv \frac{\omega_0^2}{\omega^3}; \quad (1.16)$$

$$v_s = \frac{4\pi N_s e^2}{m\omega^2} \equiv \frac{\omega_{0s}^2}{\omega^2}; \quad \gamma_s = \left(\frac{\pi m}{8\pi T_s} \right)^{1/2} \frac{1}{k \cos \alpha};$$

$$\gamma = \left(\frac{\pi m}{8\pi T} \right)^{1/2} \frac{1}{k \cos \alpha}; \quad \gamma_{1s} = \left(\frac{\pi m^3}{2\pi^3 T_s^3} \right)^{1/2} \frac{\omega^2}{k^3 \cos^3 \alpha};$$

$$\gamma_1 = \left(\frac{\pi m^3}{2\pi^3 T^3} \right)^{1/2} \frac{\omega^2}{k^3 \cos^3 \alpha}.$$

В соотношении (1.15) величины A_{lk} получаются в результате вычислений интегралов типа $\int v_{ls} C_{ks} d\mathbf{v}_s$ в дисперсионном уравнении (1.8). Для дальнейшего нам достаточно привести только их асимптотические выражения при выполнении указанных ниже условий:

$$\begin{aligned}A_{xx} = & \begin{cases} \frac{(\omega - \mathbf{k}v_0)^2}{(\omega - \mathbf{k}v_0)^2 - \omega_H^2} & \text{при } |\omega - \mathbf{k}v_0 \pm \omega_H| \gg kv_{Ts} \cos \alpha \\ \frac{(\omega - \mathbf{k}v_0)^2}{k^2 v_{Ts}^2 \cos^2 \alpha} & \text{при } |\omega - \mathbf{k}v_0 \pm \omega_H| \ll kv_{Ts} \cos \alpha \end{cases}; \\ A_{xy} = & \begin{cases} -\frac{\omega_H(\omega - \mathbf{k}v_0)}{(\omega - \mathbf{k}v_0)^2 - \omega_H^2} & \text{при } |\omega - \mathbf{k}v_0 \pm \omega_H| \gg kv_{Ts} \cos \alpha \\ \frac{\omega_H(\omega - \mathbf{k}v_0)}{k^2 v_{Ts}^2 \cos^2 \alpha} & \text{при } |\omega - \mathbf{k}v_0 \pm \omega_H| \ll kv_{Ts} \cos \alpha \end{cases}; \\ A_{zz} = & \begin{cases} \frac{\omega^2}{(\omega - \mathbf{k}v_0)^2} & \text{при } |\omega - \mathbf{k}v_0| \gg kv_{Ts} \cos \alpha \\ -\frac{\omega^2}{k^2 v_{Ts}^2 \cos^2 \alpha} & \text{при } |\omega - \mathbf{k}v_0| \ll kv_{Ts} \cos \alpha \end{cases}.\end{aligned}\quad (1.17)$$

Здесь $v_{Ts} = \sqrt{\pi T_s/m}$.

В силу малости параметра β^2 в дисперсионном уравнении (1.14) слагаемые, пропорциональные β^2 , сохранены лишь при старшем члене n^6 . Переход от соотношения (1.14) к изотропному случаю ($\omega_H = 0$) формально можно провести, положив везде $\alpha = 0$, за исключением произведения $\mathbf{k}v_0$, после чего нужно принять, что $\omega_H = 0$. В слагаемом $\mathbf{k}v_0 = k v_0 \cos \alpha$ не нужно полагать $\alpha = 0$, так как здесь входит фактически угол не между \mathbf{k} и \mathbf{H}_0 , а угол между волновым вектором возмущения \mathbf{k} и скоростью потока v_0 ; направление же магнитного поля \mathbf{H}_0 в данном случае не существенно.

При $N_s = 0$ дисперсионное уравнение совпадает с полученным ранее в [14] (см. также [15]). При $\alpha = 0$ равенство (1.14) распадается на уравнение для продольных волн (плазменная волна и дополнительные продольные волны) и уравнение для поперечных волн (обыкновенная и необыкновенная волны, а также дополнительные поперечные волны). При этом уравнение для продольных волн при $T_s = 0$ совпадает с исследованным в [4], а уравнение для поперечных волн (обыкновенная и необыкновенная волны) совпадает с полученным в [3].

Исходя из уравнения (1.14), можно исследовать устойчивость электромагнитных волн в плазме при наличии в них потока заряженных частиц. Действительно, поскольку поле волны мы асимптотически представили в виде $E \sim e^{-i\omega t + i\mathbf{k}r}$, то при $\text{Im}\omega \equiv -\mu > 0$ будет иметь место неустойчивость и малые возмущения должны нарастать со временем (волновой вектор \mathbf{k} предполагаем действительным).

Поток заряженных частиц предполагается нерелятивистским:

$$v_0 \ll c. \quad (1.18)$$

Как будет показано ниже, взаимодействие между потоком заряженных частиц и неподвижной плазмой заметно проявляется при распространении электромагнитных волн, фазовая скорость которых

$$v_\Phi \geq v_0. \quad (1.19)$$

Поскольку $v_\Phi = c/n$, то для нерелятивистских потоков (1.18) соотношение (1.19) имеет место при условии:

$$n \gg 1. \quad (1.20)$$

Для основных волн (необыкновенной, обыкновенной и плазменной) можно указать на ряд случаев, в которых неравенство (1.20) выполнено. Последнее вне области гирорезонанса имеет место для плазменных волн, для волн в области перехода между плазменными и необыкновенными (обыкновенными) волнами и для сравнительно низкочастотных обыкновенных волн [11].

В последующих разделах основное внимание будет уделено вопросам устойчивости при распространении указанных типов возмущений. Некоторые из приведенных ниже формул, вообще говоря, можно использовать для качественного анализа и в области, где $n^2 \geq 1$, в которой волны уже не являются медленными. Однако здесь следует иметь в виду, что точный количественный расчет при этом должен носить релятивистский характер.

2. УСИЛЕНИЕ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

Рассмотрим распространение плазменных волн, для которых всегда $n^2 \gg 1$. Определение коэффициента нарастания (затухания) можно провести, используя метод возмущений. Считаем (как это будет подтверждено результатом), что в принятом приближении $|\varphi| \ll \omega$. В первом приближении для описания этих волн достаточно в дисперсионном

уравнении (1.14) сохранить лишь члены, содержащие n^6 и n^4 . Пренебрежение остальными членами, а также величинами A_{lk} (1.17) допустимо, если выполнено условие [14]:

$$|1 - u - v + uv \cos^2\alpha| \gg \beta. \quad (2.1)$$

Если, кроме того, пренебречь нарастанием (затуханием), то из уравнения (1.14) для показателя преломления плазменной волны получаем в нулевом приближении (в отсутствие потока):

$$n^2 \approx \frac{1 - u - v + uv \cos^2\alpha}{a\beta^2}; \quad (2.2)$$

где

$$a = v \left\{ \cos^2\alpha [3\cos^2\alpha (1 - u) + \sin^2\alpha] + \right. \\ \left. + \frac{\sin^2 2\alpha (1 + 3u)}{4(1 - u)^2} + \frac{3 \sin^4\alpha}{1 - 4u} + \frac{\sin^2 2\alpha}{1 - u} \right\}.$$

Подставляя найденное значение показателя преломления n в уравнение (1.14) и сравнивая по порядку величины различные слагаемые, можно убедиться, что наше приближение вполне оправдано.

В следующем приближении, учитывая в (1.14) экспоненциальные члены для коэффициента нарастания (затухания), получаем:

$$\mu = \frac{n^4(1 - u)}{\partial\Phi/\partial\omega} \left\{ v_s(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0) \left[\gamma_s \left(1 + 2 \frac{\omega}{\omega_H} \right) \sin^2\alpha e^{\delta_+} + \right. \right. \\ \left. + \gamma_s \left(1 - 2 \frac{\omega}{\omega_H} \right) \sin^2\alpha e^{\delta_-} - \gamma_{1s} \cos^2\alpha e^{\delta_0} \right] + \omega v \times \\ \times \left[\gamma \left(1 + 2 \frac{\omega}{\omega_H} \right) \sin^2\alpha e^{\delta_+} + \gamma \left(1 - 2 \frac{\omega}{\omega_H} \right) \sin^2\alpha e^{\delta_-} - \right. \\ \left. \left. - \gamma_1 \cos^2\alpha e^{\delta_0} \right] \right\}. \quad (2.3)$$

В данном случае для $\Phi(\omega)$ из (1.15) приближенно имеем [17]:

$$\Phi(\omega) \simeq \beta^2 n^6 a - n^4(1 - u - v + uv \cos^2\alpha). \quad (2.4)$$

Исследуем подробно полученную формулу для различных случаев.

При продольном распространении, когда $\alpha = 0$, для невозмущенного значения показателя преломления плазменной волны из (2.2) имеем:

$$n^2 = \frac{1 - v}{3\beta^2 v}. \quad (2.5)$$

Для коэффициента нарастания (затухания) получаем следующее соотношение:

$$\mu = \left(\frac{\pi}{8} \right)^{1/2} \frac{\omega}{2 - v} \left[\frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0}{k^3 v_{Ts}^3} \omega_{0s}^2 e^{-\frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)^2}{2k^2 v^2 T_s}} + \right. \\ \left. + \frac{\omega}{k^3 v_T^3} \omega_0^2 e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_T^2 T}} \right]. \quad (2.6)$$

Отсюда в отсутствие потока, т. е. при $\omega_{0s}^2 = 0$, получается известная формула для затухания продольных волн в изотропной плазме, полученная Ландау [12]. Из формулы (2.6) вытекает следующее необходимое условие для нарастания волн ($\mu < 0$):

$$\omega - kv_0 < 0.$$

Кроме того, концентрация частиц в потоке N_s должна быть достаточно велика, чтобы в соотношении (2.6) первое слагаемое превалировало над вторым. Заметим, что множитель $\frac{\omega}{2-v}$ в формуле (2.6) положителен, так как из (2.5) при очевидном требовании $n^2 > 0$ следует, что $v < 1$. При $v > 1$ $n^2 < 0$ и волна сильно затухает.

При произвольном направлении распространения возмущений, образующем угол α со средней скоростью v_0 , из выражения (2.3) можно установить, что неустойчивость связана в основном с излучением Вавилова — Черенкова частиц потока в плазме. При этом рассмотрим два случая. В первом из них выполнено условие

$$|\omega - kv_0| \gg kv_{Ts} \cos \alpha \quad (2.7)$$

и основной вклад в излучение вносят быстрые электроны, тепловая скорость которых много больше средней скорости электронов в потоке. Поскольку таких частиц относительно мало, то и их вклад незначителен. По этой причине коэффициент нарастания волн при максвелловском распределении частиц будет экспоненциально мал. При выполнении неравенства

$$|\omega - kv_0| \ll kv_{Ts} \cos \alpha \quad (2.8)$$

излучает уже значительно большее число электронов в потоке, и коэффициент нарастания μ уже не будет экспоненциально малой величиной. Учитывая сказанное выше, из (2.3) при выполнении неравенства (2.8) получим:

$$\begin{aligned} \mu = -\frac{n^4(1-u)}{\partial \Phi / \partial \omega} \left\{ (\omega - kv_0) \gamma_{Ts} v_s \cos^2 \alpha + \omega v \left[\left\langle \left(1 + 2 \frac{\omega}{\omega_H} \right) e^{\delta_+} + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. + \left(1 - 2 \frac{\omega}{\omega_H} \right) e^{\delta_-} \right\rangle \gamma \sin^2 \alpha + \gamma_1 \cos^2 \alpha e^{\delta_0} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Из уравнения (2.4) нетрудно показать, что при $n^2 > 0$

$$\frac{1-u}{\partial \Phi / \partial \omega} < 0.$$

Тогда усиление ($\mu < 0$) будет при условии:

$$\begin{aligned} f(\omega) = \omega (kv_0 - \omega) \frac{N_s}{N} \left[\frac{v^3 v_{Ts} k^2}{v_T} \sin \alpha \left\langle \left(1 + 2 \frac{\omega}{\omega_H} \right) e^{\delta_+} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - 2 \frac{\omega}{\omega_H} \right) e^{\delta_-} \right\rangle + \frac{\omega^2 v_{Ts}^3}{v_T^3} e^{\delta_0} \right]^{-1} > 1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Отсюда для концентрации частиц в потоке получаем:

$$N_s > \frac{N}{\omega(\mathbf{k}v_0 - \omega)} \left\{ \frac{v_{Ts}^3 k^3}{v_T} \left(1 + 2 \frac{\omega}{\omega_H} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega + \omega_H}{kv_T \cos \alpha} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \left(1 - 2 \frac{\omega}{\omega_H} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega - \omega_H}{kv_T \cos \alpha} \right)^2 \right] \right\} + \\ + \frac{\omega^2 v_{Ts}^3}{v_T^3} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{k^2 v_T^2 \cos^2 \alpha} \right). \quad (2.10)$$

Из формулы (2.10) видно, в частности, что чем „холоднее“ поток частиц, тем при более низких концентрациях частиц в потоке возникает неустойчивость. Следует отметить, что функция $f(\omega)$ (2.9) фактически определяет спектральную характеристику нарастания рассматриваемых возмущений.

Рассмотрим поведение волн в переходной области, т. е. в области, в которой выполняется неравенство, обратное (2.1):

$$|1 - u - v + uv \cos^2 \alpha| \ll \beta. \quad (2.11)$$

При этом, вообще говоря, разделение волн на плазменную и обыкновенную или необыкновенную носит несколько условный характер [11]. Если при написании коэффициента нарастания (затухания) μ в (2.3) можно было не учитывать в первом приближении слагаемые в дисперсионном уравнении (1.14), содержащие A_{ik} , то теперь заранее уже нельзя пренебречь указанными членами в слагаемом с n^4 в соотношении (1.15). Для решения указанного вопроса надо в (1.15) сравнить выражение

$$n^4 \left(\sin^2 \alpha \frac{A_{xx}}{\omega^2} + \cos^2 \alpha A_{zz} \right) \omega_{0s}^2 (1 - u)$$

с остальными членами уравнения. Для невозмущенного значения n^2 (в нулевом приближении — в пренебрежении членами с A_{ik} и при $\mu=0$) получаем:

$$n^2 = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{(1 - v)(2v + u - 3)}{a}}, \quad (2.12)$$

т. е. $n^2 \sim 1/\beta$. Подставляя найденное значение n^2 в уравнение (1.14) и сравнивая различные слагаемые в нем, получим, что в первом приближении при

$$|\omega - \mathbf{k}v_0 \pm \omega_H| \ll kv_{Ts} \cos \alpha; \quad |\omega - \mathbf{k}v_0| \ll kv_{Ts} \cos \alpha \quad (2.13)$$

членами с A_{ik} можно пренебречь, если

$$\left| \frac{(v - 1)(2v + u - 3)}{u - 1} \right| \gg \frac{\omega_{0s}^2}{\omega^2 \beta_s^2}, \quad (2.14)$$

где $\beta_s = \kappa T_s / mc^2 \equiv v_{Ts}^2 / c^2$. Когда имеют место неравенства, обратные (2.13), членами с A_{ik} можно пренебречь при

$$\left| \sin^2 \alpha \frac{(\omega - \mathbf{k}v_0)^2}{(\omega - \mathbf{k}v_c)^2 \pm \omega_H^2} + \cos^2 \alpha \frac{\omega^2}{(\omega - \mathbf{k}v_0)^2} \right| \ll \beta \frac{\omega^2}{\omega_{0s}^2} \sqrt{\frac{|a(3 - 2v - u)|}{(1 - u)^2}}.$$

В отмеченных случаях для коэффициента μ остается в силе формула (2.3), где за невозмущенное значение n^2 надо взять величину (2.12), а за функцию Φ — выражение

$$\Phi \simeq a\beta^2 n^6 + n^2(v - 1)(2v + u - 3).$$

Наконец, рассмотрим один пример, при котором в переходной области надо учитывать члены с A_{ik} . Пусть выполнены неравенства (2.13), а условие (2.14) не имеет места; тогда в первом приближении при $\mu = 0$ дисперсионное уравнение (1.14) можно записать в виде:

$$a\beta^2 n^6 + \frac{\omega_{0s}^2}{k^2 v_{Ts}^2} n^4 + (v - 1)(2v + u - 3)n^2 = 0. \quad (2.15)$$

Отсюда для показателя преломления n^2 получаем:

$$n^2 = \frac{1}{\beta} \left\{ -\frac{1}{a} \left[(v - 1)(2v + u - 3) - \frac{1-u}{\beta_s^2} \frac{\omega_{0s}^2}{\omega^2} \right] \right\}^{1/2}. \quad (2.16)$$

Из (2.16) видно, что поправка к n^2 может оказаться существенной, и в формулу (2.3) для декремента нарастания (затухания), которая остается в силе и в этом случае, надо подставлять для n^2 значение (2.16). Заметим также, что, как указывалось в [16], при распространении электромагнитных волн в плазме в отсутствие потока частиц в переходной области показатель преломления n^2 может принимать при некоторых условиях комплексные значения. Однако, как нетрудно видеть из соотношения (2.16), при наличии потока частиц в плазме указанная комплексность может исчезнуть. Если выполнено неравенство, обратное (2.13), то, как показывает детальное рассмотрение, n^2 , получающееся в первом приближении из уравнения (1.14) для основных волн, может стать комплексным, даже если в отсутствие потока n^2 было действительным. В этом случае вопрос о нарастании (затухании) волн следует решать, сравнивая мнимую часть полученного решения с соответствующими экспоненциальными членами, которые, вообще говоря, при выполнении неравенства, обратного (2.13), весьма малы.

3. УСИЛЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОЙ И НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛН

При рассмотрении поведения обыкновенной и необыкновенной волн, как правило, тепловые поправки к показателю преломления можно не учитывать. При этом, если мы интересуемся только основными волнами (см. выше), то, как показывает сравнение различных слагаемых в уравнении (1.14), члены, содержащие величины A_{ik} (1.17), в принятом приближении можно не учитывать. В нулевом приближении, пренебрегая нарастанием (затуханием) в отсутствие потока, из уравнения (1.14) получаем известную формулу [10]:

$$n_{1,2}^2 = 1 - \frac{2v(1-v)}{2(1-v) - us\sin^2\alpha \pm \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u(1-v)^2\cos^2\alpha}}, \quad (3.1)$$

где индекс 1 и знак „—“ относятся к необыкновенной волне, индекс 2 и знак „+“ относятся к обыкновенной волне. В следующем приближении, аналогично тому, как это было сделано выше для плазменной волны, для коэффициента нарастания (затухания) из уравнения (1.14) получаем:

$$\begin{aligned} \mu_j = & \frac{\omega^4}{(1-u-v+uv\cos^2\alpha)(n_i^2\omega^2 - c^2k^2)\frac{\partial}{\partial\omega}(n_j^2\omega^2)} \times \\ & \times \{(v-kv_0)v_s[\gamma_s \langle A + C + 2\sin^2\alpha(v + \omega_H)(D + E) \rangle e^{\delta^s_+} + \\ & + \gamma_s \langle A - C + 2\sin^2\alpha(v - \omega_H)(D - E) \rangle e^{\delta^s_-} + (\gamma_{1s}B - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4\omega\gamma_s D \sin^2\alpha) e^{\delta_0^s}] + \omega v [\gamma \langle A + C + 2 \sin^2\alpha (\omega + \omega_H) \times \\
 & \times (D + E) \rangle e^{\delta_+} + \gamma \langle A - C + 2 \sin^2\alpha (\omega - \omega_H) \times \\
 & \times (D - E) \rangle e^{\delta_-} + (\gamma_1 B - 4\omega\gamma D \sin^2\alpha) e^{\delta_0}] \}, \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

где $i, j = 1, 2$ и $i \neq j$.

Из (3.2) для продольного распространения ($\alpha = 0$) получаем:

$$\mu_i = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{0s}^2 (\mathbf{k}v_0 - \omega)}{kv_{Ts} \partial(n_t^2 \omega^2) / \partial \omega} e^{\delta_{\pm}^s} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_0^2 \omega}{kv_T \partial(n_t^2 \omega^2) / \partial \omega} e^{\delta_{\pm}}. \quad (3.3)$$

Эта формула совпадает с полученной ранее в [3].

Исследование формулы (3.2) показывает, что неустойчивость системы может возникнуть как за счет магнитотормозного излучения электронов потока в области частот, соответствующих аномальному допплер-эффекту (см., например, [3, 19]), так и за счет излучения Вавилова-Черенкова. Необходимым условием нарастания волн при этом является выполнение неравенства

$$\omega - \mathbf{k}v_0 < 0. \quad (3.4)$$

При выполнении соотношения (3.4) достаточным условием нарастания ($\mu < 0$) является выполнение требования, чтобы множители, стоящие при v и v_s в формуле (3.2) были одного знака и чтобы, кроме того, имело место соотношение:

$$\begin{aligned}
 N_s(\mathbf{k}v_0 - \omega) | \gamma_s [A + C + 2 \sin^2\alpha (\omega + \omega_H) (D + E)] e^{\delta_+^s} + \\
 + \gamma_s [A - C + 2 \sin^2\alpha (\omega - \omega_H) (D - E)] e^{\delta_-^s} + \\
 + (\gamma_{1s} B - 4\omega\gamma_s D \sin^2\alpha) e^{\delta_0^s} | > \\
 > N\omega | \gamma [A + C + 2 \sin^2\alpha (\omega + \omega_H) (D + E)] e^{\delta_+} + \\
 + \gamma [A - C + 2 \sin^2\alpha (\omega - \omega_H) (D - E)] e^{\delta_-} + \\
 + (\gamma_1 B - 4\omega\gamma D \sin^2\alpha) e^{\delta_0} |. \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Более простое выражение для коэффициента нарастания (затухания) можно получить, если потребовать выполнения некоторых дополнительных условий.

Пусть выполнено неравенство*

$$(\omega - \mathbf{k}v_0 + \omega_H)^2 \ll k^2 v_{Ts}^2 \cos^2\alpha. \quad (3.6)$$

Если $\omega_H > \omega$, то из условий (3.4) и (3.6) с необходимостью следует выполнение неравенства:

$$(\omega - \mathbf{k}v_0 - \omega_H)^2 \gg k^2 v_{Ts}^2 \cos^2\alpha. \quad (3.7)$$

Если же $\omega_H < \omega$, то выполнение условия (3.6) совместно с неравенством, обратным (3.7). Имея в виду рассмотрение в дальнейшем распространения низкочастотных медленных волн при $\omega_0^2 \gg \omega^2$, примем, что

* Случай, когда выполняется обратное неравенство, представляет значительно меньший интерес, так как при этом все сказанное выше о малости коэффициента нарастания (затухания) μ для плазменной волны остается в силе и для необыкновенной и обычной волн.

$\omega_H \cos\alpha \gg \omega$ (квазипротодольное распространение)*. При этом для показателя преломления n^2 из (3.1) получаем:

$$n^2 = \omega_0^2 / \omega \omega_H \cos\alpha. \quad (3.8)$$

Используя обозначения (1.16), из формул (3.2) и (3.8) при выполнении неравенств (3.6), (3.7) получаем для декремента нарастания (затухания) обыкновенной волны следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mu = & \frac{\omega_H}{2 n^2 u v^2 \cos\alpha} \left\{ (\omega - k v_0) v_s \left[\gamma_s \frac{\omega_H}{\omega} v^2 \frac{(1 - \cos\alpha)^2}{\cos\alpha} + \right. \right. \\ & + \gamma_{1s} v n^2 \sin^2\alpha e^{-\frac{(\omega - k v_0)^2}{2 k^2 v_T^2 \cos^2\alpha}} \left. \right] + \omega v \left[\gamma \frac{\omega_H}{\omega} v^2 \frac{(1 - \cos\alpha)^2}{\cos\alpha} \times \right. \\ & \times e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega + \omega_H}{k v_T \cos\alpha} \right)^2} + \gamma \frac{\omega_H}{\omega} v^2 \frac{(1 + \cos\alpha)^2}{\cos\alpha} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega - \omega_H}{k v_T \cos\alpha} \right)^2} + \\ & \left. \left. + \gamma_{1s} v n^2 \sin^2\alpha e^{-\frac{\omega^2}{2 k^2 v_T^2 \cos^2\alpha}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Условие усиления можно записать в виде:

$$\begin{aligned} f(v) = & \frac{k v_0 - \omega}{\omega} \frac{N_s}{N} \left\{ \gamma_{1s} n^2 \sin^2\alpha \exp \left[-\frac{(\omega - k v_0)^2}{2 k^2 v_{Ts}^2 \cos^2\alpha} \right] + \right. \\ & + \gamma_s \frac{\omega_H}{\omega} v \frac{(1 - \cos\alpha)^2}{\cos\alpha} \left. \right\} \left[\gamma_{1s} n^2 \sin^2\alpha \exp \left(-\frac{\omega^2}{2 k^2 v_T^2 \cos^2\alpha} \right) + \right. \\ & \left. + 2 \gamma \frac{\omega_H}{\omega} v \frac{1 + \cos^2\alpha}{\cos\alpha} \exp \left(-\frac{\omega_H^2}{2 k^2 v_T^2 \cos^2\alpha} \right) \right]^{-1} > 1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отсюда для концентрации потока получаем:

$$\begin{aligned} N_s > N \frac{\omega}{k v_0 - \omega} \left[\gamma_{1s} n^2 \sin^2\alpha e^{-\frac{\omega^2}{2 k^2 v_T^2 \cos^2\alpha}} + 2 \gamma \left(\frac{\omega_H}{\omega} \right) \times \right. \\ & \times v \frac{1 + \cos^2\alpha}{\cos\alpha} e^{-\frac{\omega_H^2}{2 k^2 v_T^2 \cos^2\alpha}} \left. \right] \left[\gamma_{1s} n^2 \sin^2\alpha \times \right. \\ & \times e^{-\frac{(\omega - k v_0)^2}{2 k^2 v_{Ts}^2 \cos^2\alpha}} + \left. \gamma_v \left(\frac{\omega_H}{\omega} \right) v \frac{(1 - \cos\alpha)^2}{\cos\alpha} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из формул (3.9) и (3.11) нетрудно видеть, что при продольном распространении возмущений ($\alpha = C$) нарастания быть не может. Последний результат совпадает с аналогичным выводом, сделанным при квантовом и классическом рассмотрении продольного распространения

* Как известно [14], при $\omega_0^2 \gg \omega^2$ становится возможным распространение обыкновенных волн, если $\omega_H \cos\alpha \gg \omega$. Условие $n^2 \gg 1$ тогда справедливо при $v \gg \sqrt{u} \cos\alpha$. Последнее условие может быть выполнено также и при $\omega_H \cos\alpha \gg \omega$ и $v \approx \sqrt{u} \cos\alpha$, однако этот случай менее интересен, так как относится к более узкому интервалу частот.

волн [3]. В случае поперечного распространения, когда $\alpha \rightarrow \pi/2$, коэффициент нарастания (затухания) μ также стремится к нулю. Если $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \pi/2$, то возмущение может нарастать.

Заметим, что в отсутствие потока частиц формула (3.10) переходит в соответствующие выражения, полученные в [17, 18].

Полученные на основе метода кинетического уравнения результаты о неустойчивости потока заряженных частиц в плазме и нарастании электромагнитных волн можно интерпретировать весьма наглядно, исходя из представления об излучении электронов в плазме (см. [3, 19]). При движении потока заряженных частиц в магнитоактивной среде с показателем преломления $n > 1$ возникает когерентное магнитотормозное и черенковское излучение. При этом кинетическая энергия поступательного движения частиц частично переходит в энергию излучений и плотность энергии излучения может нарастать. При нарастании волн роль неподвижной плазмы сводится к следующему: с одной стороны, она обеспечивает выполнение условия $n > 1$, т. е. служит своего рода замедляющей системой для волн, с другой стороны, даже в отсутствие соударений нарастанию препятствует специфический механизм затухания Ландау [12]. Если концентрация N_s достаточно велика, то затухание Ландау не сможет препятствовать нарастанию поля, и система становится неустойчивой (в линейном приближении).

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность Б. Н. Гершману за ценные указания и помочь в работе, а также В. В. Железнякову за просмотр рукописи и дискуссию результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Астроном. ж., **35**, 694 (1958).
2. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика **1**, 2, 59 (1958).
3. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 14 (1959).
4. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ЖЭТФ, **21**, 1262 (1951).
5. Г. Г. Гетманцев, В. О. Рапопорт, ЖЭТФ, **38**, 4, 1205 (1960).
6. R. Q. Twiss, Phys. Rev., **84**, 448 (1951).
7. Г. Ф. Филимонов, Радиотехника и электроника, **1**, 75 (1959).
8. А. И. Ахиезер, Nouve Cimento, **3**, 4 (1956).
9. I. Bergstein, Phys. Rev., **109**, 10 (1958).
10. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Файнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, М., 1953.
11. Б. Н. Гершман, В. Л. Гинзбург, Н. Г. Денисов, УФН, **61**, 561 (1957).
12. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, **16**, 571 (1946).
13. А. И. Ахиезер, Л. Э. Паргаманик, Уч. зап. ХГУ, **27**, 75 (1948).
14. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, **24**, 659 (1953).
15. А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, ЖЭТФ, **31**, 642 (1956).
16. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, **31**, 707 (1956).
17. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, **37**, 696 (1959).
18. В. Д. Шафранов, ЖЭТФ, **34**, 1476 (1956).
19. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ДАН СССР, **56**, 583 (1947).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете.

Поступила в редакцию
29 января 1960 г.

О ЕСТЕСТВЕННОМ ВРАЩЕНИИ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЗВУКА

A. A. Андронов

Рассмотрено вращение плоскости поляризации звука в изотропном теле и кристаллах в случае нелокальной связи между напряжениями и деформациями (при учете пространственной дисперсии).

В электродинамике эффекты, связанные с пространственной дисперсией, хорошо известны и в ряде случаев малы. Однако даже в этих условиях учет пространственной дисперсии необходим, так как он приводит к качественно новым явлениям [1,2]. К числу таких явлений относится естественная оптическая активность.

Учет пространственной дисперсии может представлять интерес и при распространении звука, а в принципе, и вообще в гидродинамике и теории упругости (см., например, учет пространственной дисперсии при распространении звука в жидкостях [3], в металлах [4]).

В данной работе произведен учет пространственной дисперсии при распространении звука в твердом теле. При этом мы ограничимся рассмотрением эффекта вращения плоскости поляризации звука, для чего достаточно учесть первый член разложения по соответствующему параметру. Заметим, что кроме естественного вращения плоскости поляризации звука возможно вращение плоскости поляризации звука в магнитоактивной среде [4,5].

Напишем уравнения теории упругости с учетом пространственной дисперсии. Ограничивааясь одним членом разложения по параметру a/L , где a —атомные размеры, а L —размер, на котором существенно изменяются деформации и другие величины, имеем следующую связь между тензором напряжений σ_{lk} и тензором деформаций u_{lm} *:

$$\sigma_{lk} = \lambda_{iklm} u_{lm} + \gamma_{iklmn} \partial u_{lm} / \partial x_n. \quad (1)$$

Здесь λ_{iklm} —тензор модулей упругости, а γ_{iklmn} —тензор, характеризующий пространственную дисперсию (везде по дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование). Эффекты, связанные с учетом члена $\gamma_{iklmn} \partial u_{lm} / \partial x_n$, можно назвать (по аналогии с оптикой) естественной активностью. Член $\lambda_{iklmn} u_{lm} \sim \lambda_{iklm} u_{lm}$, если u_{lm} заметно изменяется на расстояниях порядка a . Кроме того, $\lambda_{iklm} \sim \rho c^2$. Отсюда

$$|\gamma_{iklmn}| \sim \rho c^2 a. \quad (2)$$

Здесь ρ —плотность среды, а c —скорость звука.

Тензор γ_{iklmn} , как тензор нечетного ранга, отличен от нуля только в том случае, если тело не обладает центром симметрии. Для изотропных тел это возможно только при существовании стереозимеров,

* Связь (1) в электродинамике соответствует связь

$$D_l = \epsilon_{lk} E_k + \gamma_{lkl} \partial E_k / \partial x_l$$

(см. [1,2]).

причем они должны содержаться в теле в разных количествах. Установим симметрию тензора γ_{iklmn} . Этот тензор, очевидно, можно считать симметричным по индексам i и k , l и m просто в силу симметрии тензоров u_{ik} и σ_{ik} . Считая все величины пропорциональными $e^{i\omega t}$ (это означает, что тензор γ_{iklmn} может зависеть от частоты), из обобщенного принципа симметрии кинетических коэффициентов заключаем, что

$$\gamma_{iklmn} = -\gamma_{lmkn}. \quad (3)$$

В отсутствие поглощения этот тензор вещественен. В этом можно убедиться, приравняв нулю среднюю по времени мощность упругих сил в теле*.

Нетрудно показать, что в изотропном теле тензор γ_{iklmn} характеризуется одним параметром, причем отличными от нуля компонентами тензора являются

$$\gamma_{xzyzz} = \gamma \quad (4)$$

и все другие компоненты, равные $\pm \gamma_{xzyzz}$ в силу свойства симметрии тензора (см. выше). Для плоских волн в изотропном теле из обычных уравнений теории упругости

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad (5)$$

получим (с учетом соотношений (1) и (4)):

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2 u_x &= -\rho c_t^2 k^2 u_x + i\gamma k^3 u_y; \\ -\rho\omega^2 u_y &= -\rho c_t^2 k^2 u_y - i\gamma k^3 u_x; \\ -\rho\omega^2 u_z &= -\rho c_t^2 k^2 u_z. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь u_i — компоненты смещения ($2u_{ik} = \partial u_i / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_i$), $k = k_z$, а c_t и c_t — скорости поперечных и продольных волн. (Заметим, что в выражении для тензора деформаций мы отбросили нелинейные члены, хотя они и не малы. Учет этих членов приводит к явлениям, качественно отличным от естественной активности [6]. Поэтому мы эти члены не учитываем.)

Из уравнений (6) видим, что распространение продольных волн не зависит от γ , а поперечные нормальные волны поляризованы по кругу, причем фазовые скорости волн с левой (—) и правой (+) поляризациями равны соответственно:

$$c_{\pm} = c_t (1 \pm \gamma\omega/2\rho c_t^3). \quad (7)$$

В такой среде на единице длины пути линейно-поляризованная волна испытывает поворот плоскости поляризации на угол

* Соотношение (3) справедливо, если внешнее магнитное поле равно нулю. Для плоских волн, пропорциональных $e^{i\omega t - ikz}$, мы можем ввести обобщенный тензор модулей упругости

$$\tilde{\lambda}_{iklm} = \lambda_{iklm} - \gamma_{iklmn} k_n$$

Тензор $\tilde{\lambda}_{iklm}$ эрмитовый по перестановке пар индексов i и k , l и m .

Если считать магнитное поле отличным от нуля и не учитывать пространственную дисперсию, то из обобщенного принципа симметрии кинетических коэффициентов можно заключить, что в отсутствие поглощения тензор λ_{iklm} будет эрмитовым по перестановке пар индексов i и k , l и m . Следовательно, во внешнем магнитном поле должны иметь место эффекты, аналогичные естественной активности.

$$\varphi = \gamma \omega^2 / 2 \rho c_i^4. \quad (8)$$

Учитывая оценку (2), получаем:

$$\varphi \sim a/\lambda^2, \quad \lambda = 2\pi c_i/\omega. \quad (8a)$$

При достаточно высоких частотах эффект вращения плоскости поляризации звука становится большим. Например, для $\omega \sim 10^8 \text{ гц}$ $\varphi \sim 10^{-1} \text{ см}^{-1}$, т. е. эффект уже велик*. Но надо иметь в виду, что наблюдение поворота плоскости поляризации звука затрудняется поглощением. Действительно, для $\omega \sim 10^6 \text{ гц}$ показатель поглощения $\kappa \sim 10^{-3} \div 10^{-5} \text{ см}^{-1}$ (см., например, [7]), а $\varphi \sim 10^{-5} \text{ см}^{-1}$. Таким образом, обычно волна затухает быстрее, чем плоскость поляризации повернется на большой угол. Увеличение частоты, вообще говоря, не приводит к улучшению соотношения между φ и κ (обе эти величины пропорциональны ω^2), хотя иногда φ растет с увеличением частоты быстрее κ (см. [6,7]).

В оптике в области, где заметно поглощение, наблюдается круговой дихроизм [8]. Аналогичное явление имеет место и при распространении звука. Отношение осей эллипса поляризации у волны, которая прошла в среде путь l , а в начале среды была линейно-поляризованной, равно

$$N \sim \kappa \frac{a}{\lambda} l. \quad (9)$$

Необходимо заметить, что эта величина очень мала. Так, даже для $\omega \sim 10^9 \text{ гц}$ $N \sim 10^{-4} l \text{ см}$, в то время как $\kappa \sim 1 \div 10 \text{ см}^{-1}$.

Можно искусственно увеличить φ , создав специальные среды. Это можно сделать, например, путем внесения в какое-либо тело большого количества частиц, которые по своей форме не обладают центром симметрии и имеют модули упругости, отличные от модулей упругости тела. Для такой среды $\gamma \sim \rho c^2 L \xi$, где L —размер частиц (считаем, что $L \ll \lambda$), а ξ —фактор, определяемый концентрацией частиц. (Фактор $\xi \sim 1$, если вся среда состоит из рассматриваемых частиц.) В качестве таких частиц можно взять те или иные спирали. Для максимального увеличения φ необходимо, чтобы все они имели один знак вращения (правый или левый). Поглощение в такой среде возрастает (такая среда аналогична поликристаллам), однако, можно найти область частот, где $\varphi \gg \kappa$. Это, например, справедливо для $\omega \sim 10^3 \div 10^4 \text{ гц}$ при $L \sim 10^{-2} \div 10^{-1} \text{ см}$ (см. [6]).

Аналогичным путем можно создать среду, вращающую плоскость поляризации электромагнитных волн миллиметрового и сантиметрового диапазонов.

Рассмотрим естественно-активные кристаллы. При заданном направлении распространения удобно воспользоваться системой координат, где тензор (см., например, [6])

$$\eta_{lm} = \lambda_{iklm} n_l n_k / \rho \omega^2 \quad (10)$$

диагонален (n_i —единичный вектор в направлении распространения). В этой системе координат вместо уравнений (6) для изотропных тел получаем:

$$u_l (1 - k^2/k_i^2) - ik^3 \theta_{il} u_l = 0. \quad (11)$$

Здесь $1/k_i^2$ —главные значения тензора η_{ik} , а θ_{il} —антисимметричный тензор, определяемый соотношением:

* Силин [10] при рассмотрении поглощения звука в металлах обнаружил возможность вращения плоскости поляризации звука.

$$\theta_{il} = \gamma_{iklmn} n_k n_m n_n / \rho \omega^2. \quad (12)$$

Для расчета явлений естественной активности удобно ввести аксиальный „вектор гирации“ g_i :

$$\begin{aligned} \theta_{ik} &= l_{ikl} g_l; \\ g_p &= 1/2 l_{pql} \theta_{ql}, \end{aligned} \quad (13)$$

где l_{ikl} — совершенно антисимметричный единичный псевдотензор. Соотношение (11) перепишется в виде:

$$n_i (1 - k^2/k_i^2) - ik^3 [ug]_i = 0. \quad (14)$$

Соотношение (13) можно записать в форме

$$g_i = G_{lpqr} n_p n_q n_r, \quad (15)$$

где

$$G_{lpqr} = \frac{1}{2\rho\omega^2} l_{lik} \gamma_{lpqkr}. \quad (16)$$

Псевдотензором G_{lpqr} определяется оптическая активность кристаллов. Поскольку в соотношение (15) n_p , n_q и n_r входят симметричным образом, то при исследовании естественной активности кристаллов можно считать тензор G_{iklm} симметричным по любой перестановке индексов k , l и m . Но этот тензор, вообще говоря, является несимметричным по индексам i и k^3 .

Тензор с такими свойствами симметрии имеет в общем случае 30 независимых компонент. Задав направление осей системы координат в теле, можно уменьшить число независимых компонент тензора до 27. Псевдотензор G_{iklm} заведомо исчезает у тех кристаллических классов, которые обладают центром симметрии. Из двадцати одного кристаллического класса, не имеющего центра симметрии, тензор G_{iklm} наверняка равен нулю только для кубического класса T_d . Для остальных 20 классов, не обладающих центром симметрии, псевдотензор G_{iklm} может быть отличен от нуля.

Выясним поляризацию нормальных волн в естественно активных кристаллах, считая все компоненты тензора θ_{il} отличными от нуля. Рассмотрим два основных случая: 1) все главные значения тензора γ_{ik} различны и величина

$$\left| 1 - k^2/k_j^2 \right| \sim 1 \quad (i \neq j); \quad (17)$$

2) два главных значения тензора γ_{ik} совпадают, а для несовпадающих главных значений справедливо отношение (17). Для нахождения величины волнового вектора и поляризации нормальных волн воспользуемся методом возмущений. Подставим в член с активностью в дисперсионном уравнении значение волнового вектора k без учета активности, а затем разложим уравнение для определения значения k в ряд по параметру пространственной дисперсии и величине $(k - k_i)^2$. В итоге получим следующее**.

В первом случае получается слабая эллиптическая поляризация (большая ось эллипса направлена вдоль оси, соответствующей задан-

* Мы можем симметризовать тензор G_{iklm} , вводя среднее арифметическое значение этого тензора по возможным перестановкам индексов k , l , m . При этом вектор g_i не изменяется.

** Напомним, что все рассмотрение ведется при заданном направлении распространения, так как только в этом случае задан тензор γ_{ik} .

ному главному значению тензора γ_{ik}), с отношением осей порядка a/λ для всех волн. Во втором случае поляризация оказывается правой и левой круговой (в плоскости, проходящей через оси, для которых главные значения тензора γ_{ik} совпадают). Третья волна аналогична нормальным волнам, рассмотренным в первом случае, причем большая ось эллипса направлена вдоль оси координат, для которой главное значение тензора γ_{ik} не совпадает с двумя другими главными значениями*.

Таким же путем могут быть рассмотрены другие случаи, соответствующие различным соотношениям между главными значениями тензора γ_{ik} , в частности, случай эллиптической поляризации с отношением осей порядка единицы. (Это имеет место, когда отношение двух главных значений тензора γ_{ik} близко к единице.)

Необходимо иметь в виду, что даже в тех случаях, когда два главных значения тензора γ_{ik} совпадают, вращение плоскости поляризации звука может отсутствовать, хотя тензор $G_{iklm} \neq 0$. Это, например, имеет место для тетрагонального класса C_{4v} при распространении звука вдоль оси симметрии. Действительно, если обозначить эту ось за ось z , то компоненты тензора $\theta_{xy} = -\theta_{yx} = 0$. Этим и объясняется отсутствие вращения. (Отметим, что выше при выяснении поляризации нормальных волн мы считали все компоненты тензора θ_{ik} , исчезающие из-за свойств симметрии тензора, отличными от нуля.)

В заключение необходимо заметить, что на эффект естественного вращения плоскости поляризации звука указал В. Л. Гинзбург, которому автор выражает благодарность за тему и руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957.
2. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 34, 1593 (1958).
3. В. Л. Гинзбург, ДАН СССР, 36, 9 (1942).
4. C. Kittel, Phys. Rev., 110, 836 (1958).
5. К. Б. Власов, Б. Х. Ишмухаметов, ЖЭТФ, 36, 1301 (1959); 37, 479 (1959).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1954.
7. Л. Бергман, Ультразвук и его применение в науке и технике, ИЛ, М., 1956.
8. В. М. Волькенштейн, Молекулярная оптика, ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
9. В. П. Силин, ЖЭТФ, 23, 649 (1952).
10. В. П. Силин, ЖЭТФ (в печати).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
28 февраля 1960 г.

* Случай совпадения всех главных значений тензора γ_{ik} возможен лишь в исключительных случаях. Поэтому мы его не рассматриваем.

О ВОЗМОЖНОЙ РОЛИ КОГЕРЕНТНЫХ ЯВЛЕНИЙ В МАГНИТНОМ РЕЗОНАНСЕ

Г. В. Скроцкий, А. А. Кокин

Рассмотрено поведение системы взаимодействующих магнитных моментов с учетом поля излучения в резонаторе и свободном пространстве. Для случая малых отклонений намагниченности от положения равновесия найдены выражения для времен релаксации и сдвига резонансной частоты.

1. При изучении поведения системы магнитных моментов во внешнем поле обычно учитывают внутренние взаимодействия между частицами и пренебрегают взаимодействием через поле излучения. Однако в условиях магнитного резонанса длина электромагнитных волн, соответствующих резонансной частоте, оказывается больше не только расстояния между частицами, но и размеров исследуемого образца. В этом случае система магнитных моментов по отношению к излучению ведет себя как единая квантово-механическая система, когерентно излучая и поглощая энергию электромагнитного поля.

Учет когерентных явлений такого рода в магнитном резонансе в некоторых случаях может привести к существенному изменению в поведении системы магнитных моментов во внешнем поле. При этом следует иметь в виду, что взаимодействие между молекулами может как способствовать сохранению когерентного состояния (обменные взаимодействия), так и расстраивать его (диполь-дипольные взаимодействия).

Ниже мы ограничимся рассмотрением случая, когда резонансная частота $\omega_0 = \gamma H_0$ значительно больше обратных времен релаксации, обусловленных внутренними взаимодействиями. В этом случае можно пренебречь расстройкой системы спинов. Последнее условие может не иметь места в случае магнитного резонанса в системах с широкими резонансными линиями.

Впервые роль когерентных явлений в радиодиапазоне на примере системы частиц, каждая из которых может находиться на одном из двух возможных уровнях энергии, была рассмотрена в работе Дика [1], а затем более корректно в работе Альперина [2]. Было показано, что учет этих явлений может привести к существенному изменению как интенсивности, так и ширины линии излучения. В статье Файна [3] было показано, что учет взаимодействия частиц через общее поле излучения должен приводить в области радиочастот к сдвигу резонансной частоты.

На роль этого явления в применении к магнитному резонансу впервые было обращено внимание в статье Бломбергена и Ванга [4], которая послужила толчком к ряду работ [5–8], посвященных изучению влияния поля излучения на образец, находящийся в приемной катушке резонансного контура. Для случая квазистационарных процессов было показано, что изменение ширины резонансной кривой, вызванное полем излучения, определяется добротностью, коэффициентом заполнения контура и схемой приемного устройства.

В настоящей работе обсуждается роль когерентного дипольного

магнитного излучения в явлении магнитного резонанса. Для образца, помещенного в резонатор произвольной формы, с произвольным спектром собственных частот вычисляются поперечное и продольное времена релаксации, обусловленные взаимодействием с полем излучения.

2. В условиях эксперимента по магнитному резонансу образец помещается в катушку резонансного контура или резонатор, что существенно сказывается на величине радиационных поправок.

Рассмотрим образец, помещенный в резонатор объема V_p произвольной формы, находящийся во внешнем поле $H_0 = H_z$. При большой добротности $Q_n \gg 1$ резонатора его собственные частоты ω_n и собственные функции $v_{\lambda n}(\mathbf{r})$ мало отличаются от собственных частот и собственных функций резонатора без потерь. Последние определяются уравнениями

$$\Delta v_{\lambda n} + \frac{\omega_n^2}{c^2} v_{\lambda n} = 0; \\ \operatorname{div} v_{\lambda n} = 0 \quad (1)$$

и граничными условиями идеального резонатора.

Параметр $n(n_1, n_2, n_3)$ в уравнении (1) пробегает дискретные значения, а значения индекса $\lambda = \pm 1$ соответствуют двум возможным состояниям поляризации. Собственные функции $v_{\lambda n}$ будем считать ортонормированными:

$$\int_{V_p} v_{\lambda n \alpha} v_{\lambda' n' \alpha'}^* dv = \delta_{nn'} \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{\alpha \alpha'}; \\ \sum_{n \lambda} v_{\lambda n}(\mathbf{r}) v_{\lambda n}^*(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2)$$

где α обозначает составляющие вектора $v_{\lambda n}$ в круговых переменных:

$$v_{\pm 1} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (v_x \pm i v_y), \quad v_0 = v_z.$$

Затухание в резонаторе может быть учтено введением комплексных частот для составляющих вектора $v_{\lambda n}$:

$$\omega_n^2 \rightarrow \omega_n^2 (1 - i \alpha / Q_n). \quad (3)$$

Для определения поля излучения в резонаторе с помещенным в него малым образцом объема V будем исходить из уравнения:

$$\Delta \mathbf{H}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}'}{\partial t^2} = -4\pi \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad (4)$$

решение которого можно представить в виде:

$$H'_\alpha(r, t) = 4\pi \sum_\beta \int_{V_p} dv' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G_{\alpha \beta}(r, r', t, t') \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{M}(r, t'), \quad (5)$$

где тензорная функция Грина с запаздывающим действием имеет вид:

$$G_{\alpha \beta}(r, r', t, t') = \frac{c^2}{2\pi} \sum_{n, \lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{v_{\lambda n \alpha}(r) v_{\lambda n \beta}^*(r') e^{-i\omega'(t-t')}}{\omega_n^2 (1 - i \alpha / Q_n) - \omega'^2} \quad (t > t'); \quad (6)$$

$$G_{\alpha \beta}(r, r', t, t') = 0 \quad (t < t').$$

Начиная с некоторого $n = n_m$, когда период изменения $\mathbf{v}_{\lambda n}(\mathbf{r})$ в пространстве становится меньше размеров образца:

$$c/\omega_n < V^{1/3} = c/\omega_m,$$

слагаемыми с $n > n_m$ можно пренебречь, а также положить

$$\mathbf{v}_{\lambda n}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{v}_{\lambda n}(0) \quad (n < n_m), \quad \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}(0, t).$$

Учитывая, что

$$\int_{V_p} \mathbf{v}_{\lambda n}^*(\mathbf{r}') \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{v}' = \frac{\omega_n^2}{c^2} \int_{V_p} \mathbf{v}_{\lambda n}^*(\mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{v}', \quad (7)$$

получим для напряженности поля излучения выражение:

$$H'_a(t) = \sum_{n, \lambda \beta} \gamma_{\alpha \beta}^{\lambda n} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \left\{ \frac{\omega'^2 M_\beta(t') e^{-i\omega'(t-t')}}{\omega_n^2 (1 - i\alpha/Q_n) - \omega'^2} + M_\beta(t') \right\}, \quad (8)$$

где

$$\gamma_{\alpha \beta}^{\lambda n} = 2V \mathbf{v}_{\lambda n \alpha}(0) \mathbf{v}_{\lambda n \beta}^*(0). \quad (9)$$

3. Пусть в резонаторе, в котором находится образец, имеет место установившийся режим с частотой ω . Поведение намагниченности будем описывать уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} + \frac{i[M_x - \chi_0 H_x(t)] + j[M_y - \chi_0 H_y(t)]}{T_\perp} + \\ + \frac{k[M_z - \chi_0 H_z(t)]}{T_\parallel} = \gamma [\mathbf{MH}(t)] \end{aligned} \quad (10)$$

$$(\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'(t) + \mathbf{h}(t)),$$

которое для малых отклонений от состояния равновесия $M_a(t) \approx \chi_0 H_0 \delta_{a0}$ принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{M}_a(t) + (i\alpha\omega_0 + 1/T_a)[M_a(t) - \chi_0 H_0 \delta_{a0}] = \\ = \chi_0 [H'_a(t) + h_a(t)] (i\alpha\omega_0 + 1/T_a), \\ \omega_0 = \gamma H_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Если внешнее переменное магнитное поле $\mathbf{h}(t)$ имеет левую поляризацию в плоскости, перпендикулярной к постоянному полю \mathbf{H}_0 :

$$h_a(t) = -\frac{\alpha h_0}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t}, \quad (12)$$

то для установившегося движения намагниченности, пренебрегая в первом приближении реакцией излучения, получим

$$M_a(t) = \frac{\chi_{0a} (i\alpha\omega_0 + 1/T_\perp)}{-i\alpha(\omega - \omega_0) + 1/T_\perp} \quad (\alpha = \pm 1). \quad (13)$$

Подставляя это выражение в (8) и учитывая, что интегрирование по t' при $t' > 1/\omega_m$ дает δ -функцию, найдем:

$$H'_a(t) = 2\pi \sum_n \sum_\beta \gamma_{\alpha \beta}^{\lambda n} \left\{ \frac{(\beta\omega)^2 M_\beta(t)}{\omega_n^2 (1 - i\alpha/Q_n) - (\beta\omega)^2} + M_\beta(t) \right\}. \quad (14)$$

Теперь, воспользовавшись (11), приходим к системе связанных уравнений для определения $M_\alpha(t)$ с учетом реакции излучения. Эта система уравнений принимает простой вид в двух практически интересных случаях, которые мы рассмотрим ниже.

4. Рассмотрим практически важный случай, когда ширина полос собственных частот резонатора мала по сравнению с разностью соседних частот

$$\omega_n - \omega_{n'} \gg \omega_n / 2Q_n$$

и одна из собственных частот, например ω_α , совпадает с ω_0 . В этом случае основным членом в (14) будет

$$H'_\alpha(t) = 2\pi i \alpha \gamma_{\alpha\alpha}^{(a)} Q M_\alpha(t) \quad (\alpha = \pm 1). \quad (15)$$

Подставляя это выражение в (11), получим для поперечных составляющих вектора намагниченности уравнение:

$$\dot{M}_\alpha + (i\alpha\omega_0^* + 1/T_\perp^*) (M_\alpha - M_{0\alpha}) = \chi_0 h_\alpha(t) (i\alpha\omega_0 + 1/T_\perp) \quad (\alpha = \pm 1), \quad (16)$$

где

$$i\alpha\omega_0^* + 1/T_\perp^* \simeq i\alpha\omega_0 + (1/T_\perp + 2\pi\eta Q \chi_0 \omega_0). \quad (17)$$

Коэффициент $\eta = \gamma_{\alpha\alpha}^{(a)}$ является обычным коэффициентом заполнения и, согласно (9), может быть определен следующим образом:

$$\eta = 2V \frac{|H_{1\alpha\alpha}(0)|^2}{\sum_\lambda \int_{V_p} |H_{\lambda\alpha\alpha}|^2 dv}. \quad (18)$$

Полученное выражение (17) совпадает с известным выражением Бломбергена и Паунда [5], найденным ими для контура со сосредоточенными параметрами в случае слабой связи, и недавно было подтверждено экспериментом [11].

Используя (15), легко найти поправку к продольному времени релаксации. Для этого подставим (15) в уравнение для продольной составляющей $M(t)$. Тогда получим:

$$\dot{M}_0 = -i\gamma [M_{+1}H_{-1} - M_{-1}H_{+1}] - T_\parallel^{-1} (M_0 - \chi_0 H_0), \quad (19)$$

откуда

$$\dot{M}_0 = -4\pi\eta Q \gamma M_{+1} M_{-1} - T_\parallel^{-1} (M_0 - \chi_0 H_0). \quad (20)$$

Учитывая далее, что

$$2M_{+1}M_{-1} = M_0^2 - (\chi_0 H_0)^2 \simeq 2M_0\chi_0 H_0,$$

найдем простое уравнение

$$\dot{M}_0 + \frac{1}{T_\parallel^*} (M_0 - \chi_0 H_0) = 0, \quad (21)$$

где

$$\frac{1}{T_\parallel^*} = \frac{1}{T_\parallel} + 4\pi\eta Q \chi_0 \omega_0. \quad (22)$$

Таким образом, обратное продольное время релаксации имеет, как и для свободного пространства [10], вдвое большую добавку, чем обратное поперечное время релаксации.

5. Другой случай имеет место, когда объем резонатора $V_p \rightarrow \infty$; при этом $Q \rightarrow \infty$, $\eta Q \rightarrow 0$, что соответствует переходу к свободному пространству. В этом случае сумму по n, λ в (14) можно заменить интегралом:

$$\sum_{\substack{n \lambda \\ n < m}} \dots \rightarrow \sum_{\lambda} \frac{V_p}{(2\pi)^3} \int_0^{\omega_m} \dots \frac{\omega_k^2 d\omega_k}{c^3} d\Omega_k, \quad (23)$$

а собственные функции — векторами

$$\mathbf{v}_{\lambda n}(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{V_p}} \mathbf{e}_{\lambda k},$$

где $\mathbf{e}_{\lambda k}$ — единичный вектор поляризации плоской волны с волновым вектором \mathbf{k} ($|\mathbf{k}| = \omega_k/c$).

Замечая далее, что

$$\int d\Omega_k \sum_{\lambda} \gamma_{\alpha\beta}^{\lambda n} = \frac{V}{V_p} \frac{8\pi}{3} \delta_{\alpha\beta}, \quad (24)$$

найдем выражение для напряженности магнитного поля излучения:

$$H_{\alpha}^r(t) = \lim_{Q_k \rightarrow \infty} \frac{4V}{3\pi} \int_0^{\omega_m} \frac{\omega_k^2 d\omega_k}{c^2} \left\{ \frac{(\alpha\omega)^2 M_{\alpha}(t)}{\omega_k^2 (1 - i\alpha/Q_k) - (\alpha\omega)^2} + M_{\alpha}(t) \right\}. \quad (25)$$

Отсюда, воспользовавшись символическим равенством

$$\lim_{Q_k \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega_k^2 (1 - i\alpha/Q_k) - (\alpha\omega)^2} = \frac{P}{\omega_k^2 - (\alpha\omega)^2} + i\pi\delta[\omega_k^2 - (\alpha\omega)^2], \quad (26)$$

где символ P означает, что при интегрировании выражения по ω_k берется главное значение интеграла, получим:

$$H_{\alpha}^r(t) = \frac{4V}{3\pi} \left\{ \frac{\omega_m^3}{3c^3} M_{\alpha}(t) + \frac{\omega_m (\alpha\omega)^2}{c^3} M_{\alpha} + \frac{i\pi}{2c^3} (\alpha\omega)^3 M_{\alpha} \right\}. \quad (27)$$

Первое слагаемое соответствует вектору $\mathbf{H}(t)$, направленному по $\mathbf{M}(t)$, и поэтому является несущественным для учета реакции излучения (векторное произведение!). Остальные члены при подстановке в (11) дают снова выражение вида (16), но с

$$i\alpha\omega_0^* + \frac{1}{T_{\perp}^*} = i\alpha\omega_0 \left(1 - \frac{4V}{3\pi c^3} \omega_m \omega^2 \right) + \left(\frac{1}{T_{\perp}} + \frac{2V}{3c^3} \omega^3 \omega_0 \right). \quad (28)$$

Продольное время релаксации с учетом реакции излучения в этом случае находится аналогично (22) и оказывается равным

$$\frac{1}{T_{\parallel}^*} = \frac{1}{T_{\perp}} + \frac{4}{3} \frac{V}{c^3} \omega^3 \omega_0. \quad (29)$$

Таким образом, выражения (28), (29) совпадают с полученными ранее для случая свободного пространства [3, 9, 10].

Авторы приносят благодарность В. Л. Гинзбургу за обсуждение работы и ценные советы при ее выполнении.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Dicke, Phys. Rev., **93**, 99 (1954).
2. М. М. Альперин, Украинский физ. ж., **2**, 322 (1957).
3. В. М. Файн, ЖЭТФ, **36**, 797 (1959).
4. N. Bloembergen, S. Wang, Phys. Rev., **93**, 72 (1954).
5. N. Bloembergen, R. V. Pound, Phys. Rev., **95**, 8 (1954).
6. C. R. Bruce, R. E. Norberg, G. E. Pake, Phys. Rev., **104**, 419 (1956).
7. H. Pfeifer, Ann. d. Phys., **15**, 309 (1956).
8. S. Bloom, J. Appl. Phys., **28**, 800 (1957).
9. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, **13**, 33 (1943).
10. Г. В. Скроцкий, А. А. Кокин, ЖЭТФ, **37**, 802 (1959).
11. A. Szöke, S. Meiboom, Phys. Rev., **113**, 585 (1959).

Уральский политехнический
институт

Поступила в редакцию
28 августа 1959 г.,
после переработки
10 марта 1960 г.

К ТЕОРИИ МАЗЕРА С БЕГУЩЕЙ ВОЛНОЙ

B. M. Конторович

Обсуждается зависимость коэффициента усиления мазера с бегущей поверхностью волной от дисперсионных свойств замедляющей системы. Для парамагнитных систем, у которых резонанс имеет место для циркулярно поляризованного магнитного поля, максимальное усиление поверхности волны достигается при наибольшем замедлении по фазовой скорости. При этом коэффициент усиления встречной поверхности волны стремится к нулю. Замедляющая система описывается с помощью эффективного поверхностного импеданса. Получено выражение для средней плотности энергии волны с учетом энергии, запасенной в замедляющей системе.

1. ВВЕДЕНИЕ. МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ПРИ ДВОЙНОМ РЕЗОНАНСЕ

Разработанный Де Грассом, Шульц-Дюбуа и Сковилом [1,2] трехуровневый мазер с бегущей волной является на ближайшее время наиболее перспективным широкополосным усилителем с низким уровнем шумов. Вместо резонатора в мазере с бегущей волной применяется волновод или замедляющая система.

Как и в остальных трехуровневых мазерах, использующих твердое тело [3], кристалл с парамагнитной присадкой помещается во внешнее магнитное поле H_0 , создающее зеемановский спектр примеси. Эта квантовая система с дискретным спектром одновременно находится в двух резонансных полях [4]: в сильном поле подкачки с частотой ω_1 ($\omega_1 \approx \omega_{mq}$) и слабом поле усиливаемого сигнала частоты ω ($\omega \approx \omega_{mn}$). Здесь m , n и q — квантовые числа резонансных энергетических уровней, ω_{mn} и ω_{mq} — соответствующие частоты переходов. Поле подкачки обеспечивает необходимое для усиления отрицательное поглощение на рабочей частоте ω . Средний магнитный момент единицы объема при наличии двух резонансных полей с общим резонансным энергетическим уровнем вычислялся в различных предположениях о процессах релаксации [5–7]. На эффективные населенности уровней влияют переходы через общий уровень как промежуточный. В простейшем случае линия резонанса представляет собой наложение двух лоренцевых кривых, сдвинутых одна относительно другой [6]. В общем случае вероятности релаксационных переходов отнюдь не группируются в два времени релаксации T_1 и T_2 (как для одного резонансного поля [6]), а входят более сложным образом, существенно включая и так называемые коэффициенты Оверхаузера [5,7,8].

В дальнейшем мы предположим, что правила отбора для перехода $m \rightarrow n$ соответствуют правилам отбора по магнитному квантовому числу в отсутствие кристаллического поля:

$$d_{nm}^+ = d_{mn}^- = d_{mn}^y = d_{nm}^{y*} = 0, \quad d_{mn}^+ = (d_{nm}^-)^* \neq 0, \quad (1)$$

где $d^\pm = d^z \pm id^x$ — оператор магнитного момента.

Пусть магнитное поле H_0 направлено по оси y . Для магнитного момента M на частоте ω , очевидно, имеем [6,7]:

$$\mathbf{M}(t) = \operatorname{Re} \{ \mathbf{d}_{nm} (\mathbf{d}_{mn} \mathbf{H}) Q e^{-i\omega t} \}, \quad (2)$$

где множитель Q , определяющий форму линии, не зависит от амплитуды \mathbf{H} усиливаемого сигнала (отсутствие насыщения по частоте ω). При правилах отбора (1) резонансной является циркулярная поляризация магнитного поля:

$$\mathbf{d}_{mn} \mathbf{H} = \frac{d_{mn}^+}{2} (H^z - iH^x). \quad (3)$$

Тензор магнитной проницаемости принимает вид:

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} 1 + i\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 + i\alpha \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$i\alpha = \pi |d_{mn}^+|^2 Q. \quad (5)$$

Средняя за период плотность магнитных потерь равна [9]

$$\bar{p} = \frac{i\omega}{16\pi} (\mu_{ik} - \mu_{kl}) H_l H_k. \quad (6)$$

Для μ_{ik} , определяемого соотношением (4), это выражение переходит в

$$\bar{p} = \frac{\omega\alpha'}{8\pi} \{ |H_x|^2 + |H_z|^2 + 2\operatorname{Im} H_x H_z^* \} = \frac{\omega\alpha'}{8\pi} |H_-|^2. \quad (7)$$

Здесь введена аксиальная компонента магнитного поля

$$H_\pm = H_z \pm iH_x. \quad (8)$$

Поглощению соответствует $\alpha' \equiv \operatorname{Re} \alpha > 0$, отрицательному поглощению (излучению) на частоте ω соответствует $\alpha' < 0$.

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ

Для логарифма δ коэффициента усиления по мощности в [2] приводится следующее выражение:

$$\frac{\Sigma(L)}{\Sigma(0)} = e^\delta, \quad \delta = - \frac{\alpha'_{\max} \omega L}{v_{rp}} F. \quad (9)$$

Здесь $\Sigma(z) = \int \bar{S}_z dx dy$ — средний поток энергии через поперечное сечение, v_{rp} — групповая скорость волны (при $\alpha' = 0$), L — длина системы, F — фактор заполнения (см. ниже). Хотя из (9) следует, что усиление пропорционально замедлению по групповой скорости, зависимость коэффициента усиления от дисперсионных свойств замедляющей системы этой формулой полностью не определяется, так как фактор заполнения, в свою очередь, существенно зависит от структуры поля в замедляющей системе, т. е. от ее дисперсионных свойств.

Если в волноводе групповая скорость однозначно выражается через фазовую скорость волны независимо от геометрии волновода:

$$v_\phi v_{rp} = c^2, \quad (10)$$

то в замедляющей системе групповая скорость в разных системах различным образом и притом неоднозначно (для обратной зависимости) связана с фазовой скоростью. Поэтому, если не задаваться какой-либо

определенной замедляющей системой, то v_ϕ и v_{rp} нужно считать независимыми величинами, характеризующими дисперсию системы. На примере замедляющей системы с поверхностной волной (см. раздел 4) можно убедиться, что при таком подходе групповая скорость вообще не войдет в выражение для коэффициента усиления мазера рассматриваемого типа. Действительно, если поля пропорциональны $\exp i(\gamma z - \omega t)$, то

$$\delta = -2\gamma'' L \quad (11)$$

и коэффициент усиления полностью определяется мнимой частью продольного волнового числа γ'' . Последнее находится из дисперсионного уравнения, содержащего γ_0 (постоянную распространения при $\alpha' = 0$) и ω , т. е. $v_\phi = \omega/\gamma_0$, и не содержащего независимой от фазовой скорости $v_{rp} = d\omega/d\gamma_0$ (которая определяется функциональной зависимостью γ_0 от ω).

При $\alpha' \ll 1$ ($\alpha'_{\max} \sim 10^{-2} - 10^{-3}$ в мазерах), для того, чтобы найти δ или γ'' , нет необходимости решать дисперсионное уравнение. Достаточно воспользоваться энергетической формулой для γ'' (см. сноску к (25)), которая широко применяется при вычислении затухания в волноводах [9, 10]:

$$2\gamma'' = P/\Sigma. \quad (12)$$

Здесь $P = \int \bar{p} dx dy$ — средняя мощность потерь на единицу длины. Так как $\bar{p} \sim \alpha'$, в первом приближении по α поля для вычисления P и Σ следует брать из невозмущенной задачи (при $\alpha' = 0$).

Очевидно, что в указанном выше смысле и в (12) также не входит v_{rp} : поглощаемая мощность \bar{p} и поток энергии $\bar{S} = \operatorname{Re} \frac{c}{8\pi} [E, H^*]$

зависят от ω и γ_0 , но не от производных по частоте.

Если записать поток энергии в виде

$$\Sigma = v_{rp} W, \quad (13)$$

где W — средняя плотность энергии на единицу длины, и ввести фактор заполнения

$$F = P/\alpha'_{\max} \omega W, \quad (14)$$

коэффициент усиления δ примет вид (9). Однако, как следует из (13) и (14), при независимых v_{rp} и v_ϕ $F \sim v_{rp}$ и δ определяется только фазовой скоростью и типом волны (в частности, ее поляризацией). В рассматриваемом нами случае (3) коэффициент усиления будет определяться той долей, которую составляет резонансная круговая поляризация в общем поле бегущей волны.

Для конкретного типа замедляющих систем v_ϕ и v_{rp} , конечно, связаны, причем эта связь определяется значениями геометрических параметров замедляющей системы. Изменению этих параметров, а также частоты соответствует определенное изменение как v_{rp} , так и v_ϕ , и, следовательно, поляризации волны. Коэффициент усиления при этом также изменяется; однако, вообще говоря, нельзя утверждать, что он увеличивается с уменьшением v_{rp} . Хотя с уменьшением v_{rp} (при том же потоке энергии Σ) увеличивается согласно (13) запасенная энергия W (т. е. амплитуда поля в бегущей волне), для увеличения коэффициента усиления необходимо не увеличение амплитуды вообще, а увеличение амплитуды „резонансных“ компонент, на которых происходит (отрицательное) поглощение (см. (12) и (7)).

Иллюстрацией к сказанному может служить следующий результат.

Ниже будет показано (см. раздел 4), что с ростом замедления по фазовой скорости для симметричной поверхности H -волны над импедансной плоскостью коэффициент усиления в прямом направлении возрастает, а в обратном, напротив, стремится к нулю. Очевидно, что либо для прямой, либо для встречной волны мы можем получить уменьшение усиления при уменьшении $v_{\text{гр}}$. Наряду с изменением $v_{\text{гр}}$ изменяется v_{Φ} , и несмотря на увеличение амплитуды (при $\Sigma = \text{const}$) усиление одной из волн уменьшается за счет исчезновения резонансной поляризации.

3. ОПИСАНИЕ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Будем описывать замедляющую систему с помощью реактивного поверхностного импеданса. Подобное моделирование позволяет учесть замедление, дисперсию и поверхностный характер волны в этой системе. В применении к теории антенн с бегущей волной реактивный импеданс вводится в работах [11] (см. также цитируемую там литературу).

В настоящем разделе мы рассмотрим H -волну с отличными от нуля компонентами E_y , H_x и H_z , однородную по оси y и распространяющуюся по оси z над плоскостью с поверхностным импедансом $Z(\omega)$:

$$E_y = Z(\omega) H_z \quad (x=0) \quad (15)$$

(см. рис. 1). Полупространство $x > 0$ заполнено непоглощающей средой с диэлектрической проницаемостью ϵ . В отсутствие внешнего магнитного поля H_0 (что мы предполагаем в настоящем разделе) на частоте $\omega = 1$, $\alpha = \mu_{ik}'' = 0$. Решения для полей ищем в виде $\sim \exp \times \exp [-px + i(\gamma z - \omega t)]$. Тогда для p и γ легко находим следующие выражения:

$$p = s, \quad \gamma = \pm \sqrt{\epsilon k^2 + s^2}, \quad (16)$$

где

$$is = k' Z(\omega), \quad k = \omega/c. \quad (17)$$

Рассматривая систему без потерь, будем считать импеданс чисто реактивным: $Z' = 0$. Из граничного условия при $x = +\infty$ следует $s > 0$, т. е. $Z''(\omega) < 0$ (индуктивный импеданс). Фазовая скорость в направлении распространения $v_{\Phi} = \omega/\gamma$ равна

$$u_{\Phi} \equiv \frac{v_{\Phi}}{c} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon - 1/Z^2}}. \quad (18)$$

Реактивный импеданс, как видно из (18), приводит к замедлению по фазовой скорости. Замедленная волна носит поверхностный характер и затухает на расстоянии s^{-1} от импедансной плоскости, причем

$$s = \frac{k}{|u_{\Phi}|} \sqrt{1 - \epsilon u_{\Phi}^2}. \quad (19)$$

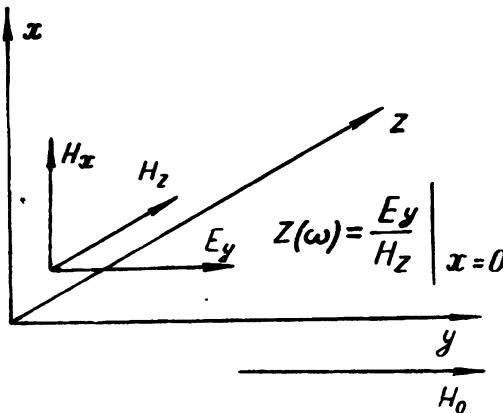


Рис. 1.

Групповая скорость волны $v_{rp} = d\omega/d\gamma$ связана с производной от импеданса по частоте соотношением

$$\begin{aligned} v_{rp} &= \frac{\operatorname{sgn} v_\Phi}{\epsilon k^2/\omega + sds/d\omega} \sqrt{\epsilon k^2 + s^2}; \\ \frac{ds}{d\omega} &= \frac{\operatorname{sgn} v_\Phi}{v_{rp}} \frac{1 - \epsilon u_\Phi u_{rp}}{\sqrt{1 - \epsilon u_\Phi^2}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $\operatorname{sgn} v_\Phi = v_\Phi / |v_\Phi|$, $u_{rp} = v_{rp}/c$. При больших замедлениях по фазовой скорости

$$u_\Phi \ll 1, \quad s = k |u_\Phi|^{-1}, \quad ds/d\omega = \operatorname{sgn} v_\Phi / v_{rp}. \quad (21)$$

Связь между компонентами полей („поляризация“ волны) следующая:

$$E_y = -i \frac{k}{s} H_z, \quad H_x = i \frac{\gamma}{s} H_z. \quad (22)$$

Используя (16), (19), связь между H_x и H_z перепишем в виде:

$$H_x = i \frac{\operatorname{sgn} v_\Phi}{\sqrt{1 - \epsilon u_\Phi^2}} H_z, \quad (23)$$

откуда ясно, что при больших замедлениях (21) магнитное поле в H -волне становится циркулярно поляризованным и знак поляризации противоположен для волн, бегущих навстречу другу другу:

$$H_x = i \operatorname{sgn} v_\Phi H_z \quad (24)$$

при $u_\Phi \ll 1$.

Чтобы получить выражение для средней плотности энергии в замедляющей системе, необходимо рассмотреть немонохроматический сигнал. Следуя методу [10], рассмотрим экспоненциально нарастающие (затухающие) колебания с комплексной частотой $\Omega = \omega + i\omega''$, где $\omega'' \ll \omega$. Средние значения (по периоду колебания) квадратичных по полю величин медленно меняются во времени по закону $\exp(2\omega'' t)$. Интегрируя по поперечному сечению замедляющей системы (в нашем случае по x от 0 до ∞) и усредняя по периоду закон сохранения энергии

$$\overline{\frac{\partial w}{\partial t}} + \operatorname{div} \bar{S} + \bar{p} = 0, \quad (25)$$

получим в отсутствие потерь ($\bar{p} = 0$):

$$2\omega'' U - \bar{S}_v|_{x=0} + d\Sigma/dz = 0. \quad (26)$$

Здесь $U = \int_0^\infty \bar{w} dx$ — средняя энергия электромагнитного поля над замедляющей системой

* Для монохроматической волны в системе с потерями из (25) следует: $d\Sigma/dz + P = 0$, причем как P , так и Σ пропорциональны $\exp(-2\gamma'' z)$. Разделив на Σ и учитывая, что P/Σ не зависит от z , интегрированием получаем энергетическое выражение (12) для $2\gamma''$.

$$\bar{w} = \frac{1}{16\pi} (\epsilon |E|^2 + |H|^2),$$

$$\bar{S} = \operatorname{Re} \frac{c}{8\pi} [E, H^*],$$

$\Sigma = \int_0^\infty \bar{S}_z dx$ — средний поток энергии через поперечное сечение. Вследствие дисперсии в замедляющей системе поток энергии \bar{S}_x отличен от нуля при чисто реактивном импедансе для неменохроматической волны:

$$\bar{S}_x \Big|_{x=0} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} Z(\Omega) |H_z|^2 \Big|_{x=0} = -\frac{c}{8\pi} \omega'' \frac{dZ''}{d\omega} |H_z|^2 \Big|_{x=0}. \quad (27)$$

Если A — амплитуда H_z :

$$H_z = A e^{-px} e^{i(\gamma z - \omega t)}, \quad (28)$$

то (26) можно переписать в виде

$$2\omega'' W + d\Sigma/dz = 0, \quad (29)$$

где

$$W = U + \frac{c}{16\pi} \frac{dZ''}{d\omega} |A|^2. \quad (30)$$

Здесь W должны трактовать как среднюю энергию (на единицу длины), запасенную в замедляющей системе. Второе слагаемое существенно связано с дисперсией в этой системе и представляет собой энергию, запасенную непосредственно в реактивном элементе (импедансной плоскости).

Нетрудно убедиться, используя приведенные в данном разделе соотношения, что

$$v_{rp} \equiv d\omega/d\gamma = \Sigma/W,$$

где Σ и W , выраженные через амплитуду магнитного поля, имеют вид:

$$\Sigma = \frac{c |A|^2}{16\pi k} \frac{u_\Phi^2 \operatorname{sgn} v_\Phi}{(1 - \epsilon u_\Phi^2)^{\gamma_2}}; \quad (31)$$

$$W = \frac{|A|^2}{16\pi k} \frac{u_\Phi^2 \operatorname{sgn} v_\Phi}{u_{rp} (1 - \epsilon u_\Phi^2)^{\gamma_2}}. \quad (32)$$

4. МАЗЕР С БЕГУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНОЙ

Круговая поляризация магнитного поля в замедленной поверхности H -волны (см. (23), (24)) и зависимость знака поляризации от направления распространения могут быть использованы в мазерах с бегущей волной, если круговая поляризация магнитного поля является резонансной (см. (3)).

Предположим, что полупространство $x > 0$ над замедляющей системой (импедансной плоскостью с граничным условием (15)) обладает также и магнитной проницаемостью μ_{rk} (4), причем $|\alpha| \ll 1$. Восприимчивость $\alpha(\omega)$ мы считаем не зависящей от координат.

Приближенное значение коэффициента усиления на единицу длины $2\gamma''$ легко получить из энергетических соотношений (7), (12), (31):

$$P = \frac{\alpha' c |A|^2}{16\pi} \frac{|u_\Phi| \left(\sqrt{1 - \epsilon u_\Phi^2} + \operatorname{sgn} v_\Phi \right)^2}{(1 - \epsilon u_\Phi^2)^{3/2}}; \quad (33)$$

$$2\gamma'' = \frac{P}{\Sigma} = \frac{\alpha' \omega}{v_\Phi} \left(\sqrt{1 - \epsilon u_\Phi^2} + \operatorname{sgn} v_\Phi \right)^2. \quad (34)$$

Для прямой волны ($v_\Phi > 0$, $\operatorname{sgn} v_\Phi = 1$) коэффициент усиления монотонно растет с ростом замедления по фазовой скорости, для встречной волны ($v_\Phi < 0$, $\operatorname{sgn} v_\Phi = -1$) — монотонно убывает (см. рис. 2). При больших замедлениях ($|u_\Phi| \ll 1$)

$$2\gamma'' = \begin{cases} 4x' k/u_\Phi & (v_\Phi > 0) \\ \alpha' k \epsilon^2 u_\Phi^3 / 4 & (v_\Phi < 0) \end{cases}. \quad (35)$$

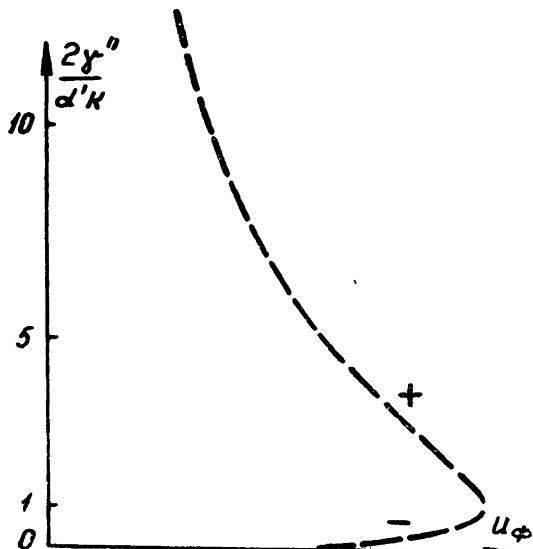


Рис. 2. Зависимость коэффициента усиления на единицу длины γ'' для прямой (+) и встречной (—) волн от абсолютной величины фазовой скорости поверхности H -волны $u_\Phi = v_\Phi/c$.

Степень необратимости коэффициента усиления

$$R = \gamma''_+ / \gamma''_- = 16/\epsilon^2 u_\Phi^4. \quad (36)$$

Заметим, что „фактор заполнения“ (14) в нашем случае имеет вид*:

* Приведем для сравнения величины $2\gamma''$, R и F для прямоугольного волновода в том случае, когда кристалл заполняет весь волновод и α не зависит от координат. Для H_{n_x, n_y} -волны

$$2\gamma'' = \alpha' k u_\Phi \left\{ 1 - \frac{1}{u_\Phi^2} \frac{n_y^2}{n_x^2 + n_y^2} \right\} = \frac{\alpha' k F}{u_{rp}};$$

$$R = 1; \quad F = 1 - u_{rp}^2 \frac{n_y^2}{n_x^2 + n_y^2}.$$

В частности, для $H_{n_x, 0}$ -волны $F = 1$ и $2\gamma'' = \alpha' k / u_{rp}$. Наибольшее усиление имеет место при максимальном ускорении по фазовой или (что то же самое в силу (10)) при максимальном замедлении по групповой скорости; однако необратимость усиления (см. след. страницу)

$$F = \frac{v_{rp}}{v_\phi} \left(\sqrt{1 - \epsilon u_\phi^2} + \operatorname{sgn} v_\phi \right)^2. \quad (37)$$

При $\alpha' = \text{const}$ нетрудно получить и точное решение задачи о распространении симметричной H -волны над импедансной плоскостью (15) со скалярной диэлектрической проницаемостью ϵ и тензором μ_{ik} , определяемым соотношением (4). Уравнения Максвелла и граничное условие (15) приводят к системе четырех уравнений для трех компонент электрического и магнитного поля $E_y, H_\pm = H_z \pm iH_x$:

$$\begin{aligned} k(1+2i\alpha)H_- - i(p+\gamma)E_y &= 0; \\ kH_+ - i(p-\gamma)E_y &= 0; \\ i(p-\gamma)H_- + i(p+\gamma)H_+ - 2\epsilon kE_y &= 0; \\ H_- + H_+ - (2/Z)E_y &= 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Условием нетривиальной разрешимости данной системы является обращение в 0 всех миноров третьего ранга в матрице коэффициентов. Это приводит к четырем уравнениям, из которых независимыми являются два:

$$\begin{aligned} \gamma^2 - p^2 &= \frac{\epsilon k^2 (1+2i\alpha)}{1+i\alpha}; \\ \gamma + p &= \frac{\epsilon k^2 (1+2i\alpha)}{\gamma - s (1+2i\alpha)}; \\ \gamma - p &= \frac{\epsilon k^2}{\gamma + s}; \\ p(1+i\alpha) - i\gamma\alpha &= s(1+2i\alpha). \end{aligned} \quad (39)$$

Исключая p , получаем дисперсионное уравнение для γ :

$$\gamma^2 - 2i\alpha s \gamma - \epsilon k^2 (1+i\alpha) - s^2 (1+2i\alpha) = 0, \quad (40)$$

откуда

$$\frac{\gamma}{s} = i\alpha \pm (1+i\alpha) \sqrt{1+K^2/(1+i\alpha)}, \quad (41)$$

$$K^2 = \epsilon k^2 / s^2. \quad (42)$$

В выражении (41) величины s, α, ϵ могут иметь комплексные значения. Так, например, считая, что $s'' \neq 0$, можно учесть потери на стенах; считая, что $\epsilon'' \neq 0$ — учесть диэлектрические потери в среде. Мы, однако, как и прежде, ограничимся случаем системы без потерь ($s'' = \epsilon'' = 0$). Тогда

$$K^2 = \frac{\epsilon u_\phi^2}{1 - \epsilon u_\phi^2}. \quad (43)$$

ния отсутствует. Некоторой необратимости можно достичь за счет частичного заполнения (при одновременном уменьшении усиления). Для E_{n_x}, n_y -волны

$$2\gamma'' = \frac{\alpha' k}{u_{rp}} \frac{n_y^2}{n_x^2 + n_y^2}; \quad R = 1; \quad F = \frac{n_y^2}{n_x^2 + n_y^2} < 1.$$

При малых α для γ'' получаем формулу (34). При больших замедлениях ($K^2 \ll 1$)

$$\frac{\gamma}{s} = \begin{cases} 1 + \frac{\varepsilon u_\phi^2}{2} + 2i\alpha & (v_\phi > 0) \\ -\left(1 + \frac{\varepsilon u_\phi^2}{2}\right) & (v_\phi < 0) \end{cases}. \quad (44)$$

Отсюда ясно, что нарастает только прямая волна.

Усиливающаяся волна продолжает оставаться поляризованной по кругу (при достаточно больших замедлениях). Действительно, соотношения между компонентами поля следующие:

$$H_- = \frac{s + \gamma}{s(1 + 2i\alpha) - \gamma} H_+;$$

$$E_y = i \frac{s(1 + 2i\alpha) - \gamma}{\varepsilon k} H_-.$$

При больших замедлениях, используя (44), получаем:

$$H_+ = -\frac{\varepsilon u_\phi^2}{4(1 + i\alpha)} H_-, \quad E_y = -i \frac{u_\phi^2}{2k} H_-$$

при $v_\phi > 0$;

$$H_- = -\frac{\varepsilon u_\phi^2}{4(1 + i\alpha)} H_+, \quad E_y = -i \frac{u_\phi^2}{2k} H_+$$

при $v_\phi < 0$.

5. О ПОЛОСЕ УСИЛЕНИЯ ТРЕХУРОВНЕВОГО МАЗЕРА С БЕГУЩЕЙ ВОЛНОЙ

Ширина полосы усиления (на уровне $1/k$) определяется разностью корней уравнения

$$\delta(v) + \ln k = \delta(0) \quad (45)$$

($v = (\omega - \omega_{mn})/\Delta\omega$ — отклонение частоты от резонансной в единицах полуширины линии $\Delta\omega$). Обычное выражение

$$v_1 - v_2 = 2 \sqrt{\frac{\ln k}{\delta_0 - \ln k}} \quad (46)$$

соответствует лоренцовой форме линии парамагнитного резонанса

$$\alpha'(v) = -\frac{A}{v^2 + 1} \quad (47)$$

и предположению, что та же зависимость имеет место для $\delta(v)$ *. Для трехуровневого мазера линия резонанса представляет собой наложение

* В действительности $\delta(v) = -\alpha'(v)f(v)$, где $f(v)$ определяется свойствами замедляющей системы. Влияние дисперсии в этой системе на полосу усиления легко учтено, если $f(v)$ в пределах полосы имеет вид квадратного трехчлена $f(v) = f_0(1 + v_\phi + v^2\psi)$, что, в частности, может рассматриваться как разложение в ряд медленно меняющейся функции $f(v)$. В последнем случае для поверхностной волны, согласно (35), (см. след. страницу).

двух лоренцовых кривых, сдвинутых одна относительно другой на величину u , пропорциональную амплитуде подкачки H_1 [6-7]: $u = |d_{mq}H_1/\hbar\Delta\omega|$.

Если поле подкачки настроено строго в резонанс, а изменение дисперсионных свойств замедляющей системы не учитывается, то

$$\delta(\nu) = D \left[\frac{1}{(\nu + u)^2 + 1} + \frac{1}{(\nu - u)^2 + 1} \right], \quad (48)$$

где D , пропорциональное разности эффективных населенностей уровней m и n , при достаточно больших u положительно. Для $u > 1/\sqrt{3}$ $\delta(\nu)/D$ имеет два симметричных максимума при частотах $\nu_m = \pm \pm \sqrt{2u\sqrt{1+u^2} - (1+u^2)}$ и минимум при $\nu = 0$. Последний с ростом H_1 должен приводить к провалу на частотной зависимости $\delta(\nu)$ и разделению полосы усиления на две части,

Уравнение (45) может иметь либо два, либо четыре вещественных корня:

$$\nu_{\pm}^2 = u^2 + R - 1 \pm \sqrt{R^2 + 4u^2(R-1)}; \quad (49)$$

$$R = \frac{r}{1 - \ln k/\delta_m}; \quad r = \begin{cases} 2u(\sqrt{1+u^2} - u) & (u > 1/\sqrt{3}) \\ (u^2 + 1)/2 & (u < 1/\sqrt{3}) \end{cases}.$$

(Заметим, что r быстро стремится к единице с ростом u .) Если u мало ($R > (1+u^2)/2$), то имеется только два вещественных корня $\pm \nu_+$, определяющих полосу усиления $2\nu_+$. С ростом u появляются четыре вещественных корня (при $1-u^2 < R < (1+u^2)/2$), что соответствует двум полосам усиления с шириной $\nu_+ - \nu_-$, которая при больших u переходит в (46). Промежуток между полосами усиления равен 2ν . В действительности эти результаты несколько искажаются зависимостью $D(u)$.

В заключение автор благодарит С. А. Песковацкого за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. de Grasse, IRE Wescon. Record, (1958).
2. R. de Grasse, E. Schulz-Dubois, H. Scovil, Bell Syst. Techn. J., **38**, 305 (1959).
3. N. Bloembergen, Phys. Rev., **104**, 324 (1956); H. Scovil, G. Feher, H. Seidel, Phys. Rev., **105**, 162 (1957).
4. Н. Г. Басов и А. М. Прохоров, ЖЭТФ, **28**, 249 (1955).
5. F. Bloch, Phys. Rev., **102**, 104 (1956).
6. A. Javan, Phys. Rev., **107**, 1579 (1957); В. М. Конторович, А. М. Прохоров, ЖЭТФ, **33**, 1428 (1957).
7. A. M. Glogston, J. Phys. Chem. Sol., **4**, 271 (1958); Yatsiv Shaul, Phys. Rev., **118**, 1538 (1959).

$$f_0 = \frac{\omega_{mn}}{v_{\Phi}} L, \quad \varphi = \frac{\Delta\omega}{\omega_{mn}} \frac{v_{\Phi}}{v_{rp}}, \quad \psi = \frac{(\Delta\omega)^2}{2\omega_{mn}} v_{\Phi} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_{rp}} \right).$$

При сделанных предположениях о виде $a'(\nu)$ и $f(\nu)$ ширина полосы равна

$$\nu_1 - \nu_2 = \frac{\sqrt{\varphi^2 + 4(\ln k/\delta_0)(1 - \ln k/\delta_0) - \psi}}{|1 - \ln k/\delta_0 - \psi|}$$

и с ростом δ_0 стремится к пределу $|\varphi(1 - \psi)|^{-1}$.

8. В. М. Конторович, ЖЭТФ, **34**, 779 (1958).
9. Л. Д. Лайдай и Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, ГИТЛ, 1958.
10. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
11. К. Р. Шагта, Proc. IEE, **B-106**, 427 (1959); М. А. Миллер, ДАН СССР, **87**, 571 (1952); ЖЭТФ, **25**, 1972 (1955).

Институт радиофизики и электроники АН УССР

Поступила в редакцию
18 февраля 1960 г.

Примечание при корректуре. Парамагнитный резонанс на ионах, находящихся в кристаллической решетке, происходит, вообще говоря, не на круговой, а на эллиптической поляризации переменного магнитного поля. Усиление несимметричных поверхностных волн над анизотропной направляющей поверхностью в случае парамагнитных веществ с эллиптической резонансной поляризацией рассмотрено в статье А. М. Глуюка, автора и Г. Е. Чернякова, которая будет опубликована в «Радиофизике».

МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА РАССЕЯНИЯ И ФОНОВЫХ ШУМОВ АНТЕНН. АБСОЛЮТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ЯРКОСТИ ФОНА НА СВЧ

V. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин

Предлагается метод измерения коэффициента рассеяния антенны и ее шумов, вызванных излучением внешней среды в боковые лепестки антенны. Рассматриваются условия точного измерения яркости фона.

За последнее время усилился интерес к исследованию на СВЧ радиоизлучения фона, т. е. земли, атмосферы и других распределенных источников. Условия точных абсолютных измерений фона значительно отличаются от условий измерения интенсивности дискретных источников (см. [1,2]) и, как нам кажется, недостаточно выяснены, а соответствующие методы недостаточно разработаны. Основные трудности вызываются неопределенностью так называемых фоновых шумов антенны, обусловленных приемом излучения фона помимо главного лепестка диаграммы. Влияние фоновых шумов практически исключается при измерении дискретных источников, но становится существенным при измерении распределенных источников, когда направление антенны должно изменяться в широких пределах углов.

1. Рассмотрим условия измерения фона. Пусть пространство, окружающее антенну, для данной волны характеризуется некоторым распределением яркостной эффективной температуры $T(\varphi, \psi)$, которую требуется измерить с помощью радиометра, имеющего антенну с диаграммой по мощности $F(\varphi - \varphi^0, \psi - \psi^0)$, где φ^0, ψ^0 — азимут и высота направления главного луча антенны. Как известно, полный шум на выходе антенны будет

$$T_a = \frac{\int_{4\pi} TF d\Omega}{\int_{4\pi} F d\Omega} \eta + T_0(1 - \eta),$$

где η — КПД антенны (без учета влияния земли), а $T_0(1 - \eta)$ — ее собственные тепловые шумы [3], T_0 — температура материала антенны.

Для измерения яркостной температуры необходимо измерение шума, попадающего в главный лепесток. Разбивая в соответствии с этим интеграл в числителе на два — один по главному лепестку, а другой — по всему остальному пространству, получим:

$$T_a(\varphi^0, \psi^0) = \frac{\int_{\Omega_{\text{gl}}} TF d\Omega}{\int_{4\pi} F d\Omega} \eta + \frac{\int_{\Omega_6} TF d\Omega}{\int_{4\pi} F d\Omega} \eta + T_0(1 - \eta).$$

Умножая первый член на $\int_{\Omega_{\text{gl}}} F d\Omega / \int_{4\pi} F d\Omega$, а второй на $\int_{\Omega_6} F d\Omega / \int_{4\pi} F d\Omega$

и учитывая, что $\int_{\Omega_6} F d\Omega / \int_{4\pi} F d\Omega = \beta$ — коэффициент рассеяния, определяющий долю мощности, излученной в боковые лепестки, получим:

$$T_a(\varphi^\circ, \psi^\circ) = \bar{T}_{gl}(\varphi^\circ, \psi^\circ) \eta(1 - \beta) + \bar{T}_6(\varphi^\circ, \psi^\circ) \eta \beta + T_0(1 - \eta). \quad (1)$$

Здесь величины

$$\bar{T}_{gl} = \int_{\Omega_{gl}} T F d\Omega \Bigg| \int_{\Omega_{gl}} F d\Omega, \quad \bar{T}_6 = \int_{\Omega_6} T F d\Omega \Bigg| \int_{\Omega_6} F d\Omega \quad (2)$$

определяют усредненную (сглаженную) интенсивность фона по телесному углу главного лепестка и по остальному пространству.

В выражении (1) первое слагаемое дает шумы, принимаемые по главному лепестку диаграммы (или по любой условной области диаграммы, включающей главный лепесток), второе — по всем остальным лепесткам диаграммы и является выражением для величины фоновых шумов антенны.

При измерении яркости фона должен быть измерен первый член выражения (1). Для избежания ошибок сглаживания необходимо, чтобы в пределах главного лепестка величину $T(\varphi, \psi)$ можно было с требуемой точностью считать постоянной и равной $T(\varphi^\circ, \psi^\circ)$, тогда $\bar{T}_{gl} = T(\varphi^\circ, \psi^\circ)$. Для определения интенсивности фона (\bar{T}_{gl}) необходимо также найти способ измерения величин η и β .

Предлагаемый метод состоит в измерении излучений из трех определенных калибровочных областей, которые могут быть расположены в пространстве произвольно. Рассматривается случай, когда одним из калибровочных направлений является истинный зенит. Вторым направлением служит зенит, „отраженный“ в antennу плоским зеркалом, а третьим — направление на поглощающую абсолютно черную плоскость, расположенную рядом с плоским зеркалом и имеющую температуру T_0 . Обе плоскости находятся приблизительно на уровне горизонта.

Угловые размеры отражающей плоскости Ω_0 , вообще говоря, произвольны, но желательно, чтобы они были не менее угловых размеров главного лепестка Ω_{gl} , определенного на уровне $(5 \div 10)\%$ от максимума*. Измерение фона в заданном направлении состоит в определении разности интенсивности излучений из трех указанных направлений и заданного направления. Оценим необходимые размеры устройств. Отражающая и поглощающая плоскости должны размещаться в зоне дифракции Фраунгофера, т. е. на расстоянии от антенн, равном $r \geq D^2/\lambda$, где D — диаметр зеркала. Считая, что плоскость должна охватывать практически весь главный лепесток, получим для ее диаметра $d = r \Theta \geq \frac{D^2}{\lambda} 2 \frac{\lambda}{D} = 2D$, где $\Theta = 2\lambda/D$ — ширина главного лепестка.

Для большинства антенн, как видно, осуществление метода является реальным, хотя и может вызвать известные трудности, особенно в связи с необходимостью оторвать главный луч от земли. Однако эту задачу могут иногда значительно облегчить условия рельефа местности.

Температура шума антенны при направлении ее главного луча непосредственно в зенит (координаты φ_1, ψ_1), согласно (1), равна

* Выбор Ω_0 по существу означает выбор телесного угла диаграммы, по отношению к которому будет измеряться рассеяние. Зная диаграмму, всегда можно сделать необходимый пересчет относительно любого Ω_0 .

$$T_{a_1} = \bar{T}_{\text{гл}_1} (\varphi_1^\circ, \psi_1^\circ) \eta(1 - \beta) + \bar{T}_{6_1} (\varphi_1^\circ, \psi_1^\circ) \eta\beta + T_0(1 - \eta). \quad (3)$$

Температура шума на выходе антенны при направлении ее на отражающий лист (координаты φ_2 , ψ_2) будет*

$$T_{a_2} = \bar{T}_{\text{гл}_2} (\varphi_2^\circ, \psi_2^\circ) \eta(1 - \beta) + \bar{T}_{6_2} (\varphi_2^\circ, \psi_2^\circ) \eta\beta + T_0(1 - \eta). \quad (4)$$

Температура шума при направлении антенны на поглощающую плоскость с теми же координатами φ_2 , ψ_2 будет

$$T_{a_3} = T_0\eta(1 - \beta) + \bar{T}_{6_2} (\varphi_2^\circ, \psi_2^\circ) \eta\beta + T_0(1 - \eta), \quad (5)$$

где $\bar{T}_{\text{гл}}$ и \bar{T}_6 определяются согласно (2) при условии, что $\Omega_{\text{гл}} = \Omega_0$ и $\Omega_6 = 4\pi - \Omega_0$. Очевидно, что $\bar{T}_{\text{гл}_1} = \bar{T}_{\text{гл}_2} = \bar{T}_{\text{гл}_3} = \bar{T}_3$, где T_3 —яркостная температура зенита.

Наконец, главный луч направляется на участок с измеряемой температурой (координаты φ_x , ψ_x)

$$T_{a_4} = \bar{T}_{\text{гл}_x} (\varphi_x^\circ, \psi_x^\circ) \eta(1 - \beta) + \bar{T}_{6_x} (\varphi_x^\circ, \psi_x^\circ) \eta\beta + T_0(1 - \eta). \quad (6)$$

Вычитая (4) из (5), получим:

$$\Delta T_{3-2} = (T_0 - \bar{T}_{\text{гл}_3}) \eta(1 - \beta). \quad (7)$$

Приращение температуры шума ΔT_{3-2} измеряется хорошо известными способами с помощью радиометра. Из (7) имеем:

$$\eta(1 - \beta) = \Delta T_{3-2} / (T_0 - T_3). \quad (8)$$

Вычитая (4) или (3) из (6), получим:

$$\Delta T_{4-2,1} = (\bar{T}_{\text{гл}_x} - T_3) \eta(1 - \beta) + \Delta, \quad (9)$$

где

$$\Delta = \begin{cases} \beta \eta (\bar{T}_{6_x} - \bar{T}_{6_2}), \\ \beta \eta (\bar{T}_{6_x} - \bar{T}_{6_1}), \end{cases} \quad (10)$$

откуда

$$\bar{T}_{\text{гл}_x} = T_3 + \frac{\Delta T_{4-2,1} - \Delta}{\eta(1 - \beta)}. \quad (11)$$

Здесь все величины справа, кроме Δ , известны, но так как обычно $\Delta \ll \Delta T_{4-2,1}$, то ее можно в первом приближении пренебречь. Кроме того, при измерении величина Δ может быть уменьшена соответствующим выбором опорного зенита. Действительно, из (10) видно, что когда отражающая и поглощающая плоскости находятся на уровне горизонта, то при измерениях фона вблизи горизонта или ниже величина Δ минимальна, если выбрать в качестве опорного „зенита“ искусственный „зенит“ (значок 2), а при измерениях выше горизонта до зенита—естественный (значок 1).

Вычитая (3) из (4), можно определить максимальную величину Δ_{\max} , соответствующую повороту луча от горизонта до зенита, и тем самым оценить ошибку, допускаемую пренебрежением Δ при измерении фона по предлагаемой процедуре:

$$\Delta T_{2-1} = (\bar{T}_{6_2} - \bar{T}_{6_1}) \eta\beta = \Delta_{\max}. \quad (12)$$

* Величину T_a не следует смешивать с температурой антенны, под которой понимается температура шума антенны без потерь.

2. Для определения величины фоновых шумов необходимо ввести дополнительную процедуру, а именно сравнение шумов на выходе антенны с шумами черного тела, включаемого вместо антенны. Его шумы имеют температуру

$$T_{a_5} = T_0,$$

где T_0 — температура черного тела. Находя разницу между T_{a_5} и шумами антенны T_{a_3} , направленной на поглощающий лист, получим, согласно (5),

$$\Delta T_{5-3} = \eta \beta (T_0 - \bar{T}_{b_2}). \quad (13)$$

Зная η и β , из (13) можно найти \bar{T}_{b_2} , а затем из (12) и \bar{T}_{b_1} . Величина $\eta(1-\beta)$ нами уже найдена. Остается найти η . Известная процедура измерения КПД дает, согласно (3), (см. [3]):

$$\Delta T_{5-1} = \eta(T_0 - T_3) \left(1 - \beta \frac{\bar{T}_{b_1} - T_3}{T_0 - T_3} \right). \quad (14)$$

Так как величина КПД слабо зависит от величины фоновой температуры, то с достаточной точностью в первом приближении последней можно пренебречь. Таким образом, из (14) сначала определяется приближенное значение η_1 (при пренебрежении величиной $\beta \frac{\bar{T}_{b_1} - T_3}{T_0 - T_3}$).

По величине η_1 из (8) определяется β_1 , а из (12) и (13) определяется \bar{T}_{b_1} ($\varphi_1^\circ, \psi_1^\circ$) и \bar{T}_{b_2} ($\varphi_2^\circ, \psi_2^\circ$). После этого можно вторично из (14) с учетом найденных β_1 и \bar{T}_{b_1} определить более точное значение η_2 , затем из (8) β_2 и, наконец, \bar{T}_{b_1} и \bar{T}_{b_2} . Последние две величины дают возможность оценить величину фоновых шумов $\bar{T}_b(\varphi^\circ, \psi^\circ)$ при любом направлении луча антенны в верхней полусфере.

3. Согласно описанному методу было произведено измерение η и β четырехметрового пораболоида с облучателем в виде открытого конца волновода на $\lambda = 3,2 \text{ см}$ и соответственно измерение T_b и T_x . Антенна и отражающий лист располагались на двух холмах на расстоянии 480 м друг от друга. Отражающий лист (алюминий и железо) находился на склоне холма примерно на уровне горизонта. Вначале при размерах листа $8 \text{ м} \times 7,15 \text{ м}$ (по горизонтали и в проекции на вертикаль*) он занимал угловые размеры $57' \times 51'$, что составляет лишь часть угловых размеров главного лепестка диаграммы ($120' \times 120'$ на уровне 0,025). Поэтому для определения рассеяния β относительно главного лепестка значение β^1 , измеренное с помощью этого листа, пересчитывалось по формуле

$$1 - \beta = (1 - \beta^1)(1 - P_1/P)^{-1},$$

где P_1/P — отношение мощности, попадающей в главный лепесток вне его части, „закрываемой“ листом, ко всей мощности, попадающей в главный лепесток. (В нашем случае $P_1/P = 0,4$.) Для получения „черной“ площадки использовалось излучение почвы, наблюдаемое под углом Брюстера. Для этого на склоне холма рядом с листом искусственного зенита был выбран и выровнен участок площади, расположенный к антенне под углом 30° , т. е. близким к углу Брюстера для сухой

* Склон холма составлял с горизонтом угол 30° ; размеры листа по склону соответственно $8 \text{ м} \times 14,3 \text{ м}$.

ровной почвы (25° при $\epsilon=2$; при $2 < \epsilon < 15$ $1 > 1 - R^2 \geq 0,9$, где R^2 — коэффициент отражения по мощности). Естественно, что при подобной поглощающей площадке измерения могли производиться лишь на вертикальной поляризации.

Измерения с помощью рассмотренного выше метода дали $\eta=0,85$, $\beta=0,34$ (β относительно главного лепестка $120' \times 120'$), $T_{6,1} < 10^\circ k$. При последующих измерениях отражающий лист был увеличен до угловых размеров $90' \times 90'$ (т. е. "закрывал" главный лепесток до уровня $\approx 0,08$; $P_1/P = 0,1$). Измерения дали $\beta=0,38$.

Величина β была определена также путем измерения усиления антенны методом сравнения с эталонным рупором по радиоизлучению Солнца.

Обе величины хорошо совпали, что свидетельствует о достаточной точности метода измерений.

Следует отметить, что измерение β для части вне известной заранее диаграммы дает возможность определить КНД антенны, равный, как легко показать, произведению $(1-\beta)$ на КНД, определенный по известной части диаграммы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 2, 935 (1957).
- 2 R. Whitehurst, J. Corpeleand, F. Mitchell, Proc. IRE, '45, 1410 (1957).
- 3 В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 1, 601 (1956).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 марта 1960 г.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

H. C. Степанов

Рассматривается распространение волн в длинной линии без дисперсии при наличии потерь в случае, когда параметры линии произвольно изменяются во времени и пространстве. Методом последовательных приближений получено общее решение задачи. Показано, что параметрический эффект в основном определяется изменением величины \sqrt{LC} . Обсуждаются явления, связанные с изменением «волнового сопротивления» $\sqrt{L/C}$ и потерями. Рассматривается изменение формы и спектра сигнала при распространении в линии; показана возможность усиления импульсов с одновременным уменьшением их длительности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

В последние годы появился ряд работ, посвященных распространению волн в системах с переменными во времени параметрами [1-7]. Оказалось, что в подобных системах возможны такие явления как усиление и преобразование сигналов. Однако из-за математических трудностей строгое решение задачи найдено только для некоторых весьма частных случаев. В статьях [1,2] точное решение получено для плоской электромагнитной волны в среде без потерь в предположении, что параметры среды μ и ϵ взаимно пропорционально изменяются во времени. Случай, когда параметры системы изменяются также в зависимости от одной пространственной координаты, был строго рассмотрен в работе [3] на примере длинной линии с „бегущими“ параметрами (при условии $L/C = \text{const}$, когда „волновое сопротивление“ остается постоянным и отражение в линии отсутствует). В работах [4-7] обсуждаются некоторые более сложные системы; однако применяемые в них приближенные методы решения охватывают лишь область „резонансных“ явлений, когда частота изменения параметра и сигнала—одного порядка (например, когда параметр изменяется с удвоенной частотой сигнала). Общее же исследование задачи проведено только в квазистационарном приближении [8].

Поэтому представляет интерес рассмотреть распространение волны в длинной линии с потерями в общем случае, когда параметры L и C независимо и произвольно изменяются в зависимости от расстояния x и времени t . Телеграфные уравнения тогда можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -L \frac{\partial I}{\partial t} - \left(R + \frac{\partial L}{\partial t} \right) I; \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -C \frac{\partial V}{\partial t} - \left(G + \frac{\partial C}{\partial t} \right) V, \end{aligned} \quad (1)$$

где V и I — напряжение и ток в линии*. Аналогичные уравнения при соответствующих условиях имеют место для плоской электромагнит-

ной или акустической волны, а также и для искусственной длинной линии.

Обычно при решении системы (1) ее сводят к уравнениям второго порядка, приближенное решение которых можно найти, используя известный метод Бриллюэна—Вентцеля—Крамерса. Однако при произвольной зависимости коэффициентов от x и t разделение переменных V и I приводит к уравнениям третьего порядка с переменными коэффициентами. Не останавливаясь на частных случаях, когда возможно понижение порядка этих уравнений, перейдем к новым переменным

$$U_1 = V + \rho I, \quad U_2 = V - \rho I. \quad (2)$$

При этом из (1) следуют уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} + n \frac{\partial U_1}{\partial t} &= k_{11} U_1 + k_{12} U_2; \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} - n \frac{\partial U_2}{\partial t} &= k_{21} U_1 + k_{22} U_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{LC}; \quad \rho = \sqrt{L/C}; \\ k_{11} &= -\partial n / \partial t + (\partial / \partial x + n \partial / \partial t) \ln \sqrt{\rho} - s; \\ k_{12} &= -(\partial / \partial x - n \partial / \partial t) \ln \sqrt{\rho} + d; \\ k_{21} &= -(\partial / \partial x + n \partial / \partial t) \ln \sqrt{\rho} - d; \\ k_{22} &= \partial n / \partial t + (\partial / \partial x - n \partial / \partial t) \ln \sqrt{\rho} + s; \\ s &= (1/2)(R/\rho + \rho G); \quad d = (1/2)(R/\rho - \rho G). \end{aligned} \quad (4)$$

Из системы (3) для U_1 и U_2 в отдельности можно получить уравнения второго порядка; однако точное решение последних может быть найдено лишь в немногих случаях. Для упрощения дальнейших выкладок произведем еще одну замену переменных. Предположим, что известны первые интегралы характеристических уравнений:

$$dx = dt/n(x, t), \quad dx = -dt/n(x, t),$$

которые мы обозначим соответственно через ξ_1 и ξ_2 . Тогда нетрудно доказать равенства

$$\partial / \partial x - n \partial / \partial t = h_1 \partial / \partial \xi_1, \quad \partial / \partial x + n \partial / \partial t = h_2 \partial / \partial \xi_2,$$

где

$$h_1 = (\partial / \partial x - n \partial / \partial t) \xi_1, \quad h_2 = (\partial / \partial x + n \partial / \partial t) \xi_2.$$

Используя эти соотношения и вводя новые переменные

$$\tilde{U}_1 = U_1 e^{-f_1}, \quad \tilde{U}_2 = U_2 e^{-f_2}, \quad (5)$$

* В уравнениях (1) параметры R и G , учитывающие потери, тоже могут быть произвольными функциями x и t .

где

$$f_1 = \int k_{11} h_2^{-1} d\xi_2, \quad f_2 = \int k_{22} h_1^{-1} d\xi_1$$

(причем при интегрировании по ξ_2 величина ξ_1 полагается постоянной, и наоборот), уравнения (3) можно записать в виде:

$$\partial \tilde{U}_1 / \partial \xi_2 = m_2 \tilde{U}_2, \quad \partial \tilde{U}_2 / \partial \xi_1 = m_1 \tilde{U}_1, \quad (6)$$

где

$$m_1 = k_{21} h_1^{-1} e^{f_1 - f_2}, \quad m_2 = k_{12} h_2^{-1} e^{f_2 - f_1}.$$

Систему (6) удобно решать методом последовательных приближений. Полагая в нулевом приближении $m_1 = m_2 = 0$, для \tilde{U}_1 и \tilde{U}_2 получаем:

$$\tilde{U}_1^0 = F_1(\xi_1), \quad \tilde{U}_2^0 = F_2(\xi_2), \quad (7)$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции. Здесь \tilde{U}_1^0 и \tilde{U}_2^0 можно рассматривать как две независимые волны, распространяющиеся в противоположных направлениях с локальной скоростью $1/n(x, t)$. Если же $m_i \neq 0$, имеет место связь таких волн, физический смысл которой можно понять из выражений для k_{12} и k_{21} . Так, при $d = 0$ коэффициент $k_{21} = -(\partial/dx + n\partial/dt) \ln \sqrt{\rho} = -n(d/dt \ln \sqrt{\rho})_{\xi_1=\text{const}}$ характеризует изменение „волнового сопротивления“ для фиксированного фронта прямой волны. Если этот коэффициент не равен нулю, происходит непрерывное отражение последней, в результате чего в линии возбуждается отраженная волна, которая распространяется в противоположную сторону, т. е. добавляется к \tilde{U}_2^0 . Выражения для отраженных волн можно найти из следующего (первого) приближения: подставляя (7) соответственно в правые части (6), получаем:

$$\tilde{U}_1^1 = \int_{\xi_2}^{\xi_3} m_2 F_2(\xi_2) d\xi_2, \quad \tilde{U}_2^1 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} m_1 F_1(\xi_1) d\xi_1. \quad (8)$$

Эти волны также отражаются и в свою очередь возбуждают волны второго приближения и т. д. В результате решение задачи получаем в виде суммы ряда:

$$\tilde{U}_1 = F_1(\xi_1) + \int_{\xi_2}^{\xi_3} m_2 F_2 d\xi_2 + \int_{\xi_2}^{\xi_3} m_2 \left(\int_{\xi_1}^{\xi_2} m_1 F_1 d\xi_1 \right) d\xi_2 + \dots; \quad (9)$$

$$\tilde{U}_2 = F_2(\xi_2) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} m_1 F_1 d\xi_1 + \int_{\xi_1}^{\xi_2} m_1 \left(\int_{\xi_2}^{\xi_3} m_2 F_2 d\xi_2 \right) d\xi_1 + \dots.$$

Сходимость этих рядов будет обеспечена тем лучше, чем плавнее изменяется параметр ρ и чем меньше коэффициент $d = (1/2)(R/\rho - \rho G)$. Некоторые оценки будут приведены ниже; здесь же ограничимся замечанием, что для сходимости (9) достаточна малость лишь одного из коэффициентов m_1 , m_2 (если только другой конечен). В частности, если $m_1 = 0$, то ряд для \tilde{U}_1 обрывается на втором члене, для \tilde{U}_2 — на первом, и решение переходит в точное.

Из (9) ясно, что общее решение задачи содержит две произвольные функции F_1 и F_2 , вид которых определяется граничными и начальными условиями конкретной задачи.

2. НУЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Далее будем рассматривать полубесконечную в пространстве систему ($x \geq 0$). Найдем функции F_1 и F_2 так, чтобы решение в нулевом приближении удовлетворяло граничным условиям

$$V(0, t) = v(t), \quad I(0, t) = i(t), \quad (10)$$

где v и i — произвольные заданные функции.

Согласно (5) и (7), величины U_1^0 и U_2^0 можно найти в виде:

$$U_1^0 = e^{f_1} F_1(\xi_1), \quad U_2^0 = e^{f_2} F_2(\xi_2). \quad (11)$$

Тогда из равенств (2), (10) и (11) нетрудно получить соотношения

$$F_1(\bar{\xi}_1) = e^{-f_1(0, t)} u_1(t), \quad F_2(\bar{\xi}_2) = e^{-f_2(0, t)} u_2(t), \quad (12)$$

где $u_1 = v + \rho(0, t)i$, $u_2 = v - \rho(0, t)i$, а через $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ обозначены значения характеристических переменных в точке $x = 0$. Чтобы найти функции $F_1(\xi_1)$ и $F_2(\xi_2)$, в формулах (12), согласно методу характеристик, вместо t нужно подставить соответственно „обратные функции“ $t(\xi_1)$ и $t(\xi_2)$, определяемые из равенств $\xi_1 = \xi_1(0, t)$, $\xi_2 = \xi_2(0, t)$, а затем в полученном выражении $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$ заменить на ξ_1 и ξ_2 . Подставив теперь (12) в (11) и (2), получаем искомое решение, удовлетворяющее условиям (10):

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} K_1 u_1[t(\xi_1)] + \frac{1}{2} K_2 u_2[t(\xi_2)]; \\ I &= \frac{1}{2\rho} K_1 u_1[t(\xi_1)] - \frac{1}{2\rho} K_2 u_2[t(\xi_2)], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$K_1 = \exp \{f_1(x, t) - f_1[0, t(\xi_1)]\} = \exp \int_{\xi_2^0}^{\xi_1} k_{11} h_2^{-1} d\xi_2;$$

$$K_2 = \exp \{f_2(x, t) - f_2[0, t(\xi_2)]\} = \exp \int_{\xi_1^0}^{\xi_2} k_{22} h_1^{-1} d\xi_1.$$

Здесь и далее нижний предел ξ_2^0 условно означает, что в первообразной функции $f_1(x, t)$ нужно заменить $x \rightarrow 0$, $t \rightarrow t(\xi_1)$ (аналогично ξ_1^0 означает замену $x \rightarrow 0$, $t \rightarrow t(\xi_2)$ в функции $f_2(x, t)$).

Итак, вообще говоря, при условиях (10) в линии существуют две волны, причем величина ρ сохраняет смысл волнового сопротивления. Для краткости ниже будем рассматривать только прямую волну; если в соотношениях (10) положить $v = \rho(0, t)i$, то $u_1 = 2v(t)$, $u_2 = v - \rho i \equiv 0$ и обратной волны в нулевом приближении не будет. „Амплитудный коэффициент“ K_1 , не зависящий от входного сигнала, можно представить в виде произведения трех различных сомножителей, соответствующих трем слагаемым в выражении для k_{11} в (4):

$$K_1 = \Phi Z S, \quad (14)$$

где Φ зависит только от закона изменения параметра $n = \sqrt{LC}$:

$$\Phi = \exp \left(- \int_{\xi_2^0}^{\xi_2} \frac{dn}{dt} h_2^{-1} d\xi_2 \right), \quad (15)$$

величина Z определяется изменением „волнового сопротивления“ $\rho = \sqrt{L/C}$:

$$Z = \sqrt{\rho(x, t)/\rho [0, t(\xi_1)]}, \quad (16)$$

а фактор S характеризует затухание волны из-за потерь:

$$S = \exp \left(- \int_{\xi_2^0}^{\xi_2} s h_2^{-1} d\xi_2 \right). \quad (17)$$

Рассмотрим явления, связанные с изменением величины n . Из (15) ясно, что всегда $\Phi > 0$; если $dn/dt = 0$, то $\Phi \equiv 1$. Можно показать, что в самом общем случае

$$\Phi = \partial t(\xi_1)/\partial t|_{x=\text{const}}, \quad (18)$$

т. е. указанный множитель можно просто выразить через „обратную функцию“ $t(\xi_1)$. Предположим далее, что на входе линии напряжение изменяется по гармоническому закону:

$$v(t) = \rho(0, t) i(t) = V_0 \cos(\omega_0 t + \Theta_0). \quad (19)$$

Тогда для „фазового“ множителя в (13) имеем:

$$\frac{1}{2} u_1[t(\xi_1)] = v[t(\xi_1)] = V_0 \cos \Theta, \quad (20)$$

$$\Theta = \omega_0 t(\xi_1) + \Theta_0,$$

откуда, согласно (18), следует соотношение

$$\omega = \partial \Theta / \partial t = \omega_0 \Phi. \quad (21)$$

Таким образом, изменение только одной величины n (при $\rho = \text{const}$ и отсутствии потерь) вызывает взаимно пропорциональное изменение мгновенной частоты и амплитуды сигнала. В частности, если параметр n изменяется во времени с некоторым периодом T , то функция Φ будет периодической с тем же периодом; иными словами, происходит амплитудная и частотная модуляция сигнала. При этом, как нетрудно показать из формулы (18), для любой фиксированной точки x

$$\frac{1}{T} \int_0^T \Phi dt = 1. \quad (22)$$

Если множитель Φ мало изменяется за период $2\pi/\omega$, то величина $\Phi^2 V_0^2 / 2\rho$ равна средней мощности сигнала за этот период. Из (22) следует, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T \Phi^2 dt \geq 1, \quad (23)$$

причем тождественное для всех x равенство здесь имеет место только при $\Phi \equiv 1$, т. е. когда параметр n не изменяется во времени.

Заменив переменную интегрирования в (17) на x , можно также записать:

$$\Phi = \exp \left(- \int_0^x (\partial n / \partial t) dx \right), \quad (24)$$

где интеграл берется вдоль характеристики $\xi_1 = \text{const}$. Отсюда ясно, что амплитуда фиксированного фронта сигнала будет увеличиваться, если для него $\partial n / \partial t < 0$, и уменьшаться, если $\partial n / \partial t > 0$. Средняя же за период T мощность сигнала, согласно (23), по крайней мере, не убывает. При некоторых условиях, как было показано в [3], средний поток мощности волны монотонно нарастает вдоль линии даже при малом изменении параметра. Физически это явление объясняется тем, что при изменении n во времени некоторые цуги сигнала распространяются быстрее, чем другие; в результате в тех участках, где $\partial n / \partial t < 0$, происходит как бы уплотнение сигнала с соответствующим увеличением амплитуды, а при $\partial n / \partial t > 0$ — наоборот. Если волна параметра движется синхронно с сигналом, эти возмущения непрерывно накапливаются; средняя же амплитуда волны, как следует из (22), при этом не изменяется.

При переменном „волновом сопротивлении“ множитель $Z \neq 1$ и отношение амплитуды волны к частоте не остается постоянным. Нетрудно показать, что инвариантом нулевого приближения в отсутствие потерь ($s = 0, S = 1$) является отношение мощности волны к квадрату частоты. Действительно, мгновенная мощность волны, согласно (13), равна $P^0 = \Phi^2 v^2 [t(\xi_1)] \rho^{-1} [0, t(\xi_1)]$.

Поэтому из (21) следует, что

$$P^0 / \omega^2 = v^2 [t(\xi_1)] \{ \omega_0^2 \rho [0, t(\xi_1)] \}^{-1} = \text{const}, \quad (25)$$

так как правая часть последнего равенства является функцией только от ξ_1 и постоянна для фиксированного фронта волны.

Оценим сейчас, насколько существен множитель Z в (14). Из выражения (16) очевидно, что

$$\sqrt{\rho_{\min} / \rho_{\max}} \leq Z \leq \sqrt{\rho_{\max} / \rho_{\min}}, \quad (26)$$

и если относительное изменение ρ мало, множитель Z может отличаться от 1 лишь на величину порядка $\Delta \rho / \rho$. Таким образом, малое изменение ρ не приводит здесь к какому-либо накапливающемуся эффекту. Отметим также случай, когда величина ρ относительно мало изменяется во времени, но существенно изменяется в пространстве:

$$\rho = \rho_0(x) [1 + \gamma(x, t)], \quad |\gamma| \ll 1. \quad (27)$$

При этом из (16) следует:

$$Z_0 (1 - \gamma_{\max}) \leq Z \leq Z_0 (1 + \gamma_{\max}), \quad (28)$$

где $Z_0(x) = \sqrt{\rho_0(x) / \rho_0(0)}$. Соответствующий коэффициент для тока в (13) с точностью до γ_{\max} равен Z_0^{-1} , т. е. при $n = \text{const}$ и $s = 0$ подобное изменение ρ в нулевом приближении приводит лишь к трансформации волны с сохранением переносимой мощности.

При наличии потерь в линии изменение ρ оказывает еще влияние на распространение волн через фактор S , который в общем случае представляет из себя сложную функцию x и t . Нетрудно, однако, убедиться, что для фиксированного фронта прямой волны фактор S монотонно убывает с ростом x , т. е. потери сами по себе всегда приводят к затуханию волны, при любом законе изменения параметров R, G, ρ . Действительно, аналогично с (24) выражение для S из (17)

можно записать в виде $S = \exp [-\int_0^x s(x, t) dx]$, причем $S \leq 1$, так как $s = (1/2)(R/\rho + \rho G) \geq 0$. Ясно также, что при $Z=1$ амплитуда фронта волны будет увеличиваться, если он движется в области, где $-dp/dt > s$.

Далее, периодическое изменение коэффициента s во времени может привести к амплитудной модуляции сигнала за счет того, что некоторые цуги сигнала затухают сильнее, чем другие.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим пример, когда параметры R и G постоянны, а n и ρ изменяются в виде бегущих синусоидальных волн:

$$\begin{aligned} n &= (1/a)(1 + m \cos \Omega \eta); \\ \rho &= \rho_0[1 + p \cos(\Omega \eta + \psi)], \end{aligned} \quad (29)$$

где $\eta = t - x/a$. Пусть $0 \leq p \ll 1$; тогда $Z \approx 1$. Для вычисления S удобно заменить переменную интегрирования ξ_2 на η . Пренебрегая членами порядка p^2 , найдем амплитудный коэффициент

$$K_1 = \Phi^{1-\delta \sin \psi} \exp \{2\delta \cos \psi [\beta - \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(e^{-\alpha x} \operatorname{tg} \beta)]\} e^{-s_0 x}, \quad (30)$$

где в данном случае

$$\begin{aligned} \Phi &= (e^{\alpha x} \cos^2 \beta + e^{-\alpha x} \sin^2 \beta)^{-1}; \\ \alpha &= m\Omega/a; \quad \beta = (\Omega \eta/2 + \pi/4); \quad \delta = pd_0/a = pd_0 a/m\Omega; \\ s_0 &= (1/2)(R/\rho_0 + \rho_0 G); \quad d_0 = (1/2)(R/\rho_0 - \rho_0 G). \end{aligned}$$

Фазовый множитель, согласно (20), нетрудно найти в виде

$$v[t(\xi_1)] = V_0 \cos \left\{ \frac{2\omega_0}{\Omega} \left[\operatorname{Arc} \operatorname{tg}(e^{-\alpha x} \operatorname{tg} \beta) - \frac{\pi}{4} \right] + \Theta_0 \right\}. \quad (31)$$

Последний множитель в (30) дает экспоненциальное затухание волны; первые два множителя периодически зависят от времени (с частотой $\Omega \ll \omega_0$). Как легко видеть из (30), амплитудная модуляция сигнала возможна и при $n = \text{const}$. Действительно, при $m/p \rightarrow 0$ $\Phi \rightarrow 1$ и $K_1 \approx S = \exp[-s_0 + pd_0 \cos(\Omega \eta + \psi)] x$, т. е. K_1 периодически изменяется в пределах $\exp[-(s_0 \pm pd_0)x]$. Так как $|d_0| \leq s_0$, $p \leq 1$, волна затухает, но глубина модуляции непрерывно увеличивается вдоль линии.

Если же величины m и p одного порядка, второй сомножитель в (30) заключен в пределах $(e^{-\delta \cos \psi}, e^{\delta \cos \psi})$ и для достаточно малых $\delta \cos \psi$ незначительно отличается от единицы. Если пренебречь этим отличием, экстремальные значения K_1 можно считать равными $\exp[-s_0 \pm \alpha(1 - \delta \sin \psi)] x$. Таким образом, необходимым и достаточным условием увеличения максимального значения мгновенной амплитуды волны является неравенство

$$\alpha > s_0 + pd_0 \sin \psi. \quad (32)$$

Добавком $pd_0 \sin \psi$ заведомо можно пренебречь, если изменяется только один из погонных параметров L или C (при этом $\sin \psi = 0$). В этом случае учет потерь приводит лишь к умножению решения на фактор $e^{-s_0 x}$, а условие (32) принимает вид:

$$\alpha = m\Omega/a > s_0 = (1/2)(R/\rho_0 + \rho_0 G). \quad (33)$$

3. ОЦЕНКА ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ

Для стационарных систем, когда параметры зависят только от пространственной координаты, решение задачи в виде ряда (9) имеется в литературе (см., например, [9]). Рассмотренный выше первый член этого ряда эквивалентен так называемому приближению „геометрической оптики“, остальные же представляют из себя волны, отраженные соответствующее число раз. Для первой отраженной волны, согласно (5), (8), (11), можно получить:

$$U_2^1 = e^{f_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} m_1 e^{-f_1} U_1^0 d\xi_1. \quad (34)$$

Хотя в общем случае выражение для U_2^1 невозможно представить в виде чисто бегущей волны, нетрудно убедиться, что наличие последней уменьшает общий поток мощности. Действительно, находя из (2) выражения для тока и напряжения:

$$V = (1/2)(U_1^0 + U_2^1), \quad I = (1/2\rho)(U_1^0 - U_2^1), \quad (35)$$

для мгновенного значения суммарного потока мощности имеем:

$$P = VI = (1/4\rho)[(U_1^0)^2 - (U_2^1)^2] = P^0 - P^1 \ll P^0, \quad (36)$$

где $P^0 = (U_1^0)^2/4\rho$ — поток мощности прямой волны, а величину $P^1 = (U_2^1)^2/4\rho$ можно рассматривать как поток отраженной волны.

Оценим отраженную волну в случае, когда синусоидальные колебания напряжения поступают на вход линии, начиная с $t = 0$, причем в этот момент

$$V(x, 0) = 0, \quad I(x, 0) = 0 \quad (37)$$

для $x \geq 0$. Тогда, согласно (11)–(13) и (20), выражение для прямой волны, удовлетворяющей этим условиям, можно найти в виде:

$$U_1^0 = \begin{cases} 0 & \text{при } t(\xi_1) < 0 \\ 2K_1 V_0 \cos\Theta & \text{при } t(\xi_1) > 0 \end{cases}, \quad (38)$$

т. е. равенство $t(\xi_1) = 0$ определяет передний фронт волны в линии. Подставляя это выражение в (34) и заменив переменную интегрирования на $t(\xi_1)$, получаем для $t(\xi_1) > 0$:

$$U_2^1 = e^{f_2} \int_0^{t(\xi_1)} k_{21} e^{-f_2} (n\Phi)^{-1} K_1 V_0 \cos\Theta dt(\xi_1) \quad (39)$$

(в области $t(\xi_1) < 0$ $U_2^1 \equiv 0$). Будем считать, что подынтегральный множитель перед $\cos\Theta$ можно рассматривать как медленную функцию аргумента $t(\xi_1)$. Отраженная волна (39) будет незначительна по сравнению с прямой волной (38), если мал интеграл в пределах каждого полупериода, где $\cos\Theta$ сохраняет знак; последний же будет не больше, чем произведение медленного множителя на величину полупериода, равную π/ω_0 . Тогда требование малости (39) можно записать в виде:

$$\left| \frac{\pi k_{21}}{2 n \omega_0 \Phi} \right| = \frac{\pi}{4 \omega_0} \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|_{\xi_1=\text{const}} \ll 1, \quad (40)$$

где $\omega = \omega_0 \Phi$ — мгновенная частота сигнала в линии. Последнее соотношение можно рассматривать как критерий применимости приближения „геометрической оптики“ в случае переменных параметров и имеет

простой физический смысл малого относительного изменения „волнового сопротивления“ за время порядка периода $2\pi/\omega$ для фиксированного фронта прямой волны. Таким образом, отражение будет невелико, если неоднородность ρ движется „синхронно“ с сигналом; например, в случае „бегущего“ параметра $\rho = \rho(\eta)$, где $\eta = t - x/a$, имеем:

$$\left| \frac{d\rho}{dt} \right|_{\xi_1=\text{const}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho = \left(1 - \frac{1}{an} \right) \frac{d\rho}{d\eta}, \quad (41)$$

т. е. отражение будет тем меньше, чем ближе скорость распространения сигнала $1/n$ и волны параметра a .

В отличие от стационарных систем условие (40) может быть нарушено в тех участках прямой волны, где вследствие возникающей модуляции мгновенная амплитуда и частота последней сильно уменьшаются ($\Phi \rightarrow 0$), хотя абсолютное значение амплитуды отраженной волны при этом может быть незначительным. В подобных случаях в качестве критерия справедливости нулевого приближения в решении представляется возможным взять отношение амплитуд отраженной и прямой волны, усредненных за время изменения параметра $T \gg 2\pi/\omega_0$. При небольшой глубине изменения параметров во времени требование малости этого отношения приводит к условию

$$|k_{21}/2n\omega_0| \ll 1. \quad (42)$$

По сравнению с (40) в последнее соотношение вместо мгновенной частоты ω входит постоянная величина ω_0 — частота входного сигнала.

Ограничивааясь случаями плавного изменения параметров, будем далее пренебрегать отраженными волнами.

4. ОБ ИЗМЕНЕНИИ ФОРМЫ И СПЕКТРА СИГНАЛА

Усиление мощности, возможное при изменении параметра $n = \sqrt{LC}$, неизбежно сопровождается деформацией сигнала, а следовательно, и изменением его спектра. Уже указывалось, например, что при изменении n с периодом $T \gg 2\pi/\omega_0$ имеет место амплитудная и фазовая модуляции монохроматического на входе сигнала, вследствие чего в спектре последнего появляются комбинационные частоты.

Нетрудно показать, что амплитуды отдельных компонент при этом всегда остаются ограниченными, хотя мощность сигнала может сколь угодно возрастать. Пренебрегая явлениями, вызванными изменением ρ и потерями (т. е. полагая $ZS \approx 1$), для напряжения в линии в самом общем случае, согласно (13) и (14), имеем выражение:

$$V(x, t) = \Phi v[t(\xi_1)]. \quad (43)$$

Для простоты будем считать, что функция V строго периодична во времени с периодом T . Тогда ее можно разложить в ряд Фурье по гармоникам $k\Omega = k2\pi/T$:

$$V = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-jk\Omega t},$$

где

$$c_k(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi v[t(\xi_1)] e^{jk\Omega t} dt. \quad (44)$$

Множитель Φ всегда положителен; поэтому последний интеграл не уменьшится, если вместо $v[t(\xi_1)]$ подставить ее максимальное значе-

ние V_{\max} , а экспоненту заменить модулем, равным единице. Тогда, согласно (22), можно написать:

$$|c_k(x)| \leq \frac{V_{\max}}{T} \int_0^T |\Phi| dt = V_{\max}. \quad (45)$$

Аналогично $|c_{-k}(x)| \leq V_{\max}$; следовательно, амплитуда k -ой гармоники сигнала будет во всяком случае не больше, чем

$$|c_k| + |c_{-k}| \leq 2V_{\max}. \quad (46)$$

Если $v(t)$ задано в виде (19), то величина V_{\max} равна амплитуде напряжения на входе линии (V_0). В этом случае из (46) следует, что ни одна гармоника в спектре волны не превосходит по амплитуде удвоенный входной сигнал. Нетрудно было бы обобщить это утверждение и для произвольного случая, когда $V(x, t)$ не является строго периодической функцией времени.

Таким образом, усиление мощности сигнала может происходить лишь за счет появления новых, в том числе и все более высокочастотных гармоник по мере распространения волны в линии*. Качественно это объясняется тем, что сигнал постепенно принимает форму бесконечно суживающихся импульсов с постоянной площадью (в случае $\Omega = 2\omega_0$, например, при определенных условиях сигнал приближается к серии δ -импульсов), так что спектр его неограниченно расширяется.

Для иллюстрации рассмотрим изменение формы и спектра импульсного сигнала. Пусть на вход линии в промежуток времени $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ поступает цуг колебаний $v(t) = V_0 \cos \omega_0 t$, причем в этот промежуток параметр n изменяется по линейному закону:

$$n = 1/a - \alpha \eta. \quad (47)$$

Тогда, полагая $ZS = 1$, получим, что напряжение в линии

$$V = \begin{cases} V_0 e^{\alpha x} \cos \omega_0 t(\xi_1) = V_0 e^{\alpha x} \cos \omega_0 e^{\alpha x} \eta & \text{при } \tau_1 \leq t(\xi_1) \leq \tau_2 \\ 0 & \text{при } t(\xi_1) < \tau_1 \text{ и } t(\xi_1) > \tau_2 \end{cases} \quad (48)$$

Характеристики переднего ($t(\xi_1) = \tau_1$) и заднего ($t(\xi_1) = \tau_2$) фронта импульса в этом случае имеют вид:

$$t_1 = x/a + \tau_1 e^{-\alpha x}, \quad t_2 = x/a + \tau_2 e^{-\alpha x}.$$

Эти соотношения можно понимать так: фронт волны, поступающей в линию в момент $t = \tau_1$, до точки x доходит в момент t_1 (аналогично для заднего фронта). Тогда длительность импульса в некоторой точке x равна

$$\tau = t_2 - t_1 = \tau_0 e^{-\alpha x}, \quad (49)$$

где $\tau_0 = \tau_2 - \tau_1$ — длительность входного импульса.

Таким образом, в рассматриваемой системе при $\alpha > 0$ амплитуда и несущая частота импульса увеличиваются по закону $e^{\alpha x}$, длительность же его обратно пропорционально уменьшается. Отношение полной энергии импульса E к несущей частоте ω , следовательно, является инвариантом:

$$E/\omega = \text{const.} \quad (50)$$

* Для частного случая, когда изменяется один из параметров L или C в виде синусоидальной бегущей волны с частотой $\Omega = 2\omega_0$, изменение спектра подробно рассмотрено в статье [?]. Формула (43), написанная для этого случая, полностью совпадает с соответствующим выражением для V , полученным в этой работе другим методом.

Если предположить, что такие импульсы с соответствующим фронтом волны параметра пробегают в линии с периодом $T > \tau_0$, легко вычислить и спектр сигнала. Без существенного ограничения общности можно считать функцию $V(x, t)$ четной и разложение проводить по косинусам:

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \cos k\Omega\eta,$$

где, как нетрудно убедиться,

$$a_k(x) = V_0 \frac{\tau_0}{T} \left\{ \frac{\sin [(\omega_0 - k\Omega e^{-\alpha x}) \tau_0/2]}{(\omega_0 - k\Omega e^{-\alpha x}) \tau_0/2} + \frac{\sin [(\omega_0 + k\Omega e^{-\alpha x}) \tau_0/2]}{(\omega_0 + k\Omega e^{-\alpha x}) \tau_0/2} \right\}. \quad (51)$$

Выражение в квадратной скобке по модулю не превышает 2; следовательно, в рассматриваемом примере $a_k(x) < 2V_0\tau_0/T$. Если $\omega_0\tau_0 \gg 2$, что означает, что импульс содержит достаточно большое число волн, то вторым членом в последнем выражении практически можно пренебречь. Тогда гармоники в спектре сигнала не могут превышать по амплитуде величины $V_0\tau_0/T$. Эту максимальную амплитуду имеет компонента с частотой, равной несущей частоте импульса:

$$k\Omega = \omega = \omega_0 e^{\alpha x},$$

т. е. по сравнению со входным сигналом „центральная частота“ спектра увеличивается в $e^{\alpha x}$ раз. Если $\Delta\omega$ — разность по шкале частот между ω и ближайшей частотой, для которой $\sin[(\omega_0 - k\Omega e^{-\alpha x})(\tau_0/2)] = 0$, нетрудно найти, что

$$\Delta\omega/\omega = \text{const}. \quad (52)$$

Таким образом, ширина спектра тоже увеличивается по закону $e^{\alpha x}$; во столько же раз, следовательно, повышается число гармоник в этой полосе частот.

Из сказанного ясно, что недиспергирующие системы с плавно изменяющимися параметрами непригодны в качестве усилителей монохроматических колебаний, но могут представлять интерес для преобразования формы и спектра сигнала, например, для усиления импульсов с одновременным уменьшением их длительности и повышением несущей частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. R. Morgenthaler, IRE Transaction, MTT-6, 167 (1958).
2. С. И. Аверков, Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 4, 46 (1958).
3. С. И. Аверков, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 203 (1959).
4. P. K. Tien, J. Appl. Phys., 29 1347 (1958).
5. P. K. Tien, H. Suh1, Proc. IRE, 46, 700 (1958).
6. W. H. Louisell, C. F. Quate, Proc. IRE, 46, 707 (1958).
7. G. M. Roe, M. R. Royston, Proc. IRE, 47, 1213 (1959).
8. С. М. Рытов, ЖТФ, 17, 930 (1947).
9. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, § 16, изд. АН СССР, М., 1957.

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СИММЕТРИЧНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ РАДИОВОЛНОВОДАХ*

B. C. Ильин

На основе вариационной методики произведено рассмотрение «четырехполюсной» неоднородности в прямоугольном волноводе, выполненной в виде решетчатой диафрагмы произвольной толщины. Полученные общие формулы описывают большое число неоднородностей, часто встречающихся в волноводной технике СВЧ.

В работе [1] на основе вариационного метода Швингера произведено рассмотрение одиночной „скачкообразной“ неоднородности, возникающей при соединении двух прямоугольных волноводов различных высот. В плоскости соединения волноводов помещена произвольная тонкая диафрагма, набранная из пластин емкостного типа; волноводы могут быть заполнены двумя различными изотропными средами. Представляет интерес обобщение данной задачи на случай, когда такая диафрагма-решетка обладает конечной толщиной. Эквивалентная схема, описывающая эту систему, будет представлена теперь не одиночной шунтирующей проводимостью, а некоторым четырехполюсником. Решение такой задачи позволяет значительно расширить класс рассматриваемых волноводных неоднородностей. В настоящей работе на основе вариационной методики эта задача решена для случая, когда неоднородность может быть описана эквивалентным симметричным четырехполюсником. На рис. 1 изображена система, представляющая собой прямоугольный волновод, в котором находится решетчатая диафрагма толщины L . Предполагается, что система по оси y , перпендикулярной к плоскости рисунка, регулярна и ограничена по y с двух сторон плоскостями - стенками, расположенными в плоскостях $y = 0$ и $y = d$.

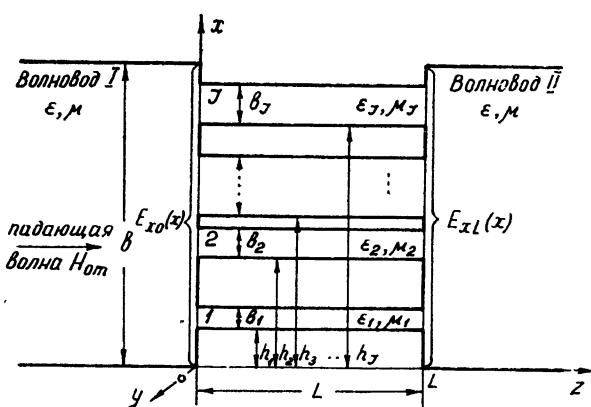


Рис. 1.

в средах, заполняющих волноводы I и II и каналы решетки, и потери на стенках волновода отсутствуют. Размер b по отношению к длине волны выбран так, что в волноводах I и II распространяются только

плоскостные волны. Далее предполагается, что потери

* Доклад на III Всесоюзной конференции МВО СССР по радиоэлектронике.

доминантные волны типа H_{0m} . Постановка задачи по существу ничем не отличается от постановки задачи в работе [1]. Поэтому сразу запишем выражения для электрических компонент E_x полей в областях I, II, III, ..., I, II:

где постоянные распространения равны

Здесь R и T — коэффициенты отражения и прохождения, отнесенные соответственно к клеммным плоскостям $z=0$ и $z=L$. Неизвестные коэффициенты в рядах (1) можно, на основании общей теории рядов Фурье, выразить через тангенциальные компоненты $E_{x0}(x)$ и $E_{xL}(x)$, заданные на плоскостях $z=0$ и $z=L$. Такая операция фактически

означает „сшивание“ E_x -компоненты электрического вектора \mathbf{E} на поверхности $z=0$ и $z=L$. Итак, при сшивании по $z=0$ получим формулы:

$$\left. \begin{array}{l} \text{волновод I} \\ \text{волновод I} \\ \vdots \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} 1 + R &= \frac{1}{b} \int_0^b E_{x0}(x) dx; \\ {}_1 A_n &= \frac{2}{b} \int_0^b E_{x0}(x) \cos \left[\frac{n\pi}{b} x \right] dx; \\ &\cdot \\ {}_1 A_0 + {}_1 B_0 &= \frac{1}{b_1} \int_{h_1}^{h_1+b_1} E_{x0}(x) dx; \\ {}_1 A_n + {}_1 B_n &= \frac{2}{b_1} \int_{h_1}^{h_1+b_1} E_{x0}(x) \cos \left[\frac{n\pi}{b_1} (x - h_1) \right] dx; \\ \vdots & \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{волновод J} \\ \vdots \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} {}_J A_0 + {}_J B_0 &= \frac{1}{b_J} \int_{h_J}^{h_J+b_J} E_{x0}(x) dx; \\ {}_J A_n + {}_J B_n &= \frac{2}{b_J} \int_{h_J}^{h_J+b_J} E_{x0}(x) \cos \left[\frac{n\pi}{b_J} (x - h_J) \right] dx. \end{aligned}$$

При „сшивании“ по $z=L$ получим соотношения:

$$\left. \begin{array}{l} \text{волновод I} \\ \text{волновод J} \\ \vdots \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} {}_1 A_0 e^{-j_1 K_b L} + {}_1 B_0 e^{+j_1 K_b L} &= \frac{1}{b_1} \int_{h_1}^{h_1+b_1} E_{xL}(x) dx; \\ {}_1 A_n e^{-j_1 \Gamma_n L} + {}_1 B_n e^{+j_1 \Gamma_n L} &= \frac{2}{b_1} \int_{h_1}^{h_1+b_1} E_{xL}(x) \cos \left[\frac{n\pi}{b_1} (x - h_1) \right] dx; \\ &\cdot \\ {}_J A_0 e^{-j_J K_b L} + {}_J B_0 e^{+j_J K_b L} &= \frac{1}{b_J} \int_{h_J}^{h_J+b_J} E_{xL}(x) dx; \\ {}_J A_n e^{-j_J \Gamma_n L} + {}_J B_n e^{+j_J \Gamma_n L} &= \frac{1}{b_J} \int_{h_J}^{h_J+b_J} E_{xL}(x) \cos \left[\frac{n\pi}{b_J} (x - h_J) \right] dx; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{ВОЛНОВОД II} \quad \left\{ \begin{array}{l} T = \frac{1}{b} \int_0^b E_{xL}(x) dx; \\ II A_n = \frac{2}{b} \int_0^b E_{xL}(x) \cos \left[\frac{n\pi}{b} x \right] dx. \end{array} \right.$$

Теперь необходимо произвести приравнивание тангенциальных компонент H_y на $z = 0$ и $z = L$ в интервалах $h_1 \leq x \leq h_1 + b_1$; $h_2 \leq x \leq h_2 + b_2$; ...; $h_J \leq x \leq h_J + b_J$, т. е. на отверстиях решетки. Такое приравнивание физически означает непрерывность потока вектора Пойнティングа на отверстиях решетки. Из [1] следует, что для нахождения H_y -компоненты можно воспользоваться формулой:

$$H_y(x, y, z) = j \frac{K_b^2}{300 K_{\mu}} \int E_x(x, y, z) dz. \quad (5)$$

Приравнивание магнитных компонент H_y при $z = 0$ и $z = L$ приводит к системе двух интегральных уравнений Фредгольма первого рода, записанных относительно функций $E_{x0}(x)$ и $E_{xL}(x)$:

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{2}{b_J} \int_{h_J}^{h_J + b_J} E_{x_0}(x) \cos \left[\frac{n\pi}{b_J} (x - h_J) \right] dx \right\} \cos \left[\frac{n\pi}{b_J} (x - h_J) \right] - \\ & - j_J K_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J\Gamma_n} \frac{1}{\sinh J\Gamma_n L} \left\{ \frac{2}{b_J} \int_{h_J}^{h_J + b_J} E_{xL}(x) \cos \left[\frac{n\pi}{b_J} (x - h_J) \right] dx \right\} \times \\ & \quad \times \cos \left[\frac{n\pi}{b_J} (x - h_J) \right] \end{aligned}$$

при $h_J \leq x \leq h_J + b_J$.

$$\frac{K_b}{K_{\mu}} \left\{ T + j K_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_n} \frac{2}{b} \left[\int_0^b E_{xL}(x) \cos \left(\frac{n\pi}{b} x \right) dx \right] \cos \left(\frac{n\pi}{b} x \right) \right\} =$$

$$\frac{1}{K_b} \left(\frac{1}{j \sin (1K_b L)} \frac{1}{b_1} \int_{h_1}^{h_1+b_1} E_{x0}(x) dx - \frac{\cos (1K_b L)}{j \sin (1K_b L)} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{b_1} \int_{h_1}^{h_1+b_1} E_{xL}(x) dx + j_1 K_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_n} \frac{1}{\sinh \Gamma_n L} \left\{ \frac{2}{b_1} \int_{h_1}^{h_1+b_1} E_{xo}(x) \times \right.$$

$$\times \cos \left[\frac{n\pi}{b_1} (x - h_1) \right] dx \Big\} \cos \left[\frac{n\pi}{b_1} (x - h_1) \right] - j_1 K_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_n} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{ch} {}_1\Gamma_n L}{\operatorname{sh} {}_1\Gamma_n L} \left\{ \frac{2}{b_1} \int_{h_1}^{h_1+b_1} E_{xL}(x) \cos \left[\frac{n\pi}{b_1} (x - h_1) \right] dx \right\} \times$$

$$\times \cos \left[\frac{n\pi}{b_1} (x - h_1) \right] \Bigg)$$

при $h_1 \leq x \leq h_1 + b_1$

..... (7)

$$\frac{jK_b}{K\mu_J} \left(\frac{1}{j \sin(jK_b L)} \frac{1}{b_J} \int_{h_J}^{h_J + b_J} E_{x_0}(x) dx - \frac{\cos(jK_b L)}{j \sin(jK_b L)} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{b_J} \int_{\frac{h}{b_J}}^{\frac{h_J + b_J}{b_J}} E_{xL}(x) dx + j_J K_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J\Gamma_n} \frac{1}{\sinh J\Gamma_n L} \left\{ \frac{2}{b_J} \int_{\frac{h}{b_J}}^{\frac{h_J + b_J}{b_J}} E_{x0}(x) \times \right.$$

$$\times \cos \left[\frac{n\pi}{b_J} (x - h_J) \right] dx \Big\} \cos \left[\frac{n\pi}{b_J} (x - h_J) \right] - j_J K_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j! F_n} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{ch} j\Gamma_n L}{\operatorname{sh} j\Gamma_n L} \left\{ \frac{2}{b_J} \int_{h_J}^{h_J + b_J} E_{xL}(x) \cos \left[\frac{n\pi}{b_J} (x - h_J) \right] dx \right\} \times \\ \times \cos \left[\frac{n\pi}{b_J} (x - h_J) \right] \Bigg) \\ \text{при } h_J \leq x \leq h_J + b_J.$$

Можно преобразовать эти интегральные уравнения, производя сложение (6) и (7), а затем вычитая из (6) уравнение (7). Полученные таким образом два новых интегральных уравнения можно условно, в целях экономии места, записать в виде:

$$1 - R \pm T = j K_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_n} \frac{2}{b} \left\{ \int_0^b \left[E_{x0}(x) \mp E_{xL}(x) \right] \times \right.$$

$$\cos \times \left(\frac{n\pi}{b} x \right) dx \} \cos \left(\frac{n\pi}{b} x \right) +$$

$$\frac{K_b \mu}{K_b \mu_1} \left(-j \frac{\cos (K_b L) + 1}{\sin (K_b L)} \frac{1}{b_1} \int_{b_1}^{b_1 + b_1} [E_{x0}(x) \mp E_{xL}(x)] dx + \right.$$

$$+ j_1 K_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_n} \frac{\operatorname{ch}_1 \Gamma_n L \pm 1}{\operatorname{sh}_1 \Gamma_n L} \frac{2}{b_1} \left\{ \int_{h_1}^{h_1 + b_1} [E_{x0}(x) \mp E_{xL}(x)] \times \right.$$

$$\left. \times \cos \left[\frac{n\pi}{b_1} (x - h_1) \right] dx \right\} \cos \left[\frac{n\pi}{b_1} (x - h_1) \right] \right)$$

十一

$$\begin{aligned} & \frac{\sinh(\beta J_b L)}{\sinh(\alpha J_b L)} \left(-j \frac{\cos(\beta J_b L) \pm 1}{\sin(\beta J_b L)} \frac{1}{b_J} \int_{h_J}^{h_J + b_J} [E_{x0}(x) \mp E_{xL}(x)] dx + \right. \\ & \left. + j_J K_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J^n \Gamma_n} \frac{\cosh(\beta J_n L) \pm 1}{\sinh(\beta J_n L)} \frac{2}{b_J} \left\{ \int_{h_J}^{h_J + b_J} [E_{x0}(x) \mp E_{xL}(x)] \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \cos\left[\frac{n\pi}{b_J}(x-h_J)\right] dx \right\} \cos\left[\frac{n\pi}{b_J}(x-h_J)\right] \right). \end{aligned}$$

Для дальнейшего преобразования интегральных уравнений (8) введем обозначения:

$$E^{(-)}(x) = E_{v_0}(x) - E_{v_f}(x); \quad E^{(+)}(x) = E_{v_0}(x) + E_{v_f}(x). \quad (9)$$

В силу граничных условий на проводнике, введенные ранее тангенциальные компоненты поля $E_{x0}(x)$ и $E_{xL}(x)$ (а стало быть, и связанные с ними соотношением (9) функции $E^{(-)}(x)$ и $E^{(+)}(x)$) отличны от

нуля только в интервалах $h_1 \leq x \leq h_1 + b_1$; $h_2 \leq x \leq h_2 + b_2$; ...; $h_J \leq x \leq h_J + b_J$. Поэтому интегрирование в формулах (3) и (4) фактически распространяется лишь на эти интервалы изменения переменной x . Из (3), (4) и (9) следует:

$$1 + R \mp T = \frac{1}{b} \int_0^b E^{(\mp)}(x) dx. \quad (10)$$

Умножая уравнения (8) соответственно на $E^{(\mp)}(x)$, а затем интегрируя в пределах от 0 до b , с учетом отличия функций $E^{(\mp)}(x)$ от нуля в указанных выше интервалах, получим, принимая во внимание формулы (10), выражения:

$$\begin{aligned}
F^{(\mp)} = & \frac{1-R \pm T}{1+R \mp T} = j \left(- \sum_{i=1}^{i=J} \frac{i K_b \mu b}{K_b \mu_i b_i} \frac{1 \pm \cos(i K_b L)}{\sin(i K_b L)} \left[\int_{h_i}^{h_i+b_i} E^{(\mp)}(x) dx \right]^2 + \right. \\
& + K_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\Gamma_n} \left[\int_0^b E^{(\mp)}(x) \cos \left(\frac{n \pi}{b} x \right) dx \right]^2 + \\
& + \sum_{i=1}^{i=J} \frac{i K_b^2 \mu b}{K_b \mu_i b_i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{i \Gamma_n} \frac{\operatorname{ch}_i \Gamma_n L \pm 1}{\operatorname{sh}_i \Gamma_n L} \left\{ \int_{h_i}^{h_i+b_i} E^{(\mp)}(x) \times \right. \\
& \left. \times \cos \left[\frac{n \pi}{b_i} (x - h_i) \right] dx \right\}^2 \left. \right) \left[\int_0^b E^{(\mp)}(x) dx \right]^{-2}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Полученные выражения (11) представляют собой два квадратичных функционала, записанных, соответственно, относительно неизвестных функций $E^{(-)}(x)$ и $E^{(+)}(x)$. Можно показать, что данные функционалы будут в сочетании с уравнениями (8) стационарны относительно малых вариаций $E^{(-)}(x)$ и $E^{(+)}(x)$ вокруг их точных значений*.

Таким образом, наша задача, сформулированная выше в виде интегральных уравнений (8), сводится теперь к нахождению стационарных точек функционалов (11), т. е. сводится к решению вариационной проблемы. Для определения стационарных значений функционалов $F^{(\pm)}$ можно воспользоваться известным из вариационного исчисления [2-4] приближенным методом Ритца**, аппроксимируя функции $E^{(-)}(x)$ и $E^{(+)}(x)$ в виде рядов:

$$E^{(\mp)}(x) = \begin{cases} {}_1a_0^{(\mp)} + {}_1a_1^{(\mp)} x + {}_1a_2^{(\mp)} x^2 + \dots + {}_1a_{q_1}^{(\mp)} x^{q_1} & \text{для } h_1 \leq x \leq h_1 + b_1 \\ {}_2a_0^{(\mp)} + {}_2a_1^{(\mp)} x + {}_2a_2^{(\mp)} x^2 + \dots + {}_2a_{q_2}^{(\mp)} x^{q_2} & \text{для } h_2 \leq x \leq h_2 + b_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ {}_J a_0^{(\mp)} + {}_J a_1^{(\mp)} x + {}_J a_2^{(\mp)} x^2 + \dots + {}_J a_{q_J}^{(\mp)} x^{q_J} & \text{для } h_J \leq x \leq h_J + b_J \\ 0 & \text{для } 0 \leq x \leq h_1, \quad h_i + b_i \leq x \leq h_{i+1}, \\ h_j + b_j \leq x \leq b & (\text{при } i = 1, 2, 3, \dots, J-1). \end{cases} \quad (12)$$

* Доказательство стационарности проводится путем прямого вычисления $\delta F^{(\mp)}$ при использовании свойств симметрии функции Грина данной задачи. Доказательство, ввиду его громоздкости, здесь не приводится

** Заметим, что наряду с методами Ритца могут быть использованы и другие вариационные методы, например, метод Канторовича [4].

При этом на коэффициенты ${}_i a_1^{(\mp)}$, ${}_i a_2^{(\mp)}$, ${}_i a_3^{(\mp)}$... соответственно для каждого из функционалов (11) накладываются условия стационарности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{(\mp)}}{\partial (\operatorname{Re} {}_i a_0^{(\pm)})} &= 0; \quad \frac{\partial F^{(\mp)}}{\partial (\operatorname{Im} {}_i a_0^{(\mp)})} = 0 \dots; \quad \frac{\partial F^{(\mp)}}{\partial (\operatorname{Re} {}_i a_{q_i}^{(\mp)})} = 0; \\ \frac{\partial F^{(\mp)}}{\partial (\operatorname{Im} {}_i a_{q_i}^{(\mp)})} &= 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, J). \end{aligned} \quad (13)$$

Полученные таким образом алгебраические уравнения (13) позволяют определить коэффициенты ${}_i a_1^{(\mp)}$, ${}_i a_2^{(\mp)}$, ${}_i a_3^{(\mp)}$, ..., т. е. найти приближенные значения функций $E^{(-)}(x)$ и $E^{(+)}(x)$. Знание этих функций при спользовании формул (1)–(5), (9) позволяет определить полное поле в волноводной системе, а также определить значения $F^{(\mp)} = 1 - R \pm T/1 + R \mp T$ (а стало быть, и значения R и T).

На практике, однако, наибольший интерес представляют не выражения для полей в волноводе, а величины R , T и эквивалентная схема волноводной неоднородности. Поэтому, если не требуется определение полей, то R и T можно найти более простым методом. Действительно, так как алгебраическая система уравнений (13) является однородной (в чем нетрудно убедиться, если подставить (12) в формулы (11), произвести интегрирование, а затем наложить условия стационарности, представляя систему (13) в явном виде), то для совместности уравнений, входящих в данную систему, необходимо потребовать равенства нулю определителя системы. Последнее позволяет получить „вековое уравнение“ для определения $F^{(\mp)}$, исключая, тем самым, коэффициенты ${}_i a_1^{(\mp)}$, ${}_i a_2^{(\mp)}$, ${}_i a_3^{(\mp)}$, ... из рассмотрения. Выбирая достаточное количество членов в рядах, аппроксимирующих функции $E^{(\mp)}(x)$ (что обеспечивается выбором достаточно высоких значений натуральных чисел q_i) можно, в принципе, производить вычисление $F^{(\mp)}$ с любой степенью точности. В силу сходимости описанного выше процесса, оценку точности получаемых результатов можно получить путем сравнения двух приближений, вычисленных при q_i и при $(q_i + 1)$.

Вариационные свойства выражений (11), однако, обеспечивают весьма быструю сходимость получаемых по методу Ритца приближений, что позволяет для большинства практических случаев использовать приближение:

$$E^{(\mp)}(x) \approx \begin{cases} \text{const} \neq 0 (h_i \leq x \leq h_i + b_i; \quad i = 1, 2, \dots, J) \\ 0 (0 \leq x \leq h_1, \quad h_1 + b_1 \leq x \leq h_{i+1}, \quad h_J + b_J \leq x \leq b; \quad i = 1, 2, \dots, J-1), \end{cases} \quad (14)$$

которое физически соответствует распределению поля в „невозмущенной“, падающей на неоднородность, волне H_{0m}^* . Подставляя приближение (14) в функционалы (11), получаем выражения для определения R и T в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1 - R \pm T}{1 + R \mp T} &\approx j \left(- \sum_{i=1}^{i=J} \frac{{}_i K_b \mp b}{K_b \mp b_i} \cdot \frac{1 \pm \cos({}_i K_b L)}{\sin({}_i K_b L)} \cdot b_i^2 + \right. \\ &+ K_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\Gamma_n} \left(\frac{b}{n\pi} \right)^2 \left\{ \sum_{i=1}^{i=J} \sin \left[\frac{n\pi}{b} (h_i + b_i) \right] - \sin \left[\frac{n\pi}{b} h_i \right] \right\}^2 \left. \right) \left[\sum_{i=1}^{i=J} b_i \right]^{-2}. \end{aligned} \quad (15)$$

* Рассмотрение «полевых» задач в рамках приближения падающей волны весьма часто проводится в электродинамике (например, при использовании принципа Кирхгофа-Гюйгенса в теории дифракции). В нашем случае точность такого рассмотрения значительно повышается в силу вариационной формулировки задачи.

Эквивалентная схема рассматриваемой неоднородности может быть представлена Т-образным симметричным четырехполюсником с сопротивлениями Z в последовательных ветвях и с параллельной ветвью с шунтирующим сопротивлением Z_w (рис. 2). Величины Z и Z_w , как это следует из общей теории цепей, связаны с коэффициентами отражения и прохождения известными (см., например, [5]) формулами:

$$Z = \frac{1+R-T}{1-R+T}; \quad Z + 2Z_w = \frac{1+R+T}{1-R-T}. \quad (16)$$

Сравнивая (16) и (15), получим:

$$F^{(-)} = \frac{1}{Z}; \quad F^{(+)} = \frac{1}{Z + 2Z_w}. \quad (17)$$

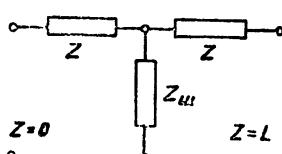


Рис. 2.

Таким образом, параметры эквивалентной схемы непосредственно определяются из формул (11) и (15). Так как задача рассматривалась при отсутствии потерь на стенках и в среде, то получаемые из (11) и (15) значения Z и Z_w будут носить чисто реактивный характер.

Заметим, что формулы (15), в отличие от более общих формул (11), не содержат

членов, зависящих от Γ_n . Это означает, что приближение (15) не учитывает „высшие“ (по сравнению с волнами с индексом $n = 0$), волны в волноводах $1, 2, \dots, J$, но описывает „ближние“ поля в волноводах I и II. Пренебрежение „ближними“ полями в волноводных каналах $1, 2, \dots, J$ (в этом случае все $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_J$ — действительные и положительные) не приводит к большим ошибкам в численных расчетах, проводимых на основе (15). Когда некоторые из постоянных $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_J$ являются мнимыми числами (при этом в каналах $1, 2, \dots, J$ наряду с волнами нулевого индекса могут распространяться „высшие“ волны), необходимо производить расчет по более общим формулам (11), с использованием описанной выше вариационной методики Ритца.

Проиллюстрируем применение формул (11) и (15) на некоторых примерах.

а) Прежде всего, рассмотрим частный случай, когда $J = 1$, $h_1 = 0$, $b_1 = b$, $L = 0$, $\epsilon = \epsilon_1$, $\mu = \mu_1$, $K_b = K_b$. Тогда из (11) и (15) получаем: $R = 0$, $T = 1$, что соответствует „предельному“ случаю, когда неоднородность отсутствует.

б) Положим $L = 0$. Волноводная система, соответствующая данному случаю, изображена на рис. 3а. Подставляя значения $L = 0$ в выражения (11), получим следующие формулы:

$$1 + R - T = 0; \quad (18)$$

$$\frac{1 - R - T}{1 + R + T} = jK_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\Gamma_n} \left[\int_0^b E^{(+)}(x) \times \right. \\ \left. \times \cos \left(\frac{n\pi}{b} x \right) dx \right]^2 \left[\int_0^b E^{(+)}(x) dx \right]^{-2}. \quad (19)$$

Формула (18), как известно [1,5], является общим условием для „скаккообразной“ неоднородности. Подставляя (18) в (19) и учитывая, что при $L \rightarrow 0$ $E^{(+)}(x) = E_{x0}(x) + E_{xL}(x) \rightarrow 2E_{x0}(x)$, получим:

* Сопротивления Z и Z_w являются нормированными, т. е. отнесенными к волновому сопротивлению волновода I.

$$\frac{1-R}{1+R} = 1 + j4K_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_n} \left[\int_0^b E_{x0}(x) \times \right. \\ \left. \times \cos \left(\frac{n\pi}{b} x \right) dx \right]^2 \left[\int_0^b E_{x0}(x) dx \right]^{-2}. \quad (20)$$

Функционал (20) полностью совпадает с функционалом работы [1], записанным для симметричного случая (когда сопрягаемые волноводы I и II одинаковы). Из (15) при $L = 0$ следует:

$$\frac{1-R}{1+R} = 1 + jK_b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_n} \left(\frac{b}{n\pi} \right)^2 \left\{ \sum_{i=1}^{i=j} \sin \left[\frac{n\pi}{b} (h_i - b_i) \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \left[\frac{n\pi}{b} h_i \right] \right\} \left[\sum_{i=1}^{i=j} b_i \right]^{-2} \right\}. \quad (21)$$

Формула (21) совпадает с соответствующей формулой работы [1], написанной для симметричного сочленения. На рис. 3б—3г приведены примеры некоторых неоднородностей, описываемых выражениями (20)—

(21). Заметим, что минимые части выражений (20)–(21) являются существенно положительными величинами, что указывает на емкостной характер „скачкообразной“ неоднородности, который связан с тем обстоятельством, что расчет проводился в E -плоскости волноводной системы.

в) Рассмотрим еще один пример для случая $L = 0$, когда волноводная неоднородность представляет собой несимметричную емкостную диафрагму, изображенную на рис. 3г. В этом случае

$J = 1$, $b_1 = d$, $h_1 = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1$, $\mu = \mu_1 = 1$, $K_b = 2\pi/\lambda_b$. Подставляя эти значения параметров в (21) и понимая под шунтирующей проводимостью бесконечно-тонкой диафрагмы величину [5]

$$B_{ш} = j2R(1+R)^{-1}, \quad (22)$$

получим

$$B_{ш} = \frac{8b}{\lambda_b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - (2b/\lambda_b)^2}} \left[\frac{\sin(n\pi d/b)}{n\pi d/b} \right]^2. \quad (23)$$

Формула (23) для величины $B_{ш}$ полностью совпадает с аналогичным результатом, приведенным в работе [6].

г) Наконец, рассмотрим пример, когда $L \neq 0$. Положим в выражениях (15) $J = 1$, $h_1 = 0$, $b_1 = b$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\varepsilon_1 \neq 1$, $\mu_1 \neq 1$ (рис. 3д). Тогда

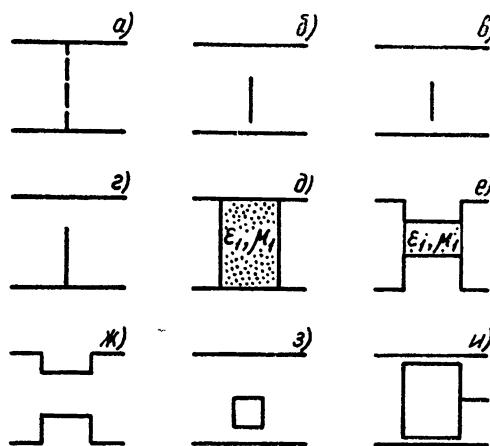


Рис. 3.

$$\frac{1 - R \pm T}{1 + R \mp T} = -j \frac{1}{K_b} \frac{\mu_1}{\mu_b} \frac{\cos(1K_b L) \pm 1}{\sin(1K_b L)}. \quad (24)$$

Исключая из (24) величину T , найдем известное выражение для коэффициента отражения диэлектрической „пробки“ в волноводе [7]:

$$R = \frac{1 - (K_b/K_b)^2}{1 + (K_b/K_b)^2 - j2(K_b/K_b) \cos(1K_b L)/\sin(1K_b L)}, \quad (25)$$

которое при $L = (\lambda_b/2)s$ ($s = 1, 2, 3, \dots$) дает величину $R = 0$ (закон „половинного“ согласования).

Заметим, что формула (25), выведенная из приближенных соотношений (15), является строгой (в рамках расчета, не учитывавшего потери). Это обстоятельство объясняется отсутствием в данной задаче „ближних“ полей, в силу чего в (15) члены с индексами $n > 0$ равны нулю.

На рис. Зе—Зи приведены некоторые другие примеры встречающихся на практике неоднородностей, расчет которых может быть проведен на основе выведенных выше вариационных формул. Отметим, что аналогичным методом расчет производится и для H -плоскости волноводной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Ильин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 3, 88 (1958).
2. С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
3. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
4. Л. Э. Эльсгольц, Вариационное исчисление, ГИТТЛ, М., 1958.
5. Л. Левин, Современная теория волноводов, ИЛ, М., 1954.
6. Справочник по волноводам, изд. Сов. радио, М., 1952.
7. В. В. Кургаев, Диссертация, Саратовский ун-т, 1953.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
19 марта 1960 г.

О СОСТОЯНИИ РАВНОВЕСИЯ, РАСПОЛОЖЕННОМ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗРЫВА

Ю. И. Неймарк, С. Д. Киняпин

Выясняется поведение фазовых траекторий вблизи состояния равновесия, расположенного на поверхности разрыва правых частей описывающих систему дифференциальных уравнений. При этом, в частности, устанавливаются условия устойчивости и неустойчивости состояния равновесия

Исследованию устойчивости состояния равновесия релейной системы посвящено уже значительное число работ [1–17]. Способ исследования устойчивости состояния равновесия релейной системы, предложенный авторами в работе [18], был затем применен к двухкаскадной релейной системе [17] и к более общей задаче в докладе Айзermana и Гантмахера, сделанном на I Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике [20].

В настоящей статье рассматривается общая задача об устойчивости состояния равновесия, расположенного на поверхности разрыва*. В основе исследования, как и в предыдущей работе [18], лежит использование метода точечных отображений и теоремы [18, 21] о связи устойчивости неподвижной точки точечного отображения в критическом случае, когда все корни характеристического уравнения равны единице, с устойчивостью состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, получаемой из этого точечного отображения путем предельного перехода.

1. Пусть правые части рассматриваемой системы дифференциальных уравнений испытывают разрыв первого рода на некоторой гладкой поверхности S , так что эта система уравнений может быть записана в виде

$$\dot{x}_i = \begin{cases} f_i^+(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{при } x_n > 0 \\ f_i^-(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{при } x_n < 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Функции f_i^+ и f_i^- будем предполагать достаточно гладкими, ** считая, в частности, что в окрестности рассматриваемой ниже точки $M^*(0, 0, \dots, 0)$ они могут быть представлены в виде:

$$f_i^+ = a_i^+ + \sum_{j=1}^n a_{ij}^+ x_j + \omega_i^+(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (2)$$

$$f_i^- = a_i^- + \sum_{j=1}^n a_{ij}^- x_j + \omega_i^-(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

* Задача, рассмотренная Айзermanом и Гантмахером, соответствует случаю $d = 4$
 $a_{ni}^+ := a_{ni}^- \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ настоящей работы.

** Достаточно предполагать их трижды непрерывно дифференцируемыми

где a_i^+ , a_i^- , a_{ij}^+ , a_{ij}^- — постоянные величины, а члены ω_i^+ и ω_i^- — не менее, чем второго порядка малости относительно x_1, x_2, \dots, x_n . Фазовое пространство системы (1) поверхностью $x_n = 0$ делится на две части G^+ и G^- , в каждой из которых движение фазовой точки подчиняется одному из уравнений (1).

На самой поверхности S движение фазовой точки уравнениями (1) вообще не определено. При доопределении ее движения по непрерывности следует различать следующие четыре случая, могущих иметь место в точке M рассматриваемой части поверхности S :

- 1) $\dot{x}_n^+ = f_n^+ > 0$; $\dot{x}_n^- = f_n^- > 0$;
- 2) $\dot{x}_n^+ = f_n^+ < 0$; $\dot{x}_n^- = f_n^- < 0$;
- 3) $\dot{x}_n^+ = f_n^+ < 0$; $\dot{x}_n^- = f_n^- > 0$;
- 4) $\dot{x}_n^+ = f_n^+ > 0$; $\dot{x}_n^- = f_n^- < 0$.

В первом и втором случаях через точку M проходит фазовая траектория, идущая из полупространства G^- в G^+ и соответственно из полупространства G^+ в G^- . В третьем случае фазовая точка остается на поверхности $x_n = 0$ до тех пор, пока не нарушается условие 3). Наконец, в последнем, четвертом случае движение фазовой точки M не определено. Для соответствующей физической системы это означает, что фазовая точка M в зависимости от случайных воздействий сместится в полупространство G^+ или G^- .

Области π^+ , π^- , C и D на поверхности $x_n = 0$, соответствующие четырем случаям (3), отделяются друг от друга кривыми γ^+ и γ^- , на которых соответственно $f_n^+ = 0$ или $f_n^- = 0$ (рис. 1).

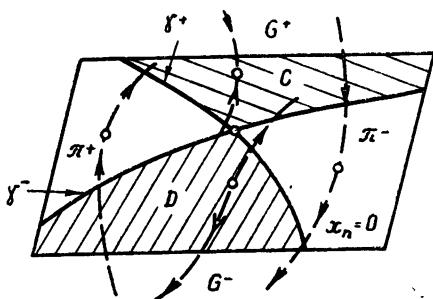
Возможное поведение фазовых траекторий вблизи граничных кривых γ^+ и γ^- представлено на рис. 2а и б.

Рис. 1. Поведение фазовых траекторий в окрестности пересечения кривых γ^+ и γ^- .

Аналитический критерий, разделяющий эти случаи, будет приведен ниже. Целью дальнейшего является изучение поведения фазовых траекторий в окрестности пересечения кривых γ^+ и γ^- и, в частности, отыскание условий, при которых все фазовые кривые в окрестности некоторой точки M , общей кривым γ^+ и γ^- , асимптотически приближаются к ней при $t \rightarrow +\infty$.

В последнем случае точку M будем называть устойчивым состоянием равновесия.

2. Поместим начало координат в произвольную точку, принадлежащую пересечению кривых γ^+ и γ^- . При этом в уравнениях (1) коэффициенты a_n^+ и a_n^- обращаются в нуль. Для того, чтобы начало координат M^* ($0, 0, \dots, 0$) могло быть устойчивым состоянием равновесия, необходимо, чтобы в окрестности M^* имел место первый из изображенных на рис. 2 случаев поведения фазовых траекторий в окрестности граничных кривых γ^+ и γ^- . Если это необходимое условие выполнено, то фазовые траектории в окрестности M^* определяют на поверхности S точечные отображения T^+ и T^- .



Точечное отображение T^+ (соответственно T^-) определено только в областях π^+ (π^-) и D поверхности $x_n = 0$. В области C преобразования T^+ и T^- не определены. Точка M^* является неподвижной точкой отображения $T-T^+$. Неподвижными точками отображения $T-T^-$ являются и все точки пересечения кривых γ^+ и γ^- . Точечное преобразование T^+ в окрестности точки M^* , согласно [19], может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i + (a_i^+ + \\ &+ \sum_{j=1}^n a_{ij}^+ x_j + \dots) \tau^+ + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1),$$

где

$$\tau^+ = -2 \sum_{j=1}^n a_{nj}^+ x_j \left(\sum_{j=1}^n a_{nj}^+ a_j^+ \right)^{-1} + \dots$$

Точечное отображение T^+ существует, если τ^+ положительно, т. е. если

$$\sum_{j=1}^n a_{nj}^+ a_j^+ < 0.$$

(5) Рис. 2. Типы поведения фазовых траекторий в окрестности граничной кривой γ^+ . Аналогичные случаи имеют место в области G^- вблизи кривой γ^- .

Аналогично, для преобразования T^- находим:

$$\bar{x}_i = x_i + \left(a_i^- + \sum_{j=1}^n a_{nj}^- x_j + \dots \right) \tau^- + \dots \quad (6)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1),$$

где

$$\tau^- = -2 \sum_{j=1}^n a_{nj}^- x_j \left(\sum_{j=1}^n a_{nj}^- a_j^- \right)^{-1} + \dots$$

Преобразование T^- действительно имеет место, если

$$\sum_{j=1}^n a_{nj}^- a_j^- > 0. \quad (7)$$

Исключая из уравнений (4) и (6) τ^+ (и соответственно τ^-), запишем точечное отображение T^+ (T^-) в виде:

$$\bar{x}_i = x_i - A_i^+ L^+(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots \quad (8)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1);$$

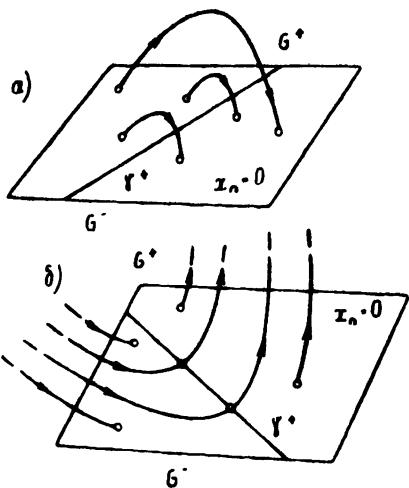
$$\bar{x}_i = x_i - A_i^- L^-(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots \quad (9)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1),$$

где

$$A_i^+ = 2a_i^+ \left(\sum_{j=1}^n a_{nj}^+ a_j^+ \right)^{-1}; \quad A_i^- = 2a_i^- \left(\sum_{j=1}^n a_{nj}^- a_j^- \right)^{-1};$$

$$L^+ = \sum_{j=1}^n a_{nj}^+ x_j; \quad L^- = \sum_{j=1}^n a_{nj}^- x_j,$$



а многоточия обозначают члены не ниже второго порядка малости относительно x_1, x_2, \dots, x_n .

3. Допустим, что прямые $L^+(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ и $L^-(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ на плоскости $x_n = 0$ не совпадают.

Рассмотрим кривую вида

$$\alpha^+ [L^+(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots] + \alpha^- [L^-(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots] = 0, \quad (10)$$

где

$$L^+ + \dots = f_n^+ = 0, \quad L^- + \dots = f_n^- = 0$$

—уравнения кривых γ^+ и γ^- . Точечным преобразованием T^+ кривая (10) преобразуется в кривую

$$\begin{aligned} \alpha^+ \sum_{j=1}^n a_{nj}^+ [\bar{x}_j - A_j^+ L^+(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \dots] + \alpha^- \sum_{j=1}^n a_{nj}^- [\bar{x}_j - \\ - A_j^+ L^+(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \dots] = BL^+(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \\ + \alpha^- L^-(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \dots = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$B = -\alpha^+ - a\alpha^-; \quad a = 2 \sum_{j=1}^n a_{nj}^- a_j^+ \left(\sum_{j=1}^n a_{nj}^+ a_j^+ \right)^{-1}.$$

Может случиться, что по точечному преобразованию T^+ вся область π^+ переходит внутрь области скользящих движений C и не допускает применения следующего точечного преобразования T^- . При этом граничная кривая $\gamma^-(\alpha^+ = 0; \alpha^- = 1)$ переходит, согласно (11), в кривую

$$-aL^+(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + L^-(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \dots = 0, \quad (11a)$$

целиком лежащую в области C . Поскольку в области C $L^+ L^- < 0$, то из (11a) следует, что это будет иметь место при $a < 0$. Пусть $a > 0$, тогда точечным преобразованием T^- кривая (11) переводится в кривую

$$\begin{aligned} (-\alpha^+ - a\alpha^-) L^+(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ + [b\alpha^+ + (d-1)\alpha^-] L^-(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$d = ab; \quad b = 2 \sum_{j=1}^n a_{nj}^+ a_j^- \left(\sum_{j=1}^n a_{nj}^- a_j^- \right)^{-1}.$$

Повторяя предыдущее рассуждение, найдем, что преобразование $T^- T^+$ переводит всю область π^+ внутрь области C , если $d - 1 < 0$. Согласно сказанному, кривая (10) преобразованием $T^- T^+$ переводится в кривую (12).

Интересуясь не самими кривыми (10) и (12), а только касательными к ним, найдем, что касательной

$$\alpha^+ L^+(x_1, x_2, \dots, x_n) + \alpha^- L^-(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (13)$$

к кривой (10) соответствует касательная

$$\bar{\alpha}^+ L^+(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \bar{\alpha}^- L^-(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0 \quad (14)$$

к кривой (12), где

$$\bar{\alpha}^+ = -\alpha^+ - a\alpha^-; \quad \bar{\alpha}^- = b\alpha^+ + (d-1)\alpha^-.$$
 (15)

Совокупность значений α^+ и α^- , поскольку существенно лишь их отношение, образуют окружность. Каждой точке этой окружности соответствует прямая на плоскости $x_n=0$. В силу этого формулы (15) можно рассматривать как точечное отображение окружности в себя. Прямым, лежащим в областях π^+ , π^- , C и D , соответствуют на этой окружности точки, лежащие на некоторых дугах, которые обозначим соответственно через π^+ , π^- , C и D . Точечное отображение (15) определено, по смыслу его вывода, только для точек дуги π^+ и D .

Для точек дуги π^- аналогично получим следующие формулы точечного отображения:

$$\bar{\alpha}^- = -\alpha^- - \alpha^+ b; \quad \bar{\alpha}^+ = a\alpha^- + (d-1)\alpha^+. \quad (16)$$

Если временно рассматривать (15) как точечное преобразование октанта $\alpha^- \leq 0$, $\alpha^+ \geq 0$ в себя, то после составления характеристического уравнения

$$\Delta = p^2 - p(d-2) + 1 = 0 \quad (17)$$

найдем, что в зависимости от единственного параметра

$$d = ab = 4 \sum_{j=1}^n a_{nj}^- a_j^+ \sum_{j=1}^n a_{nj}^+ a_j^- \left(\sum_{j=1}^n a_{nj}^+ a_j^+ \sum_{j=1}^n a_{nj}^- a_j^- \right)^{-1}$$

может представиться два случая.

1) $d < 4$. Начало координат $\alpha^+ = \alpha^- = 0$ является особой точкой типа фокуса, поскольку корни характеристического уравнения (17)

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} [d-2 \pm \sqrt{d(d-4)}] \quad (18)$$

комплексно сопряженные. Вся область π^+ после конечного числа шагов точечного преобразования T^-T^+ „выметается“ в область C (рис. 3).

2) $d > 4$. Начало координат $\alpha^+ = \alpha^- = 0$ является особой точкой типа седла, поскольку корни характеристического уравнения (17) положительны и их произведение равно единице. Обычным образом находятся два инвариантных луча S_1^+ , S_2^+ :

$$\frac{d + \sqrt{d(d-4)}}{2a} \alpha^+ + \alpha^- = 0; \quad (19)$$

$$\frac{2b}{d + \sqrt{d(d-4)}} \alpha^+ + \alpha^- = 0, \quad (20)$$

лежащих в рассматриваемом октанте $\alpha^- \leq 0$, $\alpha^+ \geq 0$ (рис. 4).

Замечая, что формулы точечного отображения (16) получаются из формул точечного отображения (15) циклической перестановкой переменных α^+ , α^- и положительных величин a , b , все сказанное можно дословно повторить для отображения T^+T^- и связанного с ним отображения (16) (рис. 3 и 4).

Согласно изложенному, в случае $d > 4$ последовательные преобразования луча либо уходят в область скользящих движений, либо неограниченно приближаются к инвариантной прямой $S_1^+(S_1^-)$. По мере уменьшения величины d инвариантные лучи $S_1^+(S_1^-)$ и $S_2^+(S_2^-)$ сближаются так, что при бифуркационном значении параметра $d = 4$ ин-

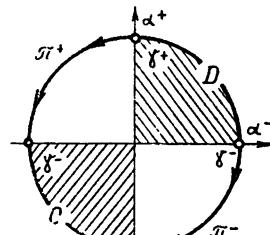


Рис. 3.

вариантные лучи $S_1^+(S_1^-)$ и $S_2^+(S_2^-)$ сливаются и пропадают ($d < 4$). После этого остаются только движения, переходящие в скользящие.

Таким образом, при $d < 4$ все движения, начинающиеся в достаточно малой окрестности точки M^* , переходят в скользящие движения.

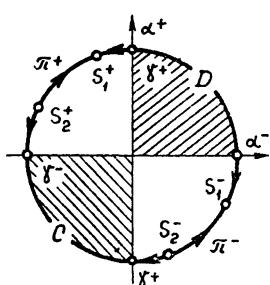


Рис. 4.

В достаточно малой окрестности точки M^* граничными кривыми области скользящих движений являются только кривые γ^+ и γ^- . С этих кривых фазовая точка сойти в области π^+ и π^- не может. Поэтому скользящее движение может прекратиться лишь после того, как фазовая точка покинет некоторую фиксированную окрестность точки M^* . Сказанное, в частности, означает, что в случае $d < 4$ исследование поведения фазовых кривых в окрестности M^* при $t \rightarrow +\infty$ полностью сводится к изучению скользящих движений. Поэтому, если точка M^* является устойчивым или неустойчивым состоянием равновесия для скользящих движений в области C , то точка M^* является устойчивым или соответственно неустойчивым состоянием равновесия исходной системы.

В случае $d > 4$ положение несколько сложнее. Именно, любая точка области π^+ или π^- после конечного числа преобразований либо попадает в область скользящих движений C , либо оказывается в ϵ -угле луча S_1^+ или S_1^- . В отношении скользящих движений можно повторить все сказанное ранее для случая $d < 4$.

4. Для изучения поведения в случае $d > 4$ фазовой точки, попавшей в ϵ -угол прямой $S_1^+(S_1^-)$ выпишем, используя (4) и (6), точечное отображение $T-T^+$ с точностью до величин третьего порядка малости относительно x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}}_i = & x_i + a_i^+ \tau^+ + a_i^- \tau^- + \tau^+ \sum_{j=1}^n a_{ij}^+ x_j + \tau^- \sum_{j=1}^n a_{ij}^- x_j + \\ & + \tau^+ \tau^- \sum_{j=1}^n a_{ij}^- a_j^+ + \frac{(\tau^+)^2}{2} \sum_{j=1}^n a_{ij}^+ a_j^+ + \frac{(\tau^-)^2}{2} \sum_{j=1}^n a_{ij}^- a_j^- + \dots \quad (21). \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1),$$

в котором τ^+ и τ^- определяются из уравнений [17]

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^n a_{nj}^+ x_j + \omega_n^+ (x_1, x_2, \dots, x_n) \right) \tau^+ + X^+ (\dot{x}_n^+) \frac{(\tau^+)^2}{2} + \\ & + X^{+2} (\dot{x}_n^+) \frac{(\tau^+)^3}{6} + \dots = 0; \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^n a_{nj}^- x_j + \omega_n^- (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \right) \tau^- + X^- (\dot{x}_n^-) \frac{(\tau^-)^2}{2} + \\ & + X^{-2} (\dot{x}_n^-) \frac{(\tau^-)^3}{6} + \dots = 0, \quad (23) \end{aligned}$$

где X^+, X^- — операторы вида

$$X^+ = f_1^+ \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2^+ \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + f_n^+ \frac{\partial}{\partial x_n};$$

$$X^- = f_1^- \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2^- \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + f_n^- \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Подставляя выражения τ^+ , τ^- в (21), согласно (22) и (23), после ряда преобразований запишем точечное отображение (21) в виде:

$$\bar{x}_i = x_i + (\tau^+ + \tau^-) a_i + (\tau^+ + \tau^-) W_i + \dots \quad (24)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n - 1),$$

где

$$W_i = \frac{1}{\Phi} \left[\left\{ E + \frac{2}{\Phi b^+} (E + F) \right\} a_i^+ + \left\{ F + \frac{4b - 2\varphi b^+}{\Phi b^+ b^-} (E + F) \right\} a_i^- - \right.$$

$$-\frac{2}{b^+} \sum_{j=1}^n a_{ij}^+ x_j + \frac{4b - 2\varphi b^+}{b^+ b^-} \sum_{j=1}^n a_{ij}^- x_j - \frac{2L^+}{b^+ b^-} \left(\frac{4b}{b^+} - 2\varphi \right) \sum_{j=1}^n a_{ij}^- a_j^+ +$$

$$\left. + \frac{2L^+}{(b^+)^2} \sum_{j=1}^n a_{ij}^+ a_j^+ + \frac{1}{b^-} \left(\frac{4b}{b^+} - 2\varphi \right) \left(\frac{4L^+ b}{b^+ b^-} - \frac{2L^-}{b^-} \right) \sum_{j=1}^n a_{ij}^- a_j^- + H_i \right];$$

$$a_i = \frac{1}{\Phi} \left\{ - \frac{a_i^+}{b^+} + \frac{a_i^-}{b^-} \left(-\varphi + \frac{2b}{b^+} \right) \right\};$$

$$E = \frac{2u^+}{(b^+)^2} - \frac{4L^+(A^+ + \omega^+)}{3(b^+)^3} + \frac{2W^+}{(b^+)^2};$$

$$F = -\frac{4u^+b}{(b^+)^2 b^-} + \frac{8L^+(A^+ + \omega^+)b}{3(b^+)^3 b^-} - \frac{4W^+b}{b^+ b^-} + \frac{4u}{b^+ b^-} - \frac{4L^+ A}{(b^+)^2 b^-} +$$

$$+ \frac{2u^-\varphi}{(b^-)^2} - \frac{4u^-b}{b^+(b^-)^2} - \frac{4L^- A^+}{b^+(b^-)^2} + \frac{8L^+ A^+ b}{(b^+)^2 (b^-)^2} + \frac{2\varphi \tilde{W}^-}{(b^-)^2} - \frac{4\tilde{W}^- b}{b^+(b^-)^2} -$$

$$- \frac{4\varphi (A^- + \omega^-) \left(L^- - \frac{2L^+ b}{b^+} \right)}{3(b^-)^3} + \frac{8(A^- + \omega^-) \left(L^- - \frac{2L^+ b}{b^+} \right) b}{3(b^-)^3 b^+};$$

$$H_i = \frac{h_i}{L^+} = \frac{2a_i^+}{L^+ b^+} \left[-\omega_n^+ + \frac{1}{\Phi} \left\{ - \frac{2\omega_n^+}{b^+} + \frac{4\omega_n^+ b}{b^+ b^-} - \frac{2\tilde{\omega}_n^-}{b^-} \right\} \right] +$$

$$+ \frac{2a_i^-}{L^+ b^-} \left[\frac{2\omega_n^+ b}{b^+} - \tilde{\omega}_n^- + \frac{4b^+ - 2b}{\Phi b^+} \left\{ - \frac{2\omega_n^+}{b^+} + \frac{4\omega_n^+ b}{b^+ b^-} - \frac{2\tilde{\omega}_n^-}{b^-} \right\} \right];$$

$$\Phi = -\frac{1}{b^+} + \frac{2b}{b^+ b^-} - \frac{\varphi}{b^-}; \quad \varphi = \frac{L^-}{L^+};$$

$$\tau^+ + \tau^- = -\frac{2L^+}{b^+} - \frac{2L^-}{b^-} + \frac{4L^+ b}{b^+ b^-} + \dots;$$

$$b^+ = \sum_{j=1}^n a_{nj}^+ a_j^+; \quad b^- = \sum_{j=1}^n a_{nj}^- a_j^-; \quad b = \sum_{j=1}^n a_{nj}^- a_j^+;$$

$$\begin{aligned}
 u^+ &= \sum_{i,s} a_{ns}^+ a_{si}^+ x_i; \quad u^- = \sum_{i,s} a_{ns}^- a_{si}^- x_i; \quad u = \sum_{i,s} a_{ns}^- a_{si}^+ x_i; \\
 A^+ &= \sum_{i,s} a_s^+ a_{ni}^+ a_{is}^+; \quad A^- = \sum_{i,s} a_s^- a_{ni}^- a_{is}^-; \\
 A_+ &= \sum_{i,s} a_{ns}^- a_{si}^- a_i^+; \quad A = \sum_{i,s} a_{ns}^- a_{si}^+ a_i^+; \\
 \omega^+ &= \sum_{i,s} \omega_i^+ a_s^+ \frac{\partial^2 \omega_n^+}{\partial x_i \partial x_s}; \quad \omega^- = \sum_{i,s} \omega_i^- a_s^- \frac{\partial^2 \omega_n^-}{\partial x_i \partial x_s}; \\
 W^+ &= \sum_{j=1}^n a_j^+ \frac{\partial \omega_n^+}{\partial x_j}; \quad W^- = \sum_{j=1}^n a_j^- \frac{\partial \omega_n^-}{\partial x_j}.
 \end{aligned}$$

Волнистая черта над выражениями означает, что в них \bar{x} заменено на x согласно (4).

Заметим, что при нахождении τ^+ (τ^-) из (23), (24) приходится учитывать как величины ω_n^+ , ω_n^- , так и их первые и вторые производные по x_1, x_2, \dots, x_{n-1}

$$\frac{\partial \omega_n^+}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \omega_n^-}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 \omega_n^+}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \omega_n^-}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Пусть M — произвольная точка, лежащая в малой окрестности M^* в области π^+ , и $\alpha^+ L^+ + \alpha^- L^- = 0$ — луч, проходящий через эту точку. Введем новую переменную

$$y = \alpha^+ / \alpha^- - y_1, \quad (25)$$

где y_1 — отношение значений α^+ и α^- для луча S_1^+ . Выражая в формулах преобразования (24), например, x_{n-1} через $y, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$, согласно выражению (25), где α^+ / α^- следует заменить на $-L^- / L^+$, запишем точечное отображение (24) в новых переменных $y, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$:

$$\begin{cases}
 \bar{y} = \alpha y + \varphi(x_1, x_2, \dots, y) + \dots; \\
 \bar{x}_i = x_i + (\tau^+ + \tau^-)(\alpha_i + W_i) + \dots = \\
 = f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) + y f_i^1(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) + f_i^2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + \dots \\
 \quad (i = 1, 2, \dots, n-2),
 \end{cases} \quad (26)$$

где предполагается, что x_{n-1} выражено через $y, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$,

$$\alpha = \left\{ d - 1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4/d}} \right\}^{-2} < 1,$$

$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}), f_i^1(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}), f_i^2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ — функции первого порядка малости, $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, y)$, $f_i^2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ — функции второго порядка малости и многоточием отмечены члены не ниже третьего порядка малости относительно $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, y$.

Пусть $V(x_1, x_2, \dots, x_{n-2})$ является функцией Ляпунова отображения

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_i &= x_i + (\tau^+ + \tau^-) \alpha_i + (\tau^+ + \tau^-) W_i + \dots \\
 \quad (i &= 1, 2, \dots, n-2),
 \end{aligned} \quad (27)$$

в котором у предполагается выраженным через x_1, x_2, \dots, x_{n-2} из уравнения

$$y - \alpha y + \dots = 0. \quad (28)$$

Сумма $A|y| + V(x)$ будет функцией Ляпунова отображения (26), поскольку разность

$$\begin{aligned} A|\bar{y}| + V(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-2}) - [A|y| + V(x_1, x_2, \dots, x_{n-2})] &= \\ &= A\{(\alpha - 1)|y| + \dots\} + \\ + V(f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}), f_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}), \dots, f_{n-2}(x_1, x_2, \dots, x_{n-2})) - \\ &\quad - V(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) + V(f_1^1(x_1, x_2, \dots, x_{n-2})) + \\ + yf_1^1(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}), \dots, f_{n-2}^1(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) + yf_{n-2}^1(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) &- \\ - V(f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}), f_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}), \dots, f_{n-2}(x_1, x_2, \dots, x_{n-2})) &= \\ = A(\alpha - 1)|y| + y \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j^1(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) + \\ + V(f_1, f_2, \dots, f_{n-2}) - V(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) + \dots \end{aligned}$$

при достаточно большом $A > 0$ отрицательна в окрестности точки $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-2} = y = 0$. Из этого следует, что неподвижная точка отображения (26) устойчива, если отображение (27) имеет положительно определенную функцию Ляпунова с ограниченной производной и неустойчиво, если это отображение имеет функцию Ляпунова, допускающую и отрицательные значения. Согласно [19], отображение (26) имеет положительно определенную функцию Ляпунова, если выполнены условия $\alpha_i = 0$,

$$a_i^+ = \frac{2 \sum_{j=1}^n a_{nj}^- a_j^+}{\sum_{j=1}^n a_{nj}^- a_j^-} \frac{d - 2 + \sqrt{d(d-4)}}{d + \sqrt{d(d-4)}} a_i^- \quad (29)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-2)$$

и все корни характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\bar{\tau}_i - x_i}{\tau^+ + \tau^-} = \alpha_i + W_i + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \quad (30)$$

получающиеся из (24) путем предельного перехода, имеют отрицательные действительные части. В противном случае, если не выполнено хотя бы одно условие (29) или хотя бы один корень уравнения (30) имеет положительную действительную часть, отображение (26) допускает функцию Ляпунова, принимающую и отрицательные значения.

Таким образом, неподвижная точка M^* отображения (26) устойчива, если выполнены условия (29) и все корни уравнения (30) имеют отрицательные действительные части, и неустойчива, если не выполнено хотя бы одно условие (29) или хотя бы один корень уравнения (30) имеет положительную действительную часть.

5. Допустим теперь, что прямые $L^+ = 0$ и $L^- = 0$ совпадают; тогда $a_{ni}^+ = a_{ni}^-$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) и $d = 4$. Если принять еще, что совпадают не только прямые $L^+ = 0$ и $L^- = 0$, но и граничные кривые γ^+ и γ^- , то рассмотрение точечного преобразования T^-T^+ в окрестности точки M^* сводится к исследованию предельного дифференциального уравнения. В рассматриваемом случае точечное отображение (24) записывается в виде:

$$\bar{\bar{x}}_i = x_i + (\tau^+ + \tau^-) \left\{ a_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j + \dots \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1), \quad (31)$$

и соответствующее ему предельное дифференциальное уравнение будет*:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = a_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1), \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= \left(-\frac{a_i^+}{b^+} + \frac{a_i^-}{b^-} \right) \left(\frac{1}{b^-} - \frac{1}{b^+} \right)^{-1}; \\ \beta_{ij} &= \frac{a_{nj}}{\left(\frac{1}{b^-} - \frac{1}{b^+} \right)} \left[\frac{\sum_{s=1}^n a_{is}^+ a_s^+}{(b^+)^2} + \frac{\sum_{s=1}^n a_{is}^- a_s^-}{(b^-)^2} - \frac{2 \sum_{s=1}^n a_{is}^- a_s^+}{b^+ b^-} \right] + \\ &+ \frac{a_i^+}{b^+ \left[\frac{1}{b^-} - \frac{1}{b^+} \right]} \left\{ \frac{\sum_{s=1}^n a_{ns}^+ a_{sj}^+}{b^+} - \frac{\sum_{s=1}^n a_{ns}^- a_{sj}^-}{b^-} + 2 a_{nj} \left[\frac{1}{b^+} \left(\frac{A^\pm}{b^-} - \frac{A^+}{b^+} \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{A^+ + \omega^+}{(b^+)^2} - \frac{A^- + \omega^-}{(b^-)^2} \right) \right] + \frac{1}{\left(\frac{1}{b^-} - \frac{1}{b^+} \right)} \left(\frac{a_{ij}^-}{b^-} - \frac{a_{ij}^+}{b^+} \right) + \dots \right\} \end{aligned}$$

Согласно [19], неподвижная точка M^* на поверхности $x_n = 0$ устойчива, если

$$a_i^+ \sum_{j=1}^n a_{nj} a_j^- = a_i^- \sum_{j=1}^n a_{nj} a_j^+ \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1) \quad (33)$$

(в частности, из (5), (7) и (32) следует, что $a_i^+ a_i^- < 0$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$)) и если все корни характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений (32) лежат в левой полуплоскости.

* При этом, однако, предполагается, что движение фазовых точек по кривой $\gamma^+ = \gamma^-$ определяется по непрерывности дифференциальными уравнениями (32). Такое доопределение исходных разрывных уравнений движения (1) математически обосновано быть не может. В силу этого можно было бы при формулировке результатов дополнительно потребовать, чтобы точка M^* была устойчивым состоянием равновесия для фазовых траекторий, лежащих в $\gamma^+ = \gamma^-$.

Из устойчивости или неустойчивости неподвижной точки M^* следует соответственно устойчивость или неустойчивость состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (1).

6. Резюмируя результаты проведенного исследования, сформулируем следующие теоремы.

Теорема 1. Для того, чтобы точка $M^*(0, 0, \dots, 0)$ была устойчивым состоянием равновесия системы (1), достаточно выполнение неравенств (5), (7) и одного из следующих трех условий (в зависимости от величины d):

1) $d < 4$ и точка M^* является устойчивым состоянием равновесия для скользящих движений на плоскости $x_n = 0$;

2) $d = 4$ ($\gamma^+ \equiv \gamma^-$), выполнены условия (33) и корни уравнения (32) имеют отрицательную действительную часть;

3) $d > 4$, выполнены предыдущее требование (1) и условия (29); кроме того, корни уравнения (27) лежат на левой полуплоскости.

Теорема 2. Точка $M^*(0, 0, \dots, 0)$ не будет устойчивым состоянием равновесия, если не выполнены условия (5) или (7) или если в зависимости от значения d выполнено одно из следующих трех условий:

1) $d < 4$ и точка M^* не является устойчивым состоянием равновесия для скользящих движений на плоскости $x_n = 0$;

2) $d = 4$ и не выполнены условия (33) или хотя бы один корень уравнения (32) имеет положительную действительную часть;

3) $d > 4$, не выполнено требование (1) или условие (29) или хотя бы один корень уравнения (27) лежит на правой полуплоскости.

7. В качестве примера рассмотрим „релейную“ систему с характеристикой реле, представленной на рис. 5. В этом случае система (1) запишется в виде:

$$\dot{x}_i = -\lambda_i x_i + c_i \begin{cases} a^+ + \alpha^+ x_n & \text{при } x_n > 0, \\ a^- + \alpha^- x_n & \text{при } x_n < 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \quad (34)$$

$$\dot{x}_n = -\lambda_n x_n - \sum_{j=1}^n (\lambda_j - \lambda_n) x_j.$$

Воспользовавшись соотношениями

$$a_i^\pm = c_i \begin{cases} a^+ \\ a^- \end{cases} \quad (i \leq n-1);$$

$$a_{ij}^\pm = -\lambda_i \delta_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1; j \neq n);$$

$$a_{nn}^\pm = c_n \begin{cases} \alpha^+ \\ \alpha^- \end{cases} \quad (i \leq n-1; j = n);$$

$$a_{ni} = \lambda_n - \lambda_i \quad (i \leq n-1);$$

$$a_{nn} = -\lambda_n \quad (a_n^\pm = 0),$$

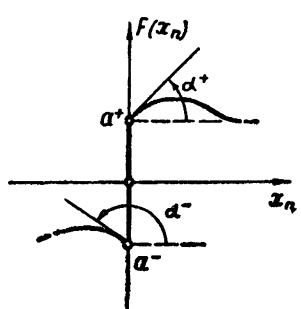


Рис. 5.

полученными из сравнения систем дифференциальных уравнений (1) и (32), приходим к следующим формулам для системы дифференциальных уравнений (34):

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{c_i}{\sum_{j=1}^n c_j \lambda_j} \left\{ u + \frac{\frac{4u^0}{\sum_{j=1}^n c_j \lambda_j} \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^2}{3 \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j} \right\} - \lambda_i x_i - \frac{u^0 \lambda_i c_i}{\sum_{j=1}^n c_j \lambda_j} + \dots$$

$(i = 1, 2, \dots, n - 1),$

где

$$u^0 = \sum_{j=1}^n (\lambda_n - \lambda_j) x_j; \quad u = - \sum_{j=1}^n (\lambda_n^2 - \lambda_j^2) x_j. \quad (35)$$

Система дифференциальных уравнений (35) не зависит ни от α^+ , α^- , ни от a^+ , a^- . Это обстоятельство позволяет утверждать, что результаты работы [11] полностью применимы и к рассматриваемому здесь более общему случаю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Никольский, Труды Центра лабор. проводной связи, № 1, Госэнергоиздат, М., 1934.
2. А. А. Андронов, А. А. Вигт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
3. А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, ГИТГЛ, М.—Л., 1951.
4. Ю. В. Долголенко, Труды II Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, 1, изд. АН СССР, М., 1955.
5. Ю. В. Долголенко, Диссертация, Л., 1955.
6. Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, ГИТГЛ, М., 1955.
7. Ю. И. Неймарк, Труды ГИФТИ и радиофиз. факта ГГУ, 30, сер. физ., 159 (1956).
8. Ю. И. Неймарк, Диссертация, М., 1956.
9. В. Г. Болтянский, Л. С. Понтрягин, Труды III Всесоюзного математического съезда, 1, изд. АН СССР, М., 1956.
10. Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, 18, 27 (1957).
11. С. Д. Киняпин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 88 (1958).
12. Д. В. Аносов, Автоматика и телемеханика, 20, 135 (1959).
13. С. Д. Киняпин, Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, 20, 1153 (1959).
14. М. В. Мееров, Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности, Физматгиз, М., 1959.
15. Ю. И. Акимов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 958 (1959).
16. Ю. И. Акимов, Изв. высш. уч. зав.—Математика, № 1, 3, (1960).
17. С. Д. Киняпин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 511 (1960).
18. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 41 (1958).
19. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 5—6, 146 (1958).
20. М. Н. Айзerman и Ф. Р. Гантмахер, Об устойчивых псевдоравновесиях в разрывных колебательных системах, Доклад на Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике, М., 1960.
21. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 342 (1960).
22. Ю. И. Неймарк и Л. П. Шильников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 478 (1960).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 апреля 1960 г.

**МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ЗАДАЧЕ
СОСТАВЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАФИКА РИТМИЧНОГО
ПРОИЗВОДСТВА ДВУХ ТИПОВ ИЗДЕЛИЙ НА ОДНОМ
ОБОРУДОВАНИИ**

A. С. Алексеев

Процессы производства двух изделий на одном оборудовании интерпретируются как движения некоторой нелинейной динамической системы. Тогда составление графика запуска этих изделий (при условии сохранения ритмичности производства, выполнения программы за минимальное число запусков и при минимальном объеме незавершенного производства) сводится к нахождению устойчивой неподвижной точки некоторого точечного преобразования, соответствующей устойчивому предельному циклу рассматриваемой динамической системы, и подбору оптимального с точки зрения минимального объема незавершенного производства сочетания параметров системы (из области существования этого предельного цикла при заданном запасе устойчивости). Указан переход к n -мерному случаю.

Существует ряд задач производственного, транспортного и других видов планирования, в которых наряду с экстремализацией некоторых выражений требуется еще обеспечить строгую ритмичность ведения процесса и достаточную его устойчивость по отношению к возможным возмущениям. Как выяснилось [1], применение методов динамического планирования [2] к такого рода задачам оказывается малоэффективным. Вместе с тем, если рассматривать такие системы как некоторые нелинейные динамические системы, то несмотря на существенную нелинейность, динамика зачастую оказывается настолько проста, что применение метода точечных преобразований позволяет найти решение задачи даже в случае произвольного числа степеней свободы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ТОЧЕЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть X_1 и X_2 — количественные характеристики находящихся в данный момент в цехе первого и второго изделий, которые изготавливаются поочередно на одном оборудовании и непрерывно потребляются заказчиком с постоянными темпами потребления U_1 и U_2 , определяемыми программой R_1 и R_2 на планируемый период времени T , т. е. $U_1 = R_1/T$ и $U_2 = R_2/T$. Зная производительность оборудования по каждому из изделий, введем величины V_1 и V_2 — разности между производительностью и темпом потребления соответственно для первого и второго изделий, которые будут характеризовать скорость нарастания количества данного изделия в цехе на те периоды времени, в которые оно производится. Пусть далее τ_1 и τ_2 — времена переналадки оборудования на производство первого и второго изделий, а Q_1 и Q_2 — определяемые лимитом незавершенного производства или условиями складирования максимально допустимые величины заделов по первому и второму изделиям.

Можно представить себе рассматриваемое производство как некоторую нелинейную динамическую систему и, вводя новое время

$t = t_{\text{ст}}/T$, новые переменные $x_1 = X_1/TU_1$, $x_2 = X_2/TU_2$ и параметры

$$p_1 = \tau_1/T, p_2 = \tau_2/T,$$

$$v_1 = V_1/U_1, v_2 = V_2/U_2,$$

$$q_1 = Q_1/TU_1, q_2 = Q_2/TU_2,$$

написать дифференциальные уравнения, описывающие ее движение, в виде:

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} v_1 & (\text{когда первое изделие производится}) \\ -1 & (\text{когда первое изделие не производится}) \end{cases}; \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = \begin{cases} v_2 & (\text{когда второе изделие производится}) \\ -1 & (\text{когда второе изделие не производится}) \end{cases}.$$

Задача составления оптимального ритмичного графика запуска в терминах этой динамической системы сводится к нахождению, если он существует, такого периодического (т. е. ритмичного) процесса, который при заданном запасе устойчивости (т. е. заданной гарантии от срыва) обеспечивал бы выполнение программы за минимальное число запусков при условии минимального объема незавершенного производства (минимальных q_1 и q_2), либо минимальной производительности (минимальных v_1 и v_2), либо максимальных p_1 и p_2 .

Будем рассматривать движение системы в фазовом пространстве (рис. 1), состоящем из трех наложенных друг на друга прямоугольников плоскости $x_1 x_2$ ($0 \leq x_1 \leq q_1$, $0 \leq x_2 \leq q_2$), соответствующих трем возможным типам движения: производству первого изделия, производству второго изделия и переналадке или отсутствию производства обоих изделий.

Фазовые траектории на каждом из листов представляют собой семейства параллельных прямых; на рис. 1 они изображены для случая производства второго изделия ($x_1 = x_1^0 - t$, $x_2 = x_2^0 + v_2 t$) сплошными линиями, для случая про-

изводства первого изделия ($x_1 = x_1^0 + v_1 t$, $x_2 = x_2^0 - t$) — пунктиром и для случая переналадки ($x_1 = x_1^0 - t$, $x_2 = x_2^0 - t$) — штрих-пунктиром. Здесь же показано одно из возможных движений системы.

Хотя переналадка в рассматриваемой системе может быть начата в любой точке фазового пространства, но ввиду выше изложенного рассмотрению будут подлежать лишь движения класса K_1 , т. е. такие движения системы, в которых переналадка на производство первой детали начинается на прямой $x_1 = p_1$ или $x_2 = q_2$, а на производство второй детали — на прямой $x_2 = p_2$ или $x_1 = q_1$. Нетрудно видеть, что только при таких движениях программа может быть выполнена за минимальное количество запусков.

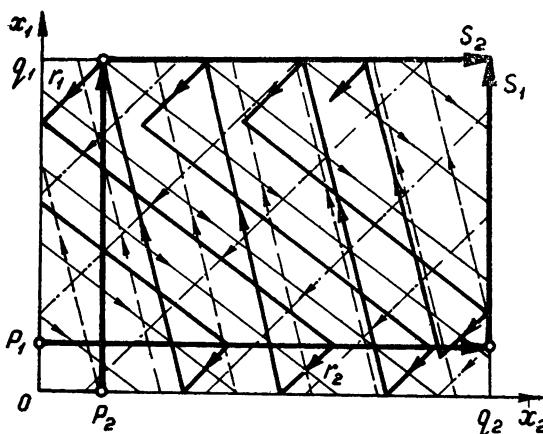


Рис. 1.

известства первого изделия ($x_1 = x_1^0 + v_1 t$, $x_2 = x_2^0 - t$) — пунктиром и для случая переналадки ($x_1 = x_1^0 - t$, $x_2 = x_2^0 - t$) — штрих-пунктиром. Здесь же показано одно из возможных движений системы.

Для нахождения периодических движений системы применим метод точечных преобразований. С этой целью введем, как показано на рис. 1, отрезки без контакта:

$$\begin{aligned} \bar{r}_1: & \quad r_1 = x_1 \quad \text{при } x_2 = p_2, 0 \leq r_1 \leq q_1; \\ \bar{s}_1: & \quad s_1 = x_1 - p_1 \quad \text{при } x_2 = q_2, 0 \leq s_1 \leq q_1 - p_1; \\ \bar{r}_2: & \quad r_2 = x_2 \quad \text{при } x_1 = p_1, 0 \leq r_2 \leq q_2; \\ \bar{s}_2: & \quad s_2 = x_2 - p_2 \quad \text{при } x_1 = q_1, 0 \leq s_2 \leq q_2 - p_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

и рассмотрим точечные преобразования их друг в друга, определяемые фазовыми траекториями системы. Пусть

$$\begin{array}{lll} T_1 \text{ — преобразование } \bar{r}_2 \text{ в } \bar{r}_1; & T_2 \text{ — преобразование } \bar{r}_1 \text{ в } \bar{r}_2; \\ S_1 \text{ — } “— \bar{s}_1 \text{ в } \bar{s}_2; & S_2 \text{ — } “— \bar{s}_2 \text{ в } \bar{s}_1; \\ R_1 \text{ — } “— \bar{r}_2 \text{ в } \bar{s}_2; & R_2 \text{ — } “— \bar{r}_1 \text{ в } \bar{s}_1; \\ P_1 \text{ — } “— \bar{s}_1 \text{ в } \bar{r}_1; & P_2 \text{ — } “— \bar{s}_2 \text{ в } \bar{r}_2. \end{array}$$

Пользуясь условием, что траектория системы (1.1), выходящая из некоторой точки первого отрезка, впервые пересекает в некоторой точке второй отрезок, нетрудно найти эти преобразования:

$$T_1: \quad r_1 = v_1 r_2 - v_1 (p_1 + p_2) \quad \text{или} \quad \begin{cases} r_1 = v_1 \Theta_1 \\ r_2 = \Theta_1 + p_1 + p_2 \end{cases}; \quad (1.3)$$

$$T_2: \quad r_2 = v_2 r_1 - v_2 (p_1 + p_2) \quad \text{или} \quad \begin{cases} r_2 = v_2 \Theta_2 \\ r_1 = \Theta_2 + p_1 + p_2 \end{cases}; \quad (1.4)$$

$$S_1: s_2 = \frac{1}{v_1} s_1 + q_2 - \frac{q_1}{v_1} - (p_1 + p_2) \quad \text{или} \quad \begin{cases} s_1 = -v_1 \vartheta_1 + q_1 \\ s_2 = -\vartheta_1 + q_2 - (p_1 + p_2) \end{cases}; \quad (1.5)$$

$$S_2: s_1 = \frac{1}{v_2} s_2 + q_1 - \frac{q_2}{v_2} - (p_1 + p_2) \quad \text{или} \quad \begin{cases} s_2 = -v_2 \vartheta_2 + q_2 \\ s_1 = -\vartheta_2 + q_1 - (p_1 + p_2) \end{cases}; \quad (1.6)$$

$$R_1: s_2 = r_2 - \left(p_1 + p_2 + \frac{q_1}{v_1} \right) \quad \text{и} \quad t_1 = q_1/v_2; \quad (1.7)$$

$$R_2: s_1 = r_1 - \left(p_1 + p_2 + \frac{q_2}{v_2} \right) \quad \text{и} \quad t_2 = q_2/v_1; \quad (1.8)$$

$$P_1: r_1 = s_1 + v_1 (q_2 - p_1 - p_2) \quad \text{и} \quad \tau_1 = q_2 - (p_1 + p_2); \quad (1.9)$$

$$P_2: r_2 = s_2 + v_2 (q_1 - p_1 - p_2) \quad \text{и} \quad \tau_2 = q_1 - (p_1 + p_2). \quad (1.10)$$

Очевидно, при заданных параметрах системы из последних четырех преобразований одновременно могут существовать лишь одна из пар $R_1, R_2; R_1, P_2; R_2, P_1$.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Из рассмотрения полученных точечных преобразований, графики функций соответствия которых для наиболее типичного соотношения параметров изображены на рис. 2, следует, что они могут иметь две неподвижные точки (неустойчивую r_1^*, r_2^* и устойчивую s_1^*, s_2^*), соответствующие неустойчивому и устойчивому предельным циклам рассматриваемой динамической системы.

Координаты неустойчивой инвариантной точки и условия ее существования и неустойчивости выражаются следующими соотношениями и неравенствами:

$$0 < x_1^{**} \equiv r_1^{**} = v_1(p_1 + p_2) \frac{v_2 + 1}{v_1 v_2 - 1} < q_1 > p_1; \quad (2.1)$$

$$0 < x_2^{**} = r_2^{**} = v_2(p_1 + p_2) \frac{v_1 + 1}{v_1 v_2 - 1} < q_2 > p_2. \quad (2.2)$$

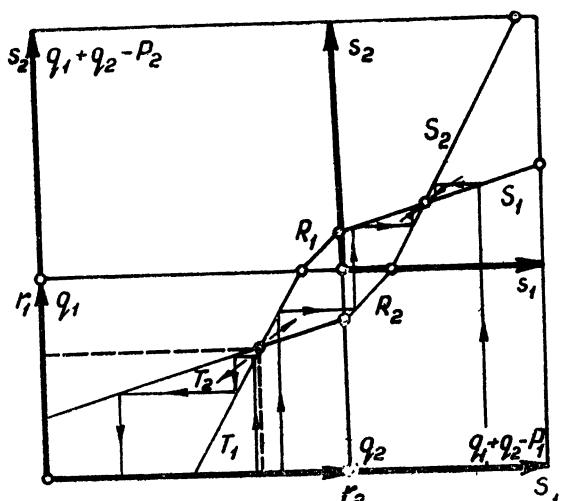


Рис. 2.

предельных циклов. Траектория неустойчивого предельного цикла выделяется в фазовом пространстве, рассматриваемом как пространство начальных состояний (т. е. начальных заделов), области начальных заделов, при которых производство может продолжаться сколь угодно

Левые неравенства могут быть удовлетворены при

$$v_1 v_2 > 1 \quad (2.3)$$

(условие неустойчивости). Если (2.3) не удовлетворено, то программа не выполнима ни при каких лимитах незавершенного производства (т. е. ни при каких q_1 и q_2). Правые неравенства (2.1) и (2.2) указывают те минимальные значения q_1 и q_2 , которые при заданных v_1 , v_2 , p_1 и p_2 обеспечат выполнимость программы.

На рис. 3 изображены траектории устойчивого (сверху) и неустойчивого

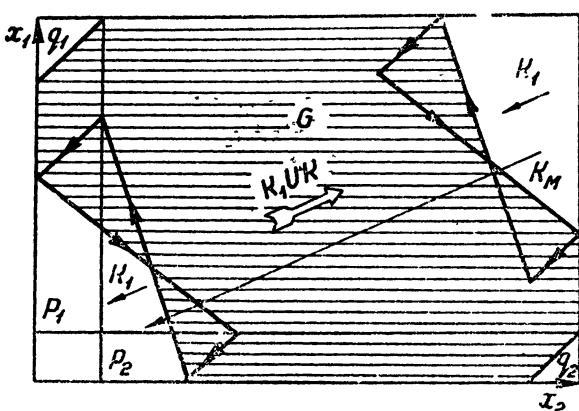


Рис. 3.

долго. Эти области определяются для случая, когда оборудование налажено на производство второй детали, неравенствами

$$x_1^0 + \frac{x_2^0}{v_2} \geq \frac{p_1 v_1 (v_2 + 1) + p_2 (v_1 + 1)}{v_1 v_2 - 1}; \quad x_1^0 > p_1 \quad (2.4)$$

(область наклонной штриховки на рис. 3), и для случая, когда оно наложено на производство первой детали, неравенствами

$$x_2^0 + \frac{x_1^0}{v_2} > \frac{p_2 v_2 (v_1 + 1) + p_1 (v_2 + 1)}{v_1 v_2 - 1}; \quad x_2^0 \geq p_2 \quad (2.5)$$

(область горизонтальной штриховки на рис. 3).

Если неравенства (2.4) или (2.5) неудовлетворены, то длительный процесс производства невозможен, так как средний темп его оказывается меньше темпа потребления.

Координаты устойчивой инвариантной точки, соответствующей устойчивому предельному циклу в фазовом пространстве системы, определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} s_2^{**} = x_2^* - p_2 &= q_2 - v_2 (p_1 + p_2) \frac{v_1 + 1}{v_1 v_2 - 1} = q_2 - x_2^{**}; \\ s_1^* = x_1^* - p_1 &= q_1 - v_1 (p_1 + p_2) \frac{v_2 + 1}{v_1 v_2 - 1} = q_1 - x_1^{**}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Нетрудно видеть, что устойчивый предельный цикл в системе существует всегда, когда у нее есть неустойчивый предельный цикл.

Наличие устойчивого предельного цикла, соответствующего устойчивому периодическому режиму рассматриваемой системы, указывает на возможность выполнения программы при строго ритмичном производстве. Для этого необходимо, чтобы система двигалась по траектории устойчивого предельного цикла, т. е. чтобы начальное состояние (начальные заделы) x_1^0, x_2^0 было выбрано на этой траектории.

Зная траекторию предельного цикла и период колебаний, можно при заданных v_1, v_2, p_1 и p_2 и заданном запасе устойчивости найти условия максимального периода автоколебаний при минимальных q_1 и q_2 с тем, чтобы обеспечить ритмичное выполнение программы при минимальном количестве запусков и минимальном объеме незавершенного производства.

Продолжительности запусков первого и второго изделий в устойчивой и неустойчивой инвариантных точках одинаковы и равны (см. (1.3), (1.4), (1.5) и (1.6))

$$\Theta_1^{**} = \vartheta_1^* = (p_1 + p_2) \frac{v_2 + 1}{v_1 v_2 - 1}; \quad (2.7)$$

$$\Theta_2^{**} = \vartheta_2^* = (p_1 + p_2) \frac{v_1 + 1}{v_1 v_2 - 1}. \quad (2.8)$$

Поэтому период колебаний при движении по устойчивому и неустойчивому предельным циклам одинаков и равен

$$\Theta = p_1 + p_2 + \vartheta_1^* + \vartheta_2^* = \frac{p_1 + p_2}{v_1 v_2 - 1} (v_1 v_2 + v_1 + v_2 + 1). \quad (2.9)$$

3. ОПТИМАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Выражение (2.9) показывает, что период автоколебаний не зависит от q_1 и q_2 , т. е. что устойчивый предельный цикл при изменении величин q_1 и q_2 перемещается как жесткая конструкция, определяемая

величинами v_1, v_2, p_1, p_2 , пока не исчезнет, слившись с неустойчивым предельным циклом (в случае, если одновременно обратятся в равенства оба правых неравенства (2.1) и (2.2)) или образуя полуустойчивый континуум замкнутых траекторий (если это произойдет с одним из этих неравенств).

В связи с этим число запусков (может быть один или два неполных запуска)

$$k = \left[\frac{1}{\theta} \right] + \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}, \quad (3.1)$$

при котором возможно ритмичное выполнение программы, строго определено величинами v_1, v_2, p_1, p_2 и не зависит от q_1 и q_2 .

Варьируя величины q_1 и q_2 при заданном запасе устойчивости δ , который мы определим как минимальное расстояние между устойчивой и неустойчивой инвариантными точками, можно подобрать минимальные q_1 и q_2 , при которых программа может быть выполнена ритмично с выбранным запасом устойчивости:

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{\delta}{\sqrt{2}} + v_1(p_1 + p_2) \frac{v_2 + 1}{v_1 v_2 - 1}; \\ q_2^* &= \frac{\delta}{\sqrt{2}} + v_2(p_1 + p_2) \frac{v_1 + 1}{v_1 v_2 - 1}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В этом случае координатами устойчивой инвариантной точки, согласно (2.6), будут

$$s_2^* = \delta/\sqrt{2}, \quad s_1^* = \delta/V\sqrt{2}. \quad (3.3)$$

Траектория предельного цикла определяет геометрическое место начальных состояний (начальных заделов) $\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0$, при которых возможно ритмичное производство.

Если оборудование налажено на производство второго изделия, то начальный задел должен удовлетворять условию

$$\tilde{x}_1^0 - \delta + \frac{\tilde{x}_2^0 - \delta}{v_2} = \frac{p_1 v_1 (v_2 + 1) + p_2 (v_1 + 1)}{v_1 v_2 - 1}; \quad (3.4)$$

в случае же наладки на производство первого изделия—условию

$$\tilde{x}_2^0 - \delta + \frac{\tilde{x}_1^0 - \delta}{v_1} = \frac{p_2 v_2 (v_1 + 1) + p_1 (v_2 + 1)}{v_1 v_2 - 1}. \quad (3.5)$$

Очевидно, составление ритмичного графика запуска (после выбора на основании (3.4) или (3.5) начальных заделов \tilde{x}_1^0 и \tilde{x}_2^0) состоит в подсчете времени до первой переналадки и правильного чередования времен (см. (2.7) и (2.8)) $p_1, p_2, \delta_1^*, \delta_2^*$, которое определяется движением системы по найденному устойчивому предельному циклу.

Если величины q_1 и q_2 заданы и требуется провести минимизацию величин v_1 и v_2 или максимизацию p_1 и p_2 , то это можно делать, выполняя условия (3.2) (в которых слева должны быть поставлены заданные q_1 и q_2) так, чтобы достичь минимума числа запусков k , согласно (3.1) и (2.9).

4. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Если теперь рассматривать не только упирающиеся в границы введенного фазового пространства движения системы (1.1), а все возможные ее движения, то, очевидно, задача нахождения периодических движений сводится к точечному отображению плоскости в себя. Действительно, если t_1 и t_2 — некоторые произвольные длительности запусков первого и второго изделий, то, выходя из состояния x_1^0, x_2^0 с наладкой на производство одной из деталей, мы придем к аналогичному состоянию x_1, x_2 через время этих запусков и двух переналадок. При этом будут справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} v_1 t_1 - t_2 &= p_1 + p_2 + (\bar{x}_1 - x_1^0); \\ v_2 t_2 - t_1 &= p_1 + p_2 + (\bar{x}_2 - x_2^0). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для простых замкнутых траекторий $\bar{x}_1 \equiv x_1^0, \bar{x}_2 \equiv x_2^0$ и система (4.1) дает в силу линейности единственное решение для продолжительностей запусков при условии ритмичности:

$$\begin{aligned} t_1^* &= (p_1 + p_2) \frac{v_2 + 1}{v_1 v_2 - 1}; \\ t_2^* &= (p_1 + p_2) \frac{v_1 + 1}{v_1 v_2 - 1}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Это означает, что простые замкнутые фазовые траектории системы имеют единую конфигурацию (совпадающую с конфигурацией ранее найденных предельных циклов) и всюду плотно заполняют ту (заштрихованную на рис. 4) область G фазового пространства системы, где они могут быть расположены, не выходя за его границы.

Для того, чтобы разобраться в вопросе устойчивости движений системы (1.1), разобьем их на классы. Кроме рассмотренных в разделах 1, 2 и 3 движений класса K_1 определим класс простых периодических движений* K_0 , класс K_6 движений, у которых $t_1 > t_1^*$ и $t_2 > t_2^*$, и класс K_m , у которых либо $t_1 < t_1^*$, либо $t_2 < t_2^*$, либо выполнены оба эти неравенства.

Движения класса K_m не имеют предельных траекторий; все они стягиваются к началу координат, т. е. ведут к срыву производства. Среди континуума простых периодических движений (класс K_0), заполняющих область G и самопредельных, т. е. нейтральных между собой в отношении устойчивости, есть только две предельные траектории, которые входят также в класс K_1 — это найденные ранее устойчивый и неустойчивый в классе K_1 предельные циклы. В силу того, что каждое движение класса K_6 с некоторого момента с ростом и убыванием t переходит в класс K_1 , эти устойчивый и неустойчивый предельные циклы и только они являются предельными траекториями (соответственно устойчивой и неустойчивой) в классах движений K_1 и K_6 .

Нетрудно видеть, что любая простая замкнутая траектория из класса K_0 замкнутых, но не упирающихся в границу $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$

* У рассматриваемой системы существует (при достаточно больших q_1 и q_2) бесконечное множество различных сложных периодических движений, которые можно находить, приравнивая левые части уравнений (1.4) величинам $2p_1 + 2p_2, 3p_1 + 3p_2, 2p_1 + 3p_2$ и т. д., произвольным образом дробя затем найденные решения t_1 и t_2 на две, три (первое на две, а второе на три) и т. д. части. Однако такие движения не являются предметом рассмотрения настоящей статьи.

фазового пространства траекторий системы путем вариации величин q_1 и q_2 может быть превращена в устойчивый в классах K_1 и K_6 предельный цикл системы. Действительно, для этого нужно так выбрать величины \bar{q}_1 и \bar{q}_2 , чтобы эта траектория опиралась на прямые $x_1 = \bar{q}_1$ и $x_2 = \bar{q}_2$.

Указанное обстоятельство позволяет дать конструктивный метод решения постоянной задачи.

Действительно, получив на основании (4.1) времена запусков при условии ритмичности t_1^* и t_2^* (4.2), следует вычислить максимальные „размеры“ неустойчивого предельного цикла (см. рис. 4):

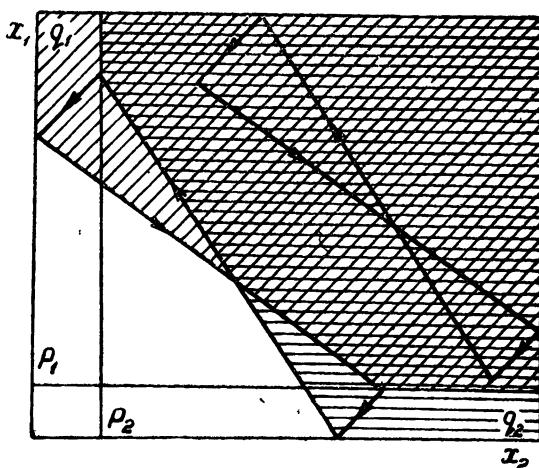


Рис. 4.

$$x_1^{**} = v_1 t_1^*, \quad x_2^{**} = v_2 t_2^* \quad (4.3)$$

и, задав, как и прежде, величину запаса устойчивости периодического процесса δ , определить оптимальные q_1 и q_2 :

$$q_1^* = \frac{\delta}{\sqrt{2}} + x_1^{**}, \quad q_2^* = \frac{\delta}{\sqrt{2}} + x_2^{**}. \quad (4.4)$$

Легко видеть, что полученный метод допускает непосредственный переход к решению n -мерной задачи, т. е. задачи составления оптимального ритмичного графика запуска произвольного заданного числа изделий на одном оборудовании. В этом случае прежде всего возникает задача выбора такого порядка запуска изделий, который дает минимальное суммарное время переналадок. Все возможные n^2 приведенных времен переналадок p_{ij} (с производства i -го изделия на производство j -го) составляют квадратную матрицу $\|p_{ij}\|$, имеющую нули в главной диагонали. Из этой матрицы следует произвести выборку обладающих минимальной суммой n элементов по одному из каждой строки и каждого столбца так, что первым выбирается произвольный элемент, левый индекс каждого следующего элемента равен правому индексу предыдущего, а правый индекс произведен; правый индекс последнего из выбранных элементов равен левому индексу первого элемента. Нетрудно видеть, что в общем случае это—задача выбора одного из $(n-1)!$ вариантов.

Если этот выбор осуществлен, то тем самым устанавливается по-

рядок запуска изделий; нумеруя вновь в этом порядке выбранные элементы, обозначим через

$$p = \sum_{i=1}^n p_i \quad (4.5)$$

полученную минимальную сумму.

Теперь аналогично разделу 1 введем и пронумеруем в установленном порядке переменные x_i и параметры v_i и q_i ; тогда движение системы будет определяться уравнениями:

$$\dot{x}_i = \begin{cases} v_i & (\text{если производится деталь с номером } i) \\ -1 & (\text{если не производится деталь с номером } i) \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (4.6)$$

Фазовое пространство этой динамической системы представляет собой $(n+1)$ -слойный n -мерный „параллелепипед“.

Задача нахождения периодических движений системы (4.6) сводится к точечному преобразованию n -мерного пространства в себя. При отыскании простого периодического движения это отображение имеет вид (ср. (4.1)):

$$v_i t_i - \sum_{j \neq i} t_j = p + (\bar{x}_i - x_i^0) \quad (4.7)$$

$$(j, i = 1, 2, \dots, n).$$

В инвариантной точке ($x_i^0 = x_i$) для времен запусков ритмичного производства получается единственное решение

$$t_i^* = \Delta_i / \Delta, \quad (4.8)$$

если детерминант системы (4.7) Δ не равен нулю. Этот детерминант, как нетрудно видеть из (4.7), состоит из величин v_i , расположенных по главной диагонали, и -1 во всех остальных местах. В силу этого

$$\Delta = \left[1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + 1} \right] \prod_{i=1}^n (v_i + 1); \quad (4.9)$$

$$\Delta_i = p \prod_{j \neq i} (v_j + 1) \quad (j, i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.10)$$

Из (4.9) и (4.10) для (4.8) имеем:

$$t_i^* = \frac{p}{(v_i + 1) \left[1 - \sum_{j=1}^n (v_j + 1)^{-1} \right]}. \quad (4.11)$$

Так как определитель Δ_i (4.10) всегда положителен, то условием существования и неустойчивости предельного (в классах K_1 и K_6 движений системы) цикла с максимальными координатами

$$x_i^{**} = v_i t_i^* \quad (4.12)$$

является условие

$$\Delta > 0. \quad (4.13)$$

На основе (4.12), задавшись запасом устойчивости δ и следуя указанному выше способу, можно определить те минимальные величины

$$q_i^* = v_i t_i^* + \delta / \sqrt{n}, \quad (4.14)$$

при которых в системе будет существовать единственный устойчивый (в классах движений K_1 и K_6) простой предельный цикл с периодом

$$\Theta = p + \sum_{i=1}^n t_i^*, \quad (4.15)$$

который будет соответствовать ритмичному производству, обеспечивающему за

$$k = \frac{1}{\Theta} + \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right.$$

запусков выполнение плана с заданным запасом устойчивости δ и минимальном объеме незавершенного производства.

Аналогично предыдущему при заданных величинах q_i с помощью (4.14) можно минимизировать v_i или максимизировать p_i .

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Н. Карманова, Ю. А. Первин, К вопросу об определении партии запуска (доклад на Совещании по применению математических методов в экономических исследованиях, Москва, апрель, 1960).
- 2 Современная математика для инженеров, ИЛ, М., 1958, стр. 237—274.
- 3 А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 апреля 1960 г.

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДВОИЧНОГО КОДА, ИСПРАВЛЯЮЩЕГО КРАТНЫЕ И ОДИНОЧНЫЕ ОШИБКИ

B. B. Акындинов

Рассматривается вопрос о представлении комбинаций двоичного кода на плоскости. Предлагаемое «плоское» изображение применяется для построения двоичного кода, исправляющего одиночные и кратные ошибки. Предлагается блок-схема кодирующего устройства для такого кода.

В связи с геометрическим представлением сигнала как вектора в n -мерном пространстве [1, 2], Хэммингом [3] была дана геометрическая интерпретация комбинаций двоичного кода в виде вершин n -мерного куба с длиной ребра, равной единице. Такая модель позволила получить, правда, очень грубо, оценки $X_m(n, d)$ — наибольшего числа комбинаций двоичного кода, любые две из которых отличаются друг от друга не менее, чем на d знаков (n — число позиций в кодовой комбинации). На основе подобного представления Мешковскому [4] удалось получить ряд оптимальных корректирующих кодов. Построению и исследованию корректирующих кодов посвящены также работы [5—10].

Однако для созданных корректирующих кодов в большинстве случаев еще не созданы технические устройства для передачи и приема сообщений. Поэтому большой интерес вызывает все более широко применяющаяся, особенно в диапазоне УКВ, система связи с автоматической справкой. Как показано Горбуновым [11], такая система наилучшим образом работает семизначным кодом, кодовые комбинации которого содержат четыре символа „1“ и три символа „0“. Такой код обнаруживает ошибки нечетной кратности. Ошибки же четной кратности являются для него классом необнаруживаемых.

В данной работе делается попытка иного геометрического представления кодовых комбинаций и, на основе этого, дается построение нового двоичного кода, позволяющего исправлять ошибки четной и нечетной кратности, а также кодирующего устройства для технической реализации такого кода.

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОДОВЫХ КОМБИНАЦИЙ НА ПЛОСКОСТИ

Харкевичем [12] был предложен принцип построения двоичных кодов без разделительного знака, который вошел в литературу под названием кодового дерева. Существует ряд работ, использующих этот метод для построения идеальных некорректирующих кодов. Однако можно также использовать схему кодового дерева и для изучения корректирующих кодов.

Выберем прямоугольную систему координат на плоскости. По одной оси y будем откладывать число символов „1“ в кодовой комбинации, имеющей n позиций, по другой оси x — число символов „0“ (рис. 1). Тогда

$$x + y = n \quad (1)$$

есть уравнение прямой, отсекающей от обеих осей по n условных единиц. Проводя параллельно каждой из осей множество прямых, получим единичную решетку, составленную из элементарных квадратов с длиной стороны, равной единице. Пересечения каждого двух перпендикулярных прямых образуют узлы решетки.

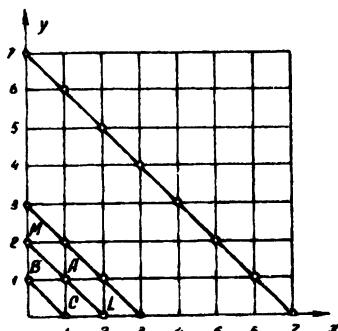


Рис. 1.

Пусть при движении вверх по решетке ($y > 0$) на длину стороны элементарного квадрата из начала координат мы будем получать символ „1“, а при движении вправо ($x > 0$)—символ „0“. Каждый определенный способ передвижения через узлы решетки будет характеризовать однозначно определенную кодовую комбинацию.

Тогда комбинации однозначного двоичного кода оканчиваются в узлах B и C , которые лежат на прямой $x+y=1$. Число подходов к узлу C есть $C_1^0=1$, а к $B-C_1^1=1$. Комбинации двухзначного

содержать k символов „1“ и $(n-k)$ символов „0“. Пусть N_d есть число n -значных комбинаций, каждая из которых отличается от выбранной в d позициях. Эти N_d производных комбинаций получаются из исходной выбором d позиций из n возможных, т. е. $N_d = C_n^d$, и заменой символов на этих позициях: „0“ на „1“ и „1“ на „0“. Когда s символов „1“ из λ -комбинации изменяются на „0“, то $(d-s)$ символов „0“ изменяются на символы „1“. Тогда такие получаемые комбинации N'_d из общего числа N_d имеют число символов „1“, равное

$$\delta = k - s + d - s = k + d - 2s, \quad (3)$$

т. е. заканчиваются в узле с номером $(k+d-2s)$. Их число будет

$$N'_d = C_k^s C_{n-k}^{d-s}. \quad (4)$$

При этом должны выполняться неравенства

$$n - k \geq d - s \geq 0. \quad (5)$$

Общее число комбинаций, образованных из λ -комбинации указанным выше способом,

$$N_d = \sum_{s < d} C_k^s C_{n-k}^{d-s}. \quad (6)$$

Все эти рассуждения и полученные соотношения могут быть наглядно проиллюстрированы „плоской“ схемой.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Когда $d=1$, то на основании неравенства (5) s может быть 0, 1. В этом случае производные комбинации от λ -комбинации из узла номера K попадают в узлы с номерами $K+1$ или $K-1$ в зависимости от значения s . Рассуждая аналогичным образом, для случаев $d=2, 3, 4$ получим, что производные комбинации от λ -комбинации из узла номера K попадают в узлы с номером δ (см. выражение (3)) в зависимости от значения s . Результаты рассмотрения частных случаев сведены в таблицу 1.

Таблица 1

d	1		2			3			4					
s	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
δ	$k+1$	$k-1$	$k+2$	k	$k-2$	$k+3$	$k+1$	$k-1$	$k-3$	$k+4$	$k+2$	k	$k-2$	$k-4$

Рассмотрение таких частных случаев можно было бы продолжить для других значений d .

Отсюда можно сделать ряд выводов, характеризующих особенности предлагаемого „плоского“ представления кодовых комбинаций [4].

1. Из рассмотренных случаев при $d=1$ следует, что любая комбинация узла номера $K+1$ или $K-1$ будет отличаться от любой комбинации узла номера K минимум на $d=1$ знаков.

2. Из рассмотрения случаев $d=2$ ($s=1$) и $d=4$ ($s=2$) следует, что любая комбинация узла номера K будет отличаться от любой другой выбранной комбинации узла того же номера K только на четное число d и как минимум на два знака.

3. При нечетных d комбинации, отличающиеся от исходной λ -комбинации узла номера K (где K — четное или нечетное), оканчиваются во всех узлах с нечетным или, соответственно, четным номером.

4. При четных d комбинации, отличающиеся от исходной λ -комбинации узла номера K (K —четное, нечетное), оканчиваются во всех узлах с четным (нечетным) номером.

Эти особенности „плоского“ представления кодовых комбинаций позволяют построить как существующие корректирующие коды, так и новый корректирующий код, исправляющий кратные и одиночные ошибки.

2. ПОСТРОЕНИЕ КОРРЕКТИРУЮЩЕГО КОДА, ОБНАРУЖИВАЮЩЕГО ОДИНОЧНУЮ ОШИБКУ

Согласно [3], такой код должен иметь комбинации, отличающиеся друг от друга не менее чем в двух знаках. По нашей схеме такой код можно построить, если брать все четные или все нечетные узлы (вывод 4) и все комбинации, оканчивающиеся на этих узлах (вывод 2). Тогда получим общее число комбинаций корректирующего кода, обнаруживающего одиночную ошибку:

$$N_2 = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n = 2^{n-1} \quad (7)$$

при четных n и

$$N_2 = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{n-1} = 2^{n-1} \quad (8)$$

при нечетных n . Уравнения (7) и (8) являются тождествами, которые легко доказываются.

3. ПОСТРОЕНИЕ КОДА, ОБНАРУЖИВАЮЩЕГО ОДИНОЧНЫЕ ОШИБКИ И ИСПРАВЛЯЮЩЕГО ОШИБКИ ЧЕТНОЙ КРАТНОСТИ

Согласно [11], ошибки четной кратности возникают тогда, когда, например, на одной позиции символ „1“ перешел в символ „0“, а на другой позиции символ „0“ перешел в символ „1“. Это пример двухкратной ошибки. Могут быть ошибки четырехкратные, шестикратные и т. д. Такие ошибки для кода, рассмотренного в работе [11], являются необнаруживаемыми. Они всегда приводят к неверному отпечатыванию знака на выходе канала в системе с автоматической справкой.

Однако для системы с автоматической справкой можно построить код, который исправляет ошибки четной кратности и обнаруживает одиночные ошибки. Для этого берем все четные или все нечетные узлы, а затем в каждой группе комбинаций, определяемой соответственно выбранным узлом, выбираем одну комбинацию для передачи. Все же остальные комбинации из этой группы, а также комбинации всех нечетных или всех четных узлов считаем запрещенными для передачи. Тогда получим число комбинаций двоичного кода, обнаруживающего одиночные ошибки и исправляющего ошибки четной кратности, $N = (n+2)/2$ для четных n , и $N = (n+1)/2$ для нечетных n .

Проиллюстрируем это на примере (рис. 3). Строим семизначный код, обнаруживающий одиночную ошибку и ошибки четной кратности. Выбираем четыре четных узла A, B, C, D . Для каждого узла задаем определенный способ подхода к нему. Соответственно имеем четыре комбинации

0000000
0000011
0001111
0111111

Такой выбор комбинаций для передачи позволяет легко построить кодирующее устройство (см. рис. 4). Генератор прямоугольных импульсов дает импульсы той амплитуды, которая соответствует определенной передаваемой комбинации. Затем импульсы поступают на амплитудный селектор, который разделяет их по четырем каналам.

При действии ошибок четной кратности передаваемая комбинация, скажем, 0001111, может превратиться в любую запрещенную комбинацию группы, определяемой узлом *C*. Поэтому на приемном конце важно убедиться только в том, что принятая комбинация принадлежит тому же самому узлу, что и при передаче, так как общее число символов "1" после действия таких ошибок остается неизменным. Нужно отметить, что рассмотренная плоская схема должна применяться и для декодирования.

Любая одиночная ошибка нарушает число символов "1" в принятой комбинации и также переводит ее в группу запрещенных. Например, выбранная для передачи комбинация из узла *C* может перейти в любую запрещенную комбинацию узла *C'*. В эти же самые запрещенные комбинации узла *C'* может перейти выбранная для передачи комбинация из узла *B*. В этом случае прием прекращается и вырабатывается сигнал запроса, который посылается на передающий конец. При правильном приеме сигнала запроса на передающем конце передача прекращается и повторяются только две комбинации, принадлежащие двум смежным узлам от узла ошибочно принятой комбинации.

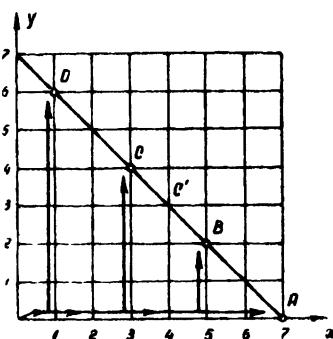


Рис. 3.

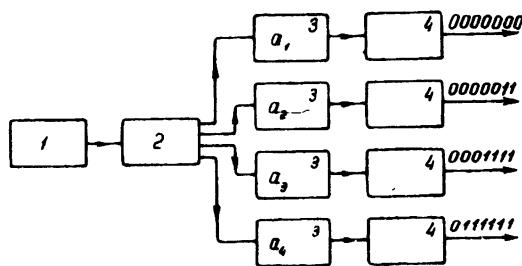


Рис. 4. Кодирующее устройство:
1—генератор прямоугольных импульсов,
2—амплитудный селектор, 3—линии задержки
 $(a_1 - t_{\text{зад}} = 7, a_2 - t_{\text{зад}} = 5,$
 $a_3 - t_{\text{зад}} = 3, a_4 - t_{\text{зад}} = 1)$, 4—ждущие
мультивибраторы.

Например, если принята любая комбинация узла *C'*, то нужно повторить комбинации узлов *C* и *B*: 0000011 и 0001111. Для обнаружения двойных ошибок типа, когда два символа "1" переходят соответственно в два символа "0", нужно брать узлы, отличающиеся по номеру на три (вывод 3).

Рассмотренный на частном примере принцип построения кода справедлив и в общем случае.

Известно, что двойные ошибки могут быть двух типов: либо $1,1 \rightarrow 0,0$ или $0,0 \rightarrow 1,1$, либо $1 \rightarrow 0$, а $0 \rightarrow 1$. Обозначим вероятность ошибок первого типа через P_{11} , а вероятность ошибок второго типа через P_{kp2} .

(В [11] $P_{kp_2} = P_{no}$ — вероятность необнаруживаемой ошибки.) Тогда вероятность любых двойных ошибок

$$P_{dv} = P_{11} + P_{kp_2} - P_{11}P_{kp_2}, \quad (9)$$

так как эти события могут быть совместными ($P_{dv} = C_2^2 p^2 q^5$, $P_{kp_2} = C_4^1 C_3^1 p^2 q^5$, где p — вероятность искажения одного символа, $q = 1 - p$). Подсчитаем вероятности P_{11} и P_{kp_2} для случая $p = 1/3$, $P_{kp_2} \approx 0,17$. Из выражения (9) находим, что $P_{11} \approx 0,15$. Следовательно, ошибок вида $1 \rightarrow 0$, а $0 \rightarrow 1$ оказывается несколько больше, чем ошибок вида $1,1 \rightarrow 0,0$ или $0,0 \rightarrow 1,1$. Вероятность одиночной ошибки $P_{od} = C_7' p q^6 = 0,2$ оказывается меньше P_{dv} , т. е. в этом случае преобладают кратные ошибки.

Рассмотрим случай $p = 0,01$, что означает (по сравнению с предыдущим случаем) уменьшение уровня помех в канале связи. Расчет показывает, что $P_{kp_2} = 0,0012$, а $P_{11} = 0,0009$, т. е. в этом случае двойных ошибок вида $1 \rightarrow 0$ и $0 \rightarrow 1$ тоже несколько больше, чем ошибок вида $1,1 \rightarrow 0,0$ или $0,0 \rightarrow 1,1$. Вероятность двойных ошибок любого типа $P_{dv} = 0,0021$, а вероятность одиночной ошибки $P_{od} = 0,07$. Следовательно, в случае малых помех в основном преобладают одиночные ошибки.

Из этих простых подсчетов можно заключить, что с ростом помех в канале связи начинают преобладать кратные ошибки, причем $P_{kp_2} > P_{11}$. Это значит, что при связи с относительно большим уровнем помех в канале связи нельзя пренебречь ошибками четной кратности. Применяя новый код, мы выигрываем в помехоустойчивости, но проигрываем в скорости передачи по сравнению с кодом, рассмотренным в работе [11]. Поэтому новый код, по-видимому, целесообразнее применять для передачи ограниченного числа командных сигналов в системах радиотелеуправления, когда имеется большой уровень помех в канале связи.

В заключение выражаю глубокую признательность В. И. Калинину за руководство данной работой и ценные советы, а также Е. С. Горбунову и Л. Ф. Бородину за внимание и обсуждение данного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Котельников, Теория потенциальной помехоустойчивости, Госэнергоиздат, 1956.
2. С. Е. Shannon, Bell Syst. tech. J., **27**, 379, 623 (1948).
3. R. W. Hamming, Bell Syst. tech. J., **29**, 147 (1950).
4. К. А. Мешковский, Электросвязь, № 5, 5 (1958).
5. В. И. Сифоров, Радиотехника и электроника, 1, 123 (1956).
6. А. А. Харкевич, Электросвязь, № 2, 5 (1957).
7. R. A. Silverman, M. Balsig, Proc. IRE, **42**, № 9 (1954); **43** № 6 (1955).
8. D. Slepian, Bell Syst. tech. J., **35**, 1 (1956).
9. A. E. Laemmle, Bull. Sc. Publ. (1953).
10. J. S. Reed, Transaction IRE, PG IT-4, Sept., 1954.
11. Е. С. Горбунов, Электросвязь, № 12, 42 (1956).
12. А. А. Харкевич, Очерки общей теории связи, М., 1955.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ПОТОКОВ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ И СОЛНЦА

A. P. Молчанов

Абсолютные измерения потоков радиоизлучения Луны и Солнца сопряжены со значительными трудностями, встречающимися при независимой калибровке отдельных узлов радиотелескопов [1]. Использование поглощающей поверхности для получения одной калибровочной точки [2] несколько упрощает процесс измерения; однако и в этом случае остается необходимость независимого определения эквивалентного телесного угла главного лепестка приемной антенны Ω_a .

Дальнейшее упрощение процесса измерения потоков связано с введением двух калибровочных точек, осуществляемых с помощью плоского зеркала. Это зеркало имеет угловые размеры Ω_0 , одинаковые с размерами измеряемого источника Ω_i , и попеременно отражает в антенну калибруемого радиотелескопа то излучение пространства в направлении от зенита T_z , то излучение черной поверхности, имеющей температуру окружающего воздуха T_b .

В таком случае процесс калибровки радиотелескопа состоит из измерения излучения зенита*:

$$T_{a1} = T_z \alpha + T_b + T_{\text{атм}} (1 - \alpha)$$

и затем излучения „черного тела“:

$$T_{a2} = T_b \beta \alpha + T_b + T_{\text{атм}} (1 - \alpha).$$

Здесь T_{a1} — температура антенны, T_b — температура излучения, попадающего через боковые лепестки антенны, $T_{\text{атм}}$ — температура излучения атмосферы Земли, α — коэффициент, учитывающий размеры главного лепестка приемной антенны и дифракционные явления на зеркале, β — коэффициент, определяющий качество „черного тела“.

При калибровке приемная антenna неподвижна, и после поворота зеркала

$$T_{a2} - T_{a1} = \alpha (T_b \beta - T_z) = k (d_2 - d_1), \quad (1)$$

где d_i — отклонение стрелки записывающего прибора, k — параметр используемого радиотелескопа.

Процесс измерения состоит из двух этапов: 1) определение температуры антенны при наведении радиотелескопа на источник (или его сопровождении):

$$T_{a3} = T_i \alpha^* \gamma + T_z^* + T_{\text{атм}}^*$$

где γ — коэффициент, учитывающий поглощение в атмосфере Земли; 2) определение температуры антенны после ухода источника (или при перемещении ее по прежнему пути в отсутствие источника):

$$T_{a4} = T_z^* + T_{\text{атм}}^*.$$

Так как положение антенны при измерении отличается от положения при калибровке, то изменившиеся величины отмечены звездочкой. Разделив разность результатов измерений

$$T_{a3} - T_{a4} = T_i \alpha^* \gamma = k (d_3 - d_4) \quad (2)$$

на величину $T_{a2} - T_{a1}$ (1), найдем:

$$T_i \gamma = \frac{d_3 - d_4}{d_2 - d_1} \frac{\alpha}{\alpha^*} (T_b \beta - T_z). \quad (3)$$

При использовании одной калибровочной точки (по излучению поглощающей по-

* Излучение космического «фона» предполагается малым, что справедливо для сантиметрового диапазона волн.

верхности перед антенной [3]) в принятых выше обозначениях и с учетом коэффициента β имеем:

$$T_{\text{и}} \gamma = \frac{d_3 - d_4}{d_5 - d_4} \frac{\Omega_a}{\Omega_{\text{и}}} \gamma T_{\text{в}} (\beta - 1 + \gamma). \quad (4)$$

Здесь η — коэффициент, учитывающий степень закрытия поглощающей плоскостью диаграммы антенны и дифракционные явления на ней, d_5 — отклонение пера самописца при измерении излучения поглощающей плоскости.

Сравним между собою формулы (3) и (4) применительно к сантиметровому диапазону волн, в котором $T_3 \ll T_{\text{в}}$ и $\gamma \approx 1$. Тогда вместо (3) получаем:

$$T_{\text{и}} \gamma \approx \frac{d_3 - d_4}{d_2 - d_1} \frac{\alpha}{\alpha^*} T_{\text{в}} \beta. \quad (5)$$

В некоторых случаях использование выражения (5) при измерениях может оказаться удобнее. Рассмотрим определение потока радиоизлучения Луны, которая в будущем, по-видимому, может служить эталоном для радиоастрономических измерений. Известно, что распределение яркостной температуры $T_{\text{я}}$ по поверхности Луны неравномерно, и для уменьшения погрешности при усреднении значений $T_{\text{я}}$ по диаграмме антенны ее размеры желательно брать небольшими. При этом в выражении (4) $\Omega_a/\Omega_{\text{и}} \gg 1$ и определение этого отношения (так же, как и коэффициента γ) трудно сделать точным. Если же воспользоваться формулой (5), то необходимо найти лишь значение отношения α/α^* , близкого к единице. Выбирая телесные углы источника и зеркала одинаковыми и располагая зеркало в дальней зоне антенны, легко подойти очень близко к значению $\alpha/\alpha^* = 1$. Если же желательно приблизить зеркало к антенне, то величину α/α^* нетрудно определить экспериментально, выполняя описанную выше операцию калибровки для нескольких расстояний между антенной и зеркалом и считая известным асимптотическое значение отношения α/α^* ($\lim (\alpha/\alpha^*) = 1$).

Низкие температуры антенны при подобных измерениях могут быть точно определены либо с помощью молекулярных усилителей, уже применяемых в радиоастрономии [3] и имеющих уровень собственных флюктуаций $A T \approx 0,03^{\circ}\text{K}$, либо с помощью длительного накопления, также освоенного в действующих радиотелескопах [4,5]. Калибровка, выполняемая по описанному методу, легко воспроизводится в различных условиях и может служить для сопоставления результатов проводимых наблюдений.

Автор выражает признательность С. Э. Хайкину и В. С. Троицкому за обсуждение настоящего сообщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 1, 5 (1956).
2. R. N. Whitenhurst, F. H. Mitchell, I. Copeland, Proc. IRE, 45, 1410 (1957).
3. I. A. Giordmaine, L. E. Alsop, C. H. Mayeg, C. H. Townes, Proc. IRE, 47, 1062 (1959).
4. С. Э. Хайкин, Т. М. Егорова, Д. В. Корольков, Труды 5 совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, 1956, стр. 131.
5. Т. М. Егорова, Н. Ф. Рыжков, Известия ГАО АН СССР, № 164, 140 (1959).

Главная астрономическая обсерватория
АН СССР

Поступила в редакцию
4 апреля 1960 г.

ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА СРЕД, СОДЕРЖАЩИХ СЛУЧАЙНЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ

B. A. Зверев

Ранее указывалось [1], что при распространении модулированной волны в среде, содержащей случайные неоднородности, происходит такое же изменение характера модуляции волны, как и в среде с дисперсией. Это изменение определяется значением фазового инварианта [2]

$$\Theta = \varphi_0 - (\varphi_1 + \varphi_2)/2, \quad (1)$$

где φ_0 — фаза несущей частоты, $\varphi_{1,2}$ — фазы боковых составляющих.

Приведенный в [1] расчет относился только к случаю малых значений $\bar{\Theta}^2$.

Используя метод, примененный Татарским [3] для нахождения спектров фаз

и амплитуд волны, распространяющейся в среде со случайными неоднородностями, можно связать значение спектра мощности фазового инварианта со спектром мощности флюктуаций показателя преломления.

Из (1) следует, что корреляционная функция фазового инварианта может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_{\Theta} \equiv \overline{\Theta_p \Theta_{p'}} = & \overline{\varphi_0(p) \varphi_0(p')} + 1/4 \overline{\varphi_1(p) \varphi_1(p')} + \\ & + 1/4 \overline{\varphi_2(p) \varphi_2(p')} - 1/2 [\overline{\varphi_0(p) \varphi_1(p')} + \overline{\varphi_1(p) \varphi_0(p')}] - \\ & - 1/2 [\overline{\varphi_0(p) \varphi_2(p')} + \overline{\varphi_2(p) \varphi_0(p')}] + 1/4 [\overline{\varphi_1(p) \varphi_2(p')} + \overline{\varphi_2(p) \varphi_1(p')}] . \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь величины $\overline{\varphi_i(p) \varphi_j(p')}$ являются корреляционными функциями изменений фазы на частотах ω_i и ω_j . Спектр величины $\overline{\Theta_p \Theta_{p'}}$ будет, согласно (2), суммой спектров корреляционных функций $\overline{\varphi_i(p) \varphi_j(p')}$. Спектр набега фазы на пути L для волны с волновым числом k_0 можно представить в виде [3]:

$$S_{\varphi}(x_1, x_2, k_0) = \frac{k_0}{2} \int_0^L f(x_1, z, z) \cos \left[\frac{x_1^2 + x_2^2}{2k_0} (L-z) \right] dz, \quad (3)$$

где $f(x_1, x_2, z)$ — сопряженная по Фурье от флюктуаций показателя преломления $\Delta \epsilon(x, y, z)$ по координатам x и y .

Спектр мощности флюктуаций фазы на частотах ω_i и ω_j

$$\Phi_{\varphi}(x_1, x_2, k_i, k_j) = \overline{S(x_1, x_2, k_i)} \overline{S^*(x_1, x_2, k_j)}. \quad (4)$$

Подставив (3) в (4) и введя спектральную плотность корреляционной функции показателя преломления

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) = & \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \overline{\Delta \epsilon(x_1, y_1, z_1)} \overline{\Delta \epsilon(x_2, y_2, z_2)} \times \\ & \times e^{-i[x_1(x_1-x_2)+x_2(y_1-y_2)+x_3(z_1-z_2)]} d(x_1-x_2) d(y_1-y_2) d(z_1-z_2), \end{aligned} \quad (5)$$

получим при условии $(k_i - k_j)/k_0 \ll 1$, что

$$\begin{aligned} \Phi_{\varphi}(x_1, x_2, k_i, k_j) = & \frac{\pi k_0^2}{2} F(x_1, x_2, 0) \times \\ & \times \left\{ \frac{\sin[x^2 L_0(k_i - k_j) k_0^{-2}]}{x^2 (k_i - k_j) k_0^{-2}} + \frac{\sin[x^2 k_0^{-1} L_0]}{x^2 k_0^{-1}} \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $x^2 = x_1^2 + x_2^2$. На основании (2) и (6) для спектра мощности фазового инварианта имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_{\Theta} = & \frac{\pi k_0}{2} F_0(x_1, x_2, 0) \times \\ & \times \left\{ \frac{3}{2} - 2 \frac{\sin((x^2 k_0^{-1} L))}{x^2 k_0^{-1} \beta} + \frac{\sin(2x^2 k_0^{-1} L)}{4x^2 k_0^{-1} \beta} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку для измерения спектра мощности фазового инварианта может быть применена сравнительно простая методика эксперимента, соотношение (7) может быть использовано для исследования сред, содержащих случайные неоднородности.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Зверев, Доклад на IV Всесоюзной Акустической конференции (Москва, 1958 г.).
2. В. А. Зверев, ДАН СССР, 91, 791 (1953).
3. В. И. Татарский, ДАН СССР, 107, 245 (1956).

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ВДОЛЬ ПЛАЗМЕННОГО СТЕРЖНЯ

С. М. Левитский и Н. С. Баранчук

В ряде теоретических работ [1,2] было показано, что вдоль цилиндрического плазменного стержня могут распространяться медленные поверхностные электромагнитные волны. В отсутствие магнитного поля распространение этих волн возможно лишь при условии $\omega_0 > \omega \sqrt{1 + \epsilon_D}$, где ω — частота сверхвысокочастотного поля, $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$ — собственная частота плазмы, ϵ_D — диэлектрическая проницаемость диэлектрика, окружающего плазму. При этом наибольшее замедление должно получаться при $\omega_0 \approx \omega \sqrt{1 + \epsilon_D}$, тогда как при больших значениях ω_0/ω фазовая скорость волн стремится к c . Подобного рода медленные волны экспериментально наблюдалась в работах [3,4]. Там же было показано качественное соответствие эксперимента и теории.

Нами было произведено количественное сопоставление некоторых выводов теории с экспериментом. Для этой цели была изготовлена длинная газоразрядная трубка с внешним диаметром 1,25 см и с внутренним диаметром 1 см, наполненная насыщенными парами ртути. Охлаждаемая часть баллона поддерживалась при температуре 40–60° С. Из коаксиальной измерительной линии был удален центральный стержень и заменен разрядной трубкой. Перемещая зонд измерительной линии, можно было судить о характере распространения электромагнитных волн вдоль плазменного стержня. Измерения велись в диапазоне частот от 2000 до 3000 мгц.

Особое внимание обращалось на измерение концентрации зарядов. Поскольку при больших замедлениях основную роль должны играть параметры сред у границы раздела плазмы—диэлектрик, концентрация зарядов измерялась у самой поверхности стекла с помощью плоского ленгмюровского зонда, вмонтированного в участок трубы, находившийся вне коаксиальной линии.

Результаты измерений на частоте 2000 мгц представлены на рис. 1. При этом по оси ординат отложено замедление волны, а по оси абсцисс — концентрация зарядов у поверхности стекла. Из рис. 1 видно, что по мере понижения концентрации зарядов степень замедления повышается, а сама кривая асимптотически стремится к прямой 1, изображающей концентрацию, при которой наблюдалось полное прекращение распространения сигнала вдоль системы. Прямая 2 соответствует концентрации, опреде-

ляемой из условия $\omega_0 = \omega \sqrt{1 + \epsilon_D}$, т. е. теоретической границе режима распространения электромагнитных волн. Диэлектрическая проницаемость ϵ_D стекла, из которого была изготовлена лампа, была нами специально измерена и оказалась равной 4,2.

Как видно, теоретически определяемая граничная концентрация хорошо совпадает с экспериментально измеренной, если за ϵ_D взять диэлектрическую проницаемость материала, которым окружена плазма.

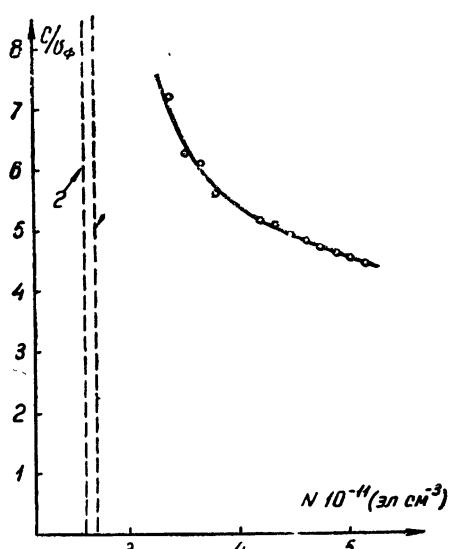


Рис. 1. Зависимость коэффициента замедления от концентрации электронов у стенки разрядной трубы ($T = 60^\circ \text{ С}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. W. O. Schumann, Z. f. Naturforsch., 5a, 181 (1950).
2. Я. Б. Файнберг, М. Ф. Горбатенко, ЖТФ, 29, 549 (1959).
3. К. Д. Синельников, П. М. Зейдлиц и др., Труды II Международной конференции по мирному использованию атомной энергии, изд АН СССР, 1, 1959, стр. 110.
4. G. Bittner, Z. an gew. Phys., 10, 117 (1958).

Киевский государственный
университет

Поступила в редакцию
29 апреля 1960 г.