

## С О Д Е Р Ж А Н И Е

<b>Виткевич В. В., Матвеенко Л. И.</b> Радиоизображение Солнца на волне 3 см . . . . .	351
<b>Виленский И. М., Чернышов В. П., Шейнман Д. И.</b> Об искажении модуляции мощных радиоволн при их распространении в ионосфере (экспериментальное исследование) I . . . . .	367
<b>Свеников А. М., Часовитин Ю. К., Коченова Н. А.</b> Некоторые результаты измерений поглощения радиоволн в ионосфере . . . . .	375
<b>Басс Ф. Г., Ханкина С. И.</b> Флюктуации электрического поля в гиротропной среде со случайными неоднородностями в приближении геометрической оптики . . . . .	384
<b>Денисов Н. Г.</b> Дифракция электромагнитных волн в гиротропном слое, содержащем случайные неоднородности . . . . .	393
<b>Ахманов С. А., Антонов Г. Ф.</b> Флюктуации амплитуды в импульсном генераторе на отражательном кластроне . . . . .	405
<b>Чикин А. И.</b> Фликкер-шум пальчиковых радиоламп . . . . .	419
<b>Маркус Ф. А.</b> Определение функции корреляции флюктуаций коэффициента преломления с помощью линзы . . . . .	425
<b>Шевчик В. Н. и Шведов Г. Н.</b> Электронно-вольновой генератор с тормозящим полем . . . . .	432
<b>Кротова Л. И.</b> Анализ электромагнитных процессов в сердечнике импульсного трансформатора с учетом нелинейности кривой намагничивания и магнитного последействия . . . . .	442
<b>Малышев В. А.</b> Экспериментальная проверка теории генераторов СВЧ с резонансной нагрузкой . . . . .	452
<b>Шиманов С. Н.</b> Колебания квазилинейных автономных систем с запаздыванием . . . . .	456
<b>Брусин В. А.</b> К теории вибротранспортировки . . . . .	467
<b>Неймарк Ю. И., Шильников Л. П.</b> Исследование динамических систем, близких к кусочно линейным . . . . .	478
<b>Леонов Н. Н.</b> О разрывном кусочно-линейном точечном преобразовании прямой в прямую . . . . .	496
<b>Кинягин С. Д.</b> Об устойчивости состояния равновесия двухкаскадной релейной системы . . . . .	511
<b>Шестаков В. И.</b> К вопросу о синтезе смешанных релейно-контактных схем класса П . . . . .	526
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
<b>Гершман Б. Н.</b> К вопросу о распространении электромагнитных волн в сдабо-релятивистской магнитоактивной плазме . . . . .	534
<b>Лиссенко А. С.</b> Парамагнитный резонанс в лакмоиде . . . . .	537
<b>Аронович Г. В., Любимцев Я. К.</b> Влияние инерции воды в турбинном трубопроводе на устойчивость работы ГЭС с уравнительными резервуарами . . . . .	538
<b>Ашбель Н. И., Денисов Г. Г. и Дозоров В. А.</b> Устройство для наблюдения трехмерных фазовых траекторий . . . . .	540

## РАДИОИЗОБРАЖЕНИЕ СОЛНЦА НА ВОЛНЕ 3 см\*

*B. B. Виткевич, Л. И. Матвеенко*

Проведены новые наблюдения радиоизлучения Солнца на волне 3,2 см на 31-метровом неподвижном радиотелескопе Крымской научной станции ФИАН. Получены «радиоизображения» Солнца, установлена тестовая связь между областями повышенной интенсивности радиоизлучения на волнах 3 см и 21 см; показано, что области повышенной интенсивности радиоизлучения в диапазоне волн от 1,5 см до 21 см в большинстве случаев являются оптически тонкими. Сопоставлены данные по смещению эффективного центра излучения Солнца на волнах 3 см и 1,5 см. Приводятся данные о «формах» Солнца на волне 3 см.

Проведенные поляризационные наблюдения на волне 3,2 см обнаруживают наличие круговой поляризации над отдельными областями повышенной интенсивности.

Наблюдательные возможности радиоастрономии в настоящее время определяются чувствительностью и пространственной разрешающей способностью радиотелескопов. В том случае, когда мы имеем дело с мощными источниками радиоизлучения—таким как Солнце, вопросы чувствительности отступают на второй план. Наиболее трудной задачей является создание радиотелескопа с высокой пространственной разрешающей силой, дающей возможность исследовать распределение радиояркости по диску Солнца. При этом наиболее интересно получение двухмерной картины распределения радиояркости—«радиоизображения» Солнца.

Ранее уже сообщалось о том, что в Крымской научной станции ФИАН построен крупный неподвижный радиотелескоп диаметром 31 м, направленный на область неба со склонением, равным склонению Крабовидной туманности— $-22^\circ$  [1]. С помощью этого радиотелескопа было получено «радиоизображение» Солнца на волне 3,2 см [2, 3] по данным распределения радиояркости только одной поляризации. В настоящей статье приводятся дополнительные сведения о характере «радиоизображения» Солнца на волне 3,2 см.

Для выполнения этой работы была разработана специальная радиоприемная установка (см. [4]). Эта установка имеет круглый волновод, помещенный в фокусе параболоида. Волновод оканчивается двумя анализаторами, позволяющими разделить принимаемое излучение на две линейные поляризации во взаимно-перпендикулярных плоскостях. После преобразования и усиления принимаемый сигнал поступает на поляризационную приставку, которая позволяет определить все четыре параметра Стокса. Радиоизображение Солнца как в неполяризованных, так и в поляризованных волнах получается посредством сканирования диаграммы по диску Солнца; этот метод был уже описан ранее [2, 3].

### 1. СРАВНЕНИЕ РАДИОИЗОБРАЖЕНИЯ СОЛНЦА НА ВОЛНЕ 3,2 см И 21 см

В 1957 г., насколько нам известно, начали одновременно проводиться первые работы по получению двухмерной картины распределения радиояркости Солнца в двух местах: в Крымской научной

\* Доклад на пленуме Комиссии по исследованию Солнца (Пулково, май, 1959).

станции ФИАН на волне 3,2 см на параболическом зеркале диаметром 31 м и в Австралии в Лаборатории радиофизики на волне 21 см с помощью двух радиоинтерференционных решеток, расположенных под прямым углом. Разрешающая сила последней системы весьма высока—около 3,5', так что радиоизображение получается хорошего качества.

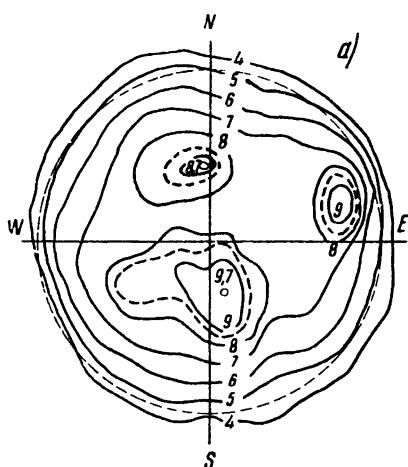


Рис. 1. а) Радиоизображение Солнца на волне 3,2 см 22. VII 57 г. (ФИАН). Числа указывают антенные температуры в тысячах градусов. Для приведения к яркостным температурам все значения необходимо умножить на 3. Пунктиром показана граница оптического диска Солнца.

имеют аналогичную форму, с несколькою горизонтальном направлении. Вторая область расположена у восточного края диска; она отчетливо видна как на волне 3,2 см, так и на волне 21 см. В обоих случаях эта область заметно вытянута в вертикальном направлении. Далее, в нижней части чертежа видна излучающая область больших размеров; аналогичное образование, хотя и не повторяющееся в деталях, наблюдается на волне 21 см.

На рис. 2а и 2б приведены радиоизофоты Солнца, полученные 18. VII. 1957 г. На волне 3,2 см мы видим три отчетливо выраженные области повышенной интенсивности радиоизлучения, причем каждую из них можно сопоставить с соответствующей областью на

На симпозиуме по радиоастрономии в Париже Виткевичем и Мэтьюсоном были сопоставлены „радиоизображения“ Солнца на этих двух волнах [5]. Здесь мы приведем более подробные результаты такого сопоставления.

На рис. 1 и рис. 2 приведены радиоизображения на волнах 3,2 см и 21 см для двух дней, полученные разными методами в различное время суток.

Радиоизображения Солнца на рис. 1а и 1б получены 22.VII. 1957 г. Мы видим, что на волне 3,2 см четко вырисовываются три области повышенной интенсивности радиоизлучения. Первая область смешена несколько влево от центрального меридиана и расположена выше экватора. Этой области соответствует аналогичная область на волне 21 см. Можно отметить, что обе области

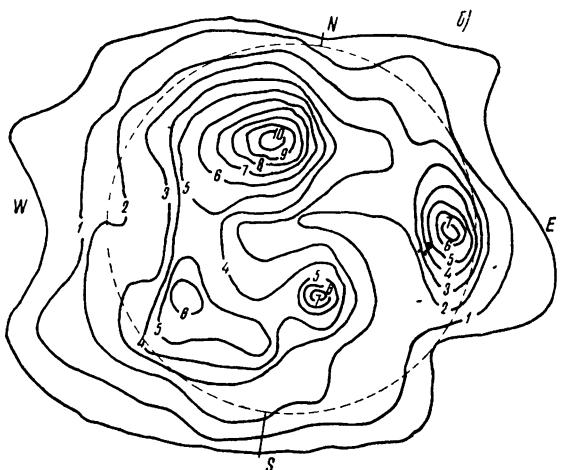


Рис. 1. б) Радиоизображение Солнца на волне 21 см 22. VII. 57 г. (Австралия). Одна единица равна  $8,5 \cdot 10^4$  °К.

волне 21 см; наблюдается также соответствие в формах областей. Даже небольшое увеличение интенсивности на волне 3,2 см на краю диска в направлении с.-з., отмеченное в виде „языка“, находит свое четкое отражение на волне 21 см в виде аналогичной картины. Отметим, что полного подобия радиоизображений на волне 3,2 и 21 см не может быть, так как радиоизлучение на этих волнах исходит из разных по высоте слоев короны. На рис. 3а и 3б приведены данные для 21. VII. 1957 г.

Далее приводятся результаты сравнения радиоизображений Солнца на двух волнах для тех дней июля 1957 г., для которых получены надежные результаты (рис. 4—6).

В таблице 1 указаны основные сведения относительно областей повышенной интенсивности радиоизлучения. Через  $\Delta T_{3,2}$  и  $\Delta T_{21}$  обозначены максимальные эффективные температуры этих областей соответственно на волнах 3,2 и 21 см; через  $r_1/r_2$  обозначены отношения характерных размеров областей ( $r_1$  — размер в направлении, близком к экваториальному,  $r_2$  — размер в меридианном или близком к нему направлении). Через  $\pi r_1 r_2 / 4$  обозначена площадь области повышенной интенсивности, выраженная в квадратных угловых минутах.

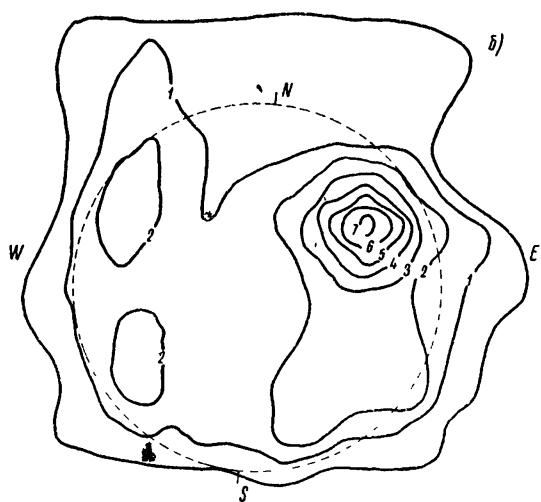


Рис. 2. б) То же, что и на рис. 1б, для 18.VII.57 г. Одна единица равна  $13 \cdot 10^4 \text{ К}$ .

наблюдается в 16 рассмотренных случаях. Только в одном случае, а именно 25 июля на волне 21 см имеется очень слабо выраженная излучающая область, с которой нельзя уверенно сопоставить аналогичную область на волне 3,2 см.

Далее, из таблицы и рис. 4 видно, что характерные формы актив-

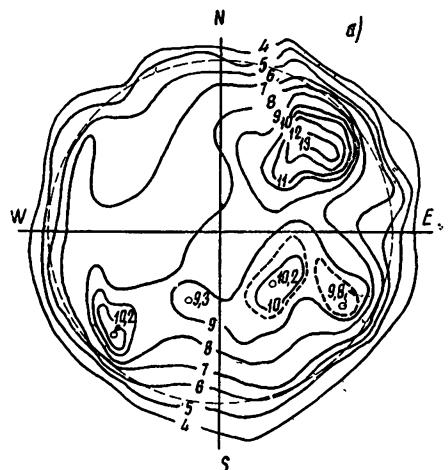


Рис. 2. а) То же, что и на рис. 1а, для 18.VII.57 г.

Из рассмотрения таблицы, а также рис. 4, 5, 6, которые построены на основании числовых данных таблицы, можно заключить следующее.

Во-первых, из таблицы ясно, что каждой области повышенной интенсивности радиоизлучения на волне 3,2 см соответствует аналогичная область на волне 21 см; точно так же каждой излучающей области на волне 21 см соответствует аналогичная область на волне 3,2 см.

Полное соответствие

ных областей подобны на обеих длинах волн. Несмотря на то, что величина  $r_1/r_2$  на волне 3,2 см изменяется довольно в широких пределах (от 0,25 до 1,7), ее изменения подобны на обеих длинах волн; точки на рис. 4 ложатся в основном вблизи прямой, проведенной под углом 45°.

Подтверждается вывод, полученный ранее [3] и состоящий в том,

что на 3,2 см в ряде случаев наблюдаются области повышенной интенсивности радиоизлучения значительных размеров—порядка  $5' \div 10'$ , а в отдельных случаях и более, хотя яркости больших областей обычно не велики.

Сравнение площадей излучающих областей (рис. 5) на двух волнах также указывает на некоторое согласие в результатах, однако разброс точек наблюдается значительно больший. Интересно отметить, что области на волне 21 см имеют большие площади, чем на волне 3,2 см; этот результат получен несмотря на то, что ширина диаграммы направленности на волне 3,2 см больше, чем на волне 21 см.

Если учесть последнее, то отношение площадей будет еще за-

метнее отличаться от единицы. Рис. 5 показывает, что во всяком случае размеры области повышенной интенсивности радиоизлучения растут с удлинением волны.

Наконец, остановимся на вопросе об эффективных температурах радиоизлучения рассматриваемых областей. В таблице 1 приведены  $\Delta T_{3,2}$ , которые получены путем увеличения антенных температур в три раза, для того чтобы привести их к яркостным температурам. Коэффициент 3 обусловлен потерями, которые происходят из-за неточности выполнения параболоида, вследствие чего создается значительное рассеяние радиоволн вне главного лепестка. Как видно, отношение температур имеет значительный разброс и изменяется в пределах от 20 до 100. Если учесть, что действительные размеры центральных, наиболее ярких областей излучения на волне 3,2 см в несколько раз меньше, чем на рис. 1—3 (рас-

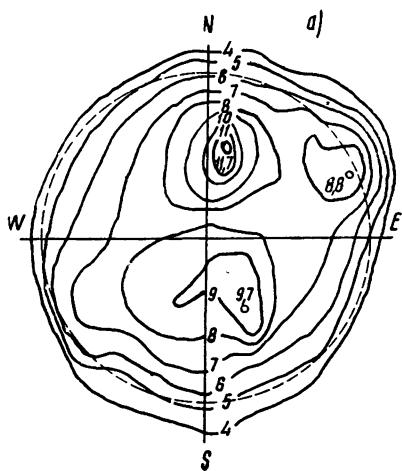


Рис. 3. а) То же, что и на рис. 1а, для 21. VII. 57 г.

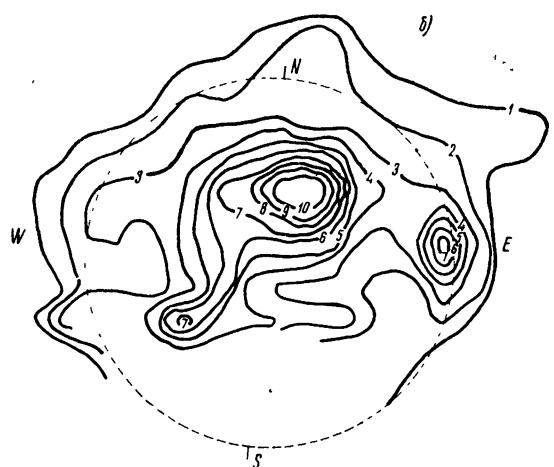


Рис. 3. б) То же, что и на рис. 1б, для 21. VII. 57 г.  
Одна единица равна  $9,6 \cdot 10^4$  К.

Таблица 1

Дата	Длина волны 3 см				Длина волны 21 см (сравнение с волной 3 см)				
	Характеристика области повышенной интенсивности радиоизлучения		$\Delta T \cdot 10^{-3}$	$r_1/r_2$	$(r_1 \times r_2) \frac{\pi}{4}$	Характеристика области повышенной интенсивности радиоизлучения		$\Delta T \cdot 10^{-5}$	$r_1/r_2$
18. VII	Область наблюдается в северо-восточном квадранте Область наблюдается в юго-восточном квадранте Малых размеров область наблюдалась в юго-западном квадранте Слабо выраженная область наблюдалась на северо-западном крае диска в виде "языка" Область в северной полусфере на восточном крае диска	15 6 7,1 3 15	1 1,25 0,44 0,24 1,0	65 70 31 15 67	Наблюдается соответствующая область Соответствующая область выражена несколько слабее Наблюдается аналогичная область Ярко выраженная область Имеется соответствующая область “ “	6,5 1,3 1,3 4,8 3,8	1,1 1,45 0,5 0,45 0,7	80 71 29 43 100	— — — — 24
21. VII	Область в южной полусфере	4,5	0,88	20	Имеется соответствующая область (данные неполные, сравнивания привести нельзя)	4,2	1,54	— —	— —
22. VII	Область в южной полусфере Область севернее центра Область у восточного края диска	6,9 5,1 6	1,33 1,40 0,6	120 35 19	Наблюдается соответствующая область Имеется соответствующая область Имеется соответствующая область	5,1 5,1 4,2	1,54 1,54 0,54	95 95 50	— — —
24. VII	Область вытянутой формы в южной полусфере Область в северной полусфере Область вблизи от экватора в восточной части	7,1 7,5 3	1,67 1,03 0,83	106 57 10	Имеется область аналогичной формы Имеется соответствующая область, смещенная к западу по сравнению с волной 3 см на $8^{\circ} - 10^{\circ}$ Имеется соответствующая область	3,4 1,1 6,4	1,9 1 0,67	106 70 57	— — —
25. VII	Область вблизи центра в направлении север-юг Область у края в западном направлении Область в направлении север-запад	4,0 4,2 3	0,8 0,6 1,09	19 24 34	Имеется соответствующая область Имеется соответствующая область Имеется соответствующая область	3,2 3,2 4,1	0,87 0,87 0,64	29 29 46	— — —
		3,6	0,55	10	Область сдвинута на 5° к краю по сравнению с волной 3 см	0,83	0,65	20	—

ширеение обусловлено конечностью ширины диаграммы), и имеют размеры порядка 1' [6], то при учете этого обстоятельства указанные соотношения уменьшаются. Непостоянство указанных величин показывает, что не наблюдается надежной связи между энергией, излучаемой из всей области повышенной интенсивности радиоизлучения на волне

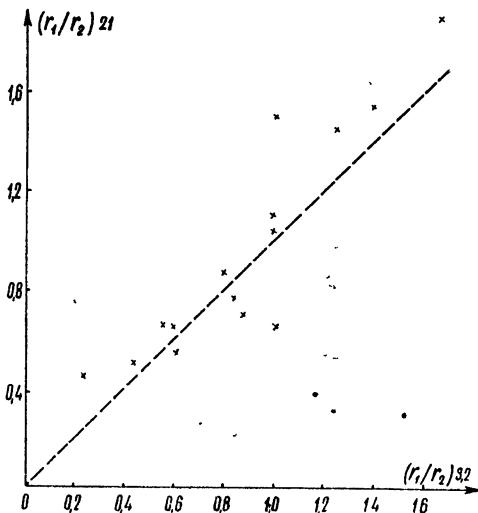


Рис. 4. Сравнение форм областей повышенной интенсивности радиоизлучения на волнах 3,2 и 21 см.

21 см и 3,2 см, т. е. не наблюдается однозначной связи между условиями в верхних областях корональных конденсаций, ответственных за радиоизлучение на волне 21 см, и внутренних областях, ответствен-

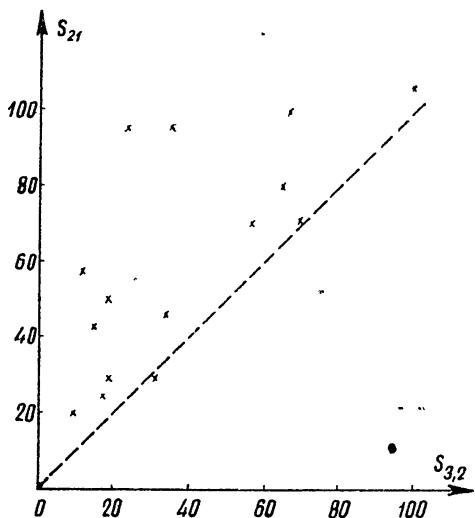


Рис. 5. Сопоставление площади S областей повышенной интенсивности радиоизлучения на волнах 3,2 и 21 см (в квадратных угловых минутах).

венных за радиоизлучение на волне 3,2 см. Этот вопрос сколько-нибудь обстоятельно можно будет исследовать при наличии инструментов с большей разрешающей силой на волне 3,2 см.

## 2. СМЕЩЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО ЦЕНТРА РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ СОЛНЦА

В 1958 г. одновременно с наблюдениями радиоизображения Солнца на волне 3,2 см сотрудниками НИРФИ Рахлиным и Кисляковым производились наблюдения радиоизлучения Солнца на волне 1,6\* см. Облучатель радиометра на волну 1,6 см был установлен так, чтобы диаграмма направленности антенны лежала в плоскости меридиана. Облучатель поляриметра на волну 3,2 см устанавливался несколько западнее, что смещало диаграмму направленности на восток. Ввиду

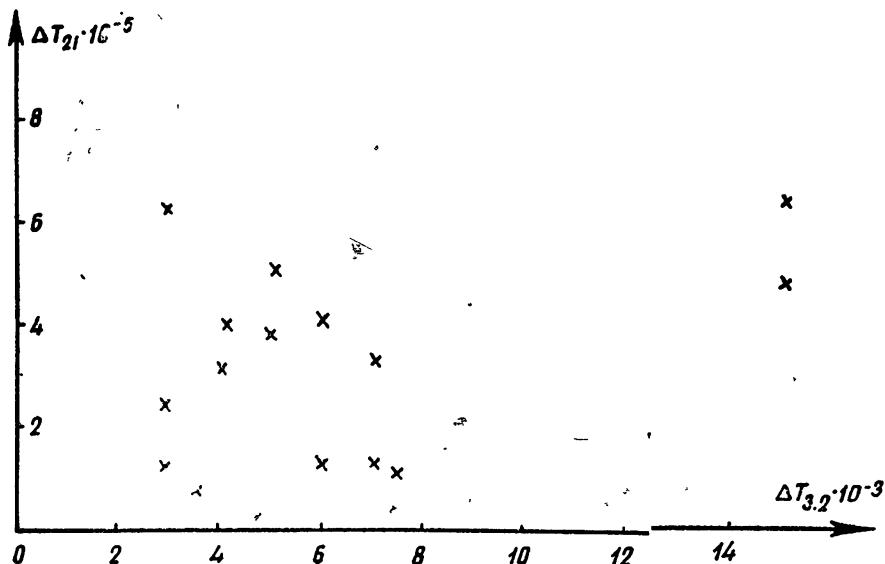


Рис. 6. Сопоставление температуры  $\Delta T$  области повышенной интенсивности радиоизлучения на волнах 3,2 и 21 см.

этого записи на волне 1,6 см была смещена по времени относительно записи на волне 3,2 см. Неточность параболической поверхности зеркала радиотелескопа, а также работа при значительных углах между осью зеркала и направлением на Солнце вносили значительные искажения в диаграмму направленности, что не позволило разрешить отдельные детали на диске Солнца. Ввиду этого полученные данные на волне 1,6 см не дали возможности построить радиоизображение Солнца, а позволили определить лишь положение эффективного центра радиоизлучения.

Для определения смещения эффективного центра радиоизлучения Солнца не требуется высокой разрешающей способности инструмента, так как необходимо определить эффективный центр для всего Солнца, а не отдельной его части. При определении положения центра радиоизлучения, в отличие от случая, разобранного в литературе [7], необходимо было учитывать, что диаграмма антенны  $\Omega_a$  шире угловых размеров областей повышенной интенсивности  $\Omega_o$ , но меньше угловых размеров солнечного диска  $\Omega_\odot$ .

В нашем случае смещение эффективного центра тяжести определяется как

$$\Delta r = \frac{\iint T_o(\Theta, \varphi) A(\Theta, \varphi) r(\Theta, \varphi) d\varphi d\Theta}{\iint T_\odot(\Theta, \varphi) A(\Theta, \varphi) d\varphi d\Theta}, \quad (1)$$

\* Наблюдения на волне 1,6 см были проведены на том же радиотелескопе диаметром 31 м. Данные наблюдений были нам любезно предоставлены Рахлиным и Кисляковым для сравнения с результатами наблюдений на волне 3 см.

где  $A(\Theta, \varphi)$  — диаграмма направленности антенны,  $T_o$  — яркостная температура области повышенной интенсивности,  $T_\odot$  — яркостная температура солнечного диска,  $r$  — расстояние от эффективного центра радиоизлучения Солнца до центра области повышенной интенсивности.

Учитывая указанное выше условие  $\Omega_o < \Omega_a < \Omega_\odot$ , выражение (1) приближенно можно представить в следующем виде (при наличии одной области повышенной интенсивности):

$$\Delta r = \frac{\Omega_o}{\Omega_a} \frac{T_o}{T_\odot} r.$$

Отношение смещений эффективных центров радиоизлучения на волнах 3,2 и 1,6 см, обусловленное влиянием области повышенной интенсивности, позволяет оценить сравнительную интенсивность излучения области на этих волнах. Это отношение в нашем случае, очевидно, определится следующим выражением:

$$\frac{\Delta r_{1,6}}{\Delta r_{3,2}} = \frac{T_{o,1,6}}{T_{o,3,2}} \frac{\Omega_{a,3,2}}{\Omega_{a,1,6}} \frac{T_{\odot,3,2}}{T_{\odot,1,6}}. \quad (2)$$

Учитывая, что

$$T_{\odot,3,2} \approx 1,6 T_{\odot,1,6}$$

и что ширина диаграмм радиоприема на волне 1,6 см и 3,2 см, как показали измерения, связана соотношением

$$\Omega_{a,1,6} = (1 \div 1,5) \Omega_{a,3,2},$$

получим:

$$\frac{T_{o,3,2}}{T_{o,1,6}} = (1,6 \div 2,4) \frac{\Delta r_{3,2}}{\Delta r_{1,6}}. \quad (3)$$

Результаты расчета смещений эффективных центров радиоизлучения приведены на рис. 7. Этот график дает представление как об абсолютном смещении эффективных центров на волнах 1,6 и 3,2 см, так и об их отношении. Максимальное смещение эффективного центра за наблюдаемый период

доходит до 3,5' на 3,2 см и до 2' на 1,6 см.

Среднее отношение смещений  $\Delta r_{3,2}/\Delta r_{1,6} = 2,6$ ; в этом случае, согласно (3),

$$T_{o,3,2}/T_{o,1,6} = 4,2 \div 6,2. \quad (4)$$

Как известно, в случае теплового механизма излучения яркостная температура  $T_o$  определяется соотношением:

$$T_o = \int_0^\tau T_k(x) e^{-x} dx, \quad (5)$$

где  $T_k$  — кинетическая температура,  $\tau$  — оптическая толщина.

В случае, когда  $\tau \ll 1$ , яркостная температура  $T_o = T_k \tau$ . При достаточно больших  $\tau$  ( $\tau \gg 1$ ) значения  $T_o$  близки к  $T_k$ . Очевидно, что отношение яркостных температур на двух длинах волн  $T_{o,3,2}/T_{o,1,6}$  в зависимости от величины оптической толщины лежит в пределах от 1 до  $\tau_{o,3,2}/\tau_{o,1,6}$ . Учитывая, что  $\tau \propto f^{-2}$ , где  $f$  — частота излучения, можно

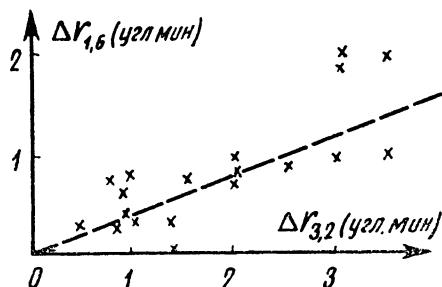


Рис. 7. Сопоставление смещений  $\Delta r$  эффективных центров радиоизлучения Солнца на волнах 3,2 см и 1,6 см в июне 1958 г.

ожидать, что отношение яркостных температур  $T_{0,3,2}/T_{0,1,6}$  в зависимости от  $\tau$  будет лежать в пределах от 1 до  $\sim 4$ . Данные наблюдений (см. (4)) не противоречат тепловому механизму излучения. Тот факт, что измеренное отношение близко к 4, показывает, что указанные корональные конденсации — оптически тонкие для этого диапазона волн.

### 3. «ФОРМА» СОЛНЦА НА ВОЛНЕ 3,2 см

Рассмотрение радиоизображений, полученных на волне 3,2 см в 1957 и 1958 гг. (рис. 10—12, см. раздел 4), показывает, что форма радиоизофот, в которые вписан солнечный диск, заметно изменяется день ото дня. Отклонение радиоизофот от окружности определяется как корональными конденсациями (их температурой, размерами, плотностью и положением на диске), так и диаграммой направленности радиотелескопа. Если отсчитывать отклонения радиоизофот от окружности  $\Delta\alpha$  через равные угловые промежутки (в нашем случае через  $22,5^\circ$ ), то эти отклонения могут быть представлены в виде графиков, изображенных на рис. 8.

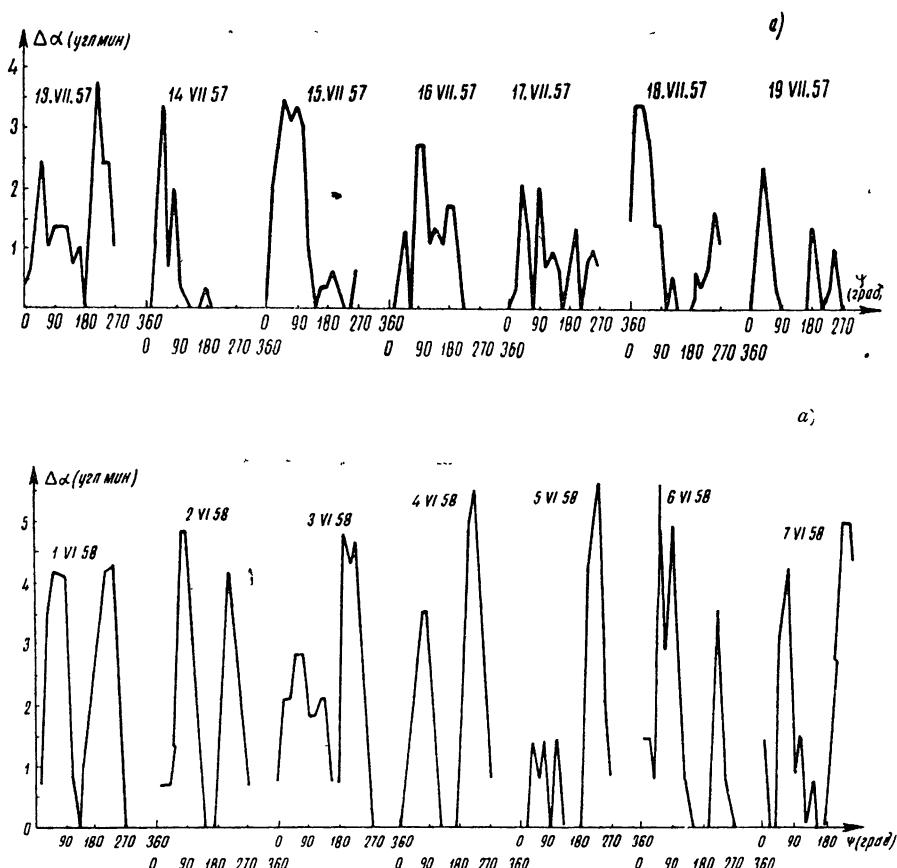


Рис. 8 а) и б) Кривые отклонения от окружности ближайшей к диску Солнца радиоизофоты в зависимости от угла  $\psi$  (значение  $\varphi=0$  соответствует направлению из центра Солнца на южный полюс, значение  $\varphi=90^\circ$  соответствует западному краю солнечного диска).

Как и следовало ожидать, максимальное отклонение изофот наблюдается в области, близкой к экватору.

Все случаи отклонения радиоизофот от окружности  $\Delta\alpha$  могут быть сведены в едином графике (рис. 9), где по оси абсцисс отложено наблюдавшееся отклонение от окружности в угловых минутах, а по оси ординат—число случаев, соответствующих данному отклонению. Как видно из графика рис. 9, в 90% случаев, имевших место в 1957 г., отклонение от окружности не превышает 4', а в 1958 г. 6,5'. Это увеличение, очевидно, обусловлено искажением диаграммы направленности и яркими корональными конденсациями на краю диска.

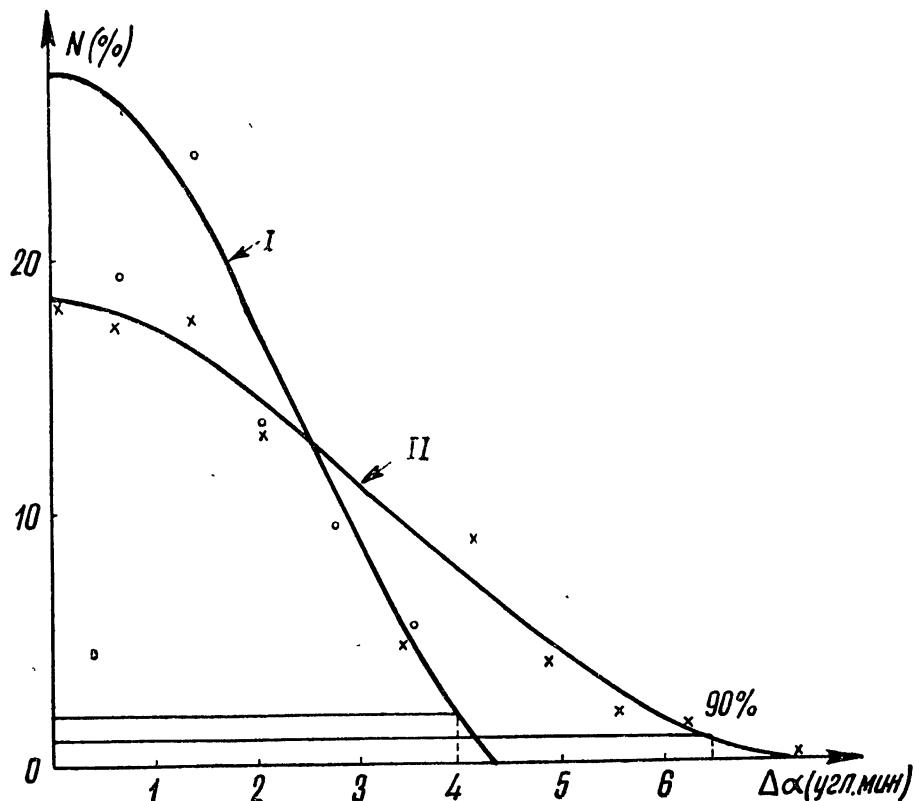


Рис. 9. Кривая распределения числа случаев  $N$ , соответствующих данному отклонению радиоизофот от окружности  $\Delta\alpha$  ( $\lambda = 3,2$  см): I—1957 г., II—1958 г.

#### 4. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ

Для определения поляризации радиоизлучения использовался поляриметр, который определяет все четыре параметра Стокса. В фокусе неподвижного 31-метрового параболического зеркала установлены два взаимно-перпендикулярных анализатора, которые выделяют из принимаемого радиоизлучения составляющие в плоскостях  $x$  и  $y$ . Анализаторы ориентированы в направлении север—юг и восток—запад. В случае частично поляризованного излучения интенсивности  $x$ - и  $y$ -составляющих могут быть представлены в следующем виде:

$$I_x = I_0/2 + X^2; \quad I_y = I_0/2 + Y^2, \quad (6)$$

где  $I_0$  — интенсивность неполяризованной составляющей принимаемого излучения,  $X$  — среднее значение амплитуды  $x$ -составляющей поля-

ризованной части принимаемого излучения,  $Y$ —среднее значение амплитуды  $y$ -составляющей поляризованной части принимаемого излучения.

После преобразования высокочастотных сигналов  $I_x$  и  $I_y$  и усиления их по промежуточной частоте они поступают на поляризационную установку. Пять выходов (пять каналов) этой установки выдают напряжения, пропорциональные следующим значениям:

$$\begin{aligned} I_1 &= a_1 I_x; \quad I_2 = a_2 I_y; \\ I_3 &= a_3 XY \cos \varphi; \quad I_4 = a_4 XY \sin \varphi; \quad I_5 = -a_5 XY \cos \varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $a_1-a_5$ —коэффициенты пропорциональности, зависящие от коэффициентов усиления каналов. Последний, пятый канал, с точностью до коэффициента и знака повторяет третий канал. Из выражения (7) легко определяются параметры Стокса (после исключения коэффициентов  $a_1-a_5$ ):

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = I_0 + X^2 + Y^2; \quad Q = I_1 - I_2 = X^2 - Y^2; \\ U &= I_3 = 2XY \cos \varphi; \quad V = I_4 = 2XY \sin \varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Поляризационные наблюдения проводились двумя методами. В первом варианте наблюдений производилось сканирование диаграммы по диску Солнца в направлении север—юг возвратно-поступательным смещением облучателя из фокуса; во втором—Солнце проходило через неподвижную диаграмму. После обработки результатов наблюдений в первом случае получали распределение радиояркости с точностью до диаграммы по всему диску Солнца (рис. 10); во втором случае находим распределение интенсивности по отдельным полоскам (рис. 12). Второй метод, несмотря на очевидный недостаток (невозможность получить распределение радиояркости по диску), обладает большей чувствительностью по сравнению с первым, так как большее время наблюдения позволяет увеличить постоянную времени аппарата. Кроме того, при измерениях вторым способом полностью исключаются нестабильности в работе аппаратуры, связанные с передвижением рупоров в фокусе облучателя.

Записи интенсивностей  $I_1$  и  $I_2$  велись обычным компенсационным методом, записи  $I_3 \div I_5$ —модуляционным. Модуляция фазы сигнала осуществлялась по промежуточной частоте фазовым модулятором на отрезках кабеля  $\lambda \div \lambda/2$ . В качестве коммутирующего элемента используется лампа с переменной крутиной, что позволяет свести к минимуму амплитудную модуляцию. Если паразитный сигнал все же

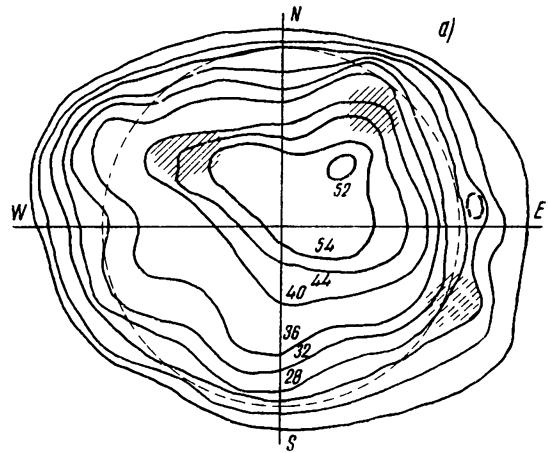


Рис. 10. а) Радиоизображение Солнца на волне 3,2 см  
4. VII. 1958 г.

остается, то он может быть исключен при обработке. В частности, 5 канал регистрирует сигнал в противофазе по сравнению с третьим каналом; паразитные эффекты регистрируются в фазе, что и позволяет легко исключить влияние последних на показания приборов.

В течение всего цикла наблюдений на волне 3,2 см была обнаружена

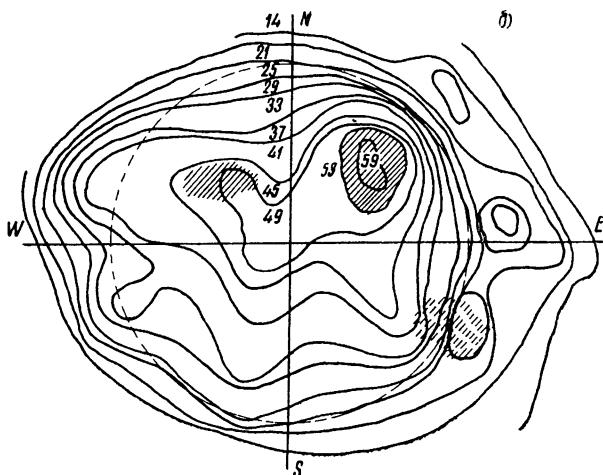


Рис. 10. б) Радиоизображение Солнца на волне 3,2 см  
5. VII. 1958 г.

лишь круговая поляризация отдельных областей. Случаев линейной поляризации или эллиптической (отличающейся от круговой более чем на 20%) обнаружено не было.

Запись излучения Солнца, полученная путем наблюдения за его прохождением через неподвижную диаграмму 17 июня 1958 г.,

дает возможность определить степень и характер поляризации отдельных корональных конденсаций. На рисунке приведены записи двух каналов  $I_2$  и  $I_4$ . В случае круговой поляризации записей этих двух каналов достаточно для определения процента поляризации. Наличие паразитной амплитудной модуляции искажает запись четвертого канала. В этом случае на выходе  $I_4 = (\alpha I_2 + XY \sin \varphi) \alpha_4$  появляется дополнительный сигнал, равный

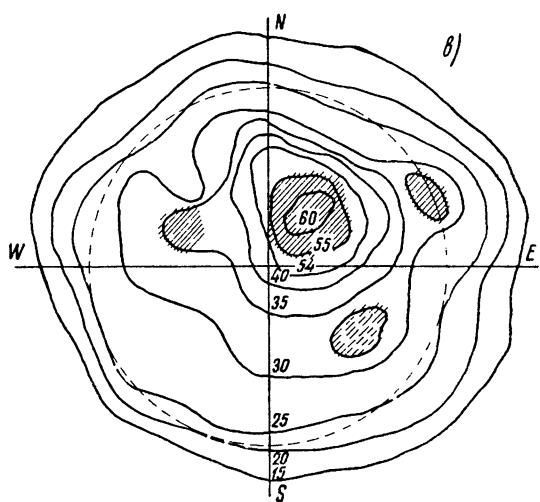


Рис. 10. в) Радиоизображение Солнца на волне 3,2 см  
8. VII. 1958 г.

$\alpha I_2$ , где  $\alpha$  — коэффициент, характеризующий паразитную амплитудную модуляцию. Этот паразитный сигнал при обработке может быть ис-

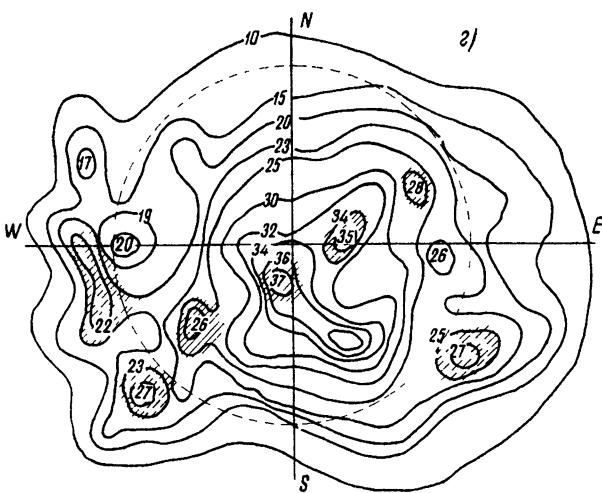


Рис. 10. г) Радиоизображение Солнца на волне 3,2 см  
11 VII. 1958 г.

ключен следующим образом. Вне области повышенной яркости (рис. 3) поляризационный сигнал от корональной конденсации отсутствует. В этом случае, согласно уравнениям (1) и (2), уровень сигнала мо-

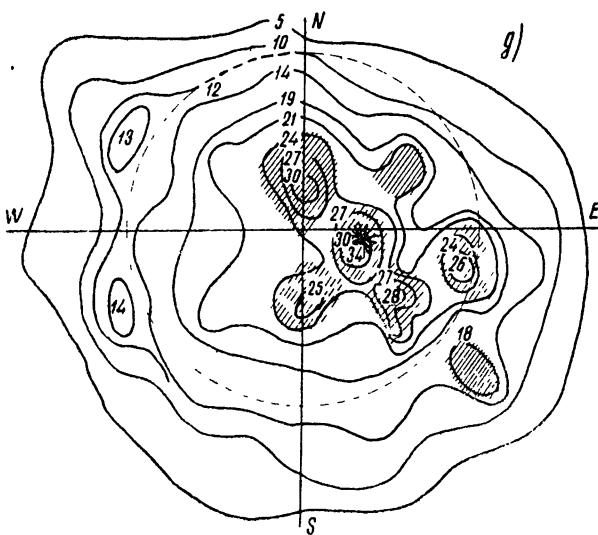


Рис. 10. д) Радиоизображение Солнца на волне 3,2 см  
15 VII. 1958 г.

На рис. 10а—10д штриховкой пунктиром обозначены области с левой поляризацией, сплошными линиями — области с правой поляризацией; цифрами указана антennaя температура в тысячах градусов.

второму и четвертому каналам будет равен

$$I_2 = a_2 T_0, \quad I_4 = a_4 \alpha T_0.$$

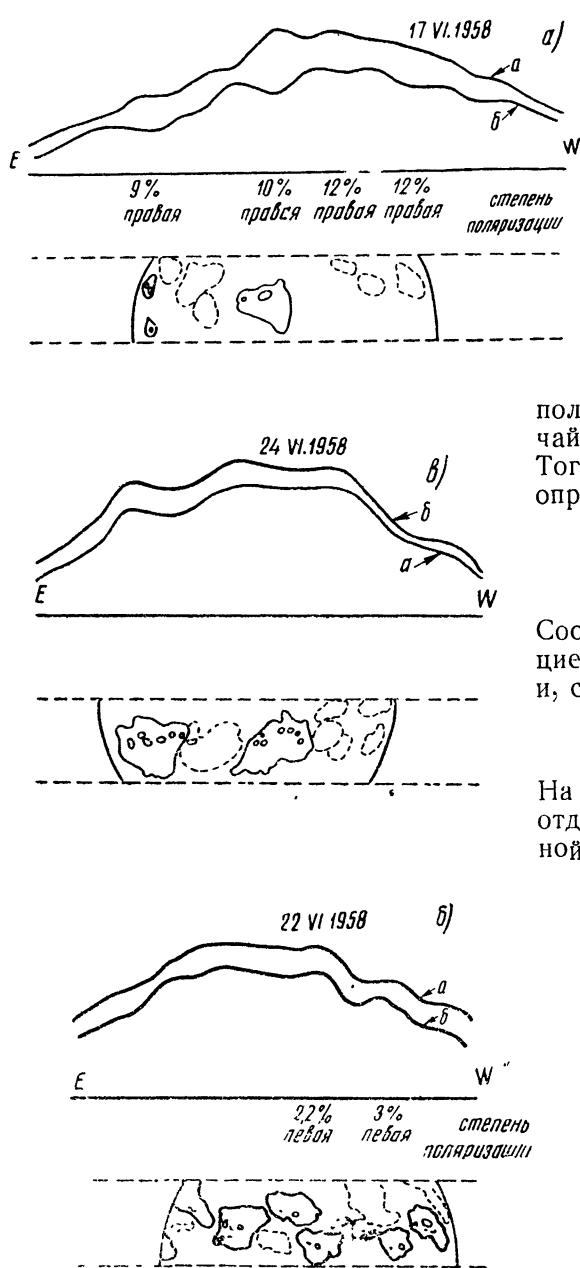


Рис. 11. Распределение радиояркости по диску Солнца. Кривая  $a$  соответствует второму каналу, кривая  $b$  — четвертому каналу; под кривыми помещены соответствующие участки диска Солнца, наблюдавшиеся в линии  $H_{\alpha}$ .

Отношение этих сигналов  $I_4/I_2 = \alpha (a_4/a_2)$  позволяет привести запись канала  $I_2$  к  $I_4$  и тем самым исключить паразитный эффект.

Заштрихованная область  $S_1$  на рис. 12 с точностью до множителя  $a_4$  равна поляризационной составляющей потока излучения\*, а площадь  $S_2$  с точностью до  $a_2$  равна половине полного потока излучения (случай круговой поляризации). Тогда степень поляризации определится как

$$m = \frac{S_1 a_2}{2S_2 a_4} \cdot 100\%.$$

Соотношение между коэффициентами усиления  $a_2/a_4 = 1/12$ , следовательно,

$$m \approx 4 S_1/S_2 \%$$

На записях 17 июня видны отдельные области повышенной интенсивности, которым соответствуют группы пятен или области кальциевых флоккул. Как видно из рис. 11а, этим областям отвечает круговая поляризация с правым вращением; степень поляризации изменяется в пределах от 9 до 12%. Вклад поляризованного излучения этих корональных конденсаций в общий поток принятого излучения составляет 0,35%. Согласно данным ГАО [8], в этот день от всего Солнца наблюдалась круговая поляризация правого вращения, равная 0,7%. Расхождение свя-

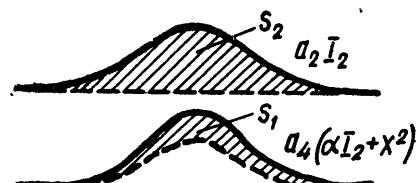
\* Знак площади  $S_1$  определяет направление вращения поляризации

заны с тем, что применяется различная методика наблюдений, однако качественно результаты совпадают..

22 июня наблюдалась левая круговая поляризация радиоизлучения из области групп пятен 315 и 305 (рис. 10б). Степень поляризации в первом случае составляет 2,2%, во втором 3%, по отношению ко всему принятому потоку—менее 0,1%. Данные ГАО о поляризации отсутствуют, по-видимому, из-за ее малости.

24 июля (рис. 10в) наблюдались отдельные области повышенной интенсивности радиоизлучения в районе больших групп пятен. В пределах точности измерений поляризованное излучение из этих областей, несмотря на наличие магнитных полей, отсутствует. Возможно, это связано с тем, что диаграмма направленности не позволила разрешить от-

Рис. 12. Запись сигналов на втором и четвертом каналах поляриметра (соответственно кривые *a* и *b* рис. 11);  $a_2$  — коэффициент усиления второго канала,  $a_4$  — коэффициент усиления четвертого канала.



дельные близко расположенные области, имеющие круговую поляризацию противоположного направления. На это указывает наличие магнитных полей противоположной полярности, которые наблюдались оптически.

Наблюдения радиоизображения Солнца в поляризованном свете позволяют определить характер поляризации корональных конденсаций по всему диску Солнца. На рис. 10 показаны радиоизображения Солнца, полученные 5—8 июня. На изофотах видны отдельные области повышенной интенсивности, имеющие круговую поляризацию как правого, так и левого вращения. Знак поляризации отдельных областей сохранялся в течение наблюдений. Круговая поляризация правого вращения, обусловленная пятнами № 290, 276 и 277, преобладает над круговой поляризацией левого вращения; в силу этого в интегральном потоке наблюдается круговая поляризация правого вращения, что согласуется с данными, полученными ГАО. Эффективный центр поляризованного излучения правой круговой поляризации 4 июня находился в центре солнечного диска, но генерация на восточной части диска круговой поляризации левого вращения смещает "центр тяжести" радиоизлучения к западу, что и было отмечено наблюдениями ГАО.

Большой интерес представляют наблюдения радиоизображения Солнца 11 июля и в последующие дни. В этот период наблюдалась радиоизлучающая область, которая предшествовала возникновению оптического пятна. Через день после появления этой области возникла небольшая кальциевая флоккула с баллом 1, затем 13 июля—небольшое пятно № 372 площадью  $S=12$ ; 14 июля исчезло пятно, 15 июля—область повышенной интенсивности. Таким образом, эта область возникла на 2 дня раньше появления пятна и исчезла после исчезновения последнего. Данные о поляризации радиоизлучения отсутствуют.

Интересна также область радиоизлучения, отмеченная звездочкой на рис. 10д; для нее нет соответствующей возмущенной области в оптическом диапазоне. Знак круговой поляризации радиоизлучения этой области менялся от дня ко дню.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Виткевич, В. А. Удальцов, Радиотехника и электроника, 2, 1548 (1957).
- 2 В В Виткевич, А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, В. А Удальцов, ДАН СССР, 118, 1091 (1958).
- 3 В. В Виткевич, А. Д. Кузьмин, А Е Саломонович, В А Удальцов, Труды 2-й конференции по радиоастрономии, Энергоиздат, М. (в печати).
4. Л. И. Матвеенко, Радиотехника и электроника (в печати)
- 5 Paris Symposium on Radio Astronomy, Stanford, California, 1959, стр. 116
- 6 В. Н. Ихсанова, Известия ГАО, 21, 3, 29 (1958).
7. В В. Виткевич, М. И Сигал, Астроном. ж., 34, 716 (1957)
8. Солнечные данные, № 7 (1958).

Физический институт  
им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию  
14 января 1960 г.

## ОБ ИСКАЖЕНИИ МОДУЛЯЦИИ МОЩНЫХ РАДИОВОЛН ПРИ ИХ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ИОНОСФЕРЕ (ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ). I

*И. М. Виленский, В. П. Чернышов, Д. И. Шейнман*

Описывается методика экспериментального исследования нелинейных искажений модуляции радиоволн при их распространении в ионосфере; приводится описание измерительной аппаратуры и предварительные результаты исследования.

### 1. ОБСУЖДЕНИЕ МЕТОДИКИ ИССЛЕДОВАНИЯ

В настоящее время известен ряд теоретических работ (см., например, [1-4]), посвященных изучению тех искажений, которые претерпевают радиоволны при их распространении в ионизированной плазме (самовоздействие)\*. С другой стороны, существенный интерес представляет экспериментальное изучение этих искажений, которое важно не только для выяснения особенностей распространения радиоволн, но и для изучения строения нижней части ионосферы.

Кутсло [5], а вслед за ним и ряд других авторов обнаружили заметное уменьшение глубины амплитудной модуляции у радиоволн, несущая частота которых была близка к местной гиromагнитной частоте. Однако теоретическая интерпретация результатов этих исследований сталкивается с рядом трудностей. Что же касается явления самовоздействия для радиоволн, несущая частота которых далека от гиromагнитной частоты, то известно лишь одно экспериментальное исследование [6], посвященное этому вопросу.

В работе [6] исследовалось изменение глубины амплитудной модуляции у волны с несущей частотой 200 кгц. Мощность передатчика менялась в интервале 75-400 квт. Сигнал принимался на расстоянии 150 км от передатчика. Изменение модуляции оценивалось путем сравнения модуляции пространственной волны, принимаемой на рамочную антенну, с модуляцией поверхностной волны, принимаемой в том же месте. Наибольшие изменения модуляции (около 2% от начальной глубины модуляции, равной 30% при мощности передатчика 200 квт) обнаружены при низких частотах модуляции (31 гц).

С нашей точки зрения, примененная в [6] методика исследования не является вполне удовлетворительной по следующим причинам: а) такой метод нельзя использовать для изучения зависимости искажений амплитудной модуляции от расстояния, так как на больших расстояниях нельзя рассчитывать на надежный прием поверхностной волны; б) на расстояниях порядка 150 км и выше вряд ли можно рассчитывать на прием чисто поверхностной волны (без пространственной).

\* Ниже мы будем применять этот термин. Применяющийся часто термин «автомодуляция» не является точным, так как, во-первых, может наблюдаться не только демодуляция, но и перемодуляция (в смысле возрастания глубины модуляции), во-вторых, искажения заключаются не только в изменении глубины амплитудной модуляции, но и в ряде других эффектов (возникновение паразитной фазовой модуляции, возникновение обертонов модулирующей частоты и др.).

Поэтому при такой методике отсутствует достаточно надежный критерий для оценки изменения глубины модуляции у пространственной волны.

В связи с этим при исследованиях изменений глубины модуляции, результаты которых приводятся ниже, нами была принята иная методика измерений.

С помощью трех комплектов специально изготовленной и совместно отградуированной прецизионной измерительной аппаратуры, краткое описание которой приводится ниже, производились измерения глубины амплитудной модуляции одновременно в трех пунктах. Один из комплектов находился вблизи передатчика и измерял глубину модуляции, даваемую непосредственно передатчиком (с одновременным контролем по контрольно-измерительной стойке), второй комплект находился на расстоянии около 2000 км (пункт 4), третий комплект — на различных промежуточных расстояниях (пункты 1, 2, 3). Поскольку антенная система передатчика практически не излучала вертикально вверх, можно было быть уверенным, что в приемное устройство, расположенное вблизи передатчика, приходит только поверхностная волна с неизмененной при распространении глубиной модуляции.

Прием в промежуточных пунктах 1, 2, 3 производился на рамочную антенну, гарантировавшую надежную отстройку от поверхностной волны. В конечном пункте 4 прием производился на ненаправленную антенну, так как поверхностная волна здесь практически полностью отсутствовала.

Мы считаем, что при использованной методике измерений можно с достаточной точностью оценить величину тех искажений модуляции, которые имеют место при распространении волн в ионосфере, а также исследовать зависимость величины этих искажений от расстояния между передатчиком и пунктом приема.

## 2. ОПИСАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ АППАРАТУРЫ

Как указывалось выше, определение изменений глубины модуляции радиоволны производилось путем сравнения показаний измерителей, установленных в различных пунктах вдоль трассы. Для определения изменений глубины модуляции с точностью до 0,5% необходимо было обеспечить высокую стабильность работы измерителей в течение длительного времени после их совместной градуировки. Измерение уровня несущей в измерителе производится линейным вольтметром, в котором в качестве вентиля используется купрокс. Применение купрокса вместо вакуумного диода обусловлено необходимостью избежать влияния нестабильности начального тока диода. Полученное в результате детектирования исследуемого сигнала напряжение низкой частоты усиливается двухкаскадным усилителем с полосовыми фильтрами  $RC$  в первом каскаде. Применение усилителя, отсутствующего в обычных схемах измерителей глубины модуляции, позволяет обеспечить высокую чувствительность прибора; полосовые фильтры, настроенные на частоты модуляции (40, 80, 160 и 600 гц), увеличивают помехоустойчивость измерителя. После второго каскада усилителя включен пиковый вольтметр, измеряющий уровень огибающей исследуемого сигнала. Сопоставление показаний линейного и пикового вольтметров измерителя позволяет определить глубину модуляции. В качестве индикаторов в измерителях уровня несущей и уровня огибающей применены микроамперметры класса 0,5 со шкалой на 50 мка.

Поскольку требуется производить измерение изменений глубины модуляции от номинальных значений (60% и 80%), шкала измерителя

уровня огибающей растянута путем подключения к микроамперметру через сопротивление компенсирующего напряжения от стабилизированного источника. При помощи переключателя для каждого из пределов измерений устанавливается определенная величина компенсирующего тока. Пределы измерения глубины модуляции зависят также от установленного при измерениях уровня несущей; вместе с тем, изменение уровня несущей влияет также и на чувствительность измерителя. Наибольшая чувствительность обеспечивается при наибольшем уровне несущей. Изменению глубины модуляции на  $10 \div 12\%$  соответствует вся шкала измерителя уровня огибающей.

Стабильность работы измерителя обеспечивается применением стабиловольта и бареттера в цепях питания ламп, а также калибровкой усиления, проводимой перед каждым сеансом измерений.

Калибровка производится путем подачи на вход измерителя напряжения с частотой, равной частоте настройки  $RC$ -фильтра усилителя. Уровень этого напряжения устанавливается в соответствии с контрольной отметкой на индикаторе уровня несущей. При этом регулировкой усиления усилителя при помощи потенциометра добиваются получения контрольной отметки на индикаторе уровня огибающей. Так как при калибровке охватываются все цепи измерителя, калибровка устраняет влияние медленных изменений параметров всех элементов схемы (сопротивлений, ламп и т. д.). Опыт показал, что калибровку усиления достаточно производить только на одной частоте настройки  $RC$ -фильтра.

Исследуемый сигнал подается на вход измерителя с приемника, схема которого обеспечивает постоянство вносимых им частотных и нелинейных искажений. Наличие стабильных частотных и нелинейных искажений не влияет на точность измерений, так как эти искажения учитываются при градуировке аппаратуры.

Для уменьшения влияния неточности настройки приемника на величину частотных искажений в приемнике использована фиксированная настройка УВЧ и входной цепи на исследуемую частоту. С этой же целью значительно расширена полоса пропускания входной цепи и УВЧ шунтированием их контуров.

Для стабилизации питания к выпрямителю приемника был подключен стабиловольт. Питание каждого комплекта измерительной аппаратуры осуществлялось от феррорезонансного стабилизатора напряжения.

Градуировка всех комплектов измерительной аппаратуры производилась одновременно. С этой целью на приемники всех комплектов одновременно подавался сигнал от генератора стандартных сигналов, модулированного звуковым генератором. Частота модуляции при этом контролировалась специальным измерителем, представляющим собой  $RC$ -фильтр с переменной частотой резонанса, включенный на вход лампового милливольтметра. Установка частоты модуляции производилась по минимуму показаний милливольтметра. Предварительно резонансные частоты  $RC$ -фильтров всех комплектов были подобраны в соответствии с частотами вспомогательного измерителя. (С помощью этого же измерителя устанавливались частоты модуляции передатчика при проведении измерений.)

Несущая частота генератора стандартных сигналов перед градуировкой контролировалась путем сравнения с частотой исследуемой станции по фигурам Лиссажу на экране осциллографа.

Глубина модуляции устанавливалась при градуировке по модулеметру, предварительно откалиброванному при помощи осциллографа с ошибкой не более  $4\%$ . Такая ошибка в определении абсолютного значения глубины модуляции не имеет значения, так как целью изме-

рений являлось определение изменения глубины модуляции. Необходимый уровень несущей устанавливался при градуировке и измерениях аттенюатором на входе приемника.

Градуировка комплектов производилась многократно как до, так и после проведения серии измерений на данной трассе. Наибольший разброс в показаниях отдельных измерителей, определенный при градуировке, составил около 0,5% глубины модуляции.

### 3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Экспериментальное исследование искажений амплитудной модуляции при распространении радиоволн в ионосфере было проведено в период с 24.IV.1959 г. по 18.VI.1959 г. В качестве передатчика использовалась мощная станция с несущей частотой 236 кгц, модулированной по амплитуде чистыми тонами 80, 160 и 600 гц. Частоты модуляции задавались от звукового генератора с помощью измерителя частоты модуляции, описанного выше. Глубина модуляции поддерживалась приблизительно равной 80% и контролировалась как по контрольно-измерительной стойке, так и при помощи модулометра, расположенного не непосредственно на передатчике, а на расстоянии 20 км от передатчика.

За период исследования было произведено 30 передач в ночное время по 15 минут каждая (по 5 минут на каждую звуковую частоту); 21 передача производилась на полной мощности передатчика, 6 передач—на 50% мощности и 3 передачи—на 25% мощности. К сожалению, передачи на 25% мощности оказались неудачными из-за неустойчивой работы передатчика.

В пункте приема, удаленном от передатчика на расстояние  $L = 2100$  км (пункт 4), приняты все 30 передач; в каждом из трех промежуточных пунктов, удаленных от передатчика на расстояния  $L = 400$  км (пункт 1),  $L = 750$  км (пункт 2) и  $L = 1500$  км (пункт 3), производился прием 10 передач. Во время каждого сеанса проводилось 15–30 измерений на каждой из частот модуляции.

Таблица 1

Значения величины  $\frac{\Delta M}{M} \cdot 10^2$  по измерениям в пунктах 3 и 4 для разных значений мощности передатчика  $P$  и частоты модуляции  $F$ \*

№ сеанса	$F$ (гц)	Пункт 3			Пункт 4		
		80	160	600	80	160	600
$P$ (%)							
1	100	8,9	10,8	— 1,0	—	—	—
2	"	8,9	11	13	3,4	1,0	0
3	"	9,8	7,3	2,2	6,6	—0,3	1,5
4	"	—	11	1,8	5,8	3,3	2,6
5	"	9,0	11	0,1	3,7	—3,4	—4,1
6	50	3,6	4,6	9,2	1,4	9,5	4,4
7	"	5,6	7,8	9,8	3,4	4,2	16
8	25	6,5	—	—	4,8	—	—

\* 2 сеанса при  $P = 25\%$  прошли неудачно.

Таблица 2

Значения величины  $\frac{\Delta M}{M} \cdot 10^2$  по измерениям в пунктах 2 и 4

№ сеанса	$F$ (гц)	Пункт 2			Пункт 4		
		80	160	600	80	160	600
11	100	—	14,6	— 6,4	5,3	— 0,4	— 4,0
12	"	19	13,3	—	3,0	— 2,7	— 0,4
13	"	13,4	7,8	— 6,6	— 0,9	— 6,2	— 6,8
14	"	15,3	11	0	— 3,3	— 9,5	— 5,7
15	"	13	6,8	— 1,1	— 1,4	— 15,2	— 10
16	"	17	26	— 9,9	5,7	— 6,8	— 7,7
17	"	13,7	14	10,6	3,0	0,4	— 5,9
18	"	13	—	14,6	2,0	— 8,9	— 2,5
19	50	7,5	—	—	13	4,2	1,5
20	"	14,4	19	15	--	39	—

Таблица 3

Значения величины  $\frac{\Delta M}{M} \cdot 10^2$  по измерениям в пунктах 1 и 4

№ сеанса	$F$ (гц)	Пункт 1			Пункт 4		
		80	160	600	80	160	600
21	100	19	8,4	— 4,6	0,4	— 12	2,7
22	"	14	10,7	2,3	1,0	— 9,1	— 0,1
23	"	16	11,5	0,4	5,9	3,6	6,5
24	"	21	14,3	3,7	— 8,7	8,3	11
25	"	6,0	4,2	—	—	—	—
26	"	8,9	4,8	1,5	—	—	—
27	"	15,5	15,0	—	1,1	13	6,5
28	"	12,1	10,0	—	— 12	4,6	— 11
29	50	15	20	16	6,1	—	0,4
30	50	—	—	—	—	6,4	1,0

В таблицах 1, 2, 3 приведены средние значения величины  $\Delta M/M$  за каждый сеанс ( $\Delta M = M - M'$ ;  $M$  — глубина модуляции на передатчике,  $M'$  — глубина модуляции, измеренная в пункте приема; положительные значения  $\Delta M$  соответствуют уменьшению, отрицательные — увеличению глубины модуляции). Из таблиц видно, что от одного сеанса измерений к другому величина демодуляции изменялась довольно значительно. В течение же каждого сеанса в подавляющем большинстве случаев эти изменения не превышали  $1 \div 2\%$ . В некоторых случаях грозовые помехи не дали возможности произвести измерения (прочерки в таблицах).

В таблице 4 приведены средние значения величины  $\Delta M/M$  для каждого из пунктов наблюдения.

На рис. 1 изображена зависимость средних значений  $\Delta M/M$  от частоты модуляции  $F$ , на рис. 2 — зависимость  $\Delta M/M$  от расстояния между приемником и передатчиком  $L$ , на рис. 3 — зависимость  $\Delta M/M$  от мощности передатчика  $P$  при  $F = 80$  гц (последняя зависи-

## Таблица 4

Средние значения величины  $\frac{\Delta M}{M} \cdot 10^2$  по данным всех измерений в каждом пункте

мость построена лишь для двух значений мощности:  $P = 100\%$  и  $P = 50\%$ ).

Демодуляция, особенно в пунктах 1 и 2, была довольно значительной — до  $15 \pm 17\%$ . Для разных значений частоты модуляции

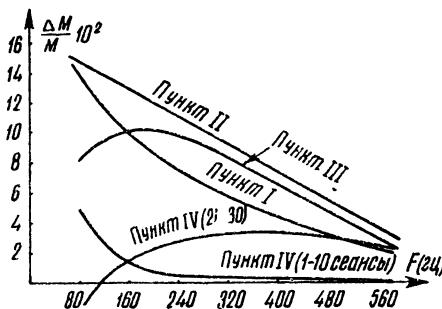


Рис. 1.

(см. рис. 1) величина демодуляции была неодинаковой. Для не очень удаленных точек приема (пункты 1 и 2) наблюдалось уменьшение величины демодуляции с ростом частоты модуляции (что согласуется с теорией нелинейных явлений).

Для больших расстояний (пункт 3 и особенно 4) зависимость  $\Delta M/M$  от  $F$  выглядит более сложно. Например, в пункте 4 в течение первых 10 сеансов наблюдалось возрастание  $\Delta M/M$  с возрастанием  $F$ , а в течение последних 10 сеансов — уменьшение  $\Delta M/M$  с ростом  $F$ . Это обу-

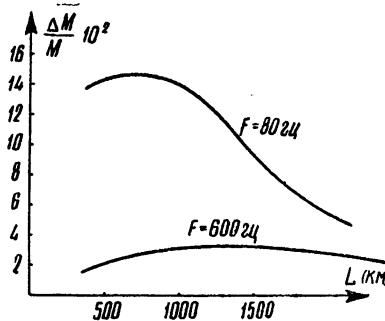


Рис. 2.

словлено, по-видимому, тем, что на дальних расстояниях (особенно за пределами одного скачка) заметную роль играют искажения модуляции из-за интерференции нескольких лучей, приходящих одновременно в пункт приема.

Зависимость величины  $\Delta M/M$  от расстояния, построенная для частоты  $F = 80$  гц (см. рис. 2), интересна тем, что на расстоянии от 300 км до 700 км имеет место некоторый рост  $\Delta M/M$ , а затем уменьшение этой величины. Этот факт, по-видимому, может быть объяснен нелинейной зависимостью величины искажений от мощности распространяющихся волн: при значительных мощностях, как следует из [4], может иметь место увеличение искажений при уменьшении

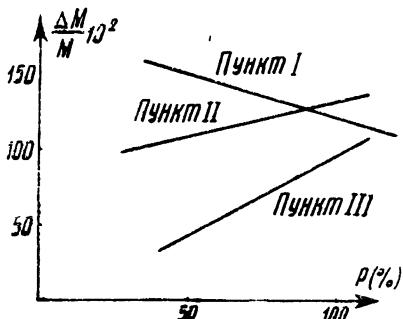


Рис. 3.

В заключение авторы выражают благодарность Г. С. Харитонову, С. И. Волосникову, Б. И. Подлипалину, Л. Н. Ручкану и В. П. Хоршилову, принимавшим участие в наладке и регулировке аппаратуры и в измерениях.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 И. М. Виленский, Сборник памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 1955. стр. 582, ДАН СССР, 92, 525 (1953).
- 2 И. М. Виленский, Н. А. Зыкова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, 543 (1959).
- 3 F. H. Hibberd, J. Atm. Terr. Phys., 6, 268 (1955).
- 4 А. В. Гуревич, Радиофизика и электроника, 1, 704 (1956); Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, 4, 21 (1958).
- 5 M. Cutolo, Nature, 167, 314 (1951).
- 6 J. W. King, J. Atm. Terr. Phys., 10, 166 (1957).

Новосибирский электротехнический  
институт связи

Поступила в редакцию  
14 декабря 1959 г.

\* То обстоятельство, что на рис. 3 зависимость  $\Delta M/M$  от  $P$  изображена в виде прямой, обусловлено, конечно, тем, что было получено лишь две точки этой зависимости. Поскольку, однако, при  $P = 0$ ,  $\Delta M/M = 0$ , ясно, что рис. 3 свидетельствует о нелинейном характере этой зависимости.

## НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

*A. M. Свеченков, Ю. К. Часовитин, Н. А. Коченова*

Рассматриваются результаты измерений поглощения радиоволн в ионосфере на частотах 2,2 мгц и 3,0 мгц, проведенных с июня 1958 г. по июнь 1959 г. Коротко описывается методика измерений и используемая аппаратура. Приводятся и сравниваются полуденные медианные значения поглощения, минимальной частоты отражения и критической частоты  $E$ -слоя за каждый месяц. Рассматривается влияние спорадического слоя  $E$  на величину поглощения и отмечается, что для уверенных отражений от экранирующего слоя  $E_s$  типа I примерно в 53 % случаев имеет место существенное уменьшение поглощения. Анализируется зависимость поглощения  $L$  от частоты  $\omega$  и показывается, что для используемых частот закон  $L \sim (\omega + \omega_L)^{-2}$  (где  $\omega_L = \omega_H \cos \alpha$ ;  $\omega_H$  — гироочастота,  $\alpha$  — угол между магнитным полем и нормалью к волне) не выполняется. Отмечается, что изменения поглощения с частотой в зимние месяцы достаточно хорошо описываются выражением  $L \sim (\omega + \omega_L)^{-1}$ , а в летние месяцы имеет место еще более слабая частотная зависимость. Показывается, что суточные изменения поглощения могут быть приблизительно представлены выражением  $L \sim (\cos \chi)^n$ , где  $n$  изменяется из месяца в месяц в пределах 0,55 — 0,80 ( $\chi$  — зенитный угол Солнца).

В настоящей статье рассматриваются результаты измерений поглощения радиоволн в ионосфере, проведенных в г. Ростове-на-Дону ( $47^{\circ} 13' с. ш.$ ,  $39^{\circ} 41' в. д.$ ) с июня 1958 г. по июнь 1959 г. по программе 3-го Международного геофизического года и Международного геофизического сотрудничества. Измерения проводились методом отраженных импульсов на частотах 2,2 мгц и 3,0 мгц.

Аппаратура для измерения поглощения радиоволн в ионосфере состоит из импульсного ионосферного передатчика, приемника и фоторегистрирующего устройства.

Импульсный передатчик излучает радиоимпульсы длительностью порядка 200 мкесек с частотой повторения 50 импульсов  $сек^{-1}$ ; мощность в импульсе 3—5 квт в зависимости от частоты.

Приемник собран по обычной супергетеродинной схеме. Полоса пропускания приемника 9 кгц; изменение чувствительности (более, чем в 200 раз) осуществляется ступенчатым регулятором усиления. Приемник имеет линейную амплитудную характеристику в широком диапазоне входных напряжений (до 7 мв на входе). Сигналы с выхода приемника подаются непосредственно на пластины катодного осциллографа.

Приемник и передатчик расположены на расстоянии 5 км друг от друга, что позволяет проводить систематический контроль работы передатчика путем измерения амплитуды прямого сигнала.

Фоторегистрирующее устройство состоит из узкопленочной кинокамеры и автоматической системы управления. Оно обеспечивает фотографирование с экрана осциллографа отраженных от ионосферы импульсов через равные промежутки времени ( $5 \pm 10$  сек). Применяемая система фоторегистрации, в отличие от широко используемой записи на непрерывно движущуюся пленку, дает возможность получать фотографии отраженных сигналов различной кратности, что позволяет од-

ределять поглощение с использованием многократных отражений (образец фотозаписи показан на рис. 1, крайний слева — прямой сигнал). Кадры фотозаписи проектируются на экран с масштабной сеткой, при помощи которой ведется отсчет амплитуд отраженных сигналов. Для подсчета поглощения используются усредненные значения амплитуд отраженных сигналов за 15 мин [1,2].

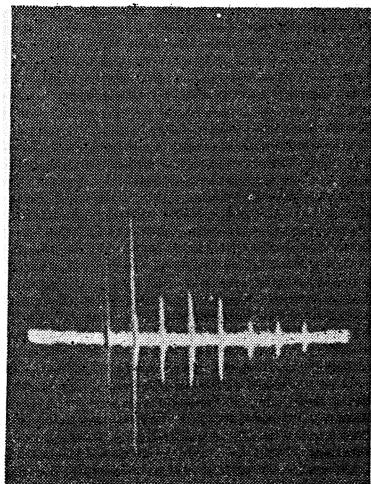


Рис. 1.

При наличии кратных отражений поглощение определялось по отражениям 1-й и 2-й кратности. В дневное время в большинстве случаев наблюдался только один отраженный сигнал, поэтому для вычисления поглощения использовалась амплитуда первого отражения и постоянная аппаратуры. Применяемая методика определения поглощения и постоянной аппаратуры подробно изложена в работах [3,4].

Постоянная аппаратуры для каждой из используемых частот определялась во время ночных градуировочных измерений, которые проводились два раза в неделю в соответствии с инструкцией по измерению поглощения [2]. По результатам градуировочных измерений за каждый месяц определялось среднее значение постоянной аппаратуры для соответствующей частоты, которое и использовалось для расчета поглощения в этом месяце.

Анализ результатов измерений постоянной аппаратуры показал, что отклонения индивидуальных значений от среднемесячных обычно не превышали 15%. Однако в некоторых случаях имели место более значительные отклонения — до 30%. Как правило, эти отклонения были связаны с необычными явлениями: в 80% случаев наблюдались одновременные отражения от слоев  $E_s$  и  $F_2$  со сравнимыми амплитудами, а большинство остальных случаев имело место в период возмущенного состояния ионосферы. Так как определение постоянной аппаратуры имеет смысл только при стабильном состоянии ионосферы, то результаты, полученные при необычных условиях и дающие большие отклонения, не учитывались при подсчете среднемесячных значений. Таким образом, условия, при которых имеют место сравнимые амплитуды отражений от слоев  $E_s$  и  $F_2$ , являются неблагоприятными для проведения градуировочных измерений. С другой стороны, если отражение происходит от спорадического слоя  $E$ , который полностью экранирует на данной частоте лежащие выше слои, то величина постоянной аппаратуры получается почти такой же, как и при отражении от слоя  $F_2$ . Это позволило определять постоянную аппаратуры как при отражении от слоя  $F_2$ , так и при отражении от экранирующего слоя  $E_s$ .

Измерения поглощения проводились в полдень на частотах 2,2 мгц и 3,0 мгц (в декабре 1958 г. и январе 1959 г. измерения проводились на частотах 2,2 мгц и 2,7 мгц, так как значение критической частоты слоя  $E$  было порядка  $3,0 \pm 3,1$  мгц). Так как для приема сигнала использовалась обычная Г-образная антенна, все полученные результаты относятся к перазделенным магнито-ионным компонентам.

В соответствии с программой З-го Международного геофизического года и Международного геофизического сотрудничества [2] на каж-

дой частоте проводилось по два пятнадцатиминутных сеанса, распределенных около местного полудня (время  $45^{\circ}$  в. д.):

$$\left. \begin{array}{l} 11.30-11.45 \\ 12.30-12.45 \end{array} \right\} 2,2 \text{ мгц}; \quad \left. \begin{array}{l} 12.00-12.15 \\ 13.00-13.15 \end{array} \right\} 3,0 \text{ мгц}.$$

Из двух измерений для каждой частоты вычислялось среднее, которое и принималось за полуденное значение поглощения  $L=8,7 \int \mu dl$ , где  $\mu$  — коэффициент поглощения по интенсивности в ионосфере; интеграл в  $L$  берется по всему пути распространения радиоволн. Полуденные медианные значения поглощения  $L$ , критической частоты  $E$ -слоя  $f_{0E}$  и минимальной частоты  $f_{\min}$  для каждого месяца показаны на рис. 2. В июне 1958 г. на частоте 2,2 мгц медианное значение поглощения

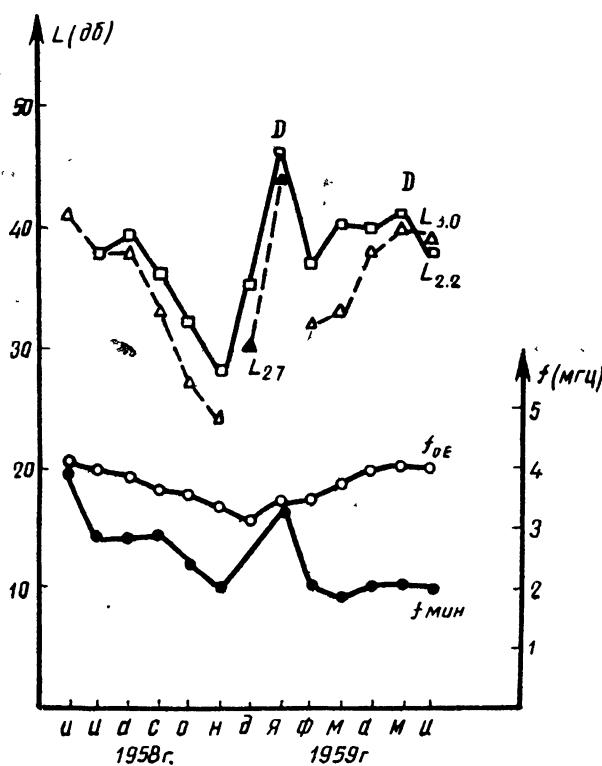


Рис. 2. Полуденные медианные значения  $L$ ,  $f_{0E}$  и  $f_{\min}$   
( $D$  — истинное значение больше указанного — не определено точно  
из-за сильного поглощения;  $R$  — большинство измерений вблизи  
критической частоты)

не было подсчитано из-за недостаточного числа наблюдений. Значения  $f_{0E}$  и  $f_{\min}$  взяты из результатов вертикального зондирования. Из приведенного графика видно, что кроме повышенного поглощения в летние месяцы имеет место резкое возрастание поглощения в январе 1959 г. (на частоте 2,2 мгц — более 46 дБ, на частоте 2,7 мгц — 44 дБ). Наибольшее поглощение, превышающее 50 дБ, наблюдалось в период с 17 по 27 января 1959 г. Точное значение поглощения  $L$  в этот период было невозможно определить из-за недостаточной мощности передатчика. Такое возрастание поглощения в зимние месяцы было

ранее описано рядом авторов [5-7] и получило название „зимней аномалии“.

Из рис. 2 видно, что ход изменения  $f_{\text{мин}}$  в основном довольно хорошо согласуется с изменением поглощения. Некоторое несоответствие имеет место в сентябре и декабре месяцах. Это можно объяснить тем, что  $f_{\text{мин}}$  взяты непосредственно из данных, полученных при вертикальном зондировании, без учета изменения излучаемой мощности и чувствительности автоматической ионосферной станции.

Для выяснения влияния спорадического слоя  $E$  на величину поглощения анализировались ионосферные условия, имевшие место во время измерений поглощения. Были рассмотрены случаи, когда отражения происходили от слоя  $E_s$  типа  $l$  [8], полностью экранирующего слой  $E$  на используемых частотах (рис. 3а). За весь рассматриваемый период было отмечено 230 сеансов измерений поглощения, во время которых наблюдались отражения от слоя  $E_s$ . Из них 113 сеансов были

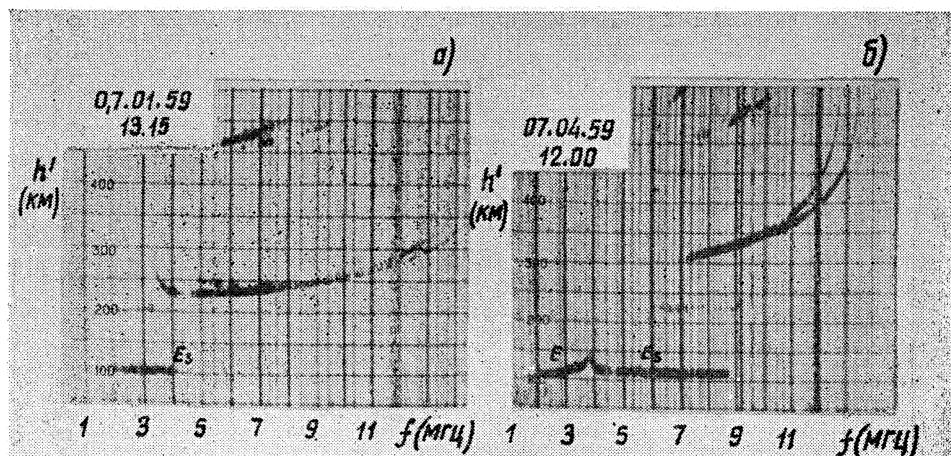


Рис. 3. Высотно-частотные характеристики ионосферы с отражениями от спорадического слоя  $E$ : а) слой  $E_s$  типа  $l$ ; б) слой  $E_s$  типа  $c$ .

такими, когда слой  $E_s$  существовал только в течение части сеанса; при этом в подавляющем большинстве случаев не наблюдалось существенных изменений поглощения. В остальных 117 случаях отражения от слоя  $E_s$  уверенно существовали в течение всего сеанса; при этом в 62 случаях наблюдалось существенное уменьшение поглощения  $L$  (на 15% и более по сравнению с обычными значениями). Таким образом, для уверенных отражений от экранирующего слоя  $E_s$  типа  $l$ , наблюдающегося в течение всего сеанса измерений, примерно в 53% случаев имело место существенное уменьшение поглощения. Но заниженные значения величины  $L$  получены не только при отражении от экранирующего слоя  $E_s$ , но и при отражении от нормального слоя  $E$ . Таких случаев было 41. Это составляет около 5% к числу наблюдений, когда отражения происходили от нормального слоя  $E$ . Таким образом, вероятность уменьшения поглощения значительно больше при отражении от экранирующего слоя  $E$ , типа  $l$ , чем при отражении от нормального слоя  $E$ .

Рассматривались также случаи, когда отражения происходили от нормального слоя  $E$  при наличии слоя  $E_s$  типа  $c$ . Соответствующая высотно-частотная характеристика приведена на рис. 3б. Оказалось,

что в подавляющем большинстве случаев наличие слоя  $E_s$  типа с не вызывало существенных изменений поглощения. Для более уверенного суждения о влиянии спорадического слоя  $E$  на величину поглощения необходимо дальнейшее накопление экспериментального материала.

Значительный интерес представляет экспериментальное определение зависимости поглощения от частоты. Поскольку в настоящей работе измерения проводились только на двух частотах, не было возможности установить полный ход частотной зависимости. Некоторое представление о ней можно получить, вычисляя отношение поглощения  $L_1/L_2$  для двух частот, что и было сделано. Чтобы свести к минимуму случайные отклонения, для вычисления отношения  $L_1/L_2$  были использованы медианные полууденные значения поглощения за каждый месяц. Полученные результаты приведены на рис. 4. Из него видно, что отношение  $L_1/L_2$  имеет величину порядка единицы в летние месяцы и возрастает до  $1,15 \pm 1,20$  в зимние месяцы.

Если, как обычно, пренебречь поглощением в области существенной рефракции и считать, что все поглощение происходит в неотклоняющей области, т. е. в слое  $D$  [4,7], то из формулы для неотклоняющего поглощения [2,9] легко

получить:

$$\frac{L_1}{L_2} \approx \frac{(\omega_2 + \omega_L)^2}{(\omega_1 + \omega_L)^2}, \quad (1)$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — угловые частоты радиоволн,  $\omega_L = \omega_H \cos \alpha$  ( $\omega_H$  — гирочастота,  $\alpha$  — угол

между магнитным полем и нормалью к волне). Выражение (1) получено в предположении, что в поглощающей области эффективная частота соударений  $\omega_{\text{эфф}}^2 \ll (\omega + \omega_L)^2$ . Выше было отмечено, что все результаты, полученные в данной работе, относятся к неразделенным магнитоионным компонентам, а выражение (1) справедливо только для обыкновенной волны. Однако его можно было применять с некоторым приближением и к неразделенным компонентам, учитывая, что необыкновенная волна на низких частотах сильно ослаблена по сравнению с обыкновенной [1,4].

Для средних широт можно принять [9], что  $f_L \approx 1,2 \text{ мгц}$ . Тогда для частот 2,2 мгц и 3,0 мгц  $L_{2,2}/L_{3,0} = 1,52$ , а для 2,2 мгц и 2,7 мгц  $L_{2,2}/L_{2,7} = 1,32$ . На рис. 4 этим отношениям соответствуют прямые линии 1 и 1'. Видно, что отношения  $L_1/L_2$ , полученные экспериментально, значительно отличаются от теоретических. Таким образом, для используемых частот закон  $L \sim (\omega + \omega_L)^{-2}$  не выполняется. Аналогичный ре-

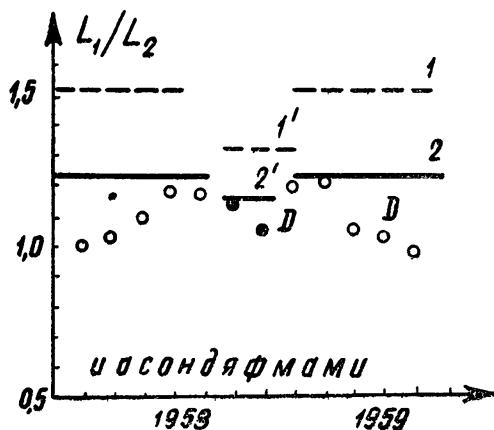


Рис. 4. Теоретические и экспериментальные значения отношения  $L_1/L_2$ : 1 и 1' — теоретические значения  $L_1/L_2 \approx (\omega_2 + \omega_L)^2 / (\omega_1 + \omega_L)^2$  для частот 2,2 мгц, 3,0 мгц и 2,2 мгц, 2,7 мгц соответственно; 2 и 2' — теоретические значения  $\frac{L_1}{L_2} \approx \frac{(\omega_2 + \omega_L)}{(\omega_1 + \omega_L)}$  для частот 2,2 мгц, 3,0 мгц и 2,2 мгц, 2,7 мгц соответственно;  $\circ\circ\circ$  — экспериментальные значения  $L_{2,2}/L_{3,0}$ ;  $\bullet\bullet\bullet$  — экспериментальные значения  $L_{2,2}/L_{2,7}$  ( $D$  — истинное значение больше указанного — не определено точно из-за сильного поглощения).

зультат был получен и в работах [2,6]. Отсюда следует, что для данных частот предположение  $\gamma_{\text{эфф}}^2 \ll (\omega + \omega_L)^2$ , по-видимому, несправедливо и что область, ответственная за поглощение, вероятно находится на высоте, где  $\gamma_{\text{эфф}}$  сравнимо или больше  $\omega + \omega_L$ , т. е.  $\gamma_{\text{эфф}} \geq 2 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}$ . Этот результат согласуется с теоретическими расчетами [10], согласно которым для слоя  $D \gamma_{\text{эфф}} \sim 10^7 \div 10^8 \text{ сек}^{-1}$ .

В работах [2,9] было показано, что для частот, меньших 4 мгц, необходимо учитывать частоту соударений, в результате чего зависимость поглощения от частоты заметно замедляется: изменения поглощения с частотой лучше описываются выражением  $L \sim 1/(\omega + \omega_L)$ . В этом случае должно быть справедливо соотношение

$$\frac{L_1}{L_2} \simeq \frac{\omega_2 + \omega_L}{\omega_1 + \omega_L}. \quad (2)$$

Для используемых частот  $L_{2,2}/L_{3,0} = 1,23$  и  $L_{2,2}/L_{2,7} = 1,15$ . На рис. 4 этим отношениям соответствуют прямые линии 2 и 2'. Видно, что в зимние месяцы экспериментальные значения  $L_1/L_2$  достаточно близко располагаются к прямым 2 и 2', т. е. в этом случае выполняется закон  $L \sim 1/(\omega + \omega_L)$ . В летние же месяцы имеет место еще более слабая частотная зависимость (экспериментальные точки лежат ниже прямой 2). Аналогичные сезонные изменения частотной зависимости поглощения были отмечены в работе [6].

Кроме обычной полуденной программы измерений поглощения во время регулярных мировых дней (3–4 дня в месяц) проводились круглосуточные наблюдения (за исключением октября, декабря 1958 г. и июня 1959 г.). Это дало возможность получить суточный ход поглощения.

Известно, что суточные изменения поглощения могут быть представлены выражением:

$$L \sim (\cos \chi)^n, \quad (3)$$

где  $\chi$  – зенитный угол Солнца, а  $n$  изменяется в широких пределах, со средним значением 0,75 для частот, отражающихся от слоя  $E$  [7,11].

Для проверки этого соотношения и оценки величины  $n$  были построены графики зависимости  $L$  от  $\cos \chi$  в логарифмическом масштабе (рис. 5). Величина  $\cos \chi$  взята на 15-е число каждого месяца, а для поглощения используются медианные значения за регулярные мировые дни. Так как медианные значения  $L$  взяты из малого числа данных, то имеет место значительный разброс точек. Несмотря на это, полученная зависимость  $\lg L$  от  $\lg (\cos \chi)$  может приблизительно считаться линейной, что говорит о выполнении соотношения (3) в первом приближении. По углу наклона прямых линий, проведенных по расположению большинства точек, были определены значения  $n$  (таблица 1). Несмотря на то, что полученные значения следует считать очень приближенными, они сравнительно хорошо согласуются с данными, приводимыми в литературе [6,11].

На рис. 6 приведен график суточного хода поглощения  $L$ ,  $f_{\min}$  и  $(\cos \chi)^n$  за август 1958 г. Значение  $n$  соответствует приведенному в таблице 1. Аналогичные графики были построены и для остальных месяцев. Этот график наглядно показывает, что суточное изменение поглощения довольно хорошо совпадает с изменением  $(\cos \chi)^n$ . Из этого же графика видно, что суточное изменение поглощения  $L$  и  $f_{\min}$

в основном соответствуют друг другу. Такое же соответствие было отмечено для месячных медианных значений  $L$  и  $f_{\min}$ . Это подтверждает тот факт, что значения  $f_{\min}$  могут в известной мере характеризовать поглощение в ионосфере.

Таблица 1  
Значения показателя степени  $n$

Месяц, год	Частота	
	2,2 мгц	3,0 мгц
Июнь 1958 г.	0,60	0,60
Июль 1958 г.	0,75	0,80
Август 1958 г.	0,70	0,80
Сентябрь 1958 г.	0,70	0,60
Ноябрь 1958 г.	0,75	0,60
Январь 1959 г.	0,60	0,55
Февраль 1959 г.	0,65	0,60
Март 1959 г.	0,85	0,70
Апрель 1959 г.	0,80	0,65
Май 1959 г.	0,75	0,80
Среднее значение	0,70	0,65

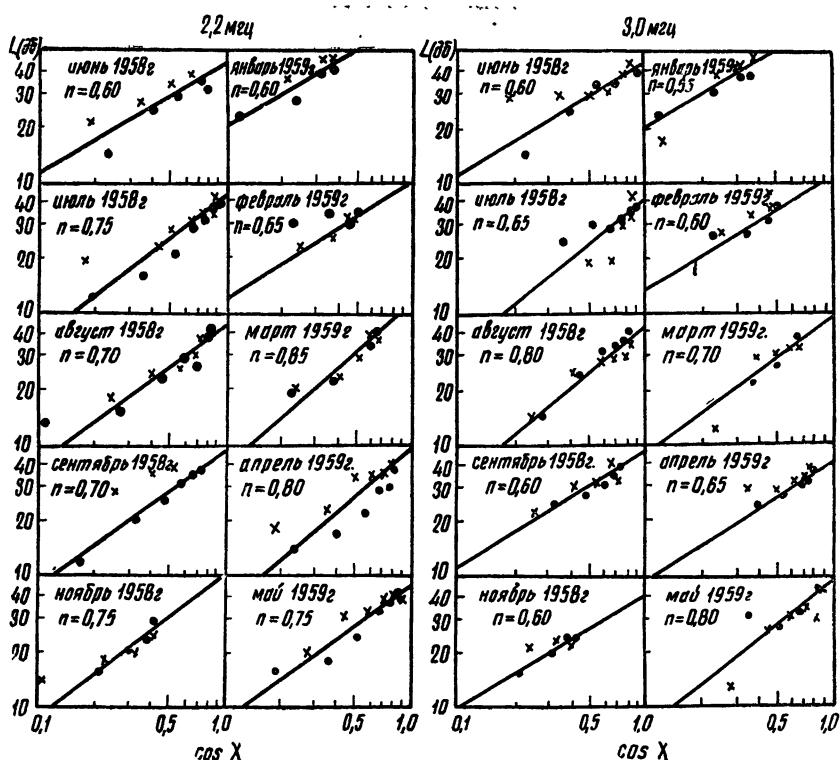


Рис. 5. Зависимость поглощения  $L$  от  $\cos \chi$ : ●●● — значения до полудня, ××× — значения после полудня.

В заключение считаем своим приятным долгом выразить благодарность С. С. Чавдарову за повседневное руководство и ценные замечания.

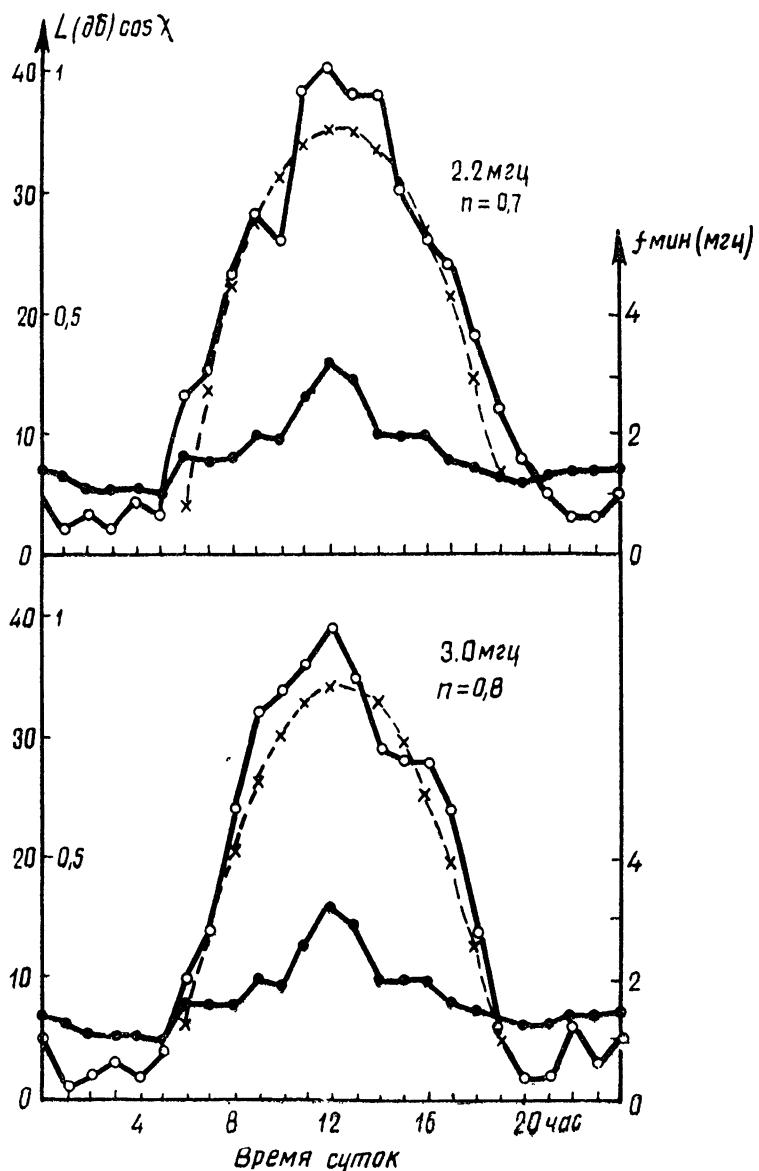


Рис. 6. Суточные изменения поглощения  $L$ ,  $f_{\min}$  и  $(\cos \gamma)^n$  (август 1958 г.):  
 —○—  $L$ ; —●—  $f_{\min}$ ; - - - × - - -  $(\cos \chi)^n$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. W. R. Piggott, Proc. IEE, P3, **100**, 61 (1953).
2. W. R. Piggott, W. J. G. Beynon, G. M. Brown, C. G. Little. Ann. Internat. Geophys. Year, **3**, 2—4, 173 (1957).
3. F. W. G. White, L. W. Brown, Proc. Roy. Soc., A **153**, 639 (1936).
4. С. К. Митра, Верхняя атмосфера, ИЛ, М., 1955.
5. E. V. Appleton, Proc. Roy. Soc., A **162**, 451 (1937).
6. K. Davies, E. L. Hagg, J. Atm. Terr. Phys., **6**, 18 (1955).
7. E. V. Appleton, W. R. Piggott, J. Atm. Terr. Phys., **5**, 141 (1954).
8. Руководство по вертикальному зондированию ионосферы, изд. АН СССР, М., 1957.
9. А. Н. Казанцев, Изв. ОТН АН СССР, **9**, 1107 (1947).
10. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, М., 1953.
11. E. W. Taylor, J. National Bureau Standards, **41**, 575 (1948).

Ростовский-на-Дону государственный  
университет

Поступила в редакцию  
16 ноября 1959 г.

## ФЛЮКТУАЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина

В приближении геометрической оптики находится средний квадрат флюктуации фазы, флюктуации угла прихода и корреляционная функция флюктуаций фазы для электромагнитной волны, распространяющейся в гиротропной плазме.

Распространение электромагнитных волн в среде со случайными неоднородностями является предметом рассмотрения многих работ (см., например, [1]). В этих работах электрические свойства среды описываются скалярной диэлектрической проницаемостью. Между тем в ионосфере, в солнечной короне и в некоторых других случаях средой, в которой происходит распространение, является плазма, находящаяся в магнитном поле. При этом может оказаться весьма существенной гиротропия среды. Электрические свойства такой среды в системе координат, в которой за ось  $z$  выбрано направление магнитного поля, описываются следующим тензором:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \gamma &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2}; \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}; \\ \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = \mu &= -\frac{i \omega_0^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}; \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\omega_0^2 = 4\pi e^2 N/m$ ,  $N$  — концентрация электронов в плазме,  $\omega_H = |e|H/mc$ ,  $H$  — магнитное поле,  $\omega$  — частота электрического поля ( $N$  и  $H$ , вообще говоря, являются функциями координат). В формулах (1) поглощением пренебрегается.

Электрическое поле  $E$  в гиротропной среде определяется уравнением

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} - \Delta \delta_{ik} - k^2 \varepsilon_{ik} \right) E_k = 0, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{ik}$  — компоненты тензора, определяемые формулой (1),  $k = \omega/c$ . В реальных условиях компоненты тензора  $\varepsilon_{ik}$  как функции координат мало меняются на длине волны. Более того, характерные размеры неоднородностей в ряде случаев настолько велики, что можно ограничиться приближением геометрической оптики. Этим самым мы рассматриваем трассы распространения, длины которых  $L$  удовлетворяют условию  $L/kl^2 \ll 1$  ( $l$  — характерный размер неоднородностей). В важном частном случае плоско-слоистой среды, когда компоненты тензора  $\varepsilon_{ik}$  зависят от одной координаты, результаты, полученные в указанном приближении, пригодны для трасс произвольной длины.

Мы ограничимся вычислением фазы, так как в приближении геометрической оптики флюктуации фазы значительно больше флюктуаций

ций амплитуды. Согласно методу геометрической оптики, решение уравнения (2) ищется в виде

$$E_i(\mathbf{r}) = A_i(\mathbf{r}) e^{iS(\mathbf{r})}. \quad (3)$$

Подстановка формулы (3) в (2) приводит к следующему уравнению для  $S(\mathbf{r})$ :

$$\text{Det} \left[ (\nabla S)^2 \delta_{ik} - \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial S}{\partial x_k} - k^2 \epsilon_{ik} \right] = 0. \quad (4)$$

Флюктуации компонент тензора диэлектрической проницаемости обусловлены флюктуациями электронной концентрации  $N$  и флюктуациями магнитного поля. Считая флюктуации компонент тензора диэлектрической проницаемости малыми по сравнению с их средними значениями, имеем:

$$\bar{\epsilon}_{ik} = \overline{\epsilon}_{ik} + \delta\epsilon_{ik},$$

где  $\overline{\epsilon}_{ik}$  — среднее значение  $\epsilon_{ik}$ , а  $\delta\epsilon_{ik}$  — флюктуационная составляющая, определяемая формулой:

$$\delta\epsilon_{ik} = \frac{\partial\epsilon_{ik}}{\partial N} \delta N + \frac{\partial\epsilon_{ik}}{\partial H} \delta H \quad (5)$$

( $\delta N$  и  $\delta H$  — флюктуации концентрации электронов и модуля магнитного поля, являющиеся случайными функциями координат).

Допустим вначале, что средние значения от координат не зависят. В этом случае решение можно искать в виде

$$S = kn\tau r + \sigma(\mathbf{r}), \quad (6)$$

где  $n$  — коэффициент преломления,  $\tau$  — единичный вектор в направлении распространения,  $\sigma$  — флюктуация фазы. Допустим, что вектор  $\tau$  лежит в плоскости  $zy$ . Очевидно, что это не ограничивает общность рассмотрения.

Подставляя  $S$  в уравнение (4) и считая флюктуацию фазы малой, получаем в нулевом приближении по  $\sigma$  обычное уравнение для определения  $n$ , а в первом приближении по  $\delta\epsilon_{ik}$  уравнение для  $\sigma$ :

$$a_y \frac{\partial\sigma}{\partial y} + a_z \frac{\partial\sigma}{\partial z} = A_y \delta v + A_h \delta h, \quad (7)$$

где

$$a_y = kn \sin \Theta \{ (\eta - n^2)(\eta + \varepsilon) + n^2 \sin^2 \Theta (\varepsilon - \eta) + \mu^2 \};$$

$$a_z = kn \cos \Theta \{ 2(\eta - n^2)\varepsilon + n^2 \sin^2 \Theta (\varepsilon - \eta) \};$$

$$A_y = k^2 \left\{ \left[ (\eta - n^2)\varepsilon + \frac{n^2}{2} \sin^2 \Theta (n^2 - 2\eta + \varepsilon) \right] (\eta - 1) + \right. \quad (8)$$

$$\left. + \frac{1}{2} [ (n^2 - \eta) (n^2 \cos^2 \Theta - \eta) + \mu^2 ] (\varepsilon - 1) + \mu^2 (\varepsilon - n^2 \sin^2 \Theta) \right\};$$

$$A_h = \frac{k^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \left\{ 2 \left[ (\eta - n^2)\varepsilon + \frac{1}{2} n^2 \sin^2 \Theta (n^2 - 2\eta + \varepsilon) \right] (\eta - 1) \omega_H^2 + \right.$$

$$\left. + \mu^2 (\varepsilon - n^2 \sin^2 \Theta) (\omega_H^2 + \omega^2) \right\},$$

$\Theta$  — угол между направлением распространения и магнитным полем,

$\delta\nu = \delta N/N$  — относительная флюктуация концентрации,  $\delta h = \delta H/H$  — относительная флюктуация магнитного поля. Коэффициент преломления определяется следующей формулой [2]:

$$n^2 = 1 - \frac{2\omega_0^2(\omega^2 - \omega_0^2)}{2(\omega^2 - \omega_0^2)\omega^2 - \omega_H^2\omega^2\sin^2\Theta \pm \sqrt{\omega^4\omega_H^4\sin^4\Theta + 4\omega_H^2\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2\cos^2\Theta}}. \quad (9)$$

Знак + относится к обычновенной, а знак — к необыкновенной волнам. В формуле (8) для сокращения письма опущена черта над  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$ .

Уравнение (7) можно преобразовать к более удобному виду, если произвести замену переменных по формулам

$$u = \frac{a_y u + a_z v}{a_y^2 + a_z^2}, \quad v = \frac{a_y z - a_z y}{a_y^2 + a_z^2}.$$

В новых переменных уравнение (7) принимает вид:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = A_v \nu(u, v) + A_h h(u, v), \quad (7a)$$

откуда

$$\sigma = A_v \int_0^u \nu(u, v) du + A_h \int_0^u h(u, v) du + \varphi(v).$$

Произвольная функция  $\varphi(v)$  определяется из граничных условий.

В качестве граничного условия потребуем обращения в нуль фазы на плоскости  $\tau r = 0$ . Физически это означает, что фиксируется какое-либо значение фазы и затем рассматривается ее изменение с распространением волны в флюктуирующей среде. С учетом этого граничного условия флюктуация фазы имеет вид:

$$\sigma(u, v) = A_v \int_{av}^u \nu(u, v) du + A_h \int_{av}^u h(u, v) du, \quad (10)$$

где

$$\alpha = \frac{\tau_y a_z - \tau_z a_y}{\tau_y a_y + \tau_z a_z}.$$

Найдем средний квадрат флюктуаций фазы  $\bar{\sigma^2}$ , функцию корреляции  $\sigma(r)\sigma(r')$  между флюктуациями фазы в разных точках  $r$  и  $r'$  и средний квадрат флюктуации нормали к волновой поверхности. На определении последней величины остановимся несколько подробнее.

По определению флюктуация нормали  $\mathbf{x}$  равна

$$\frac{k n \tau + \nabla \sigma}{|k n \tau + \nabla \sigma|} - \tau,$$

с точностью до членов порядка  $\frac{1}{k^2 n^2} (\nabla \sigma)^2$  имеем

$$\mathbf{x} = \frac{1}{kn} [\nabla \sigma - \tau (\tau \nabla \sigma)]. \quad (11)$$

Откуда

$$\bar{x^2} = \frac{1}{k^2 n^2} \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \cos^2 \Theta \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \sin^2 \Theta \left( \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (12)$$

Из (11) для указанных величин получены следующие формулы:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{2L}{a_y\tau_y + a_z\tau_z} \left\{ \frac{A_v^2 \overline{\delta v^2}}{\sqrt{a_y^2/l_{\perp}^2 + a_z^2/l_{\parallel}^2}} \int_0^\infty W(\zeta^2) d\zeta + \right. \\ \left. + \frac{A_h^2 \overline{\delta h^2}}{\sqrt{a_y^2/l_{\perp}^2 + a_z^2/l_{\parallel}^2}} \int_0^\infty V(\zeta^2) d\zeta \right\}; \quad (13)$$

$$\bar{\sigma}(r)\bar{\sigma}(r') = \frac{2L}{a_y\tau_y + a_z\tau_z} \left\{ \frac{A_v^2 \overline{\delta v^2}}{\sqrt{a_y^2/l_{\perp}^2 + a_z^2/l_{\parallel}^2}} \int_b^\infty W(\zeta^2 + d^2) d\zeta + \right. \\ \left. + \frac{A_h^2 \overline{\delta h^2}}{\sqrt{a_y^2/l_{\perp}^2 + a_z^2/l_{\parallel}^2}} \int_b^\infty V(\zeta^2 + d'^2) d\zeta \right\}; \quad (14)$$

$$\bar{\chi}^2 = - \frac{2L}{(a_y\tau_y + a_z\tau_z)k^2n^2} \left\{ \frac{A_v^2 \overline{\delta v^2}}{l_{\perp}^2 \sqrt{a_y^2/l_{\perp}^2 + a_z^2/l_{\parallel}^2}} \left[ 1 + \frac{a_y^2 \sin^2 \Theta + a_z^2 \cos^2 \Theta}{l_{\parallel}^2 (a_y^2/l_{\perp}^2 + a_z^2/l_{\parallel}^2)} \right] \times \right. \\ \left. \times \int_0^\infty \frac{1}{\zeta} \frac{dW(\zeta^2)}{d\zeta} d\zeta + \frac{A_h^2 \overline{\delta h^2}}{l_{\perp}^2 \sqrt{a_y^2/l_{\perp}^2 + a_z^2/l_{\parallel}^2}} \left[ 1 + \frac{a_y^2 \sin^2 \Theta + a_z^2 \cos^2 \Theta}{l_{\parallel}^2 (a_y^2/l_{\perp}^2 + a_z^2/l_{\parallel}^2)} \right] \int_0^\infty \frac{1}{\zeta} \frac{dV(\zeta^2)}{d\zeta} d\zeta \right\}. \quad (15)$$

В этих формулах введены следующие обозначения:  $L = \tau r$  — длина трассы распространения среднего поля,  $W(r - r') = \delta v(r) \delta v(r') / \overline{\delta v^2}$ ,  $V(r - r') = \overline{\delta h(r) \delta h(r')} / \overline{\delta h^2}$  — коэффициенты корреляции между относительными флюктуациями концентрации и магнитного поля соответственно.

При вычислении предполагалось, что

$$W(r - r') = W[(x - x')^2 l_{\perp}^{-2} + (y - y')^2 l_{\perp}^{-2} + (z - z')^2 l_{\parallel}^{-2}] = W(\zeta^2)$$

( $l_{\perp}$ ,  $l_{\parallel}$  — радиусы корреляции в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, и вдоль магнитного поля), а также, что имеет место статистическая независимость  $\delta h$  и  $\delta v$ .

Аргумент  $V$  получается из аргумента  $W$  заменой  $l$  на  $l'$ :

$$d^2 = \frac{(x - x')^2}{l_{\perp}^2} + \frac{[a_y(z - z') - a_z(y - y')]^2}{l_{\perp}^2 l_{\parallel}^2 (a_y^2/l_{\perp}^2 + a_z^2/l_{\parallel}^2)}; \\ b = \frac{a_y a_z [a_y(z - z') - a_z(y - y')]}{(a_y^2/l_{\perp}^2 + a_z^2/l_{\parallel}^2)^{1/2} (a_y^2 + a_z^2)} (l_{\parallel}^{-2} - l_{\perp}^{-2});$$

штрихованные величины отличаются от нештрихованных заменой  $l$  на  $l'$ .

Рассмотрим частные и предельные случаи.

1. Распространение происходит вдоль магнитного поля ( $\Theta = 0$ ). Тогда

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega_0^4 L}{2c^2(\omega \pm \omega_H)^2 [1 - \omega_0^2/\omega(\omega \pm \omega_H)]} \left\{ l_{\parallel} \overline{\delta v^2} \int_0^\infty W(\zeta^2) d\zeta + \right. \\ \left. + l_{\parallel}' \omega_H^2 \overline{\delta h^2} (\omega \pm \omega_H)^{-2} \int_0^\infty V(\zeta^2) d\zeta \right\}; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \overline{\sigma(r)\sigma(r')} = & \frac{\omega_0^4 L}{2c^2(\omega \pm \omega_H)^2 [1 - \omega_0^2/\omega(\omega \pm \omega_H)]} \left\{ l_{\parallel} \overline{\delta v^2} \int_0^{\infty} W(\zeta^2 + d^2) d\zeta + \right. \\ & \left. + l'_{\parallel} \omega_H^2 \overline{\delta h^2} (\omega \pm \omega_H)^{-2} \int_0^{\infty} V(\zeta^2 + d'^2) d\zeta \right\}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$d^2 = (x - x')^2 l_{\perp}^{-2} + (y - y')^2 l_{\perp}^{-2};$$

$$\begin{aligned} \bar{z}^2 = & - \frac{\omega_0^4 L}{\omega^2(\omega \pm \omega_H)^2 [1 - \omega_0^2/\omega(\omega \pm \omega_H)]^2} \left\{ \frac{l_{\parallel}}{l_{\perp}^2} \overline{\delta v^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\zeta} \frac{dW(\zeta^2)}{d\zeta} d\zeta + \right. \\ & \left. + \frac{\omega_H^2 l'_{\parallel} \overline{\delta h^2}}{(\omega \pm \omega_H)^2 l_{\perp}^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\zeta} \frac{dV(\zeta^2)}{d\zeta} d\zeta \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

**2.** Распространение происходит поперек магнитного поля ( $\Theta = \pi/2$ )  
Тогда для обыкновенной волны

$$\bar{z}^2 = \frac{k^2 \omega_0^4 L l_{\perp} \overline{\delta v^2}}{2\omega^4 (1 - \omega_0^2/\omega^2)} \int_0^{\infty} W(\zeta^2) d\zeta; \quad (19)$$

$$\overline{\sigma(r)\sigma(r')} = \frac{\omega_0^4 L l_{\perp} \overline{\delta v^2}}{2c^2 \omega^2 (1 - \omega_0^2/\omega^2)} \int_0^{\infty} W(\zeta^2 + d^2) d\zeta;$$

$$d^2 = (x - x')^2 l_{\perp}^{-2} + (z - z')^2 l_{\parallel}^{-2}; \quad (20)$$

$$\bar{z}^2 = - \frac{\omega_0^4 L}{2\omega^4 (1 - \omega_0^2/\omega^2)^2 l_{\perp}} \left( 1 + \frac{l_{\perp}^2}{l_{\parallel}^2} \right) \int_0^{\infty} \frac{1}{\zeta} \frac{dW(\zeta^2)}{d\zeta} d\zeta; \quad (21)$$

для необыкновенной волны

$$\begin{aligned} \bar{z}^2 = & \frac{\omega_0^4 L}{c^2 \omega^2 (\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_H^2)^4 n^2} \left\{ \frac{l_{\perp}}{2} \left[ (\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \omega_H^2 (\omega^2 - 2\omega_0^2) \right]^2 \overline{\delta v^2} \int_0^{\infty} W(\zeta^2) d\zeta + \right. \\ & \left. + 2l'_{\perp} \omega_H^4 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \overline{\delta h^2} \int_0^{\infty} V(\zeta^2) d\zeta \right\}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \overline{\sigma(r)\sigma(r')} = & \frac{\omega_0^4 L}{c^2 \omega^2 (\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_H^2)^4 n^2} \left\{ \frac{l_{\perp}}{2} \left[ (\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \omega_H^2 (\omega^2 - 2\omega_0^2) \right]^2 \times \right. \\ & \left. \times \overline{\delta v^2} \int_0^{\infty} W(\zeta^2 + d^2) d\zeta + 2l'_{\perp} (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \omega_H^4 \overline{\delta h^2} \int_0^{\infty} V(\zeta^2 + d'^2) d\zeta \right\}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\times \overline{\delta v^2} \int_0^{\infty} W(\zeta^2 + d^2) d\zeta + 2l'_{\perp} (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \omega_H^4 \overline{\delta h^2} \int_0^{\infty} V(\zeta^2 + d'^2) d\zeta \Big\};$$

$$\bar{z}^2 = -\frac{\omega_0^4 L}{\omega^4 (\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_H^2)^4 n^4} \left\{ [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \omega_H^2 (\omega^2 - 2\omega_0^2)]^2 \times \right. \\ \times \left( 1 + \frac{l_\perp^2}{l_\parallel^2} \right) \frac{\delta v^2}{2l_\perp} \int_0^\infty \frac{1}{\zeta} \frac{dW(\zeta^2)}{d\zeta} d\zeta + 2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 \omega_H^4 \left( 1 + \frac{l_\perp'^2}{l_\parallel^2} \right) \times \\ \times \left. \frac{\delta h^2}{l_\perp'} \int_0^\infty \frac{1}{\zeta} \frac{dV(\zeta^2)}{d\zeta} d\zeta \right\}; \quad (24)$$

$$n^2 = 1 - \omega_0^2(\omega^2 - \omega_0^2)/\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_H^2); \quad d^2 = (x - x')^2 l_\perp^{-2} + (z - z')^2 l_\parallel^{-2}.$$

Таким образом, в случае распространения в направлении, перпендикулярном магнитному полю, флюктуации фазы в обыкновенной волне обусловлены только флюктуациями концентрации и не зависят от магнитного поля.

При распространении волны под произвольным углом к магнитному полю даже в предельных случаях слабых и сильных магнитных полей формулы получаются весьма громоздкими. В связи с этим мы приведем выражения только для необыкновенной волны в сильном магнитном поле:

$$\bar{z}^2 = \frac{\omega_0^4 L}{c^2 \omega^2 \omega_H^4 \sin^4 \Theta} \left\{ \frac{(\omega^2 - 2\omega_0^2)^2 \delta v^2}{2(\sin^2 \Theta / l_\perp^2 + \cos^2 \Theta / l_\parallel^2)^{1/2}} \int_0^\infty W(\zeta^2) d\zeta + \right. \\ \left. + \frac{2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 \delta h^2}{(\sin^2 \Theta / l_\perp'^2 + \cos^2 \Theta / l_\parallel'^2)^{1/2}} \int_0^\infty V(\zeta^2) d\zeta \right\}; \quad (25)$$

$$\bar{z}(r) \bar{z}(r') = \frac{\omega_0^4 L}{c^2 \omega^2 \omega_H^4 \sin^4 \Theta} \left\{ \frac{(\omega^2 - 2\omega_0^2)^2 \delta v^2}{2(\sin^2 \Theta / l_\perp^2 + \cos^2 \Theta / l_\parallel^2)^{1/2}} \int_b^\infty W(\zeta^2 + d^2) d\zeta + \right. \\ \left. + \frac{2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 \delta h^2}{(\sin^2 \Theta / l_\perp'^2 + \cos^2 \Theta / l_\parallel'^2)^{1/2}} \int_{b'}^\infty V(\zeta^2 + d'^2) d\zeta \right\}; \quad (26)$$

$$d^2 = \frac{(x - x')^2}{l_\perp^2} + \frac{[(z - z') \sin \Theta - (y - y') \cos \Theta]^2}{l_\parallel^2 \sin^2 \Theta + l_\perp^2 \cos^2 \Theta};$$

$$b = \frac{1}{2} \frac{\sin 2\Theta (l_\parallel^{-2} - l_\perp^{-2}) [(y - y') \cos \Theta - (z - z') \sin \Theta]}{(\sin^2 \Theta / l_\perp^2 + \cos^2 \Theta / l_\parallel^2)^{1/2}};$$

$$\bar{z}^2 = -\frac{\omega_0^4 L}{\omega^4 \omega_H^4 \sin^4 \Theta} \left\{ \frac{(\omega^2 - 2\omega_0^2)^2 \delta v^2}{2l_\perp^2 (\sin^2 \Theta / l_\perp^2 + \cos^2 \Theta / l_\parallel^2)^{1/2}} \left[ 1 + \frac{\sin^4 \Theta + \cos^4 \Theta}{l_\parallel^2 (\sin^2 \Theta / l_\perp^2 + \cos^2 \Theta / l_\parallel^2)} \right] \times \right. \\ \times \int_0^\infty \frac{1}{\zeta} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta + \frac{2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 \delta h^2}{l_\perp'^2 (\sin^2 \Theta / l_\perp'^2 + \cos^2 \Theta / l_\parallel'^2)^{1/2}} \left[ 1 + \frac{\sin^4 \Theta + \cos^4 \Theta}{l_\parallel'^2 (\sin^2 \Theta / l_\perp'^2 + \cos^2 \Theta / l_\parallel'^2)} \right] \times \\ \times \left. \int_0^\infty \frac{1}{\zeta} \frac{dV}{d\zeta} d\zeta \right\}. \quad (27)$$

Остановимся на асимптотической зависимости рассматриваемых статистических характеристик от магнитного поля при произвольном угле распространения. Исследуем случаи сильных и слабых магнитных полей. Изучаемые нами статистические характеристики складываются из двух частей: части, обусловленной флюктуациями концентрации, и части, обусловленной флюктуациями магнитного поля. Аналитическая зависимость этих величин от сильного и слабого магнитного поля сведена в таблицу 1. В этой таблице цифры 1, 2 относятся соответственно к частям, обусловленным флюктуациями концентрации и магнитного поля. Как следует из сказанного ранее, случай  $\Theta = \pi/2$  относится только к необыкновенной волне.

Таблица 1

	$\Theta = 0$		$0 < \Theta < \pi/2$		$\Theta = \pi/2$	
	1	2	1	2	1	2
	$H^{-2}$	$H^{-6}$	$H^{-4}$	$H^{-6}$	$H^{-4}$	$H^{-6}$
Сильные магнитные поля						
Слабые магнитные поля	$H$	$H$	$H$	$H$	$H^2$	$H^2$

Отметим, что с ростом магнитного поля во всех случаях, кроме  $\Theta = \pi/2$ , для обыкновенной волны статистические характеристики стремятся к нулю. При прочих равных условиях в сильных магнитных полях основную роль играют флюктуации концентрации.

Из полученных формул следует, что существует ряд частот, при которых  $\bar{\sigma}^2$  и  $\bar{z}^2$  обращаются в бесконечность. Эти частоты определяются следующими формулами: 1) при  $\Theta = 0$  для обеих волн

$$\omega = \pm \frac{\omega_H}{2} + \sqrt{\frac{\omega_H^2}{4} + \omega_0^2}$$

и, кроме того, для необыкновенной волны

$$\omega = \omega_H;$$

2) при  $\Theta = \pi/2$  для обыкновенной волны

$$\omega = \omega_0,$$

для необыкновенной волны

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\omega_0^2 + \omega_H^2}{2} \pm \frac{\omega_H}{2} \sqrt{\omega_H^2 + 4\omega_0^2}}.$$

При произвольном угле  $\Theta$  это будут нули  $n^2$  и для необыкновенной волны частоты  $\omega = \omega_H$ .

Естественно, что при частотах, точно равных указанным, выведенные формулы неприменимы, так как если  $\bar{\sigma}^2$  и  $\bar{z}^2$  стремятся к бесконечности, метод расчета становится неприменимым. Чтобы избежать бесконечностей, нужно учесть затухание. Кроме того, вблизи резонансных точек, по-видимому, играет роль пространственная дисперсия\*. Тем не менее, приведенные формулы указывают на правильную тен-

\* Этим замечанием мы обязаны Э. А. Канеру.

денцию роста соответствующей статистической характеристики при частотах, приближающихся к указанным выше.

Случай, когда средние значения компонент тензора диэлектрической проницаемости зависят от одной координаты, может быть рассмотрен совершенно аналогично. Однако формулы, которые получаются при этом, весьма громоздки. Поэтому мы рассмотрим только слоистую среду, в которой средние значения и флюктуации  $N$  и  $H$  зависят от координаты  $z$ . Ограничимся рассмотрением распространения вдоль этой оси.

Согласно [2], для фазы имеет место следующая формула:

$$S = k \int_0^z n(z) dz, \quad (28)$$

где  $n$  определяется выражением (10). Для среднего квадрата флюктуации фазы из (28) обычным путем получается:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{k^2}{4} \int_0^z \frac{1}{n^2(z)} \left[ \frac{\partial n^2(z)}{\partial N} \right]^2 P(z) dz + \frac{1}{4} \int_0^z \frac{k^2}{n^2(z)} \left[ \frac{\partial n^2(z)}{\partial H} \right]^2 Q(z) dz. \quad (29)$$

Здесь

$$P(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\delta N(z) \delta N(z')} d\xi, \quad Q(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\delta H(z) \delta H(z')} d\xi.$$

Предполагается, что  $\overline{\delta N(z) \delta N(z')}$  и  $\overline{\delta H(z) \delta H(z')}$  являются быстро меняющимися функциями от  $\xi = z - z'$  и медленно меняющимися функциями от  $z$  (см. [3]). Если имеют место также соотношения

$$\begin{aligned} \overline{\delta N(z) \delta N(z')} &= \overline{\delta N^2(z)} W(\xi/l(z)), \\ \overline{\delta H(z) \delta H(z')} &= \overline{\delta H^2(z)} V(\xi/l'(z)), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} P'(z) &= \overline{\delta N^2(z)} l(z) \int_{-\infty}^{\infty} W(\xi) d\xi, \\ Q'(z) &= \overline{\delta H^2(z)} l'(z) \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

При  $\Theta = 0$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{k^2}{4\omega^2} \int_0^z \frac{\omega_0^4 P'(z) dz}{(\omega \pm \omega_H)^2 [1 - \omega_0^2/\omega(\omega \pm \omega_H)]} + \frac{k^2}{4\omega^2} \int_0^z \frac{\omega_0^4 Q'(z) \omega_H^2}{(\omega \pm \omega_H)^4 [1 - \omega_0^2/\omega(\omega \pm \omega_H)]} \quad (30)$$

(знак — относится к необыкновенной волне, знак + к обычновенной). При  $\Theta = \pi/2$  для обычновенной волны

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{k^2}{4\omega^4} \int_0^z \frac{\omega_0^4 P'(z)}{1 - \omega_0^2/\omega^2} dz; \quad (31)$$

для необыкновенной волны

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= \frac{k^2}{4\omega^4} \int_0^z \frac{\omega_0^4 [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \omega_H^2 (\omega^2 - 2\omega_0^2)]^2 P'(z)}{(\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_H^2)^4 [1 - \omega_0^2(\omega^2 - \omega_0^2)/\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_H^2)]} dz + \\ &+ \frac{k^2}{\omega^4} \int_0^z \frac{\omega_0^4 \omega_H^4 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 Q'(z)}{(\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_H^2)^4 [1 - \omega_0^2(\omega^2 - \omega_0^2)/\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_H^2)]} dz. \end{aligned} \quad (32)$$

Легко видеть, что формулы (31), (32) переходят в формулы (17), (20), (23) при независимости средних статистических от координат и в случае, когда  $l_{\perp} = l_{\parallel} = l$ .

При произвольном угле между магнитным полем и направлением распространения получаем следующие выражения для  $\bar{\sigma}^2$ : для обычной волны

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega^4}{4} k^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \Theta)^2 \int_0^z \frac{\omega_0^4 P'(z)}{[\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2) \operatorname{ctg}^2 \Theta]^4 [1 - \omega_0^2 / (\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2) \operatorname{ctg}^2 \Theta)]} dz \times \quad (33)$$

$$\times dz + \frac{\cos^8 \Theta}{\sin^{12} \Theta \omega^4} \int_0^z \frac{\omega_0^4 (\omega^2 - \omega_0^2)^6 Q'(z)}{\omega_H^4 [\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2) \operatorname{ctg}^2 \Theta]^4 [1 - \omega_0^2 / (\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2) \operatorname{ctg}^2 \Theta)]} dz;$$

для необыкновенной волны

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{k^2}{4\omega^4 \sin^4 \Theta} \int_0^z \frac{\omega_0^4 (\omega^2 - 2\omega_0^2)^2 P'(z)}{\omega_H^4} dz + \frac{k^2}{\omega^4 \sin^4 \Theta} \int_0^z \frac{\omega_0^4 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 Q'(z)}{\omega_H^4} dz. \quad (34)$$

Заметим, что последние две формулы были выведены в предположении, что  $\Theta \neq 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958
2. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, ГИТГЛ, М., 1953.
3. Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина, Изв высш уч зав — Радиофизика, 3, 216 (1960).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
27 ноября 1959 г.

## ДИФФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ГИРОТРОПНОМ СЛОЕ, СОДЕРЖАЩЕМ СЛУЧАЙНЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ

Н. Г. Денисов

Рассматривается распространение электромагнитных волн в магнитоактивном слое, содержащем случайные неоднородности электронной концентрации

Получены формулы, определяющие угловой энергетический спектр и поперечную функцию корреляции рассеянного поля. Показано, что поток энергии в рассеянной волне состоит в основном из потоков, связанных с двумя типами волн

Исследованиям по распространению радиоволн в ионосфере, содержащей случайные неоднородности, посвящено много работ (см., например, [1]). При этом чаще всего используется изотропная модель ионосферы. В этих задачах, однако, существенным может оказаться влияние магнитного поля Земли. В связи с этим представляет интерес решение задачи о распространении волн в случайно неоднородной магнитоактивной плазме.

Вообще говоря, при учете внешнего магнитного поля расчет расстояния радиоволн на случайных неоднородностях становится очень сложным. Так, в случае слабых неоднородностей, когда можно использовать метод возмущений, задача сводится к отысканию поля заданных источников, распределенных в регулярной гиротропной среде. Однако решение этой задачи может быть получено различными методами [2-4].

В настоящей статье проводится расчет статистических параметров волны, прошедшей через слой гиротропной плазмы, в котором имеются случайные неоднородности электронной концентрации. В этих расчетах наиболее удобным оказался метод решения, основывающийся на использовании теоремы взаимности для гиротропных сред [4].

### 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЕ

Предположим, что плоский гиротропный слой (плазма во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}^{(0)}$ ) располагается между плоскостями  $z = 0$  и  $z = L_0$ . В этом слое наряду с регулярным изменением свойств среды имеются и случайные неоднородности. Нас интересует поле в плоскости  $z = L$  ( $L \gg L_0$ ) (считается, что волна падает нормально на слой со стороны отрицательных  $z$ ). Это решение используется затем для получения формул, позволяющих связать статистические свойства слоя (хаотического экрана) со статистическими свойствами случайного поля в плоскости наблюдения  $z = L$ .

Выпишем основную систему уравнений для поля волны, распространяющейся в гиротропной неоднородной среде ( $E, H \sim e^{i\omega t}$ ):

$$\text{rot } E = -ik_0 H;$$

$$\text{rot } H = ik_0 [\hat{\varepsilon}(z) + \Delta \hat{\varepsilon}(x, y, z)] E \quad (k_0 = \omega/c). \quad (1)$$

Здесь  $\hat{\varepsilon}(z)$  — среднее значение тензора диэлектрической прони-

цаемости для гиротропной плазмы, компоненты которого медленно изменяются по толщине слоя;  $\hat{\Delta\epsilon}(x, y, z)$  — флюктуационное изменение тензора  $\hat{\epsilon}$ . Компоненты тензора можно найти, используя известную связь между индукцией  $D$  и напряженностью электрического поля  $E$  [5]:

$$D = E - \frac{v}{1-u} \{E - uh_0(h_0E) - i\sqrt{u}[h_0E]\}, \quad (2)$$

где

$$v = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \quad \sqrt{u} = \frac{eH^{(0)}}{mc\omega} \quad (3)$$

и вектор  $h_0 = H^{(0)}/H^{(0)}$ .

Если внешнее магнитное поле  $H^{(0)}$  постоянно, то неоднородности тензора  $\hat{\Delta\epsilon}(x, y, z)$  определяются неоднородностями концентрации электронов  $\Delta N(x, y, z)$ . Из формулы (2) легко получить:

$$\hat{\Delta\epsilon}E = -\frac{\Delta v}{1-u} \{E - uh_0(h_0E) - i\sqrt{u}[h_0E]\}, \quad (4)$$

где  $\Delta v = (4\pi e^2/m\omega^2)\Delta N = v(\Delta N/N)$  — флюктуационное отклонение параметра  $v$ , определяемое флюктуацией плотности электронов.

Будем считать, что в любой точке среды  $\hat{\Delta\epsilon} \ll \hat{\epsilon}$ . Тогда решение системы (1) можно искать методом последовательных приближений. Пусть  $E = E_0 + e$  и  $H = H_0 + h$ , где  $E_0, H_0$  — невозмущенное поле, которое удовлетворяет уравнениям Максвелла при  $\hat{\Delta\epsilon} = 0$ . Тогда рассеянное поле  $e, h$  найдется как решение системы уравнений

$$\text{rot } e = -ik_0h, \quad \text{rot } h = ik_0\hat{\epsilon}e + ik_0\hat{\Delta\epsilon}E_0. \quad (5)$$

Таким образом, задача о рассеянии волн на слабых неоднородностях тензора  $\hat{\epsilon}$  сводится к нахождению поля, вызываемого заданным распределением источников. Последние определяются выражением

$$\begin{aligned} ik_0\hat{\Delta\epsilon}E_0 &= -\frac{ik_0}{1-u} \{E_0 - uh_0(h_0E_0) - i\sqrt{u}[h_0E_0]\} \Delta v = \\ &= -\frac{ik_0}{1-u} P(E_0) \Delta v = -ik_0 \frac{\Delta v}{v} (1 - \hat{\epsilon}) E_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Существует несколько различных методов решения этой задачи (см., например, [2-4]). Здесь мы используем метод решения, основывающийся на теореме взаимности для магнитоактивной среды [4]. Обозначим через  $E_1, H_1$  решение следующих уравнений поля:

$$\text{rot } E_1 = -ik_0H_1, \quad \text{rot } H_1 = i\hat{\epsilon}k_0E_1, \quad (7)$$

где  $\hat{\epsilon}$  — тензор, компоненты которого получаются из компонент тензора  $\hat{\epsilon}$  заменой в них  $H^{(0)}$  на  $-H^{(0)}$ . Известно, что для магнитоактивной среды  $\hat{\epsilon}_{hk}(H^{(0)}) = \hat{\epsilon}_{ki}(-H^{(0)})$ . При этом, как легко показать [4], решения систем (5) и (7) удовлетворяют следующему соотношению:

$$\iint_S \{[eH_1] + [hE_1]\} dS = ik_0 \iiint_V E_1 (\hat{\Delta\epsilon}E_0) dV. \quad (8)$$

Здесь  $S$  — поверхность, ограничивающая объем  $V$ . В формуле (8) можно исключить функции  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{H}_1$  с помощью уравнений (5) и (7). Простое преобразование получающейся при этом формулы приводит к следующему окончательному результату [4]:

$$\begin{aligned} \iint_S \left\{ \mathbf{e} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial n} - \mathbf{E}_1 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial n} - (\mathbf{e} \operatorname{div} \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \operatorname{div} \mathbf{e}) \mathbf{n} \right\} dS = \\ = k_0^2 \iiint_V \mathbf{E}_1 (\hat{\Delta} \varepsilon \mathbf{E}_0) dV \end{aligned} \quad (9)$$

( $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности  $S$ ).

Выберем теперь поверхность  $S$  в виде двух плоскостей, между которыми располагается неоднородный слой ( $z = 0$ ;  $z = L$ ). Так как вне слоя  $\operatorname{div} \mathbf{E}_1 = \operatorname{div} \mathbf{e} = 0$ , то из (9) получим:

$$\iint_S \left\{ \mathbf{e} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial n} - \mathbf{E}_1 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial n} \right\} dS = k_0^2 \iiint_V \mathbf{E}_1 (\hat{\Delta} \varepsilon \mathbf{E}_0) dV. \quad (10)$$

Частное решение уравнений (7) удобно теперь выбрать в виде:

$$\mathbf{E}_1(x, y, z) = \mathbf{E}^{(1)}(z) e^{-i(\zeta_1 x + \zeta_2 y)}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{E}^{(1)}(z) \sim e^{i\zeta_3 z}$  при  $z \gg L$  ( $\zeta_3 = \sqrt{k_0^2 - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)}$ ). Подставляя решение (11) в формулу (10) и интегрируя по  $x$ ,  $y$  в плоскостях  $z = 0$  и  $z = L$ , а в объемном интеграле по  $x$ ,  $y$  в произвольной плоскости  $z = \text{const}$ , получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\zeta_1, \zeta_2, z) \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}(z)}{\partial n} - \mathbf{E}^{(1)}(z) \left. \frac{\partial \mathbf{a}(\zeta_1, \zeta_2, z)}{\partial n} \right|_{z=0}^{z=L} = \\ = k_0^2 \int_0^L \mathbf{E}^{(1)}(z) \{ \hat{f}(\zeta_1, \zeta_2, z) \mathbf{E}_0 \} dz, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\mathbf{a}(\zeta_1, \zeta_2, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e} e^{-i(\zeta_1 x + \zeta_2 y)} dx dy; \quad (13)$$

$$\hat{f}(\zeta_1, \zeta_2, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Delta} \varepsilon(x, y, z) e^{-i(\zeta_1 x + \zeta_2 y)} dx dy.$$

Так как при  $z \gg L$   $\mathbf{a}(\zeta_1, \zeta_2) \sim e^{-i\zeta_3 z}$ , а при  $z \ll 0$   $\mathbf{a}(\zeta_1, \zeta_2) \sim e^{i\zeta_3 z}$ , то в левой части формулы (12) значение функции при  $z = 0$  обращается в нуль. Учитывая кроме того, что при  $z \gg L$   $\mathbf{E}^{(1)}(z) \sim e^{i\zeta_3 z}$ , получим:

$$\mathbf{a}(\zeta_1, \zeta_2) \mathbf{E}^{(1)}(L) = - \frac{i k_0^2}{2 \zeta_3} \int_0^L \mathbf{E}^{(1)}(z) \hat{f}(\zeta_1, \zeta_2, z) \mathbf{E}_0 dz. \quad (14)$$

Формула (14) позволяет рассчитать угловой спектр рассеянного поля  $\mathbf{a}(\zeta_1, \zeta_2)$  в любой точке, расположенной за неоднородным слоем. В целях удобства расчета введем вспомогательную систему координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , ориентированную так, как показано на рис. 1. Поскольку вне

неоднородного слоя поле поперечно, то  $E^{(1)}(z)$  будет иметь только две компоненты  $E_x^{(1)}$  и  $E_y^{(1)}$ . Можно далее положить  $E_x^{(1)}(L) = 1$ ; тогда

$E_y^{(1)}(L) = Q(L)$ , где  $Q$  — коэффициент поляризации для волны  $E^{(1)}$ . Если теперь использовать в качестве решения  $E^{(1)}(z)$  две нормальных волны (обыкновенную 1 и необыкновенную 2), то из (14) можно получить два уравнения для определения двух компонент вектора  $\mathbf{a}(z_1, z_2)$ :

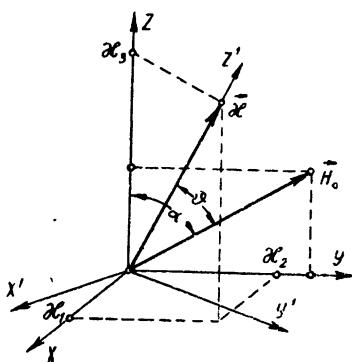


Рис. 1.

$$e^{iS_1} (a_{x'} + Q_1(L) a_{y'}) = - \frac{i k_0^2}{2 z_3} \int_0^L E_1^{(1)}(z) \hat{f}(z_1, z_2, z) E_0(z) dz; \quad (15)$$

$$e^{iS_2} (a_{x'} + Q_2(L) a_{y'}) =$$

$$= - \frac{i k_0^2}{2 z_3} \int_0^L E_2^{(1)}(z) \hat{f}(z_1, z_2, z) E_0(z) dz;$$

$Q_{1,2}(L)$  — коэффициенты поляризации вспомогательных нормальных волн  $E_1^{(1)}(z)$  и  $E_2^{(1)}(z)$  в среде с обратным направлением внешнего магнитного поля. Фазовые множители  $e^{iS_{1,2}}$  в (15) появляются из-за того, что при  $z = L$

$$E_{1,2}^{(1)}(L) \sim e^{iS_{1,2}}.$$

Решая систему уравнений (15), найдем:

$$a_{x'} = - \frac{i k_0^2}{2 z_3 (Q_1 - Q_2)} \int_0^L \{Q_1(L) e^{-iS_1} E_2^{(1)}(z) - Q_2(L) e^{-iS_2} E_1^{(1)}(z)\} \hat{f} E_0(z) dz; \quad (16)$$

$$a_{y'} = - \frac{i k_0^2}{2 z_3 (Q_1 - Q_2)} \int_0^L \{e^{-iS_1} E_1^{(1)}(z) - e^{-iS_2} E_2^{(1)}(z)\} \hat{f} E_0(z) dz.$$

Для плавно меняющегося регулярного слоя решения  $E_{1,2}^{(1)}(z)$  и  $E_0(z)$  можно записать в виде:

$$E_{1,2}^{(1)}(z) = A_{1,2}(z) e^{i \int_0^z q_{1,2} dz}; \quad E_0(z) = C_1(z) e^{-i \int_0^z k_1 dz} + C_2(z) e^{-i \int_0^z k_2 dz}, \quad (17)$$

где  $A_{1,2}(z)$  — медленно меняющиеся амплитуды нормальных волн в среде, свойства которой характеризуются тензором  $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki} (-H^{(n)})$ .

Так как при  $z = L$   $A_{1,2}(L) = 1$ , то  $A_{1,2}(z)$  представляют собой векторы поляризации нормальных волн;  $C_1(z)$  и  $C_2(z)$  — амплитуды обыкновенной и необыкновенной волн, суперпозиция которых дает невозмущенную волну. Для нормального падения их можно найти из следующих формул [3]:

$$C_{1,2}(z) = \sqrt{\frac{1 - K_{1,2}^2(0)}{1 - K_{1,2}^2(z)}} \frac{C_{1,2}^{(0)}}{\sqrt{n_{1,2}(z)}}, \quad (18)$$

$$C_{1,x}^{(0)} = \frac{K_2(0)E_{0x} - E_{0y}}{K_2(0) - K_1(0)}; \quad C_{2,x}^{(0)} = \frac{E_{0y} - K_1(0)E_{0x}}{K_2(0) - K_1(0)}; \\ C_{y1,2}^{(0)}(z) = K_{1,2}(z)C_{x1,2}^{(0)}. \quad (19)$$

Здесь  $E_{0x}$  и  $E_{0y}$  — компоненты вектора  $E_0$  при  $z=0$  (в начале слоя). В формулы (17), (18) и (19) входят, кроме того, следующие величины:  $k_{1,2} = k_0 n_{1,2}$ , где  $n_{1,2}$  — показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн,  $K_{1,2}$  — коэффициенты поляризации нормальных волн [5];  $q(z)$  — вертикальная компонента волнового вектора  $\mathbf{k}(z_1, z_2, q)$  волны, распространяющейся сверху вниз под углом к слою. Функции  $q_{1,2}(z)$  являются корнями алгебраического уравнения четвертого порядка [6].

В решение (16) входит вектор  $\hat{f}(z_1, z_2, z) E_0(z)$ . Согласно (6), (13) и (17), он равен

$$\hat{f}(z_1, z_2, z) E_0(z) = -\frac{1}{1-u} \left\{ \mathbf{P}(\mathbf{C}_1) e^{-i \int_0^z k_1 dz} + \right. \\ \left. + \mathbf{P}(\mathbf{C}_2) e^{-i \int_0^z k_2 dz} \right\} f(z_1, z_2, z), \quad (20)$$

где  $f(z_1, z_2, z)$  — спектр флюктуаций параметра  $v$ , т. е.

$$\hat{f}(z_1, z_2, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Delta v(x, y, z) e^{-i(z_1 x + z_2 y)} dx dy, \quad (21)$$

а вектор  $\mathbf{P}(\mathbf{C}_{1,2})$  равен (см. (6))

$$\mathbf{P}(\mathbf{C}_{1,2}) = \{\mathbf{C}_{1,2} - u \mathbf{h}_0 (\mathbf{h}_0 \mathbf{C}_{1,2}) - i \sqrt{u} [\mathbf{h}_0 \mathbf{C}_{1,2}]\} = \mathbf{P}_{1,2}. \quad (22)$$

Подставляя выражение (20) в решение (16), найдем:

$$a_{x'} = - \int_0^L \{Q_2(L) b_{11} e^{i\varphi_{11}} + Q_2(L) b_{12} e^{i\varphi_{12}} - \\ - Q_1(L) b_{21} e^{i\varphi_{21}} - Q_1(L) b_{22} e^{i\varphi_{22}}\} f(z_1, z_2, z) dz; \\ a_{y'} = \int_0^L \{b_{11} e^{i\varphi_{11}} + b_{12} e^{i\varphi_{12}} - b_{21} e^{i\varphi_{21}} - b_{22} e^{i\varphi_{22}}\} f(z_1, z_2, z) dz. \quad (23)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$b_{ij} = \frac{i k_0^2 (\mathbf{A}_i \mathbf{P}_j) e^{-i S_i}}{2 z_3 (1-u) (Q_1 - Q_2)}; \quad \varphi_{ij} = \int_0^z (q_i - k_i) dz; \\ S_i = \int_0^L q_i dz \quad (i, j = 1, 2), \quad (24)$$

## 2. УГЛОВОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР

Решение (23) дает нам компоненты электрического поля волны, рассеянной в данном направлении. Это направление определяется волновым вектором с компонентами  $x_1, x_2, x_3$  ( $x_3 = \sqrt{k_0^2 - x_1^2 - x_2^2}$ ). Найдем теперь средний угловой энергетический спектр. Из решения (23) можно получить:

$$\begin{aligned} & \overline{a_{x'}(x_1, x_2) a_{x'}(x'_1, x'_2)} + a_{y'}(x_1, x_2) a_{y'}^*(x'_1, x'_2) = \\ & = \int_0^L \int_0^L \Phi_1(x_1, x_2, z_1) \Phi_1^*(x'_1, x'_2, z_2) \overline{f(x_1, x_2, z_1) f^*(x'_1, x'_2, z_2)} dz_1 dz_2 + \\ & + \int_0^L \int_0^L \Phi_2(x_1, x_2, z_1) \Phi_2^*(x'_1, x'_2, z_2) \overline{f(x_1, x_2, z_1) f^*(x'_1, x'_2, z_2)} dz_1 dz_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  представляют собой выражения, стоящие в фигурных скобках (решение (23)).

Корреляционная функция спектра случайных неоднородностей должна иметь вид (см., например, [7]):

$$\overline{f(x_1, x_2, z_1) f^*(x'_1, x'_2, z_2)} = \overline{(\Delta v)^2} F_0(x_1, x_2, z_1 - z_2) \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2), \quad (26)$$

где  $\delta$  — дельта-функция,  $F_0(x_1, x_2, z_1 - z_2)$  — спектр корреляционной функции  $\Delta v_1 \Delta v_2 / (\Delta v)^2$ . При этом формулу (25) можно записать так:

$$\begin{aligned} & \overline{a_{x'}(x_1, x_2) a_{x'}(x'_1, x'_2)} + a_{y'}(x_1, x_2) a_{y'}^*(x'_1, x'_2) = \\ & = a_0^2(x_1, x_2) \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $a_0^2(x_1, x_2)$  — средний угловой энергетический спектр рассеянного поля. Легко показать, что функция  $a_0^2(x_1, x_2)$  тесно связана с корреляционной функцией комплексного поля в плоскости  $z = \text{const}$ :

$$a_0^2(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{e(x, y, L) e^*(x + \xi, y + \eta, L)} e^{-i(x_1 \xi + x_2 \eta)} d\xi d\eta. \quad (28)$$

В формуле (25) после перемножения функций  $\Phi_1(z_1) \Phi_1^*(z_2)$  и  $\Phi_2(z_1) \Phi_2^*(z_2)$  мы получим члены такого вида:

$$b_{ij}(z_1) b_{\alpha\beta}(z_2) e^{i\varphi_{ij} - i\varphi_{\alpha\beta}}.$$

Так как перед каждым множителем стоит еще функция  $F_0(x_1, x_2, z_1 - z_2)$ , то при плавном изменении регулярных свойств среды можно считать, что

$$b_{ij}(z_1) b_{\alpha\beta}(z_2) = b_{ij} \left( \frac{z_1 + z_2}{2} \right) b_{\alpha\beta} \left( \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

То же справедливо и для функции  $\overline{(\Delta v)^2}$ . В таком случае на основе (25) угловой спектр можно представить в виде:

$$\begin{aligned} a_0^2(x_1, x_2) &= \int_0^L \int_0^L \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \{(1 + |Q_2(L)|^2) b_{1\alpha} b_{1\beta} e^{i[\varphi_{1\alpha}(z_1) - \varphi_{1\beta}(z_2)]} + \\ & + (1 + |Q_1(L)|^2) b_{2\alpha} b_{2\beta} e^{i[\varphi_{2\alpha}(z_1) - \varphi_{2\beta}(z_2)]}\} \overline{(\Delta v)^2} F_0(x_1, x_2, z_1 - z_2) dz_1 dz_2. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь учтено, что  $Q_1(L) Q_2(L) = 1$ , а  $Q_1(L) Q_2(L) = Q_1^*(L) Q_2(L) = -1$  [5].

Рассмотрим вначале рассеяние одной нормальной волны. Если на слой падает обыкновенная волна, то при плавном изменении средних свойств среды в невозмущенной волне (17) необыкновенная компонента не появится. В таком случае  $C_2(z) = 0$ , и, как это видно из (24), все  $b_{\alpha 2}$  равны нулю. Для этого случая угловой спектр будет определяться следующим выражением:

$$a_0^2(z_1, z_2) = \int_0^L \left\{ (1 + |Q_2|^2) |b_{11}|^2 e^{i \int_{z_1}^{z_2} (q_1 - k_1) dz} + \right. \\ \left. + (1 + |Q_1|^2) |b_{21}|^2 e^{i \int_{z_1}^{z_2} (q_2 - k_1) dz} \overline{(\Delta v)^2} F_0(z_1, z_2, z_1 - z_2) dz_1 dz_2 \right\} \quad (30)$$

Появление в формуле (30) второго слагаемого связано с тем, что при рассеянии волны одного типа возникает волна другого типа.

В решении (30) медленно меняющиеся амплитуды являются функциями центра точек  $z_1$  и  $z_2$ :

$$(1 + |Q_2|^2) |b_{11}|^2 \overline{(\Delta v)^2} = B_{11} \left( \frac{z_1 + z_2}{2} \right); \quad (31)$$

$$(1 + |Q_1|^2) |b_{21}|^2 \overline{(\Delta v)^2} = B_{21} \left( \frac{z_1 + z_2}{2} \right),$$

и можно принять, что  $\int_{z_1}^{z_2} (q_1 - k_1) dz \approx (q_1 - k_1)(z_1 - z_2)$ .

Ниже мы будем рассматривать рассеяние волн на крупномасштабных неоднородностях ( $l \gg \lambda$ ). В таком случае угловой спектр будет очень узким и можно ограничиться исследованием малых углов рассеяния. При этом разность волнового вектора  $k_1$  и его проекции  $q_1$  на ось  $z$  можно приближенно записать в виде:  $k_1 - q_1 \approx z^2/2k_1$ , а  $k_1 - q_2 = (z^2/2k_2) + (k_1 - k_2)$ , где  $z^2 = z_1^2 + z_2^2$  ( $z_1$  и  $z_2$  — проекции вектора  $k$  рассеянной волны на горизонтальные оси).

В двойном интеграле (30) удобно перейти теперь к интегрированию по переменным  $\zeta = z_1 - z_2$  и  $z_1 = (z_1 + z_2)/2$ . Это дает следующее:

$$a_0^2(z_1, z_2) = 2 \int_0^L F_0(z_1, z_2, \zeta) d\zeta \int_{\zeta/2}^{L-\zeta/2} \{ B_{11}(z) \cos[z^2 \zeta / 2k_1] + \\ + B_{21}(z) \cos[z^2 \zeta / 2k_2 + (k_1 - k_2)\zeta] \} dz. \quad (32)$$

Функция  $F_0(z_1, z_2, \zeta)$  быстро спадает на расстоянии  $\zeta \sim l$ , а  $z \sim 1/l$ . Следовательно, в области, существенной для интегрирования,  $z^2 \zeta / 2k_1, z^2 \zeta / 2k_2 \sim 1/k_1, l \ll 1$ . Учитывая, кроме того, что  $B_{11}(z)$  — функция медленно меняющаяся, мы можем формулу (32) приближенно записать в виде (аналогичные расчеты см. в [8]):

$$a_0^2(z_1, z_2) = 2 \int_0^L B_{11}(z) dz \int_0^\infty F_0(z_1, z_2, z) dz + \\ + \int_0^L F_0(z_1, z_2, z) dz \int_{\zeta/2}^{L-\zeta/2} B_{21}(z) \cos[(k_1 - k_2)\zeta] dz. \quad (33)$$

Легко показать, что при выполнении условия  $l \gg \lambda$  второй член будет пренебрежимо мал по сравнению с первым. Если разность показателей преломления  $n_2 - n_1$  достаточно велика, так что  $(k_2 - k_1)l \gg 1$ , то второй интеграл в (33) будет очень мал из-за того, что  $\cos[(k_2 - k_1)l]$  сделает много осцилляций на расстоянии порядка  $l$ . Таким образом, равноправный с первым интегралом вклад второго будет лишь при  $k_0(n_2 - n_1) \sim 1$ . В условиях, когда  $l/\lambda \gg 1$ , это означает, что разность  $n_2 - n_1$  будет очень мала. При этом, однако,  $B_{21} \ll B_{11}$ . Действительно, амплитуды  $B_{11}$  и  $B_{21}$ , согласно (24) и (31), равны:

$$\begin{aligned} B_{11}(z) &= \frac{k_0^4 |(\mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1)|^2}{(\Delta v)^2 (1 + |K_2(0)|^2) \frac{4x_3^2(1-u)^2|K_2(0)-K_1(0)|^2}; \\ B_{21}(z) &= \frac{k_0^4 |(\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_1)|^2}{(\Delta v)^2 (1 + |K_1(0)|^2) \frac{4x_3^2(1-u)^2|K_2(0)-K_1(0)|^2}, \end{aligned} \quad (34)$$

где мы заменили  $Q_{1,2}(L)$  на  $K_{1,2}(0)$ , так как при перемене внешнего магнитного поля коэффициент поляризации  $K_{1,2}$  изменяет лишь знак (см., например, [5]). Кроме того, при  $l \gg \lambda$  угловой спектр рассеянного поля очень узкий, а  $B_{11}$  и  $B_{21}$  являются плавными функциями угла, и в (34) можно считать, что  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $x_3 = k_0$ . В таком случае из (20) можно получить:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1) &= A_{x1} C_{x1} \{ 1 - K_1^2(1+M_1^2) + u K_1^2 (\sin \alpha + M_1 \cos \alpha)^2 - \\ &\quad - i 2 \sqrt{u} K_1 (M_1 \sin \alpha - \cos \alpha) \}; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_1) &= A_{x2} C_{x1} \{ -M_1 M_2 + u (\sin \alpha + M_1 \cos \alpha) (\sin \alpha + M_2 \cos \alpha) + \\ &\quad + i \sqrt{u} [K_2(\cos \alpha - M_2 \sin \alpha) + K_1(\cos \alpha - M_1 \sin \alpha)] \}. \end{aligned}$$

Здесь  $K(z) = E_y/E_x$  и  $M(z) = E_z/E_y$  для нормальных волн в плазме. Эти коэффициенты можно найти, используя хорошо известные формулы [5]:

$$\begin{aligned} K_{1,2} &= i \left( \frac{1 \pm \sqrt{1 + \eta^2}}{\eta} \right); \quad K_{1,2} M_{1,2} = \frac{v \sqrt{u} \sin \alpha (i - \sqrt{u} \cos \alpha K_{1,2})}{1 - u - i \psi (1 - u \cos^2 \alpha)}; \\ \eta &= \frac{1 - v}{s_c}; \quad v = \frac{4\pi e^2 N}{m \omega^2}; \quad s_c = \frac{\sqrt{u} \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}; \quad u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

С помощью этих формул функцию  $(\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_1)$  из (35) можно представить в виде:

$$(\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_1) = A_{x2} C_{x1} \frac{v u \sin^2 \alpha (1 - u)}{(1 - v) [1 - u - v (1 - u \cos^2 \alpha)]}. \quad (37)$$

Отсюда прежде всего видно, что амплитуда  $B_{21}$  обращается в нуль при продольном распространении ( $\alpha = 0$ ) и при поперечном распространении ( $\alpha = \pi/2$ ;  $C_{x1} = 0$ ).

Условие  $n_2 - n_1 \ll 1$  выполняется при малых  $v$  или при малых  $\sqrt{u}$ . При этом, как легко показать,  $n_2 - n_1 \sim v \sqrt{u}$ , исключая окрестности точек, где  $n_{1,2} \rightarrow \infty$ , и углы  $\alpha \sim \pi/2$ , где  $n_2 - n_1 \sim vu$ . Но при  $v \sqrt{u} \ll 1$  множитель, стоящий при  $A_{x2} C_{x1}$  в (37), будет много меньше единицы. С помощью формул (34) теперь легко показать, что  $B_{21} \ll B_{11}$ .

Это неравенство не нарушается и при  $\alpha \rightarrow \pi/2$ , когда  $K_1 \rightarrow \infty$ . При этом  $C_{x1} \rightarrow 0$ , так что  $K_1 C_{x1} = C_{y1} = \text{const}$ .

В общем случае, когда невозмущенная волна содержит волны звуковых типов,  $C_2(z) \neq 0$  и решение значительно усложняется. Однако можно показать (так же, как это было сделано для одной нормальной волны), что при  $l/\lambda \gg 1$  в угловом спектре будут представлены только два слагаемых. Таким образом, поток рассеянного излучения разбивается на сумму потоков, переносимых двумя нормальными волнами, аналогично тому, что имеет место при тепловом излучении гиротропной среды [9]:

$$a_0^2(x_1, x_2) = 2 \int_0^L [B_{11}(z) + B_{22}(z)] dz \int_0^\infty F_0(x_1, x_2, \zeta) d\zeta, \quad (38)$$

где (см. (34))

$$B_{11,22} = \frac{k_0^4 |(\mathbf{A}_{1,2} \mathbf{P}_{1,2})|^2}{(\Delta v)^2 (1 + |K_{2,1}(0)|^2) \frac{4x_3^2(1-u)^2 |K_2(0) - K_1(0)|^2}{4x_3^2(1-u)^2 |K_2(0) - K_1(0)|^2}}. \quad (39)$$

Функция  $(\mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1)$  представлена формулой (35), а  $(\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_2)$  можно получить из последней заменой индекса 1 на 2.

Таким образом, в случае дифракции на крупномасштабных неоднородностях угловой спектр определяется спектром случайных неоднородностей (см. (38)). Используя далее обращение формулы (28), найдем корреляционную функцию комплексного поля

$$\begin{aligned} e(x, y, L) e^*(x+\xi; y+\eta, L) = 2 \int_0^L & [B_{11}(z) + \\ & + B_{22}(z)] dz \int_0^\infty \rho(\xi, \eta, \zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\rho(\xi, \eta, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(x_1, x_2, \zeta) e^{ix_1\xi + ix_2\eta} dx_1 dx_2 = \overline{\Delta v_1 \Delta v_2} / (\Delta v)^2$$

— коэффициент корреляции флюктуаций параметра  $v = 4\pi e^2 N/m \omega^2$ . При этом можно считать, что функции  $B_{11}$  и  $B_{22}$  выражаются формулами (39) при  $x_1 = x_2 = 0$ .

### 3. РАССЕЯНИЕ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ И ПОПЕРЕЧНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи, в которых расчеты существенно упрощаются. Пусть внешнее магнитное поле вертикально ( $\alpha = 0$ ). При этом, как это следует из формулы (35),

$$(\mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1) = 2A_{x1}C_{x1}(1 - \sqrt{u}), \quad (\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_2) = 2A_{x2}C_{x2}(1 + \sqrt{u}). \quad (41)$$

Компоненты вектора  $\mathbf{C}_{1,2}(z)$  можно найти по формуле (18), полагая в них  $K_{1,2} = \pm i$ . Компоненты векторов поляризации  $\mathbf{A}_{1,2}$  определяются аналогично. Нужно учесть при этом, что  $A_{x1,2}(0) = 1$ . Это дает:

$$2A_{x1,2}C_{x1,2} = \frac{1}{n_{1,2}(z)} (E_{0x} \mp iE_{0y}),$$

где знак  $(-)$  относится к волне 1 (обыкновенная волна).

Наконец, из формулы (39) получим:

$$B_{11,22} = \frac{E_0^2 k_0^2 (\Delta v)^2}{8n_{1,2}^2} \left( \frac{1 \mp \sqrt{u}}{1-u} \right)^2; \quad n_{1,2}^2 = 1 - \frac{v}{1 \pm \sqrt{u}}. \quad (42)$$

При  $u=0$   $B_{11}=B_{22}$ , и в сумме эти слагаемые дают полный поток рассеянной волны для изотропного слоя.

Таким образом, при наличии внешнего поля поток рассеянного поля разбивается на два, причем поток, переносимый обыкновенной волной, будет меньше, чем поток, переносимый необыкновенной волной. Действительно, отношение  $B_{11}/B_{22}$  равно:

$$\frac{B_{11}}{B_{22}} = \frac{n_2^2}{n_1^2} \left( \frac{1-\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}} \right)^2 = \frac{1-v-\sqrt{u}}{1-v+\sqrt{u}} \left( \frac{1-\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}} \right) < 1.$$

Неравенство выполняется при  $v < 1 - \sqrt{u}$  и имеет место для любых углов  $\sigma$ , если в невозмущенной волне нормальные волны представлены одинаково. Этот результат аналогичен тому, который получен в задаче о теплопроводности излучении магнитоактивной среды [9].

Интересно отметить, что при продольном распространении функции  $B_{11}$  и  $B_{12}$  определяются величиной  $(1/n_{1,2}^2)((\Delta v)^2/1 \pm \sqrt{u}) = = (\Delta n_{1,2}^2)^2/n_{1,2}^2$ . Следовательно, в этом случае интенсивность рассеяния нормальных волн можно подсчитывать по формулам, полученным для изотропной среды [10], заменяя в них диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  на  $n_{1,2}^2$  [11].

В случае поперечного распространения  $\alpha = \pi/2$  и  $K_1 = \infty$ ,  $K_2 = 0$  (см. (36)). При расчете функций  $B_{11}$  и  $B_{22}$  по формулам (39) нужно выполнить предельный переход, устремляя  $K_1$  к бесконечности. Используя при этом формулы (18), (19), (35) и учитывая, что  $A_{x1}(z) = = 1/\sqrt{n_1(z)}$ ,  $A_{x2}(z) = 1/\sqrt{n_2(z)}$ , получим:

$$P_{11}(z) = -\frac{k_0^2 E_{0y}^2}{4n_1^2(z)} \frac{(\Delta v)^2}{(\Delta v)^2}; \quad n_1^2 = 1 - v; \quad (43)$$

$$B_{22}(z) = \frac{k_0^2 E_{0x}^2}{4n_2^2(z)} \frac{(u(1-u) + (1-u-v)^2)^2}{(1-u-v)^4} \frac{(\Delta v)^2}{(\Delta v)^2}; \quad n_2^2 = 1 - \frac{v(1-v)}{1-u-v}.$$

В первую формулу внешнее магнитное поле не входит, и она, естественно, совпадает с результатом, который получается для изотропной среды. Нужно отметить также, что полученные формулы становятся неприменимыми в областях, где неприменимо приближение геометрической оптики. Это имеет место в тех случаях, когда на пути распространения встречается область, где показатели преломления обращаются в нуль (точки отражения) или в бесконечность (резонансные точки).

#### 4. РАССЕЯНИЕ В СЛАБО ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

При изучении космического радиоизлучения чаще всего используется диапазон очень коротких длин волн ( $\lambda < 10 \text{ м}$ ). Расчет рассеяния таких волн на неоднородностях ионосферы существенно упрощается, ввиду того, что при этом параметр  $u = \omega_H^2/\omega^2 \ll 1$ .

Если в приведенных выше формулах пренебречь членами порядка  $u$ , оставляя члены порядка  $\sqrt{u}$ , то можно получить следующее. Из (36) прежде всего найдем:

$$K_{1,2}(z) = i \left( \pm 1 + \frac{s_c}{1-v} \right); \quad s_c = \frac{\sqrt{u} \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}. \quad (44)$$

Эта формула применима при всех углах  $\alpha$ , исключая небольшую область углов, близких к  $\pi/2$ . Используя (18) и (19), а также определение вспомогательных векторов  $A_{1,2}(z)$  (см. (17)), из (35) для рассматриваемого случая получим:

$$|A_{1,2} P_{1,2}|^2 = \frac{|1 - K_{1,2}^2(0)|^2}{4n_{1,2}^2(z)} (1 \mp \sqrt{u} \cos \alpha)^2 [E_{0y}^2 + |K_{2,1}(0)|^2 E_{0x}^2]. \quad (45)$$

Подставляя этот результат в (39), после простых преобразований с учетом (44) можно прийти к следующим формулам:

$$B_{11,22} = \frac{k_0^2 (\Delta v)^2}{16n_{1,2}^2(z)} |1 - K_{2,1}^2(0)| (1 \mp \sqrt{u} \cos \alpha)^2 [E_{0x}^2 + |K_{1,2}(0)|^2 E_{0y}^2]. \quad (46)$$

Здесь  $K_{1,2}^2(0) = -(1 \pm \sqrt{u} (\sin^2 \alpha / \cos \alpha))$ ,  $E_{0x}$  и  $E_{0y}$  — компоненты электрического поля невозмущенной волны в вакууме (на границе неоднородного слоя). Если записать теперь показатели преломления нормальных волн для слабо гиротропной плазмы с точностью до членов порядка  $u$ :

$$n_{1,2}^2 = 1 - v \pm \sqrt{u} v \cos \alpha \quad (\alpha > \pi/2),$$

то функции (46) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} B_{11,22} = & \frac{k_0^2 (\Delta v)^2}{8(1-v)} \left\{ 1 \mp \sqrt{u} \left( \frac{3 \cos^2 \alpha + 1}{2 \cos \alpha} + \frac{v \cos \alpha}{1-v} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left[ E_{0x}^2 + \left( 1 \pm \frac{\sqrt{u} \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) E_{0y}^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Отсюда видно, что хотя в рассматриваемом приближении магнитное поле влияет на интенсивность отдельных нормальных волн, суммарная интенсивность (так же, как и в [9]) от магнитного поля не зависит. Таким образом, при  $u \ll 1$  с точностью до членов порядка  $u$  полный поток рассеяния в направлении  $(x_1, x_2)$  можно подсчитывать по формуле

$$a_0^2(x_1, x_2) = \frac{k_0^2}{2} E_0^2(0) \int_0^L \frac{(\Delta \varepsilon)^2}{\varepsilon} dz \int_0^\infty F_0(x_1, x_2, \zeta) d\zeta \quad (\varepsilon = 1-v). \quad (48)$$

Заметим, наконец, что во всех формулах типа (48), определяющих угловой спектр, верхний предел можно положить равным  $L_0$ , так как вне слоя (при  $z \geq L_0$ )  $\Delta v = 0$ . Это означает, что угловой спектр (или корреляционная функция комплексного поля) не зависит от расстояния между плоскостью  $z=L$  и краем рассеивающего слоя ( $z=L_0$ ) [1].

Здесь мы ограничились расчетом углового спектра рассеянной волны и совсем не касались флюктуаций амплитуды и фазы. Расчет статистических свойств амплитуды и фазы волны, прошедшей через слой магнитоактивной неоднородной среды, может быть сделан на основе тех же решений и будет рассмотрен в отдельной статье.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Ратклифф, Пробл. совр. физ., вып. 10, 3 (1957).
2. Ф. В. Бункин, ЖЭТФ, 32, 338 (1957).
3. А. И. Ахиезер, И. Г. Прохода, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ, 33, 750 (1957).
4. M. L. V. Pitteway, Proc. Roy. Soc., A246, 556 (1958).
5. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, ГИТГЛ, М., 1953.
6. H. G. Bookeg, Phil. Trans. Roy. Soc., A237, 411 (1938).
7. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
8. Н. Г. Денисов, В. А. Зверев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 521 (1959).
9. Ф. В. Бункин, ЖЭТФ, 32, 811 (1957).
10. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5—6, 41 (1958).
11. Е. А. Бенедиктов, Н. А. Митяков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 344 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
10 декабря 1959 г.

## ФЛЮКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ В ИМПУЛЬСНОМ ГЕНЕРАТОРЕ НА ОТРАЖАТЕЛЬНОМ КЛИСТРОНЕ\*

*С. А. Ахманов, Г. Ф. Антонов*

Приведены результаты экспериментального исследования флюктуаций амплитуды в импульсном генераторе на отражательном клистроне. Основное внимание было уделено статистическим характеристикам амплитуды для режима установления колебаний в автономном отражательном клистроне. Приведены также некоторые данные, характеризующие процесс установления колебаний в клистроне, «подвоздуждаемом» синусоидальной внешней силой.

### ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о влиянии флюктуаций на протекание переходных процессов в автогенераторах, поставленный еще в тридцатых годах Папалекси [1] и рассматривавшийся также в [2,3], приобретает в настоящее время, особенно для генераторов диапазона сверхвысоких частот, не только теоретический, но и практический интерес. Так, в частности, в появившихся в последние годы работах [4-7] теоретически и экспериментально изучалось воздействие флюктуаций на процесс установления амплитуды автоколебаний в генераторе с одной степенью свободы.

Известно, что в реальном автогенераторе наличие флюктуаций (шумов и флюктуаций параметров) приводит к тому, что переходный процесс установления амплитуды колебаний представляет собой нестационарный случайный процесс. Статистические характеристики этого процесса зависят от целого ряда факторов и в особенности от факторов, определяющих начальную амплитуду колебаний на контуре автогенератора (дробовой и тепловой шум, переходные процессы в схеме, сопровождающие включение источников питания, «подвоздуждаящая» внешняя сила, специально вводимая извне в контур автогенератора и т. п.). В реальных условиях начальная амплитуда колебаний чаще всего определяется комбинацией указанных выше факторов. Особый интерес представляет неоднократно рассматривавшийся теоретически (см., например, [4,5,8]) «запуск от флюктуаций» — случай, когда начальная амплитуда определяется лишь дробовыми и тепловыми шумами. Детальное исследование этого режима позволяет также получить информацию о статистических характеристиках флюктуационных сил, действующих на автогенератор. Следует отметить, что в длинноволновом диапазоне экспериментальное осуществление режима «запуска от флюктуаций» оказывается весьма затруднительным из-за ударного возбуждения колебательного контура. С другой стороны, в СВЧ генераторах роль переходных процессов значительно меньше. Так, при модуляции напряжения отражателя автономного клистрона «на возбуждение» можно с уверенностью пренебречь ударным возбуждением колебательного контура — фактически в этом случае происходит только модуляция

\* Доклад на I Всесоюзной конференции по статистической радиофизике, Горький, 1958.

коэффициента обратной связи\*, и, следовательно, случай запуска от флюктуаций приобретает не только принципиальный, но и практический интерес.

Экспериментальные исследования указанной задачи, проведенные в [6-7], нельзя считать полными. По существу, авторы этих работ ограничились лишь приближенными оценками разброса во времени положения переднего фронта радиоимпульса. Такие данные не позволяют провести детальное сравнение теории и эксперимента и могут быть использованы главным образом для оценки точности работы того или иного генератора радиоимпульсов. Вместе с тем ощущается необходимость в более подробном исследовании статистических характеристик процесса установления амплитуды колебаний и сравнении результатов эксперимента с результатами теории.

В связи со сказанным нами было проведено экспериментальное исследование статистических характеристик (соответствующих функций распределения) процесса установления амплитуды колебаний в отражательном кристаллоне. Исследования были выполнены как для автономного отражательного кристаллона, так и для кристаллона, "подвоздушаемого" внешней синусоидальной силой. Измерения были проделаны для всего процесса установления, включая и его нелинейную часть. Результаты измерений сравниваются с данными расчетов.

Как уже указывалось, практический интерес таких исследований связан, в первую очередь, с задачей о воздействии флюктуаций на генераторы радиоимпульсов. Следует отметить, однако, что это воздействие проявляется не только во флюктуациях времени установления стационарной амплитуды, но и во флюктуациях времени установления стационарной фазы (в неизохронных и неавтономных генераторах), флюктуациях средней частоты и средней амплитуды высокочастотного заполнения, флюктуациях амплитуды и частоты в течение радиоимпульса.

Результаты исследования воздействия флюктуаций на частоту и фазу автономного генератора радиоимпульсов и генератора когерентных радиоимпульсов на отражательном кристаллоне (см. [10, 11]) будут изложены нами в другом месте.

## 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА УСТАНОВЛЕНИЯ АМПЛИТУДЫ АВТОКОЛЕБАНИЙ В АВТОНОМНОМ ОТРАЖАТЕЛЬНОМ КРИСТАЛЛОНЕ

*Методика эксперимента.* Экспериментальная установка. Как уже указывалось, авторы работ [6,7] ограничивались лишь приближенным определением разброса положений во времени переднего фронта радиоимпульса, генерируемого автогенератором. Поэтому представлялось целесообразным провести измерения одномерных функций распределения, характеризующих процесс установления амплитуды колебаний. Следует подчеркнуть, что только на основе таких измерений возможно строгое вычисление дисперсии флюктуаций положения переднего фронта радиоимпульса и других величин, характеризующих воздействие флюктуаций на процесс установления амплитуды колебаний.

Полное представление о свойствах нестационарного случайного процесса установления амплитуды автоколебаний дают  $W_{t_i}(A)$  и  $W_{A_i}(t)$  — плотности распределения вероятности амплитуды для различ-

\* Отметим, что и при модуляции напряжения на резонаторе (используемой для повышения мощности колебаний) роль переходных процессов оказывается малой (см., например, [9]).

ных моментов времени  $t_i$  и вероятности времени достижения определенного значения амплитуды  $A_i$ . Указанные функции определялись нами экспериментально для автономного отражательного клистрона и клистрона „подвоздушаемого“ внешней силой; в обоих случаях модулировалось напряжение на отражателе.

Блок-схема экспериментальной установки десятисантиметрового диапазона представлена на рис. 1. Генератор запускающих импульсов

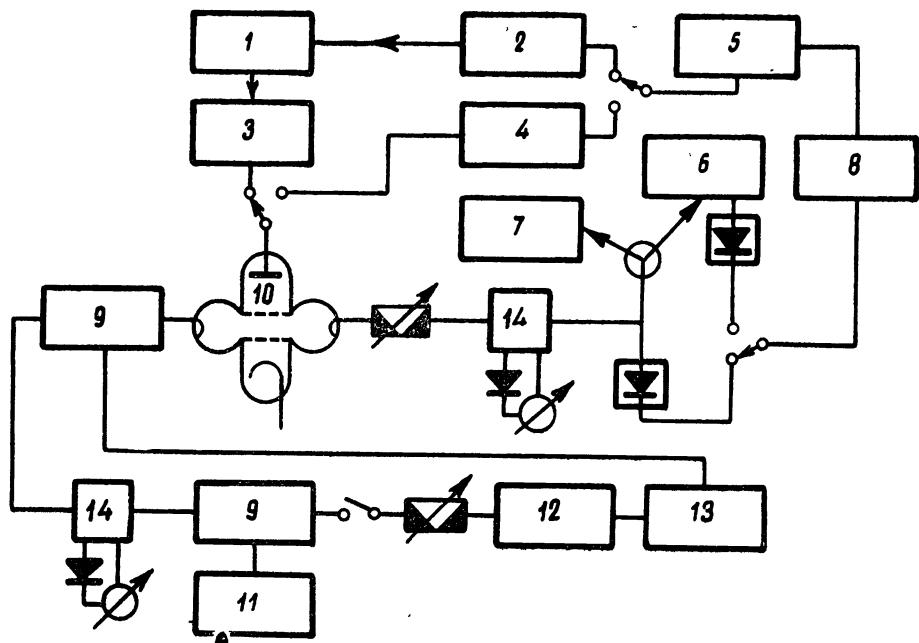


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки: 1 — модулирующий генератор, 2 — запускающий генератор, 3 — линия задержки, 4 — генератор пилообразного напряжения, 5 — импульсный осциллограф, 6 — дискриминатор, 7 — измеритель малой мощности, 8 — широкополосный усилитель, 9 — тройник, 10 — клистрон, 11 — волномер, 12 — СВЧ - генератор малой мощности, 13 — анализатор спектра, 14 — измерительная линия.

запускает ждущую развертку импульсного осциллографа (полоса усиления вертикального отклонения  $\sim 10 \text{ мГц}$ , минимальная длительность развертки  $1 \text{ мксек}$ ) и генератор прямоугольных импульсов (длительность импульсов  $\tau_n = 0,5 \div 10 \text{ мксек}$ , время нарастания импульса меньше  $0,1 \text{ мксек}$ ), модулирующих напряжение на отражателе клистрона. Огибающие высокочастотных импульсов, генерируемых клистроном после детектирования (постоянная времени схемы  $\sim 10^{-8} \text{ сек}$ ), наблюдаются на экране осциллографа. При многократном запуске клистрона можно получить необходимое число реализаций исследуемого случайного процесса; эти реализации фотографировались и затем функции распределения  $W_n(A)$  и  $W_A(t)$  определялись путем фотометрирования пленки. Число обрабатываемых реализаций определяется частотой повторения  $F_n$  модулирующих импульсов и длительностью экспозиции  $T_\Phi$ ; в наших экспериментах  $F_n \simeq 10^3 \div 10^4 \text{ гц}$  и  $T_\Phi \sim 1 \div 3 \text{ сек}$ , что можно считать достаточным для определения законов распределения вероятностей. Следует отметить, что флюктуации в положениях фронтов

продетектированных радиоимпульсов, наблюдаемых на экране осциллографа, могут быть вызваны также флюктуационными явлениями при запуске ждущей развертки осциллографа. Специальные контрольные измерения показали, что в нашей установке указанные флюктуации лежат за пределами ее разрешающей силы.

Типичная картина на экране осциллографа, получающаяся при многократном запуске кластрона, приведена на фотографии рис. 2

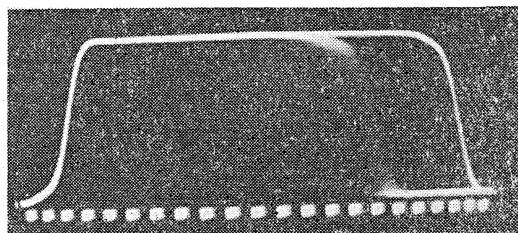


Рис. 2. Огибающие радиоимпульса кластрона в автономном режиме и при „подвоздушении“ внешним сигналом мощностью 2 мквт при оптимальном соотношении частот.

(здесь для сравнения приведена и огибающая импульса при запуске от внешнего сигнала). На рисунке сфотографированы также метки времени (цена метки — 0,1 мксек); время на осциллограмме отсчитывается справа налево. Поскольку ось абсцисс является осью времени, фотометрирование вдоль нее дает функции

$W_A(t)$ ; соответствующая

калибровка осуществляется фотографированием меток времени. Фотометрирование пленки вдоль оси ординат дает функции  $W_t(A)$ . Калибровка оси ординат в высокочастотных напряжениях осуществлялась с помощью измерителя малой мощности: сигнал от кластрона поступал через волноводный переключатель либо на измерительную детекторную головку, либо на измеритель мощности. При фотографировании и фотометрировании выполнялись предосторожности, обычные при таком способе определения характеристик случайных величин. Работа велась при малой яркости свечения осциллографической трубы. Использовалась мягкая изопанхроматическая пленка; для каждой серии измерений снимались калибровочные кривые почернения пленки, позволяющие связать почернение некоторого участка пленки с числом реализаций, проходящих через него. При фотометрировании вводились поправки на скорость движения луча. Суммарная ошибка измерения законов распределения вероятности составляла  $15 \pm 20\%$ .

*Экспериментальные результаты.* Большая часть измерений была проведена с кластронами десятисантиметрового диапазона, имеющими внешние резонаторы. Исследуемый кластрон работал на нагрузку, хорошо согласованную с коаксиальным трактом в диапазоне, соответствующем диапазону электронной настройки. Измерения были проделаны в различных режимах: в различных областях генерации и в разных точках областей генерации. Ниже суммированы основные экспериментальные данные.

На рис. 3 для одного из исследованных кластронов приведены типичные графики нормированных функций распределения времени достижения амплитуды  $A$ , равной половине от стационарной амплитуды  $A_y$ . Параметром кривых служит напряжение на отражателе  $V_{\text{отр}}$  ( $V_{\text{отр}} = 135$  в соответствует центру области генерации; при  $V_{\text{отр}} = 144$  в генерируемая кластроном мощность составляет  $\sim 0,4$  от мощности в центре зоны). Совершенно аналогичные по форме функции распределения были получены для других кластронов и для других областей генерации при значениях  $A$ , меньших  $0,6 \div 0,7 A_y$ ; для значений  $A$ , превышающих  $0,6 \div 0,7 A_y$ , вид функций распределения  $W_A(t)$  несколько отличается от приведенных на рис. 3.

На рис. 4 приведены типичные графики функций распределения

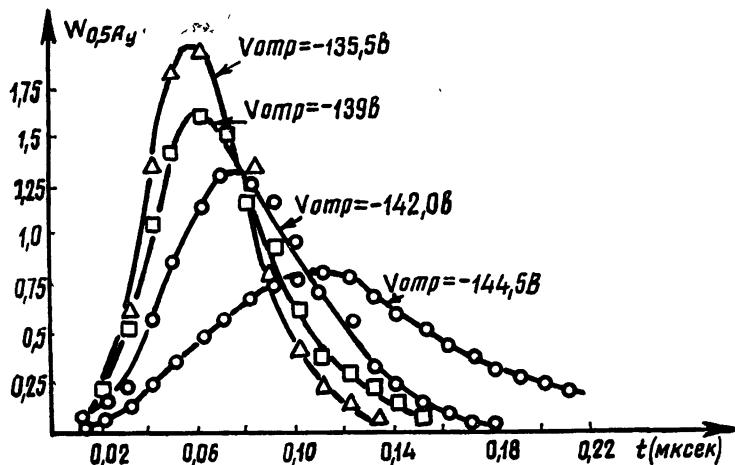


Рис. 3. Функции распределения  $W_{0.5A_y}(t)$  в различных точках области генерации кластрона. На оси ординат  $W_{0.5A_y}$  — в единицах  $10^7 \text{ сек}^{-1}$ .

отношения амплитуды к ее стационарному значению  $x = A/A_y$ , для того же кластрона; параметром кривых является время  $\Delta\tau$ , прошедшее с момента приложения модулирующего видеоимпульса. Графики получены для точки области генерации, в которой генерируемая мощность составляет  $\sim 0,7$  от мощности в центре зоны генерации.

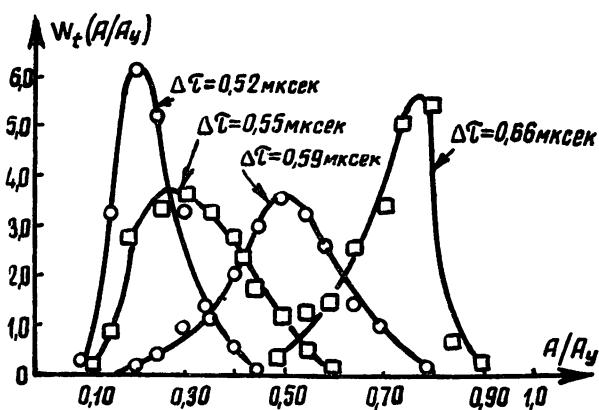


Рис. 4. Функции распределения  $W_t(A/A_y)$  при  $P/P_{\max} = 0,7$  для четырех моментов времени  $\Delta\tau$  ( $\Delta\tau = 0$  соответствует моменту по-дачи модулирующего импульса).

Определенные экспериментально функции распределения  $W_A(t)$  позволяют путем численного интегрирования рассчитать дисперсию  $\overline{\Delta t^2}$  времени достижения амплитуды  $A_i$  и среднее время  $\bar{t}$  достижения указанного значения амплитуды. На рис. 5 приведен график, характеризующий изменение среднеквадратичного отклонения  $\sqrt{\overline{\Delta t^2}}$  времени достижения амплитуды  $A = 0,5 A_y$  по области генерации кластрона

десантиметрового диапазона (функции распределения, соответствующие графику рис. 5, были приведены на рис. 3). Отчетливо выражены минимум величины  $\sqrt{\Delta t^2}$  в центре и существенное возрастание ее при подходе к краям области генерации. Выше уже отмечалось, что вид функций распределения  $W_A(t)$  сохраняется и при других

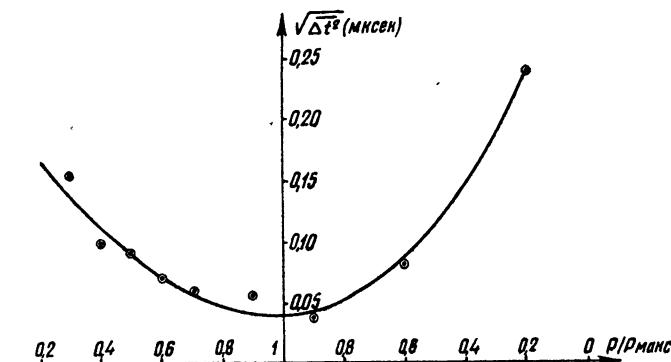


Рис. 5. Среднеквадратичное отклонение  $\sqrt{\Delta t^2}$  времени достижения заданного значения амплитуды, равной  $0,5 A_y$ , в зависимости от рабочей точки на зоне генерации клистрона ( $P/P_{\max}$ —отношение мощности колебаний в данной точке зоны генерации к мощности в центре зоны).

$A \leq 0,6 \div 0,7 A_y$ ; результаты обработки экспериментальных данных показывают, что величина  $\sqrt{\Delta t^2}$  для указанных значений  $A$  в пределах точности измерений не зависит от величины  $A$ , а определяется лишь положением рабочей точки на области генерации клистрона (расчеты были проделаны для  $0,1 \div 0,2 A_y \leq A \leq 0,5 \div 0,7 A_y$ ). Как видно из графиков рис. 3, по мере приближения к краю области генерации наивероятнейшее время достижения заданного значения амплитуды возрастает, а максимальное значение плотности вероятности  $W_A(t)$  уменьшается. Среднее время достижения амплитуды  $A=0,5 A_y$  для исследованных клистронов изменяется от  $\sim 0,1$  мксек и менее в центре области генерации, до  $0,8 \div 1$  мксек на краю (в точке, где отношение мощности генерации к мощности в центре зоны генерации  $P/P_{\max} \approx 0,15 \div 0,2$ ).

При рассмотрении экспериментальных графиков функций распределения амплитуды  $W_t(A)$  (рис. 4) обращает внимание существенная модификация формы кривых распределения с течением времени. Наивероятнейшее значение амплитуды с течением времени возрастает; при этом функция распределения сначала „расплывается“ (это расплывание сопровождается уменьшением максимальной плотности вероятности) и затем снова сужается. Типичные графики дисперсии  $\sigma_x^2$  безразмерной величины  $x = A/A_y$  в функции времени  $t$ , прошедшего с момента подачи модулирующего видеопульса, вычисленные для двух точек зоны генерации клистрона, приведены на рис. 6. Характерным является быстрое нарастание  $\sigma_x^2(t)$  при малых  $t$  (близкое на начальном участке к экспонциальному), сменяющееся затем замедлением роста, достижением максимального значения и быстрым спадом. Время  $t_1$ , необходимое для достижения максимума дисперсии  $\sigma_x^2(t_1)$ , существенно зависит от положения рабочей точки на зоне генерации;  $t_1$  мини-

мально в центре зоны и нарастает по мере приближения к ее краям. Следует отметить также весьма слабую зависимость максимальной величины дисперсии  $\sigma_x^2(t_1)$  от режима кластрона.

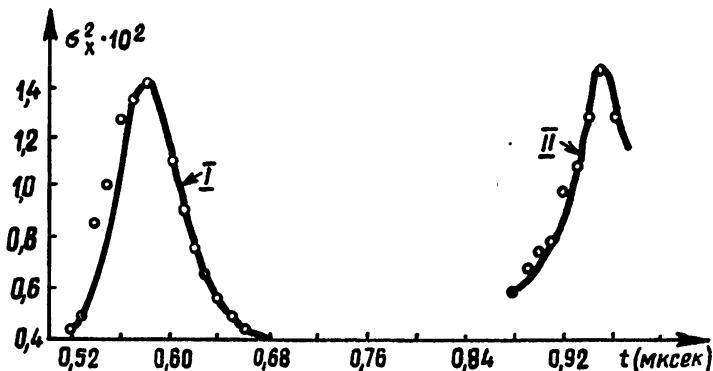


Рис. 6. Графики дисперсии  $\sigma_x^2$  величины  $x = A/A_y$  в функции времени  $t$ , прошедшего с момента подачи модулирующего видеоимпульса для двух точек зоны генерации кластрона (I —  $P/P_{\max} = 0,7$  и II —  $P/P_{\max} = 0,45$ ).

*Обсуждение результатов.* Наблюдаемые экспериментально флюктуации при установлении амплитуды колебаний в кластроне могут быть отнесены за счет ряда причин. Динамическая теория кластрона приводит к следующему закону установления амплитуды колебаний (см., например, [12]):

$$A(t) = \frac{A_y}{\sqrt{1 + Ce^{-2\beta t}}}, \quad (1)$$

где  $C$  — величина, определяемая значением начальной амплитуды колебаний в резонаторе кластрона, и

$$\beta = \frac{\omega_0}{2\Theta} \left[ \frac{i_0}{2V_0G_k} \Theta_n \sin \Theta_n - 1 \right] \quad (2)$$

— инкремент. Выражение для  $\beta$  (см. [12]) записано для случая пренебрежимо малого угла пролета в зазоре резонатора кластрона; в этом выражении  $\omega_0$ ,  $\Theta$  и  $G_k$  — частота, добротность и эквивалентная параллельная проводимость колебательного контура,  $i_0$  — ток пучка,  $V_0$  — напряжение на резонаторе и  $\Theta_n$  — средний пролетный угол в пространстве отражателя.

Флюктуации амплитуды кластрона от запуска к запуску могут быть вызваны, согласно (1), флюктуациями начальной амплитуды и флюктуациями параметров кластрона, вызывающими флюктуации инкремента\*. Простые оценки показывают, что роль флюктуаций инкремента

\* Следует учитывать в общем случае также и воздействие на автогенератор собственных шумов в течение процесса установления, естественно, что такой учет уже не может быть сделан на основе формулы (1). Расчеты показывают (см., например, [8]), что учет флюктуационной силы оказывается необходимым лишь при рассмотрении последней стадии переходного процесса, на которой существенную роль играет зависимость отрицательного сопротивления, вносимого электронным потоком в контур, от амплитуды колебаний.

мента в проведенных измерениях была пренебрежимо малой. Флюктуации напряжения отражателя, являющиеся в нашем случае важнейшей причиной флюктуаций  $\beta$  от запуска к запуску, имели относительную величину  $\sim 10^{-3} \div 5 \cdot 10^{-4}$ . Пользуясь (1) и (2), легко вычислить соответствующие относительные флюктуации времени достижения определенного уровня огибающей  $\sqrt{\Delta t^2 / \bar{t}}$ ; они оказываются для большинства точек области генерации на два порядка ниже экспериментально наблюдавшихся значений.

Таким образом, важнейшим источником флюктуаций амплитуды устанавливающихся колебаний в проведенных экспериментах следует считать дробовые и тепловые шумы (во введении уже отмечалась пренебрежимо малая роль переходных процессов).

Представляет интерес сравнение полученных результатов с теоретическими работами, посвященными исследованию режима „запуска от шумов“ [4,6,8]. Для теоретического описания большей части процесса установления, как показывает сравнение [4,5,8], вполне достаточным является приближение флюктуационных начальных условий. В этом приближении задача о самовозбуждении отражательного клистрона ничем не отличается от таковой для обычного лампового генератора, в связи с чем представляется целесообразным сравнение результатов работ [4,5,8] с проведенным экспериментом. При таком подходе основным затруднением является то обстоятельство, что для генераторов СВЧ диапазона и, в частности, клистрона не вполне определенным является понятие „дисперсии предосцилляционного шума“, используемое в цитированных теоретических работах. В этих работах неявно предполагается, что время установления определенного значения инкремента происходит мгновенно. Для генератора радиоимпульсов это эквивалентно предположению, что время нарастания  $\tau_n$  модулирующего импульса мало по сравнению с периодом колебаний  $T$ ; в действительности же (в частности, в наших экспериментах)  $\tau_n \sim 10^2 \div 10^3 T^*$ . Сказанное затрудняет непосредственное использование теоретических формул для расчета средних значений  $\bar{t}$  и  $\bar{A}$ .

Согласно [4,6,8], на том этапе процесса установления, где нелинейность не играет роли, функции распределения  $W_A(t)$  и  $W_t(A)$  имеют вид\*\*:

$$W_A(t) = 2\beta K^2 \exp [ - (2\beta t + K^2 e^{-2\beta t}) ]; \quad (3)$$

$$W_t(A) = \frac{A}{\sigma_0^2 e^{2\beta t}} \exp \left[ - \frac{A^2}{2\sigma_0^2 e^{2\beta t}} \right]. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma_0^2$  — дисперсия шума в контуре до подачи модулирующего импульса (так называемого „предосцилляционного шума“),  $K^2 = A^2 / 2\sigma_0^2$ . Из функций распределения (3) и (4) могут быть определены средние значения и дисперсии величин  $t$  и  $A$ . Расчеты показывают, что среднее время  $\bar{t}$  достижения амплитуды  $A$

$$\bar{t} = \frac{1}{2\beta} \ln K^2,$$

\* Следует отметить также, что в отражательном клистроне, где обратная связь осуществляется через электронный поток, интенсивность шумов в резонаторе до подачи модулирующего импульса может зависеть от уровня флюктуаций коэффициента обратной связи, определенную роль могут играть флюктуации коэффициента обратной связи, приводящие к «вспышкам» неразвитой генерации.

\*\* В предположении, что закон распределения флюктуационного напряжения на колебательном контуре является нормальным

а среднеквадратичное отклонение

$$\sqrt{\Delta t^2} = 0,64/\beta. \quad (5)$$

Согласно (4), среднее значение амплитуды колебаний

$$\bar{A}(t) = \sqrt{\pi/2} \sigma_0 e^{\beta t},$$

а дисперсия амплитуды

$$\sigma_A^2(t) = \frac{4 - \pi}{2} \sigma_0^2 e^{2\beta t}. \quad (6)$$

Рассмотрим сначала статистические характеристики времени достижения  $t$  определенного значения амплитуды  $A$ . Легко убедиться, что для значений  $A$ , не превышающих  $0,6 \div 0,7 A_y$ , результаты эксперимента (во всяком случае, качественно) хорошо согласуются с теоретическими формулами (3), (5). Это относится, прежде всего, к виду функций распределения  $W_A(t)$ . Типичный пример приведен на рис. 3; теоретические графики построены в [4]. Уменьшение величины максимальной вероятности и „расплывание“ функции распределения при подходе к краю области генерации, наблюдавшееся экспериментально, хорошо объясняются с помощью формулы (3) и связаны с соответствующим уменьшением величины  $\beta$  (см. (2)). Поведение дисперсии времени достижения амплитуды  $A$ , описанное ранее, также хорошо согласуется с теорией (см. формулы (3), (5) и график рис. 5).

Знание функций распределения позволяет определить величину инкремента. Это можно сделать двумя способами, пользуясь либо формулой (5), либо связью между инкрементом и максимальной плотностью вероятности  $[W_A(t)]_{\max}$ . Расчеты показывают, что

$$[W_A(t)]_{\max} = 2\beta/e. \quad (7)$$

Для типичного режима клистрона десятисантиметрового диапазона значения  $\beta$ , рассчитанные с помощью измеренных экспериментально дисперсий времени достижения амплитуды  $A = 0,4 A_y$  в различных точках третьей зоны генерации, изменяются от  $(2 \div 2,2) 10^7 \text{ сек}^{-1}$  в центре зоны (где  $P/P_{\max} = 1$ ) до  $(6,4 \div 6) 10^6 \text{ сек}^{-1}$  при  $P/P_{\max} = 0,4$  и  $4 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$  при  $P/P_{\max} = 0,2$ . Значения инкремента, определяемые с помощью формулы (7), с точностью  $20 \div 25\%$  согласуются с указанными значениями. Теоретическое значение инкремента  $\beta$  в центре области генерации, рассчитанное для тех же условий с помощью формулы (2), составляет  $(8 \div 10) 10^7 \text{ сек}^{-1}$ . Такое расхождение следует отнести за счет факторов, снижающих величину отрицательного сопротивления, вносимого электронным потоком в резонатор, и не учитываемых в идеализированной теории клистрона.

Сравнивая экспериментальные и теоретические данные, относящиеся к статистическим характеристикам амплитуды (графики рис. 4 и 6 и формулы (4), (6)), легко видеть, что качественное согласие между ними существует лишь на начальных стадиях процесса установления, а затем и вид функций распределения  $W_t(A)$ , и ход нестационарной дисперсии амплитуды  $\sigma_A^2(t)$ , наблюдаемые экспериментально, существенно отличаются от теоретических.

Чтобы конкретизировать сказанное, удобно характеризовать различные этапы процесса установления отношением среднего значения амплитуды  $\bar{A}$ , достигнутого к рассматриваемому моменту времени  $t$ , к стационарной амплитуде  $\gamma = \bar{A}/A_y$ . Результаты обработки экспериментальных данных показывают, что при  $\gamma \leq 0,3 \div 0,4$  функция рас-

пределения  $W_t(A)$  является (в пределах точности измерений) рэлеевской и дисперсия  $\sigma_A^2(t)$  экспоненциально нарастает. При  $\gamma$ , больших указанного значения, наблюдается некоторая модификация функции  $W_t(A)$ , и при  $\gamma \geq 0,5 - 0,6$  функция распределения существенно отличается от рэлеевской, что сопровождается замедлением роста, прохождением через максимум и спадом дисперсии  $\sigma_A^2(t)$ . В соответствии с этим относительные флюктуации амплитуды, имевшие на начальном участке процесса установления постоянное значение, равное  $\approx 0,5$ , начинают быстро уменьшаться. Существенное расхождение эксперимента с результатами линейной теории в этом пункте объясняется очевидной непригодностью линейного приближения для объяснения всего хода процесса установления. Попытка учета нелинейности в задаче о запуске автогенератора от флюктуаций сделана в [8]. Полученные там результаты качественно хорошо согласуются с экспериментом — это касается как вида функций распределения  $W_t(A)$ , так и хода во времени нестационарной дисперсии  $\sigma_A^2(t)$ .

## 2. УСТАНОВЛЕНИЕ АМПЛИТУДЫ КОЛЕБАНИЙ В ОТРАЖАТЕЛЬНОМ КЛИСТРОНЕ, «ПОДВОЗБУЖДАЕМОМ» ВНЕШНЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОЙ СИЛОЙ

Одним из распространенных способов уменьшения среднего времени установления амплитуды автоколебаний и дисперсии времени установления является введение в контур генератора синусоидального сигнала от внешнего источника. Статистические характеристики амплитуды нарастающих колебаний для этого случая исследовались с помощью экспериментальной установки, описанной в первом разделе. Синусоидальный сигнал в контур кластрона вводился от генератора стандартных сигналов так, как показано на рис. 1. Измерительная линия служит для контроля КСВН подвоздуждаемого генератора; частоты внешнего генератора и кластрона контролировались по анализатору спектра. Измерения были проделаны с кластронами десятисантиметрового диапазона с внешними резонаторами; в этом случае удается надежно контролировать мощность, вводимую в резонатор кластрона. За недостатком места мы лишь кратко суммируем здесь результаты проведенных измерений.

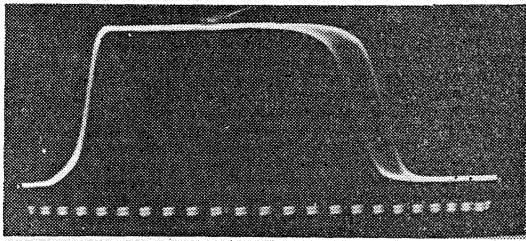
1. При мощностях внешнего сигнала  $P_{\text{вн}} \approx 10^{-9} \text{ вт}$  и ниже наличие внешнего сигнала практически не влияет на протекание процесса установления амплитуды автоколебаний.

2. Статистические характеристики процесса установления амплитуды колебаний при более высоких значениях мощности  $P_{\text{вн}}$  существенно зависят от выбора частоты внешнего сигнала  $f_{\text{вн}}$  (точнее, от соотношения частоты  $f_{\text{вн}}$  и частоты колебаний кластрона  $f_k$ ). Подбирая оптимальную частоту  $f_{\text{вн}}$  (соответствующую минимальной средней длительности переходного процесса), можно было уже при  $P_{\text{вн}} \approx 10^{-6} \text{ вт}$  получать радиоимпульсы с длительностью, практически совпадающей с длительностью модулирующих видеоимпульсов для всех точек области генерации кластрона, в которых мощность была не ниже 0,5 максимальной. На осциллограмме рис. 2 приведен пример огибающей радиоимпульса при  $P_{\text{вн}} \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ вт}$  и оптимальном соотношении частот. Здесь флюктуации положения переднего фронта радиоимпульса уже не разрешаются установкой (они не превышают  $(2-3) \cdot 10^{-8}$  сек).

Несколько неожиданным оказалось то обстоятельство, что при тех же уровнях мощности  $P_{\text{вн}}$  и расстройках, отличных от оптимальной, но не выходящих за пределы полосы пропускания резонатора кластрона, отчетливо наблюдались флюктуации положения переднего фронта радиоимпульса. На осциллограмме рис. 7 приведены различные реа-

лизации огибающей радиоимпульса отражательного клистрона, „подвоздуждаемого“ внешним синусоидальным сигналом мощностью  $10^{-6}$  вт и частотой, отличающейся от оптимальной на 10 мгц. Характерным является существенное отличие функций распределения  $W_t(A)$  и  $W_A(t)$  от таковых для автономного отражательного клистрона; последнее легко заметить, сравнивая осциллограммы рис. 2 и 7. Видно, что на осциллограмме рис. 7 плотность почернения нарастает к краям; поэтому функции распределения  $W_t(A)$  и  $W_A(t)$  имеют характерную вогнутую форму.

Рис. 7. Огибающие радиоимпульса клистрона „подвоздуждаемого“ внешним сигналом (расстройка отлична от оптимальной).



Функции распределения  $W_A(t)$ , измеренные для разных расстроек, позволяют заключить, что флюктуации положения переднего фронта радиоимпульса быстро нарастают с ростом модуля величины отклонения расстройки от оптимальной и они тем больше, чем меньше инкремент  $\beta$ . Все это относится, разумеется, к расстройкам, лежащим в полосе пропускания резонатора клистрона. Исследовался вопрос о факто-рах, определяющих величину оптимальной расстройки. Проведенные измерения показывают, что, как правило, оптимальной расстройке соответствует режим, в котором частота  $f_{\text{ви}}$  является резонансной для колебательного контура клистрона в предосцилляционном режиме.

Следует сделать несколько замечаний, касающихся интерпретации полученных результатов. Уменьшение среднего времени установления и дисперсии времени установления по мере роста мощности „подвоздуждения“  $P_{\text{ви}}$  является вполне естественным. Расчет статистических характеристик амплитуды устанавливающихся колебаний для случая, когда начальная амплитуда колебаний определяется суперпозицией синусоидального сигнала и шума, удобно выполнять в приближении флюктуационных начальных условий, подобно тому, как это сделано в [8]. Такое рассмотрение может оказаться особенно целесообразным для тех задач, в которых ролью переходных процессов пренебрегать нельзя. Если же „подвоздуждающий“ сигнал вводится в колебательный контур генератора извне, то, как правило, его интенсивность существенно превышает интенсивность предосцилляционного шума, которая составляет в нашем случае  $\sim 10^{-9} \div 10^{-10}$  вт (см. ниже). Однако и здесь, как уже указывалось, наблюдаются флюктуации амплитуды (см. рис. 7).

По нашему мнению, возможным источником флюктуаций амплитуды нарастающих колебаний при больших мощностях подвоздуждающего сигнала являются флюктуации фазы подвоздуждающего сигнала от запуска к запуску. Известно, что процесс нарастания колебаний в контуре с отрицательным сопротивлением, к которому в момент  $t=0$  приложена синусоидальная внешняя сила  $f(t)=E_0 \cos(\omega t + \phi)$ , описывается формулой

$$i(t) = \frac{E_0}{|z|} e^{\beta t} \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \cos^2 \xi + \sin^2 \xi} \sin(\omega_0 t + \vartheta),$$

где  $z$  — импеданс и  $\omega_0$  — резонансная частота контура,  $\xi$  — фаза, зависящая от  $\phi$ . Флюктуации фазы  $\phi$  приводят к флюктуациям начальной

амплитуды; эти флюктуации могут быть вызваны флюктуациями в генераторе видеоимпульсов (см., например, [1<sup>3</sup>]) и флюктуациями в "подвоздушающем" генераторе. Элементарный расчет, проведенный в предположении, что  $W(\psi) = 1/2\pi$ , дает результаты, качественно хорошо согласующиеся с экспериментом. Разумеется, флюктуации времени установления от запуска к запуску при больших амплитудах "подвоздушающего" сигнала в ряде случаев могут быть вызваны и флюктуациями параметров (в частности инкремента) генератора; существенную роль для такого генератора, как отражательный клистрон, могут играть также наводки сетевого напряжения на отражатель.

В заключение этого раздела отметим, что исследования в режиме подвоздуждения позволяют дать рецепт сравнительно быстрого определения эффективного уровня предосцилляционных шумов в генераторе. Действительно, зная мощность подвоздуждающего сигнала, вводимого в колебательный контур, и измеряя средние времена достижения определенного уровня амплитуды (на линейном участке характеристики) в автономном генераторе и в режиме подвоздуждения, легко определить эффективное значение мощности предосцилляционных шумов\*. Существенным преимуществом такого метода является то обстоятельство, что здесь нет необходимости в проведении весьма трудоемких абсолютных измерений высокочастотного напряжения, развиваемого на зазоре резонатора клистрона. На основании результатов проведенных нами измерений эта величина для клистрона десятисантиметрового диапазона равна  $\sim (2 \pm 4) 10^{-10} \text{ вт}$ .

Результаты проведенного экспериментального исследования процесса установления амплитуды колебаний в автономном отражательном клистроне показывают, что основным источником флюктуаций устанавливающихся колебаний являются флюктуации начальной амплитуды, определяемой дробовыми и тепловыми шумами. Сравнение экспериментально измеренных статистических характеристик процесса установления амплитуды с предсказанными теоретически показывает, что линейная теория [4,5] вполне пригодна для вычисления флюктуаций положения переднего фронта радиоимпульса; вместе с тем, для представления о протекании всего процесса установления необходим учет нелинейности (см. [8]). Следует подчеркнуть, однако, необходимость в разработке более общей теории, учитывающей как нелинейность характеристики, так и конечное время нарастания модулирующего импульса, теории, в которой детально прослеживался бы весь переходный процесс и из которой в качестве предельного случая могла бы быть получена картина флюктуационных явлений в стационарном режиме.

Результаты исследования статистических характеристик процесса установления амплитуды позволяют рассчитать некоторые динамические характеристики генератора (в частности, величину инкремента). Модификация функций распределения  $W(A)$  (отклонение от рэлеевского распределения) может быть, по-видимому, использована в качестве довольно чувствительного критерия "срабатывания нелинейности". С другой стороны, эти функции позволяют получить также и представления о характере и интенсивности внутренних флюктуационных сил, действующих на генератор. На основании измерения функций

\* Мы здесь говорим об «эффективном значении», имея в виду отмеченную выше неопределенность понятия «предосцилляционный шум».

распределения амплитуды можно судить о законе распределения предосцилляционных шумов (в данном случае он оказывается нормальным); уже указывался простой способ измерения интенсивности предосцилляционных шумов. Представляет интерес сопоставление получаемых таким образом данных с результатами исследования флюктуаций амплитуды и фазы генератора в стационарном режиме. Чувствительность функций распределения  $W_t(A)$  и  $W_A(t)$  к режиму (линейный, нелинейный) и к характеру предосцилляционных условий делает их измерение весьма желательным при детальном исследовании мало изученных генераторов, особенно в СВЧ диапазоне\*.

Отметим, однако, что флюктуации амплитуды устанавливающихся колебаний от запуска к запуску в некоторых случаях могут, как указывалось выше, определяться также и флюктуациями параметров генератора. Результаты исследования генератора в режиме „подвозбуждения“, по нашему мнению, могут служить иллюстрацией целесообразности детального исследования статистических характеристик процесса установления.

Экспериментальная методика, принятая нами, является довольно простой. Чувствительность метода определяется скоростью развертки импульсного осциллографа и постоянной времени детектирующего и усилительного устройств. В наших экспериментах минимальной величиной среднеквадратичного отклонения положения переднего фронта  $\sqrt{\Delta t^2}$ , которую еще можно было зарегистрировать, была величина  $\sim 3 \cdot 10^{-8}$  сек.

Отметим, что если значительно сузить экспериментальную задачу и ограничиться лишь определением величины  $\sqrt{\Delta t^2}$ , можно прибегнуть к другому методу, базирующемуся на исследовании дискретно-сплошных спектров продетектированных радиоимпульсов. Оценки показывают, что таким методом возможно измерение величин  $\sqrt{\Delta t^2} \approx 10^{-9}$  сек. При этом может быть использована аналогичная описанной в [14] аппаратура; при проведении подобных измерений существенным является исключение составляющих сплошного спектра, вызванных флюктуациями амплитуды радиоимпульсов.

В заключение выражаем искреннюю признательность С. Д. Гзовдоверу за постоянный интерес и внимание к работе, а также Г. А. Елкину и И. Т. Трофименко за обсуждение результатов. Авторы приносят также благодарность И. Л. Берштейну, взявшему на себя труд ознакомиться с рукописью и сделавшему ряд ценных замечаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Д. Папалекси, Собрание трудов, изд. АН СССР, М., 1948, стр. 90.
2. Л. Н. Лошаков, С. Э. Хайкин, ЖТФ, 6, 858 (1936).
3. В. Barkhausen, Hessler, HFT, 42, 41 (1933).
4. И. С. Гоноровский, ДАН СССР, 94, 869 (1954).
5. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника, 1, №262 (1956).
6. Н. Ф. Алексеев, Радиотехника, 11, 52 (1956).
7. J. I. Davis, Trans IRE, MTT-4, 40 (1956).
8. С. А. Ахманов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, №10 (1960).

\* Такие измерения для генератора на лампе бегущей волны с внешней обратной связью были проделаны в подготовляемой к печати работе С. А. Ахманова и В. Н. Ештокина.

9. J. R. Pierce, P. Shepherd, Bell Syst. Tech. J., **26**, 460 (1947).
- 10 С. А. Ахманов, И. Т. Трофименко, Г. Ф. Антонов, Доклад на II Всесоюзной конференции МВО по радиоэлектронике, Саратов, 1957.
11. С. А. Ахманов, Г. Ф. Антонов, Доклад на I Всесоюзной конференции по статистической радиофизике, Горький, 1958.
12. С. Д. Гвоздовер, Теория электронных приборов СВЧ, М., 1956, стр. 353.
13. В. И. Тихонов, Вестник МГУ, 5, 31 (1956).
14. А. А. Грачев, Р. М. Стрельский, Труды ГИФТИ и радиофиз. фак-та ГГУ, сер. физ., 35, 31 (1957).

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
23 октября 1959 г.

## ФЛИККЕР-ШУМ ПАЛЬЧИКОВЫХ РАДИОЛАМП

Л. И. Чикин

Приводятся результаты исследования низкочастотных ( $1 \div 400$  гц) шумов отечественных радиоламп, в основном—пальчиковой серии, в том числе ламп с повышенной крутизной, ламп с катодной сеткой, ламп со вторичной эмиссией, а также ламп свольфрамовым катодом. Найдено, что в указанном диапазоне частот спектральная плотность мощности относительных флюктуаций катодного тока обратно пропорциональна частоте; на частоте 1 гц для большинства радиоламп она лежит в пределах  $10^{-14} \div +10^{-13}$  гц<sup>-1</sup>. Обсуждается также зависимость низкочастотных шумов от тока и года изготовления лампы; указывается на некоторые возможности снижения уровня фликкер-шума ламп.

## ВВЕДЕНИЕ

Из результатов экспериментальных работ (см., например, [1, 2]) следует, что на звуковых и инфразвуковых частотах спектр флюктуаций тока эмиссии зависит от частоты и от постоянной составляющей тока следующим образом:

$$\overline{\Delta I_f^2} = A \bar{I}^\beta f^{-\alpha} \quad (1)$$

или, для относительных флюктуаций,

$$\overline{\delta I_f^2} = \overline{\Delta I_f^2}/\bar{I}^2 = A \bar{I}^{\beta-2} f^{-\alpha}.$$

Здесь  $\overline{\Delta I_f^2}$ ,  $\overline{\delta I_f^2}$  — спектральные плотности абсолютных и относительных флюктуаций тока,  $\bar{I}$  — средний ток эмиссии катода (постоянная составляющая),  $A$  — величина, постоянная для данного экземпляра лампы,  $f$  — частота, на которой определяется спектральная плотность мощности флюктуаций.

Большинство экспериментальных данных свидетельствует о том, что  $\alpha \approx 1$ ,  $\beta \approx 2$ , т. е. что  $\overline{\delta I_f^2}$  весьма мало меняется при малых изменениях  $\bar{I}$  (режима лампы). Поэтому для режима, не слишком отличающегося от типового, можно принять:

$$\overline{\delta I_f^2} = A f^{-\alpha}. \quad (2)$$

Коэффициент  $A$ , имеющий размерность кулон<sup>2-β·сек<sup>β-α-1</sup>, из-за  $\beta \approx 2$ ,  $\alpha \approx 1$  может считаться безразмерным. Таким образом, величины  $A$  и  $\alpha$ , найденные для данного экземпляра лампы, должны полностью характеризовать спектр ее низкочастотного шума—вплоть до области, переходной к дробовому шуму, где</sup>

$$\frac{A}{f_{\text{перех}}^\alpha} \approx \frac{2e\Gamma^2}{\bar{I}}$$

(здесь  $e$  — заряд электрона,  $\Gamma^2$  — фактор депрессии дробового шума;  $\Gamma^2 \ll 1$ ). Величина  $f_{\text{перех}}$  для обычных радиоламп ( $\bar{I} = 1 \div 10$  ма) лежит в диапазоне от сотен герц до нескольких килогерц.

Низкочастотный шум лампы, имеющий ход спектральной плотности (2), называется обычно фликкер-шумом или шумом эффекта мерцания. Мешающее действие фликкер-шума проявляется в целом ряде радиоустройств. Фликкер-шум существенен, прежде всего, в усилителях постоянного тока, усилителях инфразвуковых и низких (до 10 кГц) частот; в этом диапазоне фликкер-шум электронных ламп может быть на несколько порядков выше дробового шума. Фликкер-шум отнюдь не безвреден для усилителей более высоких частот (радиочастот). Теоретически и экспериментально было показано [3], что при работе ламп в схемах усилителей радиочастоты фликкер-шум создает паразитную низкочастотную шумовую модуляцию усиливаемого сигнала\*. Естественно поэтому, что в устройствах, где необходимо выделить слабую низкочастотную модуляцию сигнала (радиометры, устройства со сканированием и т. п.), нужно обязательно учитывать и, по возможности, уменьшать фликкер-шум усилительных ламп. Известно также [4], что фликкер-шум генераторных ламп создает нестабильность генерируемой частоты, что затрудняет, например, создание эталонов частоты и систем с использованием допплер-эффекта.

В литературе в настоящее время (кроме работы [5] по исследованию шумов ламп 6Ж4 и 6Ж1П) отсутствуют какие-либо сведения по низкочастотным шумам отечественных радиоламп. Данная работа частично восполняет этот пробел.

### 1. АППАРАТУРА, МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Напряжения на электроды исследуемых ламп подавались с аккумуляторных батарей. Для измерений флюктуаций тока в цепь исследуемого электрода включалось проволочное сопротивление, шумовое напряжение с которого исследовалось с помощью анализатора спектра, подобного описанному в [6]. Номинал нагрузочного сопротивления подбирался достаточно малым (для ламп с сетками—сотни ом), с таким расчетом, чтобы реакция внутреннего сопротивления исследуемой лампы на источник флюктуаций была как можно меньше и не усложняла расчетов, а шумовое напряжение на входе анализатора превосходило в несколько раз порог его чувствительности.

Последний определялся уровнем собственных шумов (см. рис. 1). Точность измерения флюктуаций напряжения равнялась, примерно, 10%. Обследовались по 3–4 лампы (до 10) каждого типа.

При экспериментах измерялась спектральная плотность среднего квадрата напряжения шумов на нагрузке. Затем вычислялась спектральная плотность мощности относительных флюктуаций тока  $\delta I_f^2$  и строился график ее зависимости от частоты. Обычный вид графика для флюктуаций катодного тока представлен на рис. 2. После нанесения экспериментальных точек на графики оказалось, что в диапазоне измерений для фиксированного тока катода выпол-

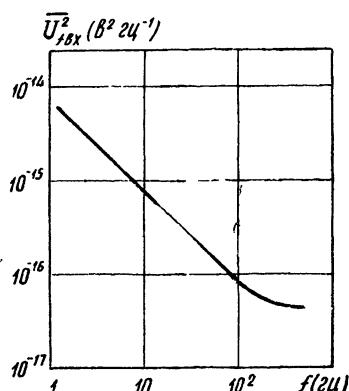


Рис. 1. Зависимость спектральной плотности мощности собственных шумов анализатора, приведенной ко входу, от частоты  $U_{f\text{вх}}^2(f)$ .

\* Эффект мерцания заставляет флюктуировать, согласно закону (2), не только средний ток эмиссии, но и крутизну анодно-сеточной характеристики и пространственный заряд в лампе, а следовательно, внутриламповые емкости между электродами.

няется частотная зависимость (2). Определенные из графиков величины  $A$  и  $\alpha$  для различных ламп и режимов сведены в таблицы 1 и 2.

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что величина  $A$  для различных ламп, включенных в типовом режиме, не выходит за пределы  $10^{-14} \div 10^{-13}$  (за весьма редкими исключениями), а показатель  $\alpha$  близок к единице.

Таблица 1

**Шумовые постоянные  $A$  и  $\alpha$  для диодов и триодов (Напряжение накала для лампы 6Н15П—6,5 в, для остальных ламп 6,3 в)**

Тип лампы	Режим работы лампы			$A$	$\alpha$
	$U_{aK}$ (в)	$U_c$ (в)	$I_K$ (ма)		
6Х6С	9	—	13	$1 \cdot 10^{-14}$	1,0
6Х2П	7	—	30	$5 \cdot 10^{-16}$	1,4
6Н1П	150	-4	2	$5 \cdot 10^{-15}$	1,4
	150	-2,5	3,3	$1 \cdot 10^{-14}$	0,6
	150	0	13,3	$1 \cdot 10^{-14}$	1,0
6Н2П	250	-1,3	3	$4 \cdot 10^{-14}$	1,0
6Н3П	160	-1,3	10	$5 \cdot 10^{-15}$	1,5
6Н15П	80	-1,3	3,3	$1,5 \cdot 10^{-13}$	1,0
6С3П	150	-1,3	11,5	$1 \cdot 10^{-14}$	0,8
6С4П	150	-1,3	19	$2 \cdot 10^{-14}$	0,7
6С6Б	150	-1,3	10	$1,5 \cdot 10^{-14}$	1,0
6С15П	150	-2,5	30	$3 \cdot 10^{-14}$	1,0

Таблица 2

**Шумовые постоянные  $A$  и  $\alpha$  для многоэлектродных ламп  
(Напряжение накала 6,3 в)**

Тип лампы	Режим работы лампы					$A$	$\alpha$
	$U_a$ (в)	$U_{c1}$ (в)	$U_{c2}$ (в)	$U_{c3}$ (в)	$I_K$		
6Ж1П	120	-2	120	0	10	$6 \cdot 10^{-14}$	1,1
	120	0	120	0	17,5	$4 \cdot 10^{-14}$	1,0
	120	-2	120	0	6	$3 \cdot 10^{-14}$	1,3*
6Ж3П	250	-2	150	0	5,5	$6 \cdot 10^{-14}$	1,0
	250	-1	150	0	9	$3 \cdot 10^{-14}$	0,9
	250	0	150	0	12,5	$2 \cdot 10^{-14}$	0,9
6Ж9П	150	-1,3	150	0	25	$4 \cdot 10^{-13}$	1,2
6Ж11П	150	-1,4	150	0	20	$7 \cdot 10^{-14}$	1,3
6Ж20П2	150	+12,6	-1,2	+150	32	$2 \cdot 10^{-14}$	1,1
6В1П	250	-2,5	+250	+150**	4,2	$2 \cdot 10^{-13}$	1,2

\* В этом случае значения  $A$  и  $\alpha$  указаны для напряжения накала 5 в.

\*\* Здесь +150 в — потенциал динода.

## 2. ЗАВИСИМОСТЬ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ШУМОВ ОТ ТОКА

Из рассмотренных таблиц 1 и 2 становится ясно, что интенсивность низкочастотных шумов, характеризуемая величиной  $A$ , зависит от режима лампы. Для диодов (при постоянном токе накала) режим однозначно определяется величиной катодного тока  $I_k$ , равного анодному току  $I_a$ .

Шумы диода можно описывать либо с помощью включенного последовательно с диодом генератора шумовой ЭДС  $\Delta E$ , либо с помощью включенного параллельно диоду генератора шумового тока  $\Delta I$ , либо флюктуациями  $\Delta R$  эквивалентного диоду сопротивления  $R = U_{ak}/I_k$  ( $U_{ak}$ —напряжение анод-катод). При пересчете шумов на  $\overline{\Delta E_f^2}$  и  $\overline{\Delta I_f^2}$  нам приходилось учитывать их распределение между нагрузкой  $R_h$  и внутренним сопротивлением диода  $R_i = \partial U_{ak} / \partial I_k$ , так как (в отличие от случая измерения шумов ламп с сетками) величины  $R_i$  и  $R_h$  были одного порядка.

На рис. 3 показана усредненная по десяти экземплярам ламп 6Х6С экспериментальная зависимость шумов (в пересчете на  $\overline{\Delta E_f^2}$ ;  $\overline{\Delta I_f^2}$  и  $\overline{\Delta R_f^2}$ ) от тока  $I_k$  (оба диода лампы включались в параллель). Сплошные линии соответствуют частоте  $10 \text{ гц}$ , пунктирные—частоте  $30 \text{ гц}$ . Из рис. 3 следует, что для токов от  $0,9$  до  $15 \text{ мА}$

$$\overline{\Delta I_f^2} \sim \overline{I_k^{1,5}}, \quad (3)$$

т. е. что  $\beta = 3/2$ . Зависимости  $\overline{\Delta E_f^2}$  и  $\overline{\Delta R_f^2}$  от тока имеют вид:

$$\overline{\Delta E_f^2} \sim \overline{I_k^{0,5}}; \quad \overline{\Delta R_f^2} \sim \overline{I_k^{-1,5}}. \quad (4)$$

Для многоэлектродных ламп, где  $I_a \neq I_k$ , казалось, следовало бы ожидать увеличения относительных флюктуаций анодного тока за счет дополнительных шумов перераспределения токов (см., например, [9]). Однако в специально предпринятых нами экспериментах с лампой 6Ж1П дополнительных шумов перераспределения на частотах  $1 \div 400 \text{ гц}$  обнаружено не было, т. е.

$$(\overline{\delta I_f^2})_a = (\overline{\delta I_f^2})_k. \quad (5)$$

Так как частотная зависимость флюктуаций в цепях катода и анода тождественна, то

$$A_a = A_k. \quad (6)$$

Измеренные на инфразвуковых частотах ( $\sim 10 \text{ гц}$ ) относительные флюктуации тока экранной сетки той же лампы 6Ж1П оказались в  $2 \div 6$  раз больше относительных флюктуаций тока катода.

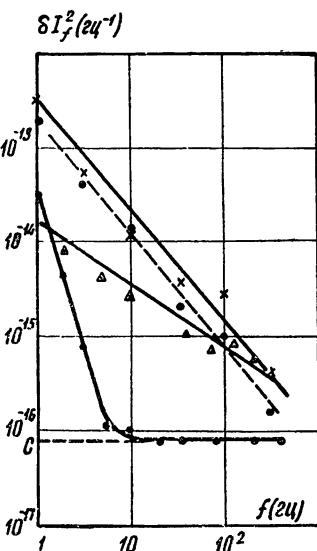


Рис. 2. Спектр мощности относительных флюктуаций  $\overline{\delta I_f^2}(f)$ :  
 —×— для катодного тока  $I_{fk}$  лампы 6B1P;  
 —○— для анодного тока  $I_{fa}$  лампы 6B1P;  
 —△— для катодного тока  $I_{fk}$  лампы 6C4P  
 ( $U_a = 150 \text{ в}, U_c = -1,3 \text{ в}, I_k = 19 \text{ мА}$ );  
 ● для тока диода с вольфрамовым катодом (С—расчетный уровень дробовых шумов).

Отметим также, что определенную роль в изменении величины  $A$  при изменении режима ламп (особенно многоэлектродных) может играть эффект, связанный с кратными ионизациями молекул остаточного газа (см. [7]).

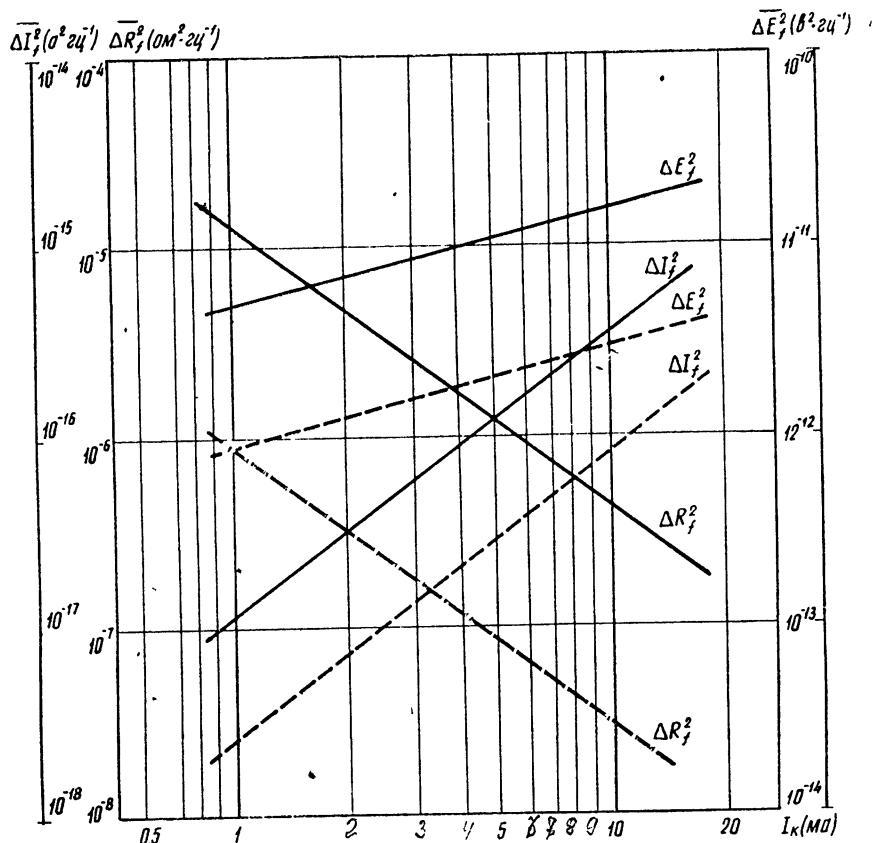


Рис. 3. Зависимость эквивалентных генераторов шума лампы 6Х6С от постоянной составляющей тока катода:

$$\begin{aligned} & \text{---} \quad f = 10 \text{ гц}, \\ & \text{---} \quad f = 30 \text{ гц}. \end{aligned}$$

### 3. О СПОСОБАХ УМЕНЬШЕНИЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ШУМОВ ЛАМП. ВЛИЯНИЕ СТАРЕНИЯ

Низкочастотные шумы генерируются в лампе, во-первых, в процессе эмиссии с оксидного катода и, во-вторых, в процессе пролета электронов к аноду (в результате действия ионов остаточного газа). Влияние ионов можно существенно уменьшить, улучшив вакуум в лампе. В то же время осуществить стабилизацию тока эмиссии оксидного катода, по-видимому, весьма сложно.

В работе [8] было показано, что в лампах с неактивированным вольфрамовым катодом фликкер-шумы весьма малы и сосредоточены в области частот ниже 10 гц. Тот же результат дал и проведенный нами контрольный опыт с диодом, катод которого представлял собою вольфрамовую нить толщиной 80  $\mu$ , а вакуум перед отпайкой достигал  $5 \cdot 10^{-7}$  мм (см. рис. 2).

Однако, как известно, применение вольфрамовых катодов, имеющих сравнительно с оксидными слабую эмиссию, затрудняет конструирование ламп с высокими параметрами. Крутину характеристики лампы можно значительно увеличить, применяя вторичные эмиттеры

(диноды) между управляющей сеткой и анодом (эти эмиттеры одновременно усиливают и фликкер-шум катода). Поскольку предварительные сведения о том, не добавляет ли динод собственного фликкер-шума в анодный ток, отсутствовали, нами были измерены и сравнены между собой низкочастотные флюктуации катодного и анодного токов серийной лампы 6В1П со вторичной эмиссией. Анодный ток лампы был в несколько раз больше катодного тока, т. е. состоял, в основном, из вторичных электронов. На рис. 2 приведена зависимость спектральной плотности относительных флюктуаций катодного  $\delta I_{fk}^2$  и анодного  $\delta I_a^2$  токов от частоты. Из взаимного расположения экспериментальных точек для  $\delta I_{fk}^2$  и  $\delta I_a^2$  можно заключить, что если фликкер-шум вторичной эмиссии и существует, то его относительная доля в низкочастотной шумовой компоненте анодного тока весьма невелика сравнительно с фликкер-шумом оксидного катода. По этой причине дать численную оценку фликкер-шуму вторичного эмиттера не представлялось возможным.

Влияние старения ламп на фликкер-шум было обнаружено и измерено в работе [8]. Для отечественных радиоламп таких измерений, насколько нам известно, не проводилось. Не имея возможности измерять шумы одной и той же лампы в течение нескольких лет ее непрерывной работы, мы подвергли измерению шумы множества однотипных ламп разных лет выпуска. Для этой цели был выбран двойной диод 6Х6С—лампа, по-видимому, самая „консервативная“ по конструкции. Полученная в результате эксперимента кривая распределения интенсивности шумов ламп по годам выпуска имеет довольно закономерный спадающий характер, который может быть обусловлен или увеличением низкочастотных шумов при старении лампы, или ослаблением шумов у ламп более поздних лет выпуска за счет какого-то прогресса в технологии катодов. Разумеется, возможно, что имело место и одновременное воздействие обоих этих факторов.

В заключение заметим, что довольно значительная величина низкочастотных флюктуаций тока радиоламп пальчиковой серии в nominalных режимах

$$\delta I_f^2 \simeq (10^{-14} \div 10^{-13}) f^{-1} \text{ гц}^{-1}$$

создает известные трудности при создании низкочастотных схем, усилителей слабо-модулированных радиочастотных сигналов, генераторов с повышенной стабильностью. Уменьшение низкочастотных флюктуаций может быть произведено за счет применения металлических неактивированных катодов при одновременном улучшении вакуума и, возможно, за счет использования вторичных эмиттеров.

Автор выражает благодарность А. Н. Малахову за ценные советы и постоянное внимание к данной работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Грановский, Электрические флюктуации, ОНТИ, М—Л., 1936
2. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 4, 54 (1959).
3. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 2, 438 (1957).
4. В. С. Троицкий, Изв. выш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 20 (1958); 2, 573 (1959).
5. Б. В. Абрамов, А. И. Тихонов, Радиотехника, 12, 6, 45 (1957).
6. А. Н. Малахов, Приборы и техника эксперимента, 1, 79 (1958).
7. А. Н. Малахов, В. Е. Дубровин, ЖТФ, 26, 1451 (1956).
8. J. G van Wijngaarden, Physica, 18, 689 (1952).
9. C. J. Bakker, Physica, 5, 581 (1938).

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ КОРРЕЛЯЦИИ ФЛЮКТУАЦИЙ КОЭФФИЦИЕНТА ПРЕЛОМЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЗЫ

*Ф. А. Маркус*

Находится освещенность фокальной плоскости линзы в том случае, когда падающее излучение проходит через слой с неоднородностями коэффициента преломления, расположенный в области геометрической оптики относительно отверстия линзы. Получена и исследована связь между освещенностью фокальной плоскости и преобразованием Фурье функции корреляции флюктуаций коэффициента преломления.

Исследованию распространения волн в средах со случайными неоднородностями за последнее десятилетие посвящено очень много работ. В большей части этих работ рассматривается так называемая прямая задача теории распространения: задаются статистические характеристики среды и падающее излучение, а по ним находятся статистические характеристики волнового поля. Для изучения физических свойств среды большой интерес представляет решение обратной задачи: по наблюдаемым характеристикам волнового поля найти характеристики среды.

В работе Чернова [1] рассматривается влияние флюктуаций в падающей волне на дифракционное изображение фокусирующей системы линзы. Автор вычисляет средний квадрат волнового поля за линзой и, в частности, в фокальной плоскости линзы. Так как средний квадрат волнового поля есть непосредственно измеряемая величина, то полученное автором выражение можно рассматривать как интегральное уравнение относительно статистических характеристик среды. Однако решение этого уравнения в том виде, в каком оно приведено в работе [1], не представляется возможным из-за его сложности.

В то же время можно найти гораздо более простые уравнения, связывающие характеристики поля и характеристики среды, когда линза служит приемником для поля, если рассмотреть предельные случаи расположения рассеивающего объема относительно линзы. В работе Зверева [2] получен результат, который может служить решением обратной задачи. Автор показал, что существует простая связь между интенсивностью рассеянного излучения, принятого "поршневым" приемником, и функцией корреляции коэффициента преломления в том случае, когда рассеивающий объем находится в области дифракции Фраунгофера относительно приемника.

Идеальная линза (линза без потерь, обладающая таутохронностью) является поршневым приемником для видимого света. Следовательно, такая линза может служить прибором для определения функции корреляции флюктуаций коэффициента преломления, когда рассеивающий объем находится в области дифракции Фраунгофера относительно отверстия линзы. В настоящей работе вычисляется средний квадрат волнового поля или освещенность фокальной плоскости линзы в том случае, когда неоднородности среды расположены в области геометрической оптики относительно отверстия линзы. Освещенность фокальной плоскости в этом случае может быть связана с функцией корреляции

ляции флюктуаций коэффициента преломления более простым и наглядным выражением, чем то, которое было получено в работе [1].

Допустим, что плоская волна проходит путь  $L$  в неоднородной среде, после чего попадает на линзу. Для характеристики свойств неоднородной среды введем коэффициент преломления

$$n = n_0 + \mu(x, y, z),$$

где  $n_0 = \bar{n}$  — среднее значение коэффициента преломления, а  $\mu(x, y, z)$  — флюктуация коэффициента преломления — случайная функция координат. Сделаем следующие предположения о свойствах неоднородной среды.

1. Среда считается стационарной в течение времени, необходимого для распространения света, но в фокальной плоскости линзы мы наблюдаем среднее по времени значение освещенности, совпадающее со средним по ансамблю.

2. Среда статистически однородна и изотропна.

3. Флюктуации коэффициента преломления малы по сравнению с его средним значением.

Введем систему координат следующим образом: ось  $z$  направим по главной оптической оси линзы от линзы внутрь рассеивающего слоя, а плоскость  $XOY$  совместим с главной плоскостью линзы (см. рис. 1).

По условию (2) функция корреляции коэффициента преломления  $\mu_1(x_1, y_1, z_1) \mu_2(x_2, y_2, z_2)$  зависит только от разности координат:

$$\mu_1(x_1, y_1, z_1) \mu_2(x_2, y_2, z_2) = \bar{\mu^2} B(r_1 - r_2)$$

(здесь и в дальнейшем черта означает усреднение по ансамблю).

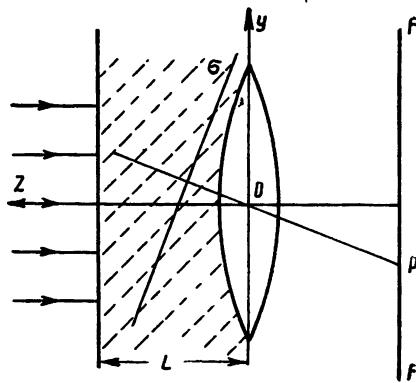


Рис. 1.

Для вычисления волнового поля в некоторой точке  $P$  фокальной плоскости линзы (рис. 1) воспользуемся свойствами идеальной линзы. Для такой линзы все пути от источника до изображения оптически одинаковы. Значит, для вычисления поля в точке  $P$  можно построить перед линзой вспомогательную плоскость  $\sigma$ , перпендикулярную к вектору  $OP$  ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) (рис. 1), и найти поле следующим образом:

$$E_P = \int_{\sigma} \frac{1}{i \lambda F_P} E(X, Y, Z) d\sigma,$$

где  $X, Y, Z$  — координаты произвольной точки плоскости  $\sigma$ , а интеграл берется по проекции входного зрачка линзы на плоскость  $\sigma$ .

Поле  $E(X, Y, Z)$  должно быть решением волнового уравнения, описывающего распространение света в неоднородной стационарной среде. Если не интересоваться эффектами, связанными с поляризацией, то волновое уравнение для любой из компонент векторного поля имеет вид

$$\nabla^2 \mathcal{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Принимая гармоническую зависимость  $\mathcal{E}$  от времени:

$$\mathcal{E} = E(X, Y, Z) e^{i\omega t},$$

получим уравнение для  $E(X, Y, Z)$ :

$$\nabla^2 E + n^2 k_0^2 E = 0.$$

Воспользуемся методом малых возмущений и найдем первое приближение, пренебрегая ослаблением падающей волны. Для этого представим  $E$  в виде  $E = E_0 + E_1$ , где  $E_1 \ll E_0$ . Поле падающей волны  $E_0$  удовлетворяет уравнению распространения в однородной среде:

$$\nabla^2 E_0 + n_0^2 k_0^2 E_0 = 0;$$

для  $E_1$  справедливо уравнение

$$\nabla^2 E_1 + n^2 k_0^2 E_1 + k_0^2 (n^2 - n_0^2) E_0 = 0,$$

которое при наложении условия  $\mu \ll n_0$  сводится к уравнению:

$$\nabla^2 E_1 + n_0^2 k_0^2 E_1 + 2\mu n_0 k_0^2 E_0 = 0.$$

Решение последнего можно взять в виде:

$$E_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{R} e^{-ik_0 R} (-2\mu n_0 k_0^2 E_0) dv,$$

где  $R = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}$  — расстояние от произвольной точки  $x, y, z$  внутри рассеивающего объема  $V$  до произвольной точки  $X, Y, Z$  плоскости  $\sigma$ .

Пусть на границу неоднородной среды падает плоская волна  $E_0 = A_0 e^{ik_0 z}$ . В этом случае:

$$E(X, Y, Z) = E_0 + \frac{A_0 k_0^2 n_0}{2\pi} \int_V \frac{1}{R} e^{-ik_0 R} \mu(x, y, z) e^{ik_0 z} dv;$$

$$E_P = \frac{1}{i\lambda F_P} \int_{\sigma} E_0 d\sigma + \frac{A_0 k_0^2 n_0}{2\pi i\lambda F_P} \int_{\sigma} \int_V \frac{1}{R} e^{-ik_0 R} \mu(x, y, z) e^{ik_0 z} dv d\sigma.$$

Интеграл  $\int_{\sigma} R^{-1} e^{-ik_0 R} d\sigma$  может быть вычислен при условии, что все точки рассеивающего объема лежат в области геометрической оптики относительно отверстия линзы:

$$\sqrt{R\lambda} \ll D,$$

где  $D$  — наименьший размер отверстия линзы. Тогда

$$\int_{\sigma} \frac{1}{R} e^{-ik_0 R} d\sigma = \begin{cases} i\lambda e^{-ik_0 (\alpha x + \beta y + \gamma z)} & \text{если } (\alpha, \beta, \gamma) \neq 0 \\ 0 & \text{если } (\alpha, \beta, \gamma) = 0 \end{cases}.$$

Нуль получается для точек  $x, y, z$ , лежащих вне цилиндра с осью вдоль  $OP$  ( $\alpha, \beta, \gamma$ ), опирающегося на линзу (рис. 2). Для точек, лежащих внутри цилиндра, справедливо выражение

\* Легко показать, что это предположение не ограничивает общности рассуждений: при произвольном направлении распространения плоской волны в фокальной плоскости сместится только центр картины, а сама картина не изменится.

Возвращаясь к выражению для поля в фокальной плоскости, получим:

$$E_P = \frac{1}{i\lambda F_P} \int_{\sigma} E_0 d\sigma + \frac{A_0 k_0^2 n_0}{2\pi F_P} \int_V \mu(x, y, z) e^{-ik_0 [\alpha x + \beta y + (\gamma - 1) z]} dv;$$

интегрирование во втором слагаемом ведется по объему указанного выше цилиндра. Средний квадрат волнового поля или освещенность фокальной плоскости линзы равна

$$\begin{aligned} \overline{E_P E_P^*} &= \frac{1}{\lambda^2 F_P^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} \overline{E_0 E_0^*} d\sigma_1 d\sigma_2 + \\ &+ \frac{A_0^2 k_0^4 n_0^2}{4\pi^2 F_P^2} \int_{V_1} \int_{V_2} \overline{\mu_1(x_1, y_1, z_1) \mu_2(x_2, y_2, z_2)} e^{-ik_0 [\alpha x_1 + \beta y_1 + (\gamma - 1) z_1]} \times \\ &\times e^{ik_0 [\alpha x_2 + \beta y_2 + (\gamma - 1) z_2]} dv_1 dv_2. \end{aligned}$$

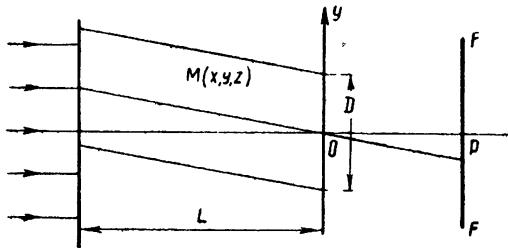


Рис. 2.

Введем сокращенные обозначения

$$\overline{E_P E_P^*} = I_0 + I_1,$$

где

$$I_0 = \frac{1}{\lambda^2 F_P^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} \overline{E_0 E_0^*} d\sigma_1 d\sigma_2$$

— нулевое приближение (освещенность фокальной плоскости линзы при отсутствии флюктуаций),

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{A_0^2 k_0^4 n_0^2}{4\pi^2 F_P^2} \int_{V_1} \int_{V_2} \overline{\mu_1(x_1, y_1, z_1) \mu_2(x_2, y_2, z_2)} e^{-ik_0 (\alpha x_1 + \beta y_1 + (\gamma - 1) z_1)} \times \\ &\times e^{ik_0 (\alpha x_2 + \beta y_2 + (\gamma - 1) z_2)} dv_1 dv_2 \end{aligned}$$

— первое приближение.

Величина  $I_0$  с достаточной точностью может быть вычислена для любой формы отверстия линзы. Для нахождения  $I_1$  перейдем к новым переменным:

$$x_2 - x_1 = \xi; \quad x_2 + x_1 = 2x,$$

$$y_2 - y_1 = \eta; \quad y_2 + y_1 = 2y;$$

$$z_2 - z_1 = \zeta; \quad z_2 + z_1 = 2z.$$

Учитывая, что

$$\overline{\mu_1(x_1, y_1, z_1) \mu_2(x_2, y_2, z_2)} = \overline{\mu^2} B(\xi, \eta, \zeta),$$

получим:

$$I_1 = \frac{A_0^2 n_0^2 k_0^4 \overline{\mu^2}}{4\pi^2 F_P^2} \int_{V'_1} \int_{V'_2} B(\xi, \eta, \zeta) e^{ik_0 [\alpha\xi + \beta\eta + (\gamma-1)\zeta]} dv'_1 dv'_2,$$

где

$$dv'_1 = dx dy dz, \quad dv'_2 = d\xi d\eta d\zeta.$$

Если ввести новую систему координат с осью  $z$ , направленной по оси цилиндра (оси  $x$ ,  $y$  ориентированы любым образом в плоскости  $\sigma$ ), то вычисление интеграла существенно упрощается. Прежде всего можно провести интегрирование по переменным  $x$  и  $y$ . Область изменения этих переменных (проекцию входного зрачка линзы на плоскость  $\sigma$ ) обозначим через  $\sigma^*$ . Интегрирование по переменным  $\xi$  и  $\eta$  можно распространить на всю плоскость от  $-\infty$  до  $\infty$ , если предположить, что радиус корреляции флюктуаций показателя преломления в попечном направлении  $a$  много меньше размеров линзы:  $a \ll D$ . В этом случае вычисление интеграла

$$I = \int_{V'_1} \int_{V'_2} B(\xi, \eta, \zeta) e^{ik_0 [\alpha\xi + \beta\eta + (\gamma-1)\zeta]} dv'_1 dv'_2$$

сводится к вычислению повторных интегралов:

$$I = 2\sigma^* \int_0^{L/2\gamma} \int_{-2z}^{2z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi, \eta, \zeta) e^{ik_0 [\alpha\xi + \beta\eta + (\gamma-1)\zeta]} d\xi d\eta d\zeta dz.$$

Введем преобразование Фурье для функции  $B(\xi, \eta, \zeta)$ :

$$B(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{uvw} e^{i(u\xi + v\eta + w\zeta)} du dv dw.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\sigma^*}{(2\pi)^3} \int_0^{L/2\gamma} \int_{-2z}^{2z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{uvw} e^{i\xi [u+k_0\alpha] + i\eta [v+k_0\beta] + i\zeta [w-k_0(1-\gamma)]} \times \\ &\quad \times du dv dw d\xi d\eta d\zeta dz = \\ &= \frac{\sigma^*}{\pi} \int_0^{L/2\gamma} \int_{-2z}^{2z} \int_{-\infty}^{\infty} B_{u_0 v_0 w} e^{i\xi [w-k_0(1-\gamma)]} dw d\zeta dz, \end{aligned}$$

где  $u_0 = -k_0\alpha$ ,  $v_0 = -k_0\beta$ . Меняя порядок интегрирования и проводя интегрирование по переменным  $\zeta$  и  $z$ , получим:

$$I = \frac{2\sigma^*}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{u_0 v_0 w} \frac{\sin^2 [w - k_0 (1-\gamma)] L/2\gamma}{[w - k_0 (1-\gamma)]^2} dw.$$

Последнее выражение можно упростить. Рассмотрим множители, стоящие под интегралом. Фактор  $B_{u_0 v_0 w}$  как функция переменного  $w$  имеет абсолютный максимум при  $w = 0$  и существенно спадает при некотором  $w^*$ . Второй множитель имеет максимум при  $w_0 = k_0(1-\gamma)$ , а ширина области его существенных значений равна  $4\pi\gamma/L$ . Если  $w^* \gg 4\pi\gamma/L$ , то первый множитель как функция, медленно меняющаяся по сравнению со вторым множителем, может быть вынесен из-под знака интеграла со значением в точке  $w_0$ :

$$I = \frac{\sigma^* L}{\pi\gamma} \cdot B_{u_0 v_0 w}.$$

Освещенность фокальной плоскости имеет вид:

$$\overline{E_P E_P^*} = \frac{1}{\lambda^2 F_P^2} \iint_{\sigma_1 \sigma_2} E_0 E_0^* d\sigma_1 d\sigma_2 + \frac{A_0^2 n_0^2 k_0^4 \mu^2 \sigma L}{4\pi^3 F_P^2} B_{u_0 v_0 w_0}.$$

Измерение освещенности фокальной плоскости при наличии и при отсутствии неоднородностей позволит определить преобразование Фурье от функции корреляции флюктуаций коэффициента преломления.

Условию  $w^* \gg 4\pi\gamma/L$  удовлетворить тем легче, чем больше  $L$ . Однако допущения, сделанные при решении задачи (возможность применения метода малых возмущений и условие  $\sqrt{L\lambda} \ll D$ , которому должны удовлетворять положения наиболее далеких центров рассеяния), ограничивают толщину рассеивающего слоя.

Неравенство  $\sqrt{L\lambda} \ll D$  не является слишком жестким для видимого света. Пусть  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ , а  $L = 10 \text{ км}$  (оптическая толщина атмосферы). Тогда условие будет выполнено для линз, диаметр которых  $D > 30 \text{ см}$ .

Более сильное ограничение на величину  $L$  накладывает использование метода малых возмущений. Необходимым условием применимости метода будет требование малости энергии рассеянного поля по сравнению с энергией падающего поля. Если взять функцию корреляции в виде

$$B(\xi, \eta, \zeta) = e^{-r^2/a^2} \quad (r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}),$$

то для  $L$  получается следующее условие:  $L < 1/k_0^2 \mu^2 a$ , т. е., как и следовало ожидать, допустимая величина  $L$  определяется величиной  $\mu^2$

Будут ли полученные с помощью линзы сведения о функции  $B_{uvw}$  более или менее полными, зависит от формы неоднородностей. Допустим, что неоднородности обладают сферической симметрией. Тогда  $B(\xi, \eta, \zeta)$  является функцией только  $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ , а  $B_{uvw}$  будет функцией  $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ . Если радиус корреляции есть  $a$ , то область существования  $B_{uvw}$  будет  $1/a$  по каждому из переменных. Но в той части фокальной плоскости, где  $u$  или  $v$  изменяются от 0 до  $1/a$ ,  $w$  изменяется только от нуля до  $(1/a)\lambda/4\pi a$  и составляет малую часть  $1/a$ , если  $a > \lambda$ , что обычно выполняется. Следовательно, в рассматриваемом случае измерение освещенности фокальной плоскости даст значение функции  $B_{uvw}$  при  $w = 0$  или, иначе говоря, даст значения преобразования Фурье для поперечной функции корреляции.

Сказанное остается справедливым, если характерные размеры неоднородностей по всем трем направлениям одного порядка. И только

в том случае, когда размер неоднородностей в направлении распространения во столько же раз больше размера в перпендикулярном направлении, во сколько этот последний больше длины волны, мы получим, измеряя освещенность фокальной плоскости, все существенные значения функции  $B_{uvw}$ .

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайнными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
- 2 В. А. Зверев, Акустич. ж., 3, 329 (1957).

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
17 февраля 1959 г.

## ЭЛЕКТРОННО-ВОЛНОВОЙ ГЕНЕРАТОР С ТОРМОЗЯЩИМ ПОЛЕМ

В. Н. Шевчик и Г. Н. Шведов

Механизм колебаний электронно-волнового генератора объясняется взаимодействием волн пространственного заряда в замкнутом электронном потоке. Анализ энергообмена встречных электронных потоков показывает возможность генерации рассматриваемой схемы. Из этих соображений выводится формула для частоты электронно-волнового генератора в зависимости от напряжений на электродах и геометрии лампы. Экспериментальная проверка формулы показывает, что она остается справедливой при учете влияния пространственного заряда на ход потенциала в лампе и учете зависимости фазовой скорости волн пространственного заряда от плотности пространственного заряда. Приводятся практические характеристики электронно-волнового генератора, один из возможных вариантов конструкции, данные по мощности, затягиванию частоты и др.

Несколько лет назад в лаборатории электронники Саратовского университета при работе с отражательными клистронами было обнаружено, что в отсутствие резонатора отражательный клистрон генерирует колебания в дециметровом диапазоне длин волн. Экспериментальное исследование обнаруженных колебаний показало, что частота их может изменяться в широких пределах (порядка октавы) при изменении напряжения на сетках клистрона, а также при изменении потенциала отражателя. Отражательные клистроны разных типов с различной геометрией электродов генерировали колебания с различными частотами, но подключение тех или иных внешних цепей к ним не изменяло генерируемой частоты. Мощность колебаний была очень мала [1,2].

Таким образом, налицо было существование широкодиапазонных колебаний в схеме без колебательных и замедляющих систем с частотой, определяемой напряжениями на электродах и геометрией лампы. Изучение этих колебаний в клистроне без резонатора имеет несомненный теоретический интерес с точки зрения выяснения природы электронных колебаний в схеме тормозящего поля и некоторых других СВЧ генераторах с широкой электронной перестройкой (например, в строфотроне). Не менее интересна практическая сторона вопроса: попытаться использовать способность клистрона без резонатора настраиваться напряжением в широком диапазоне для создания мало-мощного безмагнитного генератора с электронной настройкой.

## 1. ВОЗМОЖНОСТИ ОБЪЯСНЕНИЯ НАБЛЮДАЕМЫХ КОЛЕБАНИЙ

При изучении возможностей объяснения наблюдаемых колебаний в первую очередь было проверено, не являются ли они обычными колебаниями отражательного клистрона с каким-то паразитным колебательным контуром малой добротности. Для этого к дискам клистрона присоединялся внешний контур, имеющий низкую добротность (см. ниже рис. 7), и изучалась зависимость мощности и частоты колебаний от напряжения на сетках (рис. 1). Несложные расчеты (например, согласно [3]) показывают, что клистрон с подобными контурами не может возбуждаться. К аналогичному выводу о неклистронном механизме колебаний приводят изучение работы [4].

Для сравнения наблюдаемых колебаний с электронными колеба-

ниями плазмы [5,6] был поставлен эксперимент, в котором напряжения на электродах лампы поддерживались постоянными, а ток изменялся за счет изменения температуры катода.

В случае, если колебательной системой является плазма, следовало ожидать изменения частоты колебаний пропорционально корню квадратному из тока. Однако многочисленные эксперименты показали, что генерируемая частота очень слабо зависит от величины тока в лампе, и, следовательно, исследуемые колебания нельзя считать колебаниями плазмы.

Изучение работ [7] и [8] показало, что первая из них описывает только один специфический режим электронных колебаний, а вторая исходит из „качаний электронов“ по Баркгаузену—Курца и отмечает факт резкого несовпадения экспериментально измеренной частоты колебаний с частотой качаний электронов в лампе.

Несомненное сходство наблюдаемых колебаний с колебаниями Баркгаузена—Курца побудило внимательно изучить состояние вопроса о механизме последних. Согласно работам [9–12], ряд авторов признают существование внутреннего электронного механизма колебаний, однако при объяснении его исходят из наличия переменного напряжения на электродах, которое приводит к рассортировке электронов и установлению колебаний. Фактически это—объяснение работы схемы тормозящего поля с внешним колебательным контуром. Хольман в 1957 г. в статье [12] прямо указывает, что колебания Баркгаузена—Курца до сих пор не получили убедительного объяснения.

Таким образом, встречающиеся иногда высказывания о том, что описываемые в данной работе колебания есть колебания Баркгаузена—Курца, не только ничего не объясняют, но являются попыткой отмахнуться от принципиально важного вопроса о природе чисто электронных колебаний в схеме тормозящего поля. Приведенные выше попытки объяснить эти колебания являются безуспешными, и следует искать новые пути решения вопроса.

Наиболее логичным и последовательным представляется связать наблюдаемые колебания с колебательными свойствами самого электронного потока, обусловленными кулоновскими силами отталкивания электронов. По современным взглядам, учет кулоновского взаимодействия электронов дает картину распространения возмущения в электронном потоке в виде волн плотности, скорости и электрического поля. Совокупность этих волн называется волной пространственного заряда (подробнее см. [13]). Если один электронный поток движется относительно другого потока, в котором распространяется волна простран-

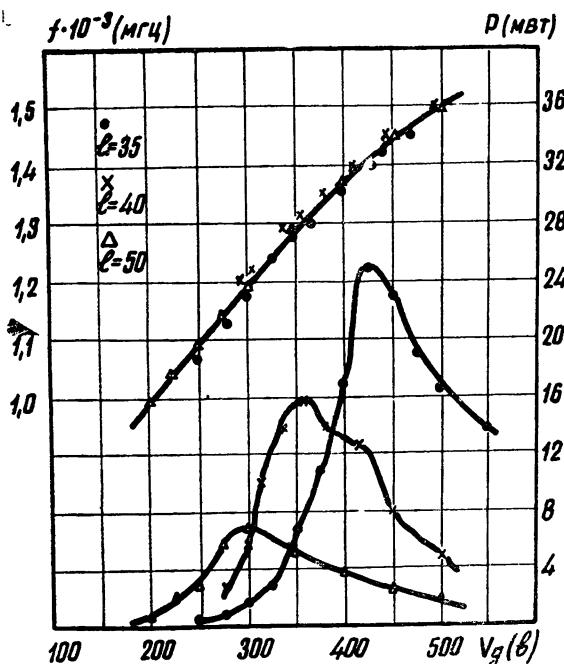


Рис. 1. Зависимость мощности  $P$  и частоты  $f$  от напряжения на сетках кlyстрона А при различной длине перемычек.

ственного заряда, то первый поток взаимодействует с электрическим полем волны во втором потоке. Это взаимодействие вполне аналогично взаимодействию с полем замедляющей системы в ЛБВ и приводит к усилению сигнала в рассматриваемой двухлучевой системе. Так осуществляется усиление без участия колебательных и замедляющих систем, т. е. электронно-волновое усиление. Очевидно, что если в электронно-волновом усилителе обеспечить обратную связь, то получится электронно-волновой генератор, т. е. генератор без колебательных контуров.

Плодотворность такой электронно-волновой трактовки генераторов без колебательных (и замедляющих) систем прекрасно подтверждается на примере диокотронного генератора [14].

## 2. ЭЛЕКТРОННО-ВОЛНОВАЯ ТРАКТОВКА ГЕНЕРАТОРА С ТОРМОЗЯЩИМ ПОЛЕМ

В самом общем виде картину генерации в диокотроне и некоторых других генераторах с широкой электронной настройкой (митрон [15], строфотрон [16], некоторые приборы с центробежно-электростатической фокусировкой [17]) можно представить следующим образом. Замкнутый электронный поток представляет собой своеобразный электронный резонатор, так как в нем могут существовать колебания только определенных частот, удовлетворяющих условию замкнутости волны пространственного заряда. Чтобы эти колебания поддерживались, не затухая, должно быть обеспечено электронно-волновое взаимодействие с отдачей энергии высокочастотному полю пространственного заряда. Тогда электронный резонатор превращается в электронно-волновой генератор. Механизм электронно-волнового взаимодействия в указанных приборах почти не изучен. Можно указать лишь работу [18], в которой сделана попытка объяснения механизма электронно-волновых колебаний в магнетроне.

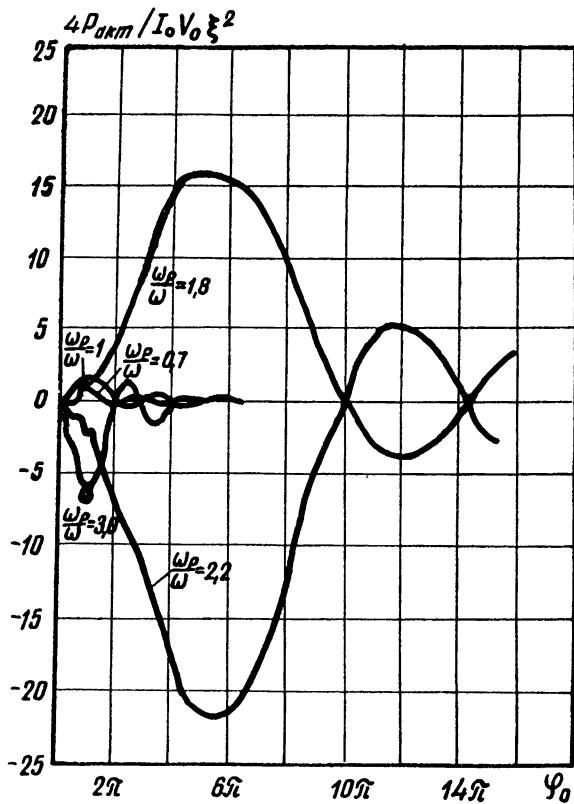
Применяя эту общую схему к исследуемым колебаниям, необходимо отметить, что строгий электронно-волновой анализ схемы тормозящего поля в настоящее время не представляется возможным, так как существующие методы расчета нельзя использовать при наличии двузначности скорости. В связи с этим целесообразно разделить задачу на две части и рассмотреть сначала идеализированную схему взаимодействия встречных электронных потоков, чтобы выяснить в принципе возможность передачи энергии электронным потоком высокочастотному полю встречной волны пространственного заряда. Имеющийся электронно-волновой анализ бесконечно длинных встречных потоков (см., например, [19]) не имеет прямого отношения к поставленной задаче, так как описывает изменение амплитуды волн с расстоянием. Для стационарного режима генерации удобно использовать метод заданного поля и рассматривать энергообмен электронного потока с электрическим полем волны пространственного заряда во встречном потоке. Такой анализ был проведен в [20]; оказалось, что существующий в системе волновой процесс действительно получает энергию за счет взаимодействия встречных потоков.

На рис. 2 представлен график зависимости активной мощности взаимодействия встречных электронных потоков от угла пролета электронного потока в пространстве взаимодействия  $\varphi_0 = \omega z / v_0$ , где  $\omega$  — генерируемая частота,  $z$  — длина пространства взаимодействия,  $v_0$  — скорость движения электронов. Отрицательная мощность взаимодействия соответствует передаче энергии высокочастотному полю. Из рис. 2 видно, что это возможно в широком диапазоне значений угла пролета  $\varphi_0$  и

плотности заряда, характеризуемой отношением собственной частоты плазмы  $\omega_p$  к частоте сигнала  $\omega$ .

При малых  $\omega_p/\omega$ , встречающихся обычно на практике, взаимодействие встречных электронных потоков дает очень слабый энергетический эффект, что соответствует наблюдаемым экспериментальным фактам. Это взаимодействие аналогично взаимодействию со встречной волной в ЛБВ или взаимодействию в монотроне.

Рис. 2. Зависимость активной мощности взаимодействия встречных электронных потоков  $P_{акт}$  от угла пролета  $\varphi_0$  ( $I_0$ —постоянный ток луча,  $V_0$ —постоянное напряжение луча,  $\xi^2 = V_1^2/V_0^2$ ,  $V_1$ —переменное модулирующее напряжение).



Реальная схема отличается от рассмотренной наличием участков ускорения и торможения, а также тем, что один поток является продолжением другого. Очевидно, что это не может резко изменить результат взаимодействия, и в реальной схеме можно предполагать наличие стационарного волнового процесса в замкнутом электронном потоке, образованном многократным прохождением электронов от катода до отражателя и обратно. Поэтому исследуемый генератор был назван электронно-волновым генератором с тормозящим полем [1-3].

Вторая часть задачи состоит в описании частотных характеристик генератора. В замкнутом электронном потоке будет поддерживаться волновой процесс только на такой частоте, при которой по замкнутому пути укладывается целое число волн. Поскольку обычно фазовая скорость волн пространственного заряда мало отличается от скорости электронов (за исключением участков вблизи катода и отражателя), условие замкнутости приближенно сводится к целому числу  $n$  колебаний за время пролета электронами пути катод—отражатель—катод. Отсюда для генерируемой частоты получается следующая формула:

$$f = n \frac{1,48 \cdot 10^5 \sqrt{V_g}}{d_1 + d_2/2 + d_3/(1 - V_r/V_g)}. \quad (1)$$

Здесь  $f$  — генерируемая частота в  $\text{гц}$ ,  $V_g$  — напряжение на сетках в  $b$ ,  $V_r$  — напряжение на отражателе в  $b$ ,  $d_1$  — длина пространства ускорения в  $m$ ,  $d_2$  — длина пространства дрейфа и  $d_3$  — длина пространства торможения в  $m$ .

Не следует ожидать, что формула (1) дает точное значение генерируемой частоты, так как при выводе ее не учтены многие факторы: зависимость фазовой скорости волн пространственного заряда от плотности заряда, отклонение хода потенциала от линейного, сложный характер процессов в областях ускорения и торможения, конечные размеры потока и др. Однако, если верны исходные представления об электронном резонаторе, формула (1) должна правильно описывать зависимость частоты от напряжений  $V_g$  и  $V_r$ , а также от геометрии потока, определяемой размерами  $d_1$ ,  $d_2$  и  $d_3$ .

Ниже приводятся наиболее интересные результаты экспериментов, посвященных проверке изложенных представлений и формулы (1).

### 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОННО-ВОЛНОВОГО ГЕНЕРАТОРА С ТОРМОЗЯЩИМ ПОЛЕМ

Ряд экспериментов был посвящен изучению влияния длины пространства ускорения  $d_1$ , пространства дрейфа  $d_2$  и пространства торможения  $d_3$  на генерируемую частоту. Расстояние от катода до первой сетки  $d_1$  определяет величину тока в лампе, и его нельзя варьировать в широких пределах. Однако увеличение  $d_1$  в допустимых пределах снижает частоту в полном соответствии с формулой (1).

На рис. 3а приведено сравнение экспериментальной зависимости частоты от длины пространства дрейфа с этой же зависимостью, определяемой формулой (1). Совпадение удовлетворительное; увеличение крутизны экспериментальной кривой при больших  $d_2$  можно отнести за счет провисания потенциала и снижения скорости электронов в пространстве дрейфа.

Неожиданный результат был получен при исследовании зависимости частоты от длины пространства торможения  $d_3$ : во многих случаях генерируемая частота не зависела (или очень слабо зависела) от  $d_3$ . На рис. 3б мы видим резкое расхождение экспериментальной кривой настройки и кривой, построенной по формуле (1). Однако учет влияния пространственного заряда показывает, что, действительно, плоскость поворота электронов почти не смещается в отмеченных случаях, и уточненная теоретическая кривая (пунктир) имеет крутизну, близкую к экспериментальной (рис. 3б). Подробнее о влиянии пространственного заряда в области торможения будет сказано ниже.

Приведенные экспериментальные факты свидетельствуют в пользу представления о том, что генерирует замкнутый электронный поток, так как изменение длины любого из участков на пути потока изменяет генерируемую частоту.

Частотные характеристики в зависимости от сеточного напряжения  $V_g$  были сняты для самых различных вариантов электронно-волнового генератора (клистронов (назовем их А, В, С и D) и разборных ламп с плоскими электродами триодного типа и с цилиндром дрейфа). Зависимости генерируемой частоты  $f$  от  $V_g$ , полученные экспериментально и вычисленные по формуле (1), по крутизне обычно хорошо совпадают; расхождение по абсолютной величине оказывается такого же порядка, как при расчете зон колебаний отражательного клистрона (рис. 4).

Гораздо интереснее оказалось поведение генерируемой частоты  $f$  в зависимости от потенциала отражателя  $V_r$ . Очень часто экспериментальная крутизна настройки по отражателю оказывалась много

меньше ожидаемой согласно формуле (1). Это хорошо видно из рис. 5, где приведены характеристики клистрона D с удлиненным пространством торможения. Как выяснилось, это обусловлено влиянием пространственного заряда на положение плоскости поворота электронов, не учтенным при выводе формулы (1). Указанное влияние приводит к тому, что плоскость поворота электронов оказывается гораздо ближе к сетке и смещается под действием  $V_g$ , гораздо слабее, чем это можно ожидать без учета пространственного заряда. Количественные расчеты проводились по формулам и графикам, приведенным в работе Иви [21]. (Формула (1) в обозначениях Иви принимает вид:

$$f = n \frac{1,48 \cdot 10^5 \sqrt{V_g}}{d_1 + d_2 / 2 + x_m}, \quad (2)$$

где  $x_m$  — расстояние от последней сетки до плоскости поворота электронов.) Расчитанные по формуле (2) характеристики (пунктир на рис. 5) имеют хорошее совпадение по крутизне с экспериментальными характеристиками. Встречающиеся расхождения по абсолютной величине имеют тот же порядок величины, что и в характеристиках  $f=f(V_g)$ .

Таким образом, экспериментальная проверка зависимости частоты от  $V_g$  показала, что частота зависит от скорости распространения волн пространственного заряда в потоке в соответствии с предлагаемым механизмом колебаний. Необходимость учета пространственного заряда в характеристиках  $f=f(V_g)$  еще раз подтвердила, что частота изменяется в соответствии с изменением реальной длины замкнутого электронного потока.

Для выяснения природы колебаний большое значение имеет экспериментальное исследование влияния внешних цепей на работу электронно-волнового генератора с тормозящим полем. В частности были исследованы некоторые типы вывода энергии с переменным волновым сопротивлением. Один из исследованных вариантов представлял собой две параллельные ленты из меди, один конец этой линии присоединялся

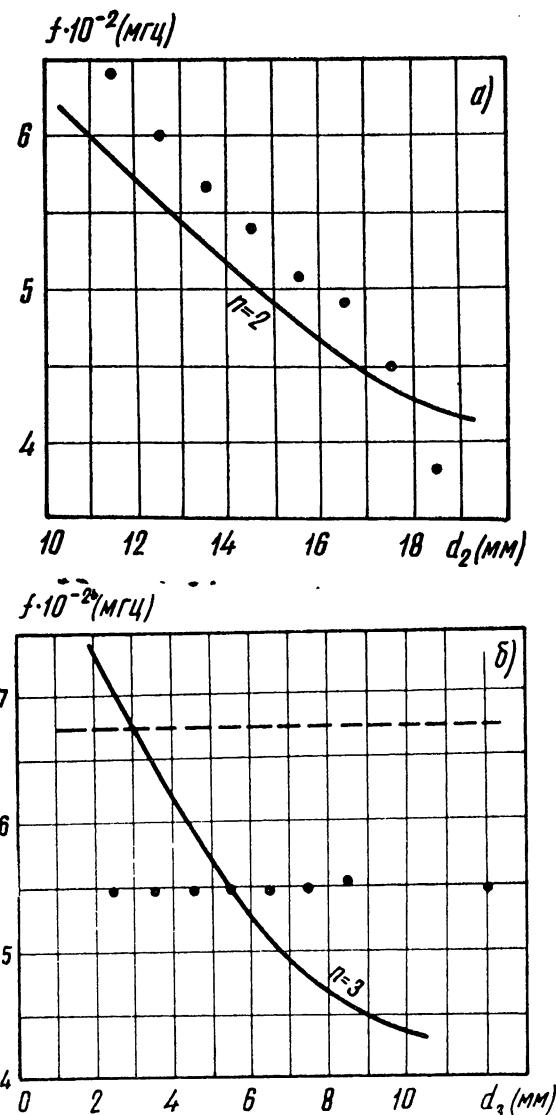


Рис. 3. Зависимость частоты электронно-волнового генератора  $f$  от длины пространства дрейфа  $d_2$  и от длины пространства торможения  $d_3$ .

нялся к дискам клистрона, другой — к измерителю мощности. Меняя расстояние между лентами, можно было получить диапазон изменения волнового сопротивления ориентировочно от 100 до 260 ом. Другой вывод энергии — несимметричный полосковый; плоскость присоединяется к одному диску клистрона, проводник в виде медной ленты — к другому диску. Далее полосковая линия переходит на коаксиал. Волновое сопротивление изменялось в пределах 150–250 ом с помощью изменения ширины металлической ленты. Измерение мощности в зависимости от частоты показало, что в обоих случаях выводимая мощность несколько увеличивается при меньших волновых сопротивлениях. Однако наиболее характерным является периодическое изменение мощности с частотой, обусловленное наличием рассогласования выводов энер-

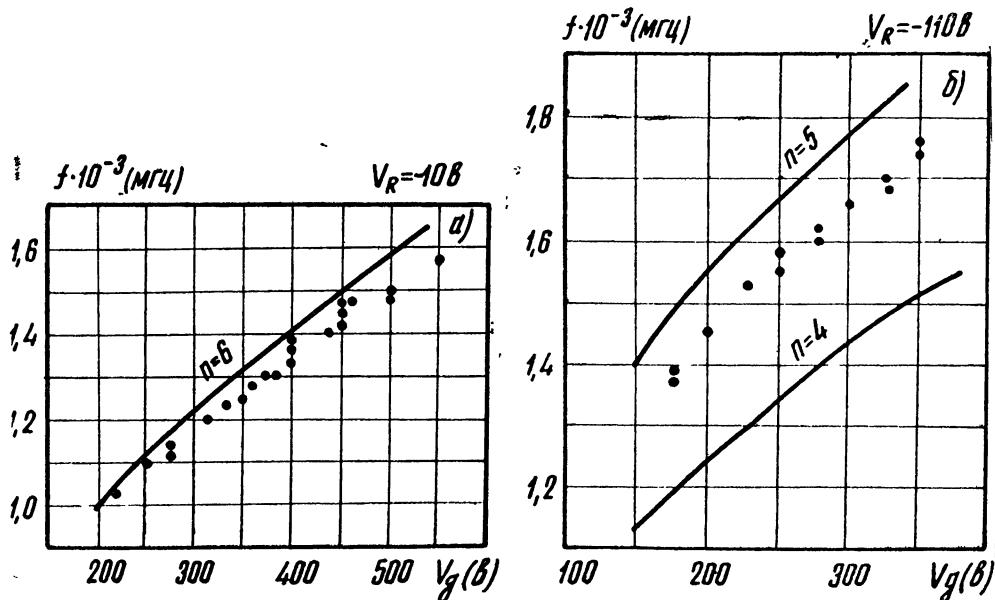


Рис. 4. Зависимость частоты  $f$  от сеточного напряжения  $V_g$  для кlyстронов С и А.

гии. Специальные эксперименты подтвердили, что осциллограмма выходной мощности повторяет график входного сопротивления рассогласованной передающей линии, и мощность оказывается прямо пропорциональной импедансу нагрузки, состоящей из емкости зазора и входного сопротивления внешней цепи. Увеличивая волновое сопротивление согласованной выдающей линии, мы не можем сделать импеданс нагрузки больше сопротивления зазора кlyстрона, которое оказывается порядка 100–150 ом. Рассогласованная линия позволяет получить высокий импеданс нагрузки вблизи резонанса параллельного контура, образованного емкостью зазора и индуктивностью линии.

Далее использовались внешние цепи в виде перемычек из медной ленты, присоединяемых к дискам, и в виде отрезков ленточных линий с движущимися короткозамыкающими плунжерами. Оказалось, что при изменении настройки внешних цепей генерируемая частота не изменяется (она задана напряжениями на электродах), но мощность изменяется, проходя через максимум, когда собственная частота внешнего контура (и максимальный импеданс его) совпадает с частотой, генерируемой замкнутым электронным потоком. На рис. 6 показана зависимость частоты  $f$  и мощности  $P$  электронно-волнового генератора на кlyстроне С от расстояния  $l$  плунжеров трех подстраивающих линий

до оси клистрона. Общий вид макета генератора приведен на рис. 7.

Указанные экспериментальные факты говорят в пользу представления о замкнутом электронном потоке в схеме тормозящего поля как самостоятельном генераторе, который по отношению к рассмотренным внешним цепям ведет себя как генератор постоянного наведенного тока (мощность оказывается пропорциональной импедансу нагрузки). Аналогичные факты наблюдаются при изучении митрона [15].

В пользу развитого представления об электронном резонаторе говорят и другие эксперименты с влиянием внешних цепей. Так, у модификаций клистронов с большим расстоянием между сетками выходная мощность в линии, присоединенной к этим сеткам, очень мала. Рассогласование линии чрезвычайно слабо влияет на работу таких ламп. Очевидно, в рассматриваемом случае по мере расширения зазора до величин порядка длины волны пространственного заряда наведенный ток на сетках падает, или, дру-

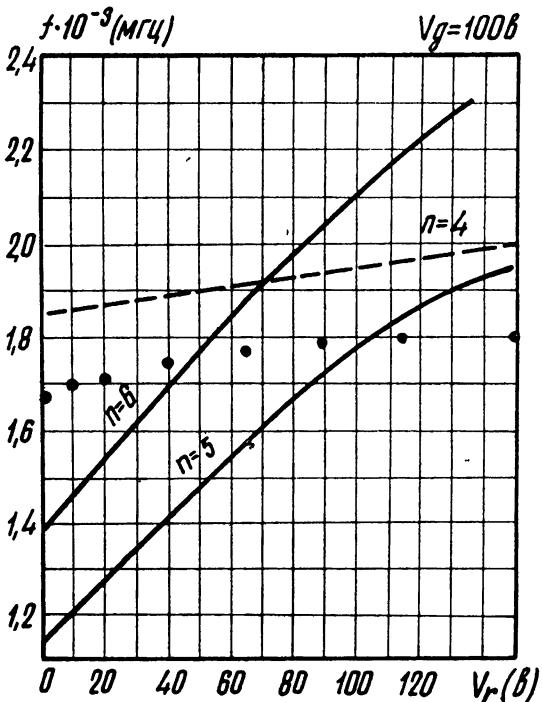


Рис. 5. Зависимость частоты  $f$  от потенциала отражателя  $V_r$  для клистрона  $D$  с удлиненным пространством торможения.

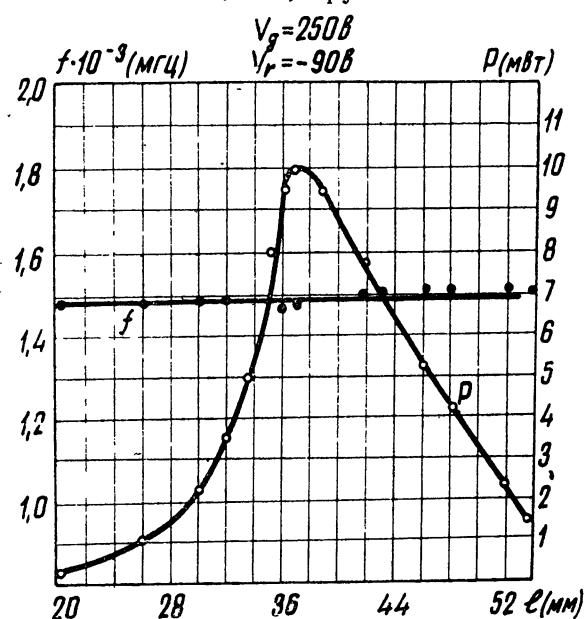


Рис. 6. Влияние настройки внешних цепей на частоту  $f$  и мощность  $P$  генератора на клистроне  $C$ .

гими словами, выводящая линия оказывается слабо связанной с электронным резонатором. Эти соображения подтверждаются подсчетом коэффициента модуляции рассматриваемых зазоров, который оказывается значительно меньше единицы.

О порядке мощностей электронно-волнового генератора с тормозящим полем можно судить по рис. 1 и 6. Затягивание частоты генератора близко к значениям для ЛОВ в соответствующем диапазоне, а собственные шумы оказываются в несколько раз больше шумов отражательного клистрона на тех же частотах.

Резюмируя приведенные выше качественные соображения, количественные оценки и экспериментальные факты, можно попытаться нарисовать следующий механизм электронно-волновых колебаний в схеме тормозящего поля (или, что то же самое, колебаний Баркгаузена—Курца).

Волна пространственного заряда (например, шумовая) распространяется в электронном потоке и отражается вместе с ним от отражателя и катода; число отражений зависит от проницаемости сеток и других факторов. Это напоминает картину поведения электромагнит-

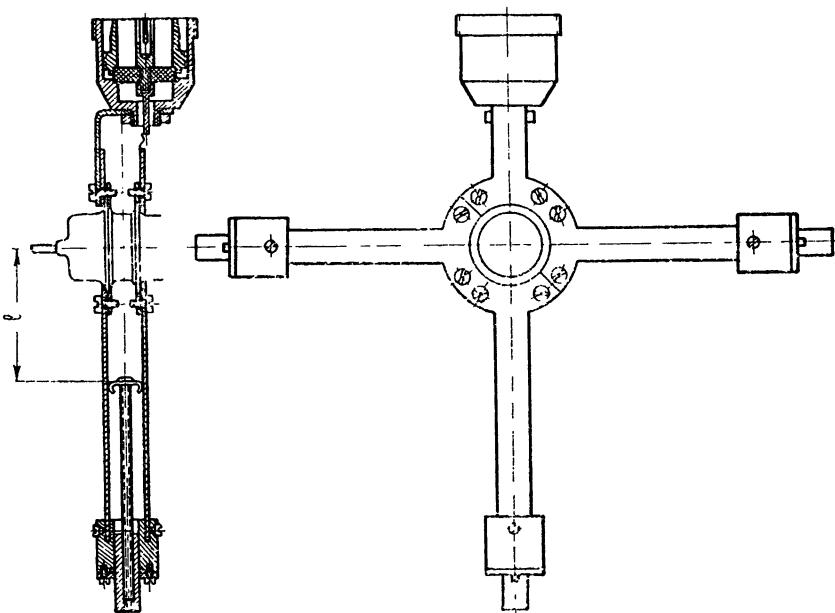


Рис. 7. Общий вид макета электронно-волнового генератора.

ной волны в закороченном отрезке передающей линии. Если области торможения и ускорения малы по сравнению с длиной волны пространственного заряда, то можно получить граничное условие для переменной скорости в плоскости отражения [22]: скорости в прямом и отраженном потоке равны и противофазны, суммарная переменная скорость равна нулю. Это—аналог граничного условия для напряжения на короткозамкнутом конце передающей линии: коэффициент отражения равен—1, напряжение равно нулю. В замкнутом электронном потоке, как и в электронном резонаторе, может, таким образом, существовать стоячая волна пространственного заряда на одной из собственных частот электронного резонатора, определяемых условием наличия  $n$  длин волн пространственного заряда вдоль замкнутого потока. Настройку электронного резонатора можно производить путем изменения скорости движения электронов и геометрии замкнутого потока.

Источником энергии для незатухающих колебаний электронного резонатора является электронно-волновое взаимодействие прямого и отраженного потока. Электроны потоков в среднем замедляются, отдавая энергию полю волны пространственного заряда. Эффективность энергообмена улучшается при большем числе качаний электронов меж-

ду катодом и отражателем и при лучшем взаимопроникновении потоков. Ограничение амплитуды стоячей волны пространственного заряда обуславливается потерями тока на сетках, излучением электромагнитной энергии в окружающее пространство, утечкой энергии в подвешенные провода и другими факторами.

Колебания плотности заряда в электронном резонаторе наводят гоны на сетках, введенных в электронный поток, причем внутренний электронный механизм действует как генератор постоянного наведенного тока (поскольку мощность во внешних цепях оказывается пропорциональной их импедансу). Внешняя цепь является выводом энергии для внутреннего электронного колебательного механизма. Элементом связи является тот или иной зазор с электрическим полем, общий для электронного резонатора и внешней цепи. Для лучшей связи с электронным резонатором ширина зазора должна быть много меньше длины волны пространственного заряда; однако слишком узкий зазор имеет большую емкость и сильно шунтирует генератор, снижая импеданс нагрузки. В реальных случаях следует выбирать оптимальную величину зазора.

Изложенные соображения следует рассматривать как попытку объяснения электронных колебаний в схеме тормозящего поля, далекую от совершенства, но согласующуюся с главными экспериментальными фактами и современными воззрениями. Практическое значение проведенных исследований заключается в возможности дать некоторые рекомендации для создания маломощного безмагнитного генератора с широкодиапазонной электронной настройкой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Шевчик, Доклад на конференции Радиосовета АН СССР, апрель, 1955.
2. В. Н. Шевчик, В. С. Стальмаков, Доклад на конференции Радиосовета АН СССР, май, 1957.
3. В. Н. Шевчик, Основы электроники сверхвысоких частот, изд. Сов. радио, М., 1959.
4. М. Б. Голант, Радиотехника и электроника, 3, 794 (1958).
5. G. Wehner, J. Appl. Phys., **22**, 761 (1951).
6. T. K. Allen, R. A. Bailey, K. G. Embleton, Brit. J. Appl. Phys., **6**, 320 (1955).
7. М. И. Кузнецов, В. А. Бербасов, Уч. зап. Горьк. ун-та, сер. физ., **27**, 84 (1954).
8. M. Ishida, J. Ibaraki, Sci. Rep. Res. Inst. Tohoku Univ., Ser. B, **1/2**, 327 (1951).
9. В. И. Калинин, Дециметровые и сантиметровые волны, Связьиздат, М., 1939.
10. А. Ф. Харвей, Высокочастотные электронные лампы, ИЛ, М., 1948.
11. Р. Сарбахер, В. Эдсон, Техника сверхвысоких частот, Связьиздат, М., 1947.
12. H. E. Hollmann, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik, **65**, 112 (1957).
13. В. Н. Шевчик, Г. Н. Шведов, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, **2**, 511 (1959).
14. P. Guenard, H. Nivier, Ann. de Radioelectricite, **7**, 252 (1952).
15. J. A. Boyd, Proc. IRE, **43**, 332 (1955).
16. H. Alfvén, D. Romeil, Proc. IRE, **42**, 1239 (1954).
17. Z. S. Tchernov, Proc. of the symposium on electronic waveguides, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1958, стр. 339.
18. В. П. Тычинский, Ю. Т. Деркач, Радиотехника и электроника, **1**, 233, 344 (1956).
19. J. R. Pierce, J. Appl. Phys., **20**, 1060 (1949).
20. В. Н. Шевчик, Г. Н. Шведов, Уч. зап. СГУ, **69** (1959) (в печати).
21. Г. Иви, Проблемы современной физики. Пространственный заряд, № 6, 1956, стр. 5.
22. L. M. Field, R. K. Tien, D. A. Watkins, Proc. IRE, **39**, 194 (1951).

# АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ В СЕРДЕЧНИКЕ ИМПУЛЬСНОГО ТРАНСФОРМАТОРА С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ КРИВОЙ НАМАГНИЧИВАНИЯ И МАГНИТНОГО ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ

*Л. И. Кротова*

Приводятся результаты исследования процесса импульсного намагничивания группы магнитно-мягких сплавов с учетом нелинейности кривой намагничивания и магнитного последействия. Показано, что эти факторы должны учитываться при технических расчетах импульсных трансформаторов. Установлено, что величина постоянной времени магнитного последействия для исследованных сплавов может быть оценена величиной  $1 \rightarrow 2 \text{ мксек}$  при средних приращениях индукции и  $0,5 \text{ мксек}$  при приращениях индукции, близких к насыщению.

## 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ЗАДАЧА ИССЛЕДОВАНИЯ

Известно, что магнитные свойства материалов в переменных полях существенно отличаются от их свойств в статическом режиме. При анализе переходных процессов в ферромагнетике исходят из уравнений Максвелла, предполагая при этом, что ферромагнетик является однородным в отношении своих магнитных и электрических свойств. Однако при намагничивании ферромагнетиков в переменных полях достаточно высокой частоты это предположение оказывается неверным, так как на процессы намагничивания оказывает влияние „микроскопическая“ неоднородность ферромагнетика, обусловленная наличием областей спонтанного намагничивания [1,2]. Ицхоки [3] на основании результатов, полученных в работах Аркадьева [1] и Поливанова [2], установил, что при анализе процессов, протекающих в сердечниках импульсных трансформаторов при длительностях импульса  $t_i > 0,05 \text{ мксек}$ , с влиянием „микроскопической“ неоднородности материала можно практически не считаться.

С учетом этого обстоятельства классическая задача импульсного намагничивания ферромагнетика в виде тонкого листа и в предположении постоянства его магнитной проницаемости была решена в работах [3–5]. Решение позволяет определить значение магнитной проницаемости в импульсном режиме с учетом только влияния вихревых токов.

В 1950 г. Ицхоки [3] удалось решить задачу о магнитном скин-эффекте для случая, когда приращение индукции и напряженность магнитного поля связаны временной зависимостью, а также провести учет влияния насыщения сердечника на работу импульсного трансформатора. Им был найден способ определения постоянной времени магнитного последействия. Опыты подтвердили [6,7], что при технических расчетах следует считаться с явлением магнитного последействия. Однако, как показали более поздние исследования в этом направлении, для высокопроницаемых магнитно-мягких сплавов, обладающих ярко выраженной нелинейностью кривой намагничивания, величина постоянной времени релаксации колебается в очень больших пределах

и сильно зависит от рабочей точки и диапазона приращений индукции. С другой стороны, имеются основания полагать, что значение постоянной времени релаксации, зависящее от свойств ферромагнетика, должно быть вполне определенной, мало изменяющейся величиной.

В 1958 г. нами совместно с другими авторами [8] была сделана попытка решить задачу о магнитном скин-эффекте с одновременным учетом явления магнитного последействия и нелинейности кривой намагничивания. При этом использовались следующие известные соотношения: закон нарастания временной части магнитной индукции в виде [3]

$$b = h[\mu_1 + \mu_2(1 - e^{-t/T_p})] \quad (1)$$

и соотношение между приращением индукции и приращением магнитного поля [4,9]

$$B = \mu_0 H + B_0(1 - e^{-\alpha H}). \quad (2)$$

В формулах (1), (2) приняты следующие обозначения:  $b$  — часть магнитной индукции, зависящая от времени,  $h$  — соответствующее ей магнитное поле,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  — величины магнитной проницаемости на двух различных стадиях намагничивания,  $T_p$  — постоянная времени магнитного последействия,  $t$  — время,  $B$  — приращение магнитной индукции,  $H$  — соответствующее ему приращение магнитного поля,  $\mu_0$ ,  $\alpha$ ,  $B_0$  — постоянные величины.

Имея в виду соотношения (1) и (2), можно предположить, что связь между  $B$  и  $H$  выражается формулой:

$$B = \mu_0 H + B_0(1 - e^{-\alpha H})(1 - e^{-t/T_p}), \quad (3)$$

характеризующей как непостоянство проницаемости с изменением поля, так и временную зависимость между индукцией и магнитным полем. Эта зависимость между  $B$  и  $H$  в дальнейшем была использована при решении уравнений Максвелла.

При рассмотрении электромагнитных процессов в тороидальном сердечнике из тонкого ленточного магнитного материала с изолированными друг от друга слоями можно ограничиться сечением одного листа (рис. 1). Предположим, что векторы индукции и напряженности магнитного поля имеют по одной отличной от нуля составляющей  $H_z$  и  $B_z$ , а вектор электрического поля — одну составляющую  $E_y$ . Тогда, так как толщина листа  $\delta_{ж}$  обычно значительно меньше его ширины,

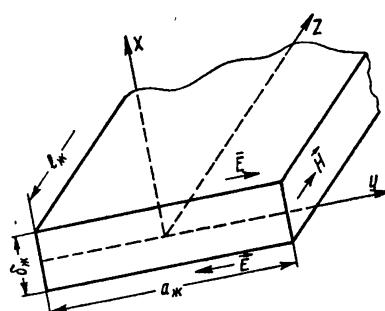


Рис. 1. Ориентация векторов  $E$  и  $H$  в листе железа ( $a_j \gg \delta_{ж}$ ).

величины  $H_z$ ,  $B_z$  и  $E_y$  можно считать функциями одной пространственной координаты  $x$  и времени  $t$ .

При сделанных допущениях уравнения Максвелла для случая, когда время измеряется в мксек, можно записать в виде:

$$\partial H_z / \partial x = (4\pi/10\rho) E_y; \quad -\partial E_y / \partial x = 10^{-2} \partial B_z / \partial t, \quad (4)$$

где  $\rho$  — удельное электрическое сопротивление. Опуская индексы и исключая из уравнений (4) неизвестную функцию  $E_y$ , получим:

$$\partial^2 H(x, t) / \partial x^2 = (4\pi/1000\rho) \partial B(x, t) / \partial t. \quad (5)$$

Здесь  $H(x, t)$  и  $B(x, t)$  — две неизвестные функции, определенные для  $-\delta_{jk}/2 \leq x \leq \delta_{jk}/2$  и  $t \geq 0$ , причем момент  $t = 0$  совпадает с моментом начала воздействия на обмотку трансформатора прямоугольного импульса напряжения постоянной амплитуды длительностью  $t_n$ . Функции  $B(x, t)$  и  $H(x, t)$  связаны между собою дополнительной зависимостью (3), которая предполагается известной; они должны удовлетворять начальным и граничным условиям

$$H(x, 0) = 0; \quad B(x, 0) = 0; \quad (6)$$

$$\partial H / \partial x|_{x=0} = 0; \quad \partial H / \partial x|_{x=\delta_{jk}/2} = \text{const.}$$

Уравнение (5) с учетом зависимости (3) может быть приведено к виду:

$$\partial^2 H / \partial x^2 = f(H, t) \partial H / \partial t + F(H, t), \quad (7)$$

где

$$f(H, t) = \frac{4\pi}{10^3 \rho} [B_0 \alpha (1 - e^{-t/T_p}) e^{-\alpha H} + \mu_0];$$

$$F(H, t) = \frac{4\pi B_0}{10^3 \rho T_p} (1 - e^{-\alpha H}) e^{-t/T_p}.$$

Как показано в работе [8], уравнение (7) может быть заменено системой двух уравнений первого порядка

$$H'_i = Z_i; \quad Z'_i = \varphi_i(x) H_i + \psi_i(x) \quad (8)$$

в предположении, что исследуемый интервал времени разбивается на  $i$  участков длины  $\Delta$ , так что  $t_i = \Delta i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

В уравнениях (8)

$$\varphi_i(x) = f(H_{i-1}, t_i) / \Delta$$

$$\psi_i(x) = F(H_{i-1}, t_i) - f(H_{i-1}, t_i) H_{i-1} / \Delta.$$

Ниже приведены результаты численного решения системы уравнений (8) для образцов некоторых магнитно-мягких сплавов; проведено сравнение полученных результатов с опытными данными и оценка величины постоянной времени магнитного последействия для различных материалов.

Здесь уместно заметить, что найденное таким образом решение для  $H(x, t)$  не может претендовать на совершенно точное описание переходных процессов в ферромагнетиках, так как зависимость  $B$  от  $H$  и  $t$ , положенная в основу расчета, лишь приближенно выполняется в реальных ферромагнетиках.

## 2. ХАРАКТЕРИСТИКА ОБРАЗЦОВ, ВЫБРАННЫХ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для исследования были выбраны образцы наиболее часто применявшихся магнитно-мягких сплавов, обладающих резкой нелинейностью кривых намагничивания на частном цикле. К этим материалам относятся, в первую очередь, сплавы железо-никелевой группы и, в некоторой степени, кремнистые стали. Наиболее характерными из них и часто применявшимися являются, на наш взгляд, сплавы 79НМА, 50НХС и сталь ХВП.

Образцы из ленточных магнитных сплавов указанных марок навивались на круглую оправку диаметром около 4 см и имели надежную междвутитковую изоляцию, которая контролировалась. Ширина ленты составляла  $1 \div 1,5$  см. После отжига исследуемых образцов для них были сняты кривые зависимости приращения индукции от приращения магнитного поля в статическом ( $B = B(H)$ ) и импульсном ( $B_i = B_i(H_i)$ ) режимах.

Кривая  $B = B(H)$  измерялась баллистическим методом, а  $B_i = B_i(H_i)$  — известным катодно-осциллографическим методом, подробно описанным в работах [3,7]. Форма импульса напряжения при измерениях в импульсном режиме была близка к прямоугольной; частота повторения импульсов составляла примерно 1000 импульсов·сек<sup>-1</sup>.

По измеренным кривым  $B = B(H)$  определялись коэффициенты  $\alpha$  и  $B_0$ , входящие в уравнение (3); эти коэффициенты использовались затем при интегрировании системы уравнений (8). По кривым  $B_i = B_i(H_i)$  для заданной величины  $B_i$ , при которой производился расчет, определялось значение  $H_i$  и сравнивалось с  $H_{iB} = H(\delta_{jk}/2, t_i)$ , полученным при интегрировании системы уравнений (8). При некотором заданном значении постоянной времени  $H_i$  оказывалось равным  $H_{iB}$ , что давало основание считать величину  $T_p$  соответствующей исследуемому образцу постоянной времени магнитного последействия.

Численное интегрирование системы уравнений (8) производилось по методу Эйлера на электронной счетной машине „Стрела“. Для получения точности расчета 3% оказалось достаточным разбивать анализируемый промежуток времени на 100, а полутолщину листа — на 11 интервалов. Параметры исследуемых образцов, использованные при интегрировании системы уравнений (8) и обсуждении результатов, даны в таблице 1.

В дальнейшем наименование образца приводится с его порядковым номером в таблице 1; все расчеты проводились для параметров, указанных в этой таблице.

Таблица 1

№ п.п	Материал сердечника	$\delta_{jk}$ (мм)	$\beta \cdot 10^6$ (Ом·см)	$\mu_0^*$	$B = B_i$ (сек)	$\alpha$ (э <sup>-1</sup> )	$B_0$ (сек)	$\mu_\Delta$	$t_i$ (мкесек)	$H_i$ (э)	$T_p$ (мкесек)
1	79НМА	0,08	60	10	700	12,5	2400	28000	1,0	0,933	0,25÷8
2	79НМА	0,02	60	10	800	12,9	1260	13500	1,0	0,323	0,25÷8
3	79НМА	0,02	60	10	1780	3,6	1570	360	1,0	9,9	0,004÷8
4	50НХС	0,02	90	10	1000	1,16	2150	1930	1,5	0,953	0,25÷8
5	50НХС	0,02	90	10	670	1,16	2150	2230	1,0	0,63	0,25÷8
6	ХВП	0,065	50	10	900	0,4	4650	1700	1,5	1,36	0,25÷8

\* Увеличение  $\mu_0$  до 100 для всех образцов не оказалось заметного влияния на результаты расчётов.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ, ИХ АНАЛИЗ И СРАВНЕНИЕ С ОПЫТОМ

На рис. 2 приведены вычисленные кривые распределения магнитного поля  $H(x, t)$  по сечению листа из сплава 79НМА толщиной 0,08 мм (1) при  $T_p = 1$  мксек. Величина  $\delta_{ж}/2x$  на этом и других рисунках представляет собою отношение полутолщины листа  $\delta_{ж}/2$  к координате точки листа  $x$ . Кривые указывают на резкую неравномерность в распределении магнитного поля по сечению листа. Столь же неравномерно оказывается распределенной по сечению листа и величина приращения индукции  $B(x, t)$  (рис. 3). Однако характер ее распределения совершенно отличен от характера распределения поля (рис. 2), что объясняется учетом нелинейности кривой намагничивания.

Влияние постоянной времени магнитного последействия на распределение поля по сечению листа показано на рис. 4. Как видно из рисунка, с увеличением  $T_p$  величина напряженности магнитного поля возрастает, а характер ее распределения по сечению листа сохраняется.

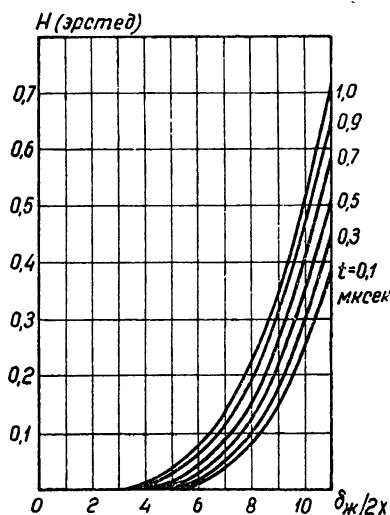


Рис. 2. Распределение напряженности магнитного поля  $H$  по сечению листа (образец 79НМА, толщина 0,08 мм (№ 1),  $T_p = 1$  мксек).

Зависимость напряженности магнитного поля на поверхности листа  $H(\delta_{ж}/2, t_i)$  от времени действия импульса напряжения  $t$  ( $0 < t < t_i$ ) для различных образцов материалов при различных величинах постоянной времени магнитного последействия  $T_p$  приводится на рис. 5. Здесь для анализа были выбраны значения приращений индукции за время  $t_i$ , сравнительно далекие от насыщения (в среднем по всему сечению). Приведенные кривые свидетельствуют о сильном влиянии магнитного последействия на величину напряженности магнитного поля, особенно в начальные моменты времени. В некоторых случаях в конце рабочего импульса заметно проявляется влияние насыщения. Это объясняется, по-види-

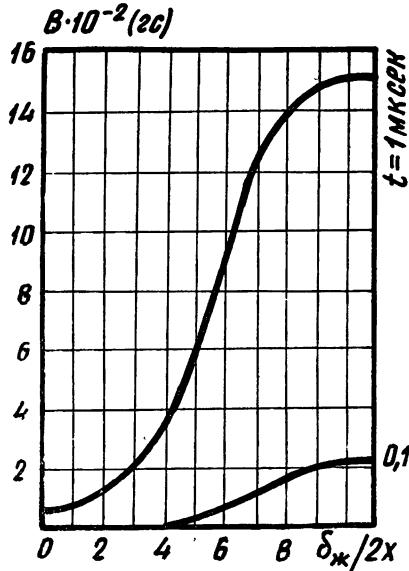


Рис. 3. Распределение приращения индукции  $B$  по сечению листа (тот же образец, что и на рис. 2;  $T_p = 1$  мксек).

мому, неодинаковой степенью близости выбранной для расчетов величины приращения индукции различных образцов к насыщению. На рис. 5а и 5б для сравнения отдельными точками указаны вычисленные значения напряженности поля на поверхности листа для различных моментов времени при постоянной величине магнитной проницаемости на частном цикле в статическом режиме  $\mu_A$ , приведенной в табл.

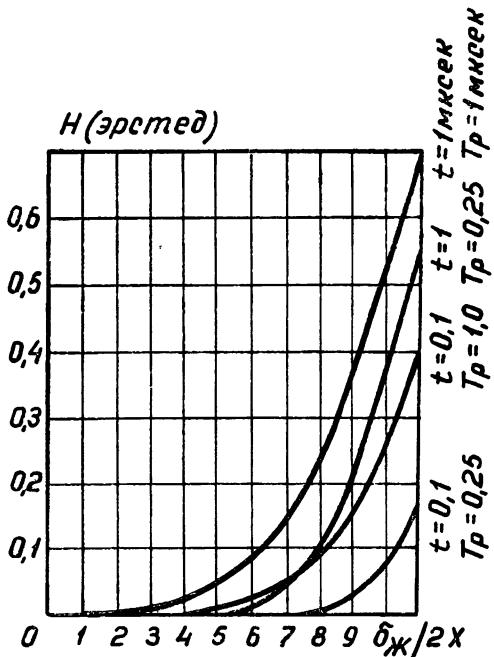


Рис. 4. Распределение напряженности магнитного поля  $H$  по сечению листа для двух значений постоянной времени магнитного последействия  $T_p = 1 \text{ мксек}$  и  $T_p = 0,25 \text{ мксек}$  (тот же образец, что и на рис. 2).

це 1 ( $T_p = 0$ ). При этих расчетах использовалось решение задачи о магнитном скрин-эффекте для импульсного намагничивания [3–5].

Построив кривые зависимости от  $T_p$  вычисленных значений напряженности магнитного поля к концу импульса  $H_{\text{и}в} = H(\delta_{\text{ж}}/2, t_i)$  для данного образца и сравнив их с  $H_i$ , полученными опытным путем, можно оценить величину постоянной времени магнитного последействия для исследуемого материала. На рис. 6 представлены такие кривые для трех образцов различных сплавов. Экспериментальные значения на рис. 6 отмечены кружками.

Таблица 2

№ № п.п.	Образец	Толщина листа (мм)	$t_i$ (мксек)	$B_i$ (гс)	$T_p$ (мксек)
1	79НМА	0,08	1,0	700	1,75
2	79НМА	0,02	1,0	800	0,90
3	50ХС	0,02	1,5	1000	1,20
4	50ХС	0,02	1,0	670	1,00
5	ХВП	0,065	1,5	900	1,35

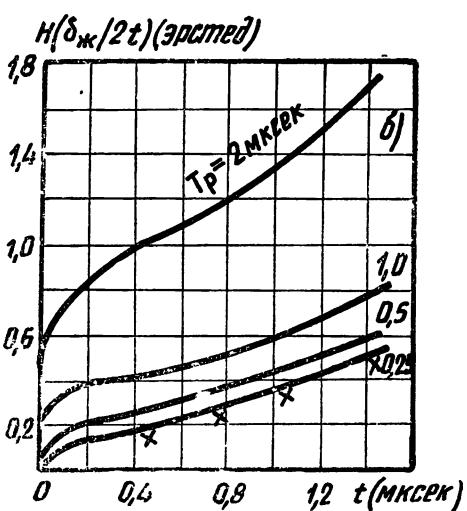
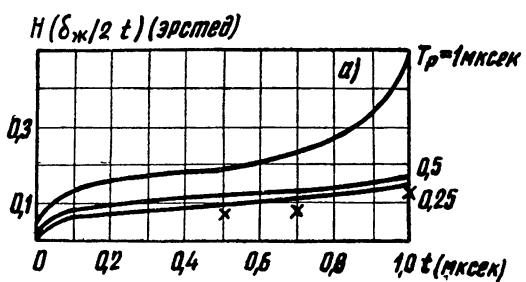
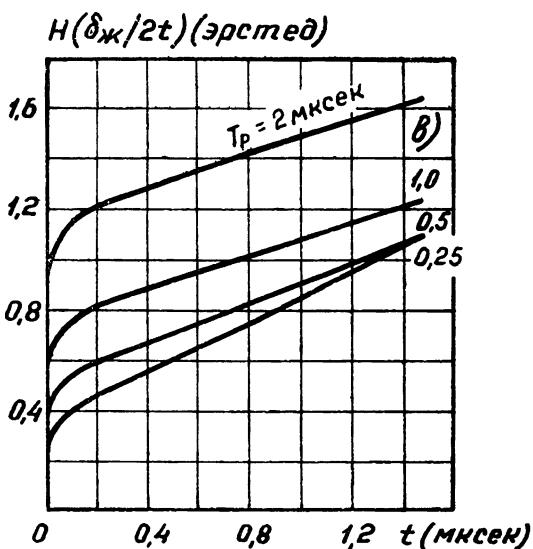


Рис. 5. Зависимость напряженности магнитного поля  $H$  на поверхности листа от времени  $t$  для различных значений постоянной времени магнитного последействия  $T_p$ : а) образец 79HMA, толщина 0,02 мм (№ 2),  $t_i = 1 \text{ мксек}$ ; б) образец 50HXC, толщина 0,02 мм (№ 4),  $t_i = 1,5 \text{ мксек}$ ; в) образец ХВП, толщина 0,065 мм (№ 6),  $t_i = 1,5 \text{ мксек}$ .



Найденные таким способом значения  $T_p$  приведены в таблице 2. Данные таблицы показывают, что величина  $T_p$  для исследованных магнитно-мягких сплавов колеблется в небольших пределах и составляет  $0,9 \pm 1,75$  мксек независимо от магнитных и электрических свойств и толщины материала. Это подтверждает обоснованность предположения о наличии магнитного последействия как физического свойства ферромагнитного материала, влияющего на его характеристики в импульсном режиме.

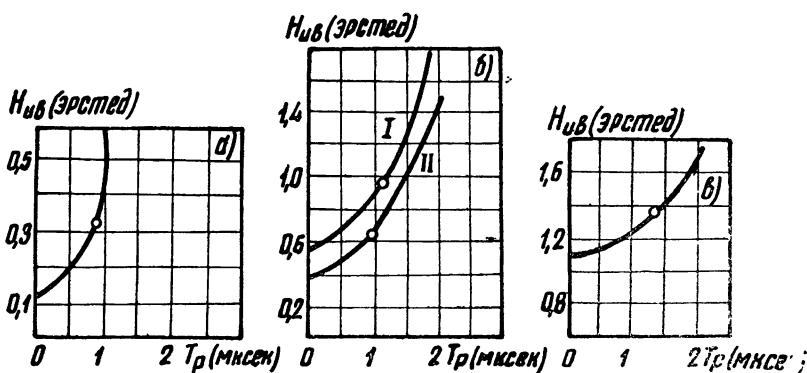


Рис. 6. Зависимость напряженности магнитного поля  $H$  на поверхности листа от величины постоянной времени магнитного последействия  $T_p$  для различных магнитных материалов:  
а) образец 79HMA, толщина 0,02 мм (№ 2),  $t_i = 1$  мксек;  
б) I — образец 50HXC, толщина 0,02 мм (№ 4),  $t_i = 1,5$  мксек,  
 $B_u = 1000$  гс; II — образец 50HXC, толщина 0,02 мм (№ 5),  
 $t_i = 1$  мксек,  $B_u = 670$  гс; в) образец XBP, толщина 0,065 мм  
(№ 6),  $t_i = 1,5$  мксек.

Влияние нелинейности кривой намагничивания и магнитного последействия на напряженность магнитного поля на поверхности листа в области приращений индукции, приближающихся к насыщению, видно из кривых, приведенных на рис. 7. Эти кривые указывают на резкое возрастание величины магнитного поля при приближении к насыщению, особенно при больших значениях  $T_p$ . Оценка указанным выше способом величины  $T_p$  для сплава 79HMA толщиной 0,02 мм (№ 3) в этой области приращений индукции показала, что  $T_p$  составляет примерно 0,5 мксек. Полученный результат подтверждает известное положение о меньшем влиянии в импульсном режиме временных процессов, связанных с магнитным последействием, при приращениях индукции, близких к насыщению.

Из приведенных результатов следует, что при сравнительно небольших приращениях индукции магнитное последействие может оказывать заметное влияние на процессы намагничивания в сердечнике импульсного трансформатора, увеличивая напряженность магнитного поля на поверхности листа, а, следовательно, и ток намагничивания трансформатора. Это подтверждает необходимость учета явления магнитного последействия при технических расчетах элементов импульсных схем с применением магнитно-мягких материалов.

В заключение выражают благодарность Я. С. Ицхоки за руководство работой и ценные советы.

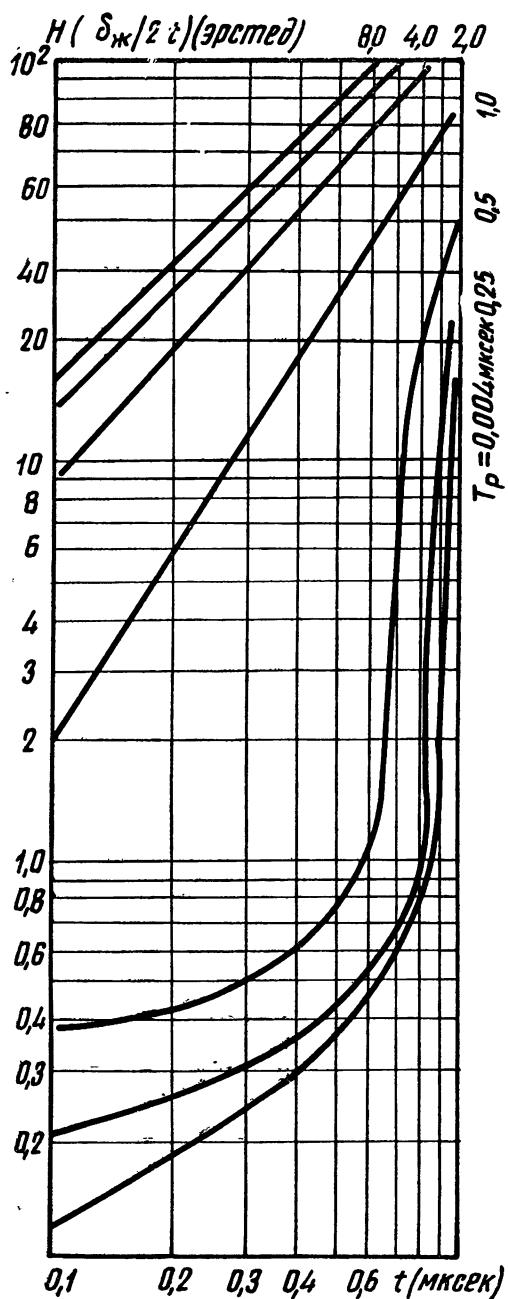


Рис. 7. Зависимость напряженности магнитного поля  $H$  на поверхности листа от времени  $t$  при приращении индукции, близком к насыщению (образец 79НМА, толщина 0,02 мм (№ 3),  $t_{ii}=1$  мксек).

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Аркадьев, Ж. Русск. физ.-хим. общ., **45**, 312 (1913).
2. К. М. Поливанов, Сб. Проблемы ферромагнетизма и магнетодинамики, изд. АН СССР, М., 1946.
3. Я. С. Ицхоки, Импульсные трансформаторы, изд. Сов. радио, М., 1950.
4. L. R. Blake, Proc. IEE, **96**, 705 (1949).
5. W. S. Melville, Proc. IEE, **97**, 65 (1950).
6. Я. С. Ицхоки, Труды VI научно-технич. конференции ВВИА, М., 1948.
7. Я. С. Ицхоки, Л. И. Кротова, Труды Научно-исслед. ин-та Мин. Авиац. пром., **5**, 1 (1949).
8. Ю. А. Архангельский, Р. Д. Бачелис, Л. И. Кротова, Труды НИИ Госуд. комитета по авиацион. техн. **6**, 16 (1958).
9. J. Fischer, H. Moser, Archiv für Electrotechnik, **42**, 286 (1956).

Поступила в редакцию  
19 ноября 1959 г.

---

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ТЕОРИИ ГЕНЕРАТОРОВ СВЧ С РЕЗОНАНСНОЙ НАГРУЗКОЙ

B. A. Малышев

Приводятся результаты экспериментальной проверки основных формул теории генераторов СВЧ с резонансной нагрузкой [1] на отражательном криостроне.

В статье [1] рассмотрены особенности работы определенного класса генераторов СВЧ при наличии дополнительного резонатора, связанного с основным резонатором генератора посредством передающей линии. Отражательный криострон можно с хорошим приближением отнести к рассматриваемому классу генераторов, и в данной работе приводятся результаты экспериментальной проверки основных формул упомянутой теории на криостроне серийного изготовления.

Все формулы в [1] получены для симметричных зон генерации, причем условием симметрии служит выполнение соотношения:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \frac{Q_{B2} [\operatorname{ctg}(\beta l) + 2Q_{B1}]}{Q_{B1} [\operatorname{ctg}(\beta l) + 2Q_{B2}]}, \quad (1)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — резонансные длины волн дополнительного и основного резонаторов,  $Q_{B1}$  и  $Q_{B2}$  — их внешние добротности по отношению к линии связи,  $\beta l$  — электрическая длина линии связи между сечениями эквивалентных представлений резонаторов параллельными колебательными контурами.

В [1] показано, что длина волны, генерируемая в центре зоны ( $\lambda_0$ ), определяется из соотношения:

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \frac{\lambda_0}{2Q_{B1}} \operatorname{ctg}(\beta l), \quad (2)$$

а диапазоны электронной перестройки волны между точками максимальной мощности ( $\Delta\lambda_m$ ) и между точками с мощностью, равной мощности в центре зоны ( $\Delta\lambda_u$ ) могут быть вычислены по формулам:

$$\Delta\lambda_m = \frac{\lambda_1}{Q_{01}} \left[ \sqrt{z(2r+z+2)} - 1 \right]^{1/2}; \quad (3)$$

$$\Delta\lambda_u = \frac{\lambda_1}{Q_{01}} \sqrt{z(2r+z+2)} - 1, \quad (4)$$

где  $Q_{01}$  — собственная добротность дополнительного резонатора, а параметры  $r$  и  $z$  определяются выражениями:

$$r = \lambda_1 Q_{01}/\lambda_2 Q_{012}; z = \lambda_1 Q_{01}^2/\lambda_2 Q_{B1} Q_{B2} \sin^2(\beta l) \quad (5)$$

( $Q_{012}$  — собственная добротность основного резонатора с учетом полезной нагрузки).

В работе [1] также показано, что когда параметр связи  $z > 1$ ,

в пределах зоны появляется перескок волны  $\Delta\lambda$ , величина которого может быть определена соотношением:

$$\frac{1}{\Delta\lambda} = \frac{2Q_{01}}{3\lambda_1} \left( \frac{z-1}{3} + a \right)^{-1/2}. \quad (6)$$

В этом соотношении

$$a = \left[ \left( \frac{l}{2t} \right)^2 - \frac{(1-z)^3}{27t} \right]^{1/2} - \frac{l}{2t}; \quad t = 3 \left( 1 + \frac{z}{r} \right);$$

$$l = 0,25 \left[ t^2 + 2t(z-1) - \frac{(1-z)^2}{3} \right].$$

Справедливость всех указанных выше формул проверялась экспериментально. Опыты относились к случаю, когда дополнительный резонатор подключался к основному резонатору отдельно от полезной нагрузки, и проводились в следующем порядке. Вначале на холодном кlyстроне определялись величины  $Q_{01}$ ,  $Q_{b1}$ ,  $Q_{on2}$ ,  $Q_{b2}$ ,  $\lambda_2$  и сечения эквивалентного представления резонаторов параллельными колебательными контурами, а также градуировался дополнительный резонатор. Затем дополнительный резонатор подсоединялся с помощью раздвижной коаксиальной линии к основному резонатору, и на экране осциллографа наблюдались зоны генерации кlyстрона (развертка на отражатель подавалась от осциллографа). Варьируя  $\lambda_1$  и  $\beta l$ , можно было получать симметричные зоны и, пользуясь меткой от волномера с высокой добротностью, изучать их особенности.

Холодные измерения проводились на установке, содержащей широкополосный кlyстронный генератор, связанный от нагрузки аттенюатором в 20 дБ. Сигналы, соответствующие падающей и отраженной от исследуемого резонатора волнам, через широкополосную головку измерительной линии, стоящей перед резонатором, фиксировались на экране осциллографа и давали возможность измерять нагруженную добротность. По отношению сигналов на резонансной частоте в максимуме и минимуме стоячей волны можно было определить внешнюю и собственную добротности резонатора, а по положению максимума стоячей волны можно было определить сечение эквивалентного представления резонатора параллельным колебательным контуром. Это сечение будет на резонансной частоте совпадать с максимумом стоячей волны напряжения для случая сильной связи и с минимумом для случая слабой связи. Погрешность в измерениях добротностей, проводимых подобным методом, можно оценить в  $10 \div 15\%$ . Измерения проводились как до включения кlyстрона, так и после, и из полученных значений вычислялись средние. Так как величина  $Q_{on2}$ , которая измерялась при выключении тока кlyстрона, не учитывает электронной нагрузки зазора и влияния нагрева резонатора, то для уменьшения погрешности из-за неучета этих факторов было умень-

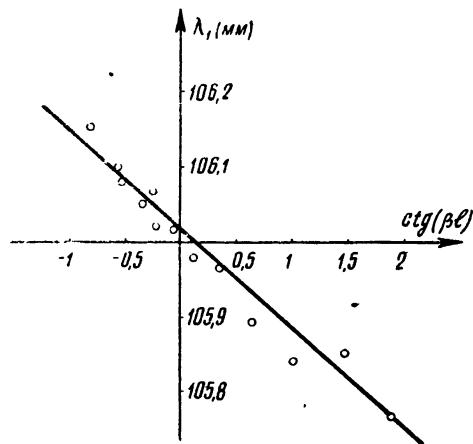


Рис. 1.

шено напряжение на резонаторе и приняты меры для охлаждения последнего.

Проводилось несколько серий экспериментов; результаты некоторых из них приведены на рис. 1–4.

Так, в случае, когда холодные измерения дали следующие результаты:  $Q_{\text{в1}} = 4100 \pm 415$ ;  $Q_{\text{в2}} = 365 \pm 10$ ;  $\lambda_2 = (106,02 \pm 0,01)$  мм, по формуле (1) была построена зависимость  $\lambda_1 = f[\text{ctg}(\beta l)]$ , которая представлена линией на рис. 1. Кружки на рис. 1 показывают экспериментальные значения величин  $\lambda_1$  и  $\text{ctg}(\beta l)$ , которые обеспечивали для этого случая симметрию зоны.

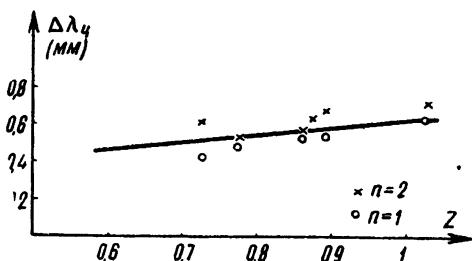


Рис. 2.

$\simeq 106$  мм;  $r \simeq 2,58$ , по формуле (4) была построена зависимость  $\Delta\lambda_n = f(z)$ , представленная линией на рис. 2. Кружками и крестами на рис. 2 показаны значения  $\Delta\lambda_n$ , полученные на опыте при разных  $z$ , причем крестами помечены точки, измеренные на втором номере зоны генерации, а кружками — на первом.

По формулам (3) и (4) были построены зависимости  $\Delta\lambda_m = f(z)$  и  $\Delta\lambda_n = f(z)$ , показанные линиями на рис. 3, для случая, когда холодные измерения дали следующие результаты:  $Q_{\text{в1}} = 2780 \pm 400$ ;  $Q_{01} = 1230 \pm 110$ ;  $Q_{\text{в2}} = 826 \pm 70$ ;  $Q_{\text{он2}} = 384 \pm 20$ ;  $\lambda_2 = (103,22 \pm 0,13)$  мм;  $\lambda_1 \simeq 103,2$  мм;  $r = 3,2$ . Опытные точки, полученные при этом, также показаны на рис. 3.

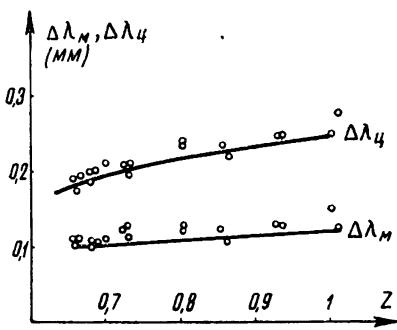


Рис. 3.

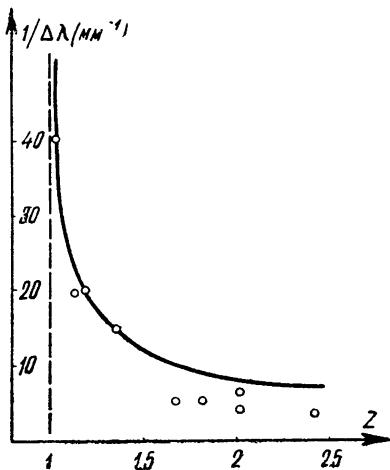


Рис. 4.

В случае, когда холодные измерения дали значения  $Q_{01} = 796 \pm 75$ ;  $Q_{\text{в1}} = 4100 \pm 415$ ;  $Q_{\text{он2}} = 320 \pm 9$ ;  $Q_{\text{в2}} = 178 \pm 5$ ;  $\lambda_2 = (105,86 \pm 0,02)$  мм;  $\lambda_1 \simeq 106$  мм;  $r \simeq 2,5$ , по формулам (6) была построена кривая  $1/\Delta\lambda = f(z)$ , изображенная на рис. 4. Опытные точки показаны на рис. 4 кружками.

Приведенные выше данные, так же, как и другие экспериментальные данные, подтверждают правильность формул (1), (3), (4), (6).

Эксперименты, результаты которых здесь не приводятся, подтвердили также справедливость формулы (2).

Поскольку теория [1] не учитывает „эффекта длинной линии“, то при приближении  $\beta l$  к значениям, кратным  $\pi$ , когда это становится существенным, все рассмотренные выражения перестают быть применимыми. Указанное обстоятельство подтверждается на опыте: при приближении  $\beta l$  к  $n\pi$  в зоне генерации появлялся дополнительный перескок волны, связанный с резонансом линии. Таким образом, проверяемые формулы справедливы в том случае, если ни на одной из длин волн, генерируемых в пределах зоны, не выполняется условие  $\beta l = n\pi$ .

Автор приносит благодарность П. Н. Факторович и Г. М. Свиареву за помощь в изготовлении и настройке экспериментальных установок.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. А. Малышев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 2, 463 (1959).

Таганрогский радиотехнический  
институт

Поступила в редакцию  
5 ноября 1959 г.

## КОЛЕБАНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

*С. Н. Шиманов*

Устанавливаются условия существования и дается метод практического вычисления периодических решений автономных квазилинейных систем со многими степенями свободы и с запаздыванием по времени. Характеристика нелинейности предполагается неаналитической

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим автономную систему, движение которой описывается дифференциальными уравнениями с постоянным запаздыванием по времени вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{\sigma=1}^r a_{\sigma} x(t - \tau_{\sigma}) + \mu X[x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_r), \mu], \quad (1.1)$$

где  $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ ,  $a_{\sigma} = \|a_{\sigma s_j}\|$  ( $s, j = 1, \dots, n$ ) — постоянные матрицы,  $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ . Функции  $X_1, \dots, X_r$  мы будем предполагать непрерывно дифференцируемыми по всем  $r n + 1$  аргументам  $x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots, x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}$ ,  $\mu$  в области  $G$ , которой принадлежат точки  $(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), \dots, (x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)})$ , и при  $|\mu| \leq \mu^*$  ( $\mu^*$  — некоторое положительное число). Величины  $\tau_1 = 0 < \tau_2 < \dots < \tau_r$  — постоянные, характеризующие запаздывание в системе.

Допустим, что характеристическое уравнение

$$\left| \sum_{\sigma=1}^r a_{\sigma} e^{-\tau_{\sigma} \lambda} - E \lambda \right| = 0 \quad (1.2)$$

имеет корни вида  $\lambda = N_j \omega \sqrt{-1}$ , где  $N_j$  — целые числа или нуль, а  $\omega$  — некоторое число. Допустим, что все эти корни простые и что по крайней мере одно из  $N_j$  отлично от нуля. Допустим, что число этих корней равно  $m$ . Этим корням будет соответствовать  $m$  периодических решений периода  $2\pi/\omega$  порождающей системы

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{\sigma=1}^r a_{\sigma} x(t - \tau_{\sigma}). \quad (1.3)$$

При этом нулевому корню будет отвечать решение вида

$$\varphi_{s1} = A_s, \quad (1.4)$$

где  $A_s$  — постоянные, а каждым двум корням  $N_j \omega \sqrt{-1}$  и  $-N_j \omega \sqrt{-1}$  будет соответствовать два решения вида

$$\begin{aligned}\varphi_{sj+1} &= B_{sj} \cos(N_j \omega t) - D_j \sin(N_j \omega t), \\ \varphi_{sj+k+1} &= B_{sj} \sin(N_j \omega t) + D_j \cos(N_j \omega t) \\ \left( s = 1, \dots, n; j = 2, 3, \dots, k; k = \frac{m-1}{2} \right),\end{aligned}\quad (1.5)$$

где  $B_j$  и  $D_j$  — некоторые постоянные.

Будем предполагать, что остальные корни уравнения (1.2) либо имеют вещественные части, отличные от нуля, либо чисто мнимые вида  $\pm \omega_k \sqrt{-1}$ , но такие, что отношения  $\omega_k/\omega$  не равны целым числам. Число чисто мнимых корней конечно.

Составим порождающее решение периода  $2\pi/\omega$ . Это решение имеет вид:

$$x^{(0)} = M_1 \varphi_1 + \dots + M_m \varphi_m, \quad (1.6)$$

где  $\varphi_j = \{\varphi_{1j}, \dots, \varphi_{nj}\}$ ,  $M_1, \dots, M_m$  — произвольные постоянные.

Будем искать периодическое решение системы (1.1), которое при  $\mu = 0$  обращается в порождающее решение (1.6). Поскольку период этого решения при  $\mu \neq 0$  будет отличаться от  $2\pi/\omega$ , положим его равным

$$T = \frac{2\pi}{\omega} (1 + \mu\alpha), \quad (1.7)$$

где  $\alpha$  — неизвестная величина.

Учитывая это обстоятельство, сделаем замену независимой переменной  $t$  по формуле

$$t_1 = \frac{t}{1 + \mu\alpha}. \quad (1.8)$$

Очевидно, что по переменной  $t_1$  искомое периодическое решение будет иметь период  $2\pi/\omega$ , не зависящий от параметра  $\mu$ .

Таким образом, приходим к задаче об отыскании периодического решения периода  $2\pi/\omega$  для системы уравнений

$$\frac{dx(t_1)}{dt_1} = \left[ \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma x(t_1 - \tau'_\sigma) + \mu X(x(t_1 - \tau'_1), \dots, x(t_1 - \tau'_r), \mu) \right] (1 + \mu\alpha) \quad (1.9)$$

где  $\tau'_\sigma = \frac{\tau_\sigma}{1 + \mu\alpha}$ , которое при  $\mu = 0$  обращается в порождающее периодическое решение. Неизвестная  $\alpha$  при этом найдется из условия существования периодического решения системы (1.9) периода  $2\pi/\omega$ .

Эта задача для частного случая системы (1.1), когда она имеет второй порядок, рассматривалась Минорским [2] и Эльскольцем [3]. В последней работе отмечается, что доказательство существования периодического решения удается провести лишь для системы первого порядка.

Для построения периодических решений, а также для получения необходимых и достаточных условий существования периодических решений, обращающихся при  $\mu = 0$  в порождающее решение, мы обобщаем на системы (1.1) метод вспомогательных систем, разработанный в статьях [5, 6]. Преимущество этого метода состоит в том, что для построения необходимых и достаточных условий существования периодического решения системы (1.1), обращающегося при  $\mu = 0$  в по-

рождающее, достаточно найти периодическое решение некоторой вспомогательной системы интегро-дифференциальных уравнений, соответствующей системе (1.1).

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА И ЕЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma x(t - \tau_\sigma) + f(t) + \sum_{j=1}^m \varphi_j W_j, \quad (2.1)$$

где  $f(t)$  — периодическая вектор-функция периода  $2\pi/\omega$ ,  $\varphi_j$  — периодические решения однородной системы (1.3), (1.4) и (1.5),  $W_j$  — постоянные. Система (2.1) при  $W_j = 0$  и  $f(t) = 0$  совпадает с системой (1.3). В работе [6] показано, что если постоянные  $W_j$  удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sum_{s=1}^n \psi_{sj} f_s dt + d_{1j} W_1 + \dots + d_{mj} W_m = 0 \quad (2.2)$$

$$(j = 1, \dots, m),$$

где  $\psi_{1j}, \dots, \psi_{nj}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) — периодические решения „сопряженной“ системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = - \sum_{\sigma=1}^r a'_\sigma x(t - \tau_\sigma)$$

( $a'_\sigma$  — транспонированная матрица  $a_\sigma$ ),

$$d_{ij} = \int_0^{2\pi/\omega} \sum_{s=1}^n \varphi_{si} \psi_{sj} dt, \quad |d_{ij}| \neq 0,$$

то уравнения (2.1) допускают периодическое решение периода  $2\pi/\omega$ , зависящее от  $2m$  произвольных постоянных. Это решение может быть представлено в виде:

$$x_s(t) = \sum_{j=1}^m M_j \varphi_{sj} + L_s(t, f_1 + \sum_{j=1}^m \varphi_{1j} W_j, \dots, f_n + \sum_{j=1}^m \varphi_{nj} W_j) \quad (2.3)$$

$$(s = 1, \dots, n),$$

где  $M_j$  — произвольные постоянные,  $L_s$  — вполне определенные операторы от аргументов  $\{f_s(t) + \sum_{j=1}^m \varphi_{sj} W_j\}$ , зависящие от вида однородной системы (1.3). Операторы  $L_s$  линейны и однородны относительно указанных аргументов и допускают оценку

$$\left| L_s(t, f_1(t) + \sum_{j=1}^m \varphi_{1j} W_j, \dots) \right| < A M_1, \quad (2.4)$$

$$\max \left\{ \left| f_i(t) + \sum_{j=1}^m \varphi_{ij} W_j \right| \right\} \leq M_1,$$

в которой  $A$  зависит только от коэффициентов  $a_\sigma$  и  $\tau_\sigma$ , но не зависит от вида функций  $f_s(t)$ .

Рассмотрим вспомогательную систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 \frac{dx(t_1)}{dt_1} = & \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma x(t_1 - \tau_\sigma) + \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma (x(t_1 - \tau'_\sigma) - x(t_1 - \tau_\sigma)) + \\
 & + \mu \alpha \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma x(t_1 - \tau'_\sigma) + \mu X(x(t_1 - \tau'_1), \dots, x(t_1 - \tau'_r), \mu) (1 + \mu \alpha) + \\
 & + \sum_{j=1}^m \varphi_j W_j; \\
 & \\
 \int_0^{2\pi/\omega} \left\{ & \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma (x(t_1 - \tau'_\sigma) - x(t_1 - \tau_\sigma)) + \mu \alpha \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma x(t_1 - \tau'_\sigma) + \right. \\
 & \left. + \mu X(x(t_1 - \tau'_1), \dots, x(t_1 - \tau'_r)) (1 + \mu \alpha) \right\} \psi_j(t) dt + \sum_{k=1}^m d_{kj} W_k = 0 \\
 & (j = 1, \dots, m).
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

*Лемма 1.* Система интегро-дифференциальных уравнений (2.5) допускает периодическое решение периода  $2\pi/\omega$ , зависящее от  $m$  произвольных постоянных и параметра  $\mu$  вида

$$x_s(t, M_1, \dots, M_m, \mu \alpha, \mu) = M_1 \varphi_{s1} + \dots + M_m \varphi_{sm} + \mu x_s^*(t, M_1, \dots, M_m, \mu \alpha, \mu) \quad (s = 1, \dots, n), \tag{2.6}$$

которое при  $\mu = 0$  обращается в порождающее решение

$$x_s^{(0)} = M_1 \varphi_{s1}(t) + \dots + M_m \varphi_{sm}(t) \quad (s = 1, \dots, n), \tag{2.7}$$

если  $x_s^{(0)}$  принадлежит области  $G$  при

$$|M_i - M_i^{(0)}| \leq H \quad (i = 1, \dots, m), \tag{2.8}$$

где  $M_i^{(0)}$  и  $H$  — некоторые постоянные ( $H > 0$ ).

Существуют положительные числа  $h \leq H$  и  $\eta, h_1$ , такие, что функции  $x_s^*(t, M_1, \dots, M_m, \mu \alpha, \mu)$  в области

$$|M_i - M_i^{(0)}| \leq h, |\mu| \leq \eta, |\alpha| \leq h_1 \tag{2.9}$$

допускают непрерывные частные производные по аргументам  $M_1, \dots, M_m, \alpha, \mu$ .

Постоянные  $W_1, \dots, W_m$ , соответствующие периодическому решению (2.6), определяются второй группой уравнений (2.5) после подстановки под знак интеграла периодического решения (2.6). Постоянные по времени  $W_1, \dots, W_m$  будут дифференцируемыми функциями аргументов  $M_1, \dots, M_m, \alpha, \mu$  в области (2.9).

Если  $M_1^*, \dots, M_m^*$  заданы в области (2.8), то им соответствует единственное периодическое решение вспомогательной системы и вполне определенная система значений  $W_1^*, \dots, W_m^*$ .

*Лемма 2.* Если  $X_s[x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_r), \mu]$  — аналитические функции аргументов  $x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_r), \mu$  в области  $G$  и при  $|\mu| \leq \mu^*$ , то функции  $x_s^*(t, M_1, \dots, M_m, \mu \alpha, \mu)$  в (2.6) будут аналитическими относительно аргументов  $M_1, \dots, M_m, \mu \alpha, \mu$  в области (2.9).

Периодическое решение (2.6) в этом случае можно искать в виде рядов, расположенных по целым степеням параметра  $\mu$  с неизвестными коэффициентами, являющимися периодическими функциями времени  $t_1$  периода  $2\pi/\omega$ . Постоянные  $W_i$  тоже можно искать в виде рядов, расположенных по целым степеням параметра  $\mu$ . Коэффициенты рядов будут определяться однозначно из условия существования периодических коэффициентов в разложении функций (2.6).

Доказательство проводится методом последовательных приближений. Берем в качестве первого приближения  $x_s^{(0)}$  (2.7) и  $W_i^{(0)} = 0$ . Допустив, что найдены все  $x_s^{(1)}, \dots, x_s^{(l-1)}, W_i^{(1)}, \dots, W_i^{(l-1)}$  и что все  $x_s^{(1)}, \dots, x_s^{(l-1)}$  имеют вид (2.6), найдем  $(l+1)$ -ое приближение из уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(l)}(t_1)}{dt_1} &= \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma x^{(l)}(t_1 - \tau_\sigma) + \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma (x^{(l-1)}(t_1 - \tau'_\sigma) - x^{(l-1)}(t_1 - \tau_\sigma)) + \\ &+ \mu \alpha \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma x^{(l-1)}(t_1 - \tau'_\sigma) + \mu X(x^{(l-1)}(t_1 - \tau'_1), \dots, x^{(l-1)}(t_1 - \tau'_r), \mu)(1 + \mu \alpha) + \\ &+ \sum_{j=1}^m \varphi_j W_j^{(l)}; \quad (2.10) \\ &\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma (x^{(l-1)}(t_1 - \tau'_\sigma) - x^{(l-1)}(t_1 - \tau_\sigma)) + \right. \\ &+ \mu \alpha \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma x^{(l-1)}(t_1 - \tau'_\sigma) + \mu X(x^{(l-1)}(t_1 - \tau'_1), \dots, x^{(l-1)}(t_1 - \tau'_r), \mu) \times \\ &\times (1 + \mu \alpha) \left. \right\} \psi_j(t_1) dt_1 + d_{1j} W_1^{(l)} + \dots + d_{mj} W_m^{(l)} = 0 \quad (j = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Производя оценку  $|x^{(l)} - x^{(0)}|$ ,  $|W^{(l)}|$ , а также  $|x^{(l)} - x^{(l-1)}|$  и  $|W^{(l)} - W^{(l-1)}|$ , убеждаемся в том, что при достаточно малом  $\mu$  и при  $M$  и  $\alpha$  из (2.9) последовательности  $\{x^{(l)}$  и  $\{W^{(l)}$  равномерно и абсолютно сходятся.

Пусть пределы их являются  $\bar{x}$  и  $\bar{W}$ . Эти функции удовлетворяют системе (2.5). Функции  $\bar{x}(t, M, \mu \alpha, \mu)$  и  $\bar{W}(M, \mu \alpha, \mu)$  будут непрерывными по отношению к указанным аргументам ( $\bar{W}$  не зависит от времени). Можно показать, что они непрерывно дифференцируемы по  $M_1, \dots, M_m$ . Так как все  $x^{(l)}$  — периодические функции периода  $2\pi/\omega$ , то и предел их будет периодическим, периода  $2\pi/\omega$  по отношению ко времени  $t_1$ . По отношению к параметру  $\alpha$  функции  $\bar{x}$  и  $\bar{W}$  — аналитические.

Остановимся подробнее на выяснении вида функции  $\bar{W}$ . Положим  $W_i^* = \mu^{-1} W_i$  и подставим (2.6) во вторые уравнения (2.5). При этом, сокращая указанные уравнения на  $\mu$ , получим:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma (\bar{x}(t_1 - \tau'_\sigma) - \bar{x}(t_1 - \tau_\sigma)) \mu^{-1} + \alpha \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma \bar{x}(t_1 - \tau'_\sigma) + \right. \\ &+ X(\bar{x}(t_1 - \tau'_1), \dots, \bar{x}(t_1 - \tau'_r), \mu)(1 + \mu \alpha) \left. \right\} \psi_j(t_1) dt_1 + \\ &+ d_{1j} W_1^* + \dots + d_{mj} W_m^* = 0 \quad (2.11) \\ &\quad (j = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 P_j(M_1, \dots, M_m, \mu\alpha, \mu) &\equiv \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma (\bar{x}(t_1 - \tau'_\sigma) - \bar{x}(t_1 - \tau_\sigma)) \mu^{-1} + \right. \\
 &+ \alpha \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma x^*(t_1 - \tau'_\sigma) + X(\bar{x}(t_1 - \tau'_1), \dots, \bar{x}(t_1 - \tau'_r) \mu) (1 + \mu\alpha) \left. \right\} \psi_j(t_1) dt_1 + \\
 &+ \alpha \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma (x^{(0)}(t_1 - \tau'_\sigma) - x^{(0)}(t_1 - \tau_\sigma)) \psi_j(t_1) dt_1 \\
 &\quad (j = 1, \dots, m);
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\sum_{k=1}^m A_{kj} M_k = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma x^{(0)}(t_1 - \tau_\sigma) \psi_j(t_1) dt_1. \tag{2.13}$$

Так как  $dx^{(0)}(t)/dt$  — частное решение (1.3) периода  $2\pi/\omega$ , то равенство нулю всех правых частей (2.13) означало бы возможность частного решения системы (1.3) с вековым членом [6]. Поэтому  $|A_{kj}| \neq 0$ .

При этом уравнения (2.11) мы можем записать следующим образом:

$$P_j(M_1, \dots, M_m, \mu\alpha, \mu) + \alpha \sum_{k=1}^m A_{kj} M_k + \sum_{k=1}^m d_{kj} \bar{W}_k = 0. \tag{2.14}$$

### 3. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ (1.1)

Пусть система (1.1) допускает периодическое решение  $x_s(t, \mu)$  периода  $T = \frac{2\pi}{\omega} [1 + \mu\alpha(\mu)]$ , которое при  $\mu = 0$  обращается в порождающее решение

$$x_s^{(0)} = M_1^{(0)} \varphi_{s1}(t) + \dots + M_m^{(0)} \varphi_{sm}(t) \tag{3.1}$$

периода  $2\pi/\omega$ .

Сделав замену переменной  $t$  на  $t_1$  по формуле (1.8), найдем, что в силу (2.2) и (1.9) должны быть выполнены условия

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma x(t_1 - \tau'_\sigma, \mu) \alpha + X(x(t_1 - \tau'_1, \mu), \dots, x(t_1 - \tau'_r, \mu), \mu) \times \right. \\
 &\times (1 + \mu\alpha) + \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma (x(t_1 - \tau'_\sigma, \mu) - x(t_1 - \tau_\sigma, \mu)) \left. \right\} \psi_j dt = 0 \\
 &\quad (j = 1, \dots, m).
 \end{aligned}$$

Полагая здесь  $\mu = 0$ , получим необходимые условия существования периодического решения системы (1.1), обращающегося при  $\mu = 0$  в порождающее решение (3.1):

$$\begin{aligned}
 Q_j^{(0)}(\alpha^{(0)}, M^{(0)}) &\equiv \sum_{k=1}^m A_{kj} M_k^{(0)} \alpha^0 + P_j(M_1^0, \dots, M_m^0, 0, 0) = 0 \\
 &\quad (j = 1, \dots, m).
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Таким образом, периодическое решение системы (1.1) соответствует лишь такому периодическому решению системы (1.3), у которого  $M_1^0, \dots, M_m^0, \alpha(0)$  удовлетворяют условиям (3.2).

Так же, как и в работе [7], покажем, что в порождающем решении (3.1) можно положить  $M_m^0 = 0$ , не рискуя потерять периодическое решение (если только последние два решения  $\varphi_{m-1}$  и  $\varphi_m$  соответствуют паре чисто мнимых корней, а не нулевому корню). Случай, когда все корни нулевые, мы не рассматриваем, так как при этом задача сводится к отысканию положений равновесия нашей системы.

#### 4. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ (1.1)

Пусть (2.6) представляет собою периодическое решение вспомогательной интегро-дифференциальной системы уравнений, которое при  $\mu = 0$  обращается в решение

$$x_s^0 = M_1 \varphi_{s1} + \dots + M_{m-1} \varphi_{s, m-1} \quad (s = 1, \dots, n). \quad (4.1)$$

В силу леммы 1, всякое частное периодическое решение вспомогательной системы, обращающееся при  $\mu = 0$  в (4.1), принадлежит семейству периодических решений (2.5).

Для того, чтобы система уравнений (1.9) допускала такое периодическое решение  $x_s(t, \mu)$  периода  $2\pi/\omega$ , которое при  $\mu = 0$  обращается в порождающее решение

$$x_s^0 = M_1^{(0)} \varphi_{s1}(t) + \dots + M_{m-1}^{(0)} \varphi_{s, m-1} \quad (s = 1, \dots, n), \quad (4.2)$$

необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (2.14) допускала в области (2.9) при достаточно малых  $|\mu|$  решение

$$M_1(\mu), \dots, M_{m-1}(\mu), \alpha(\mu), \quad (4.3)$$

удовлетворяющее при  $\mu = 0$  условию

$$M_i(0) = M_i^{(0)} \quad (M_m = 0, \alpha(0) = \alpha^{(0)}), \quad (4.4)$$

где  $M_i^{(0)}, \alpha^{(0)}$  удовлетворяют уравнениям (3.2).

Действительно, предположим, что система (2.14) допускает решение (4.3), удовлетворяющее условию (4.4). Подставив тогда (4.3) в периодическое решение вспомогательной системы, получим периодическое решение системы (1.9), при  $\mu = 0$  обращающееся в порождающее. Поскольку это решение существует при  $\alpha = \alpha(\mu)$  ( $\alpha(0) = \alpha^0$ ), в этом случае система (1.1) будет допускать периодическое решение периода  $T = \frac{2\pi}{\omega} [1 + \mu \alpha(\mu)]$ .

С другой стороны, предположим, что система (1.1) допускает периодическое решение периода  $T = \frac{2\pi}{\omega} [1 + \mu \alpha(\mu)]$ , такое, что при  $\mu = 0$  это решение обращается в порождающее периодическое (4.2) периода  $2\pi/\omega$ . В этом случае система (1.9) будет допускать периодическое решение периода  $2\pi/\omega$  при значении  $\alpha = \alpha(\mu)$ . Очевидно, что это периодическое решение вместе с  $\sigma(\mu)$  и  $W_i = 0$  будет удовлетворять вспомогательной системе (2.5). Так как всякое частное периодическое решение вспомогательной системы принадлежит семейству (2.6), то система уравнений (2.14) допускает в области (2.9) при достаточно малых  $\mu$  решение вида (4.3).

Постоянные  $M_i^{(0)}$  и  $\alpha^{(0)}$  не могут быть произвольными. Они должны удовлетворять условию (3.2), которое является необходимым условием существования периодического решения системы (1.1), обращающегося при  $\mu = 0$  в периодическое решение (4.2) порождающей системы (1.3).

*Теорема 1.* Если постоянные  $M_1^{(0)}, \dots, M_{m-1}^{(0)}, \alpha^{(0)}$  удовлетворяют уравнению (3.2) и имеет место условие

$$\frac{\partial(Q_1^{(0)}, \dots, Q_m^{(0)})}{\partial(M_1, \dots, M_{m-1}, \alpha)} \Big|_{M_i = M_i^{(0)}, \alpha = \alpha^{(0)}} \neq 0, \quad (4.5)$$

то система уравнений (1.1) допускает единственное решение периода  $(2\pi/\omega)[1 + \mu\bar{\alpha}(\mu)]$ , которое при  $\mu = 0$  обращается в порождающее решение (4.2) периода  $2\pi/\omega$ .

Эта теорема является следствием теоремы о существовании неявных функций.

В том случае, когда  $P_j(M_1, \dots, M_{m-1}, 0, 0, 0) \equiv 0$ , положим  $\alpha = \mu\bar{\alpha}$ ,  $P_j^{(1)} = dP_j/d\mu|_{\mu=0}$  и рассмотрим уравнения

$$Q_j^{(1)} \equiv \sum_{k=1}^m A_{kj} M_k \bar{\alpha}(0) + P_j^{(1)}(M_1, \dots, M_{m-1}) \equiv 0 \quad (4.6)$$

$$(M_m = 0; j = 1, \dots, m).$$

*Теорема 2.* Если  $M_j^{(0)}, \bar{\alpha}^{(0)}$  удовлетворяют условию (4.6) и при этом выполнено условие

$$\frac{\partial(Q_1^{(1)}, \dots, Q_m^{(1)})}{\partial(M_1^{(0)}, \dots, M_{m-1}^{(0)}, \bar{\alpha}^{(0)})} \neq 0, \quad (4.7)$$

то система уравнений (1.1) допускает периодическое решение периода  $\frac{2\pi}{\omega}[1 + \mu^2 \bar{\alpha}(\mu)]$ , которое при  $\mu = 0$  обращается в периодическое решение (4.2) системы (1.3) периода  $2\pi/\omega$ .

Имеет место общее предложение.

*Теорема 3.* Если все

$$P_j^{(\sigma)}(M_1, \dots, M_{m-1}) \equiv d^\sigma P/d\mu^\sigma|_{\mu=0} \equiv 0 \quad (\sigma = 1, \dots, k-1)$$

и уравнение

$$Q_j^{(k)}(M^{(0)}, \bar{\alpha}(0)) \equiv \sum_{k=1}^m A_{kj} M_k \bar{\alpha}(0) + P_j^{(k)}(M_1^{(0)}, \dots, M_{m-1}^{(0)}, \bar{\alpha}(0)) = 0 \quad (4.8)$$

допускает решение, удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial(Q_1^{(k)}, \dots, Q_m^{(k)})}{\partial(M_1^{(0)}, \dots, M_{m-1}^{(0)}, \bar{\alpha}(0))} \neq 0,$$

то система (1.1) имеет единственное периодическое решение периода  $\frac{2\pi}{\omega}[1 + \mu^{k+1} \bar{\alpha}(\mu)]$ .

Если для записи первой системы (3.2) нам вообще не требуется расчета периодических решений вспомогательной системы, то для записи систем (4.6), (4.8) нужно провести расчет периодических решений вспомогательной системы с точностью до членов порядка  $\mu$  и  $\mu^k$ . Такой расчет, например, нетрудно сделать, когда правые части уравнений (1.1) являются аналитическими функциями.

В общем случае, когда якобиан (4.5) равен нулю, но не все его элементы равны нулю, требуется дополнительный анализ условий существования периодических решений, проводимый в каждом конкретном случае на основе общих положений теории неявных функций.

### 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Допустим, что функции  $X$  в уравнениях аналитичны относительно  $x_1(t - \tau_1), \dots, x_n(t - \tau_r)$ ,  $\mu$ . Тогда периодическое решение этих уравнений, а также его период  $T = \frac{2\pi}{\omega} (1 + \mu \alpha)$  будут аналитическими функциями параметра  $\mu$ , если выполнены условия теоремы 1. В этом случае решение можно искать не методом последовательных приближений, а более простым приемом разложения решения в ряды по степеням  $\mu$ .

Пусть

$$\alpha = \alpha^* + \mu \alpha_2 + \mu^2 \alpha_3 + \dots,$$

где  $\alpha^*, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  — неизвестные постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Периодическое решение  $\{x_s(t, \mu)\}$  периода  $2\pi/\omega$  системы (1.9), соответствующее периодическому решению системы (1.1) периода  $T(\mu) = \frac{2\pi}{\omega} [1 + \mu \alpha(\mu)]$ , будем искать в виде рядов

$$x^*(t_1, \mu) = x^{(0)}(t_1) + \mu x^{(1)}(t_1) + \mu^2 x^{(2)}(t_1) + \dots,$$

где  $x^{(i)}(t_1)$  — неизвестные периодические функции  $t_1$  периода  $2\pi/\omega$ . Положим

$$x_s^{(0)}(t_1) = M_1^* \varphi_{s1}(t_1) + \dots + M_{m-1}^* \varphi_{s, m-1},$$

где  $M_1^*, \dots, M_{m-1}^*$  можно найти из условия периодичности  $x_s^{(0)}(t_1)$ , а  $M_m^* = 0$ . Для определения  $x_s^{(1)}(t_1)$  имеем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma x^{(1)}(t_1 - \tau_\sigma) + X(x^{(0)}(t_1 - \tau_1), \dots, x^{(0)}(t_1 - \tau_r), 0) + \\ &+ \alpha^* \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma x^{(0)}(t_1 - \tau_\sigma) + \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma \frac{dx^{(0)}(t_1 - \tau_\sigma)}{dt_1} \alpha^* \tau_\sigma. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Для того, чтобы функции  $x_s^{(1)}(t_1)$  были периодическими периода  $2\pi/\omega$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} X [x^{(0)}(t_1 - \tau_1), \dots, x^{(0)}(t_1 - \tau_r), 0] \psi_i(t_1) dt_1 + \\ &+ \tau_\sigma \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma \frac{dx^{(0)}(t_1 - \tau_\sigma)}{dt_1} \alpha^* \psi_i dt + \\ &+ \alpha^* (A_{1i} M_1^* + \dots + A_{m-1, i} M_{m-1}^*) \equiv Q_i(M_1^*, \dots, M_{m-1}^*, \alpha^*) = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $A_{ji}$  определены формулами (2.12).

Допустим, что  $M_1^*, \dots, M_{m-1}^*$ ,  $\alpha^*$  удовлетворяют уравнениям (5.2) и при этом выполняется условие

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_m)}{\partial(M_1^*, \dots, M_{m-1}^*, \alpha^*)} \neq 0. \quad (5.3)$$

В этом случае периодическое решение системы (1.9) существует на основании теоремы 1. Первый коэффициент будет иметь вид:

$$x_s^{(1)} = x_s^{(1)*}(t_1) + M_1^{(1)}\varphi_{s1}(t_1) + \dots + M_{m-1}^{(1)}\varphi_{s, m-1}(t_1),$$

где  $x_s^{(1)*}(t_1)$  — какое-нибудь частное периодическое решение уравнений (5.1), а  $M_i^{(1)}$  — постоянные, которые вместе с  $\alpha_2$  следует определить из условий периодичности  $x_s^{(2)}(t_1)$ . Эти условия, как и в случае систем обыкновенных уравнений [1], представляют собой линейные уравнения с определителем (5.3).

Составим уравнения для  $x^{(k)}$  при любом  $k$ :

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(k)}}{dt_1} = & \sum_{\sigma=1}^r a_{\sigma} x^{(k)}(t_1 - \tau_{\sigma}) + \alpha_k \sum_{\sigma=1}^r a_{\sigma} x^{(0)}(t_1 - \tau_{\sigma}) + \\ & + \sum_{\sigma=1}^r \left( \frac{\partial X}{\partial x(t - \tau_{\sigma})} \right)_{x=x^{(0)}} x^{(l-1)}(t - \tau_{\sigma}) + f_s^{(k)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь  $f_s^{(k)}$  — целые рациональные функции с постоянными коэффициентами от  $x^{(0)}$ ,  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$ , ... и их производных, а также  $\alpha_j$ . Скобки показывают, что производные вычислены для значений  $x = x^{(0)}$ ,  $\mu = 0$ .

Из уравнений (5.4) следует, что если  $x^{(0)}$  при каком-нибудь  $p$  периодические, то они имеют вид:

$$x_s^{(p)} = x_s^{(p)*}(t_1) + M_1^{(p)}\varphi_{s1}(t_1) + \dots + M_{m-1}^{(p)}\varphi_{s, m-1}(t_1), \quad (5.5)$$

где  $x_s^{*(p)}$  — частное периодическое решение уравнений (5.4),  $M_i^{(p)}$  — произвольные постоянные, которые находятся из условия периодичности функций  $x_s^{(p+1)}$ .

Допустим, что вычислены функции  $x_s^{(1)}, \dots, x_s^{(k-2)}, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ , а также  $x^{(k-1)}$ , но что входящие в последние постоянные  $M_i^{(k-1)}$ , а также постоянная  $\alpha_k$  подлежат определению из условия периодичности функций  $x_s^{(k)}$ :

$$\begin{aligned} \alpha_k(A_{11}M_1^* + \dots + A_{m-1, i}M_{m-1}^*) - \alpha^*(A_{11}M_1^{(k-1)} + \dots + A_{m-1, i}M_{m-1}^{(k-1)}) + \\ + \sum_{i=1}^{m-1} M_i^{(k-1)} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sum_{\sigma=1}^m \sum_{\beta=1}^n \left( \frac{\partial f_{\beta}}{\partial x_{\gamma}(t - \tau_{\sigma})} \right) \varphi_{ij}(t_1 - \tau_{\sigma}) \psi_{\beta i}(t_1) dt_1 + N_i^{(k-1)} = 0 \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, m),$$

где

$$\begin{aligned} N_j^{(k-1)} = & \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left[ \sum_{\sigma=1}^m \sum_{\beta=1}^n \left( \frac{\partial f_{\beta}}{\partial x_{\gamma}(t - \tau_{\sigma})} \right) x_{\gamma}^{(k-1)*}(t_1 - \tau_{\sigma}) \psi_{\beta i}(t_1) + \right. \\ & \left. + \sum_{\beta=1}^n f_{\beta}^{(k)} \psi_{\beta i} \right] dt_1 \end{aligned}$$

— известные постоянные.

Эти уравнения могут быть представлены в виде

$$\left( \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha^*} \right) \alpha_k + \sum_{j=1}^{m-1} \left( \frac{\partial Q_i}{\partial M_j} \right) M_j^{(k-1)} + N_i^{(k-1)} = 0 \\ (i = 1, \dots, m).$$

Таким образом, получается  $m$  линейных уравнений относительно  $\alpha_k$ ,  $M_i^{(k-1)}$ . Поскольку определитель этих уравнений (5.3) отличен от нуля, все функции  $\bar{x}_s^{(k)}$  и постоянные  $M_i^{(k)}$ ,  $\alpha^{(k)}$  определяются однозначно. Поэтому ряды для искомого периодического решения и выражения периода  $T(\mu)$  системы (1.1) сходятся.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956.
- 2 N. Minorsky, Comptes Rendes, 234, 1945 (1952).
- 3 В Э Эльстольц, Качественные методы в математическом анализе. гл. 5, Гостехиздат, М., 1955.
- 4 З Д МакМиллан, Динамика твердого тела, ИЛ, М., 1951, стр. 378—385.
- 5 С Н Шиманов, Прикл. матем. и мех., 16, 129 (1952).
- 6 С.Н. Шиманов, Прикл. матем. и мех., 23, 836 (1959).
- 7 Н Г Булгаков, Прикл. матем. и мех., 19, 265 (1955).

Уральский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
28 января 1960 г.

## К ТЕОРИИ ВИБРОТРАНСПОРТИРОВКИ\*

B. A. Брусин

Методом точечных отображений исследуется задача о вибротранспортировке. Установлено, что найденные в статье [2] периодические решения — единственные и абсолютно устойчивые. Указаны условия перемещения вверх по наклонной плоскости транспортируемого тела и исследована зависимость средней скорости перемещения от параметров вибротранспортера.

Задача о вибротранспортировке в отсутствие подпрыгивания транспортируемого предмета сводится к решению нелинейного неавтономного уравнения вида:

$$\ddot{x} + mg \sin \alpha - ma \omega^2 \cos \beta \cos(\omega t) + F = 0, \quad (1)$$

где  $x$  — величина смещения тела от некоторой фиксированной точки на плоскости,  $\alpha$  — угол наклона плоскости,  $\beta$  — угол между направлением колебания и плоскостью,  $F$  — сила трения, определяемая соотношениями

$$F = \begin{cases} f = k [mg \cos \alpha + ma \omega^2 \sin \beta \sin(\omega t)] & \text{при } \dot{x} > 0 \\ -f & \text{при } \dot{x} < 0 \\ \text{любое значение в } [-f, f] & \text{при } \dot{x} = 0 \end{cases}$$

После перехода к безразмерным величинам получим следующее уравнение:

$$\sin \tau = \dot{y} + p + \begin{cases} q + f \sin \tau & \text{при } y > 0 \\ -q - f \sin \tau & \text{при } y < 0 \\ \text{любое промежуточное значение при } y = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$y = \frac{\dot{x}}{a \omega \cos \beta}, \quad p = \frac{g \sin \alpha}{a \omega^2 \cos \beta}, \quad q = \frac{kg \cos \alpha}{a \omega^2 \cos \beta}, \quad f = k \operatorname{tg} \beta, \quad \tau = \omega t. \quad (3)$$

Условие того, что тело не отрывается от плоскости, имеет вид:

$$g \cos \alpha > a \omega^2 \sin \beta$$

или

$$f < q.$$

В работе [2] были найдены периодические решения этого уравнения и исследована их устойчивость. В настоящей работе проводится полное исследование системы, описываемой уравнением (1). Решение достигается применением метода точечных отображений [1]. При этом

\* В статье излагаются основные результаты дипломной работы В. А. Брусина, выполненной под руководством Ю. И. Неймарка

устанавливается, что найденные в работе [2] периодические решения — единственно возможные и что каждое из этих периодических движений является абсолютно устойчивым. Кроме того, в настоящей работе указываются условия, при которых транспортируемое тело перемещается вверх, и изучается зависимость средней скорости перемещения транспортируемого предмета от параметров вибротранспортера.

*Фазовое пространство. Сведение к точечному отображению.* Из уравнения (2) видно, что начальное условие  $y|_{\tau=\tau_0} = y_0$  полностью определяет решение уравнения; поэтому фазовое пространство  $G$  рассматриваемой системы является цилиндром (фазовые точки с координатами  $(y, \tau)$  и  $(y, \tau + 2\pi)$  отождествляются в силу периодичности по  $\tau$  правой части уравнения (2)). Для удобства исследования целесообразно разбить фазовый цилиндр  $G$  на области  $G^+$ , где  $y > 0$ ,  $G^-$ , где  $y < 0$ , и  $G^0$ , где  $y = 0$ .

Интегрируя (2), можно получить уравнение траекторий в  $G^+$  и соответственно в  $G^-$  в виде:

$$y_{\pm} = y_0^0 - (p \pm q)(\tau - \tau_0) - (1 \pm f)(\cos \tau - \cos \tau_0). \quad (4)$$

Фазовая точка  $(y, \tau)$  при возрастании  $\tau$  может либо уйти в бесконечность, не пересекая  $G^0$ , либо попасть на  $G^0$ ; далее фазовая точка может либо остаться на  $G^0$ , либо перейти в один из полуцилиндров  $G^+$  или  $G^-$ . Случай ухода фазовой точки в бесконечность не может иметь места при  $\operatorname{tg} \alpha < k$  ( $p < q$ ).

В соответствии с поведением фазовых траекторий вблизи  $G^0$ , область  $G^0$  разбивается, согласно уравнению (2), на отрезки

$$(p+q)(1+f)^{-1} > \sin \tau; \quad (5)$$

$$(p-q)(1-f)^{-1} > \sin \tau;$$

$$(p+q)(1+f)^{-1} < \sin \tau; \quad (6)$$

$$(p-q)(1-f)^{-1} < \sin \tau,$$

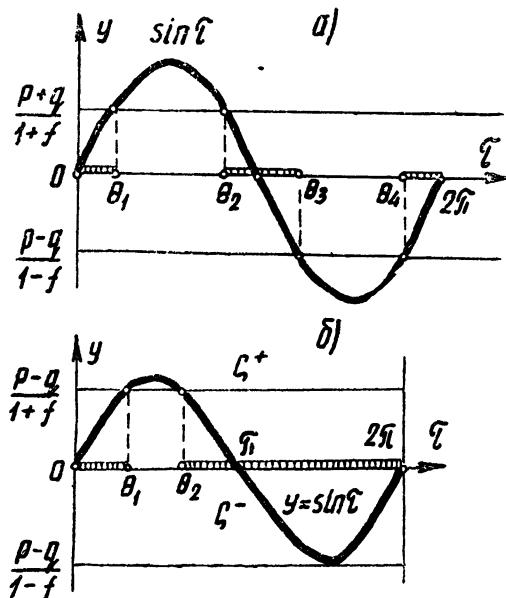


Рис. 1.

типов, изображенных на рис. 1а (точки  $\theta_1, \theta_3$  и  $\theta_2, \theta_4$ ).

Для дальнейшего исследования целесообразно различать следующие случаи.

I.  $(p+q)(1+f)^{-1} < 1$ ;  $-1 < (p-q)(1-f)^{-1} < 0$  (рис. 1а). В этом случае имеется два отрезка скользящих движений  $[\theta_4, \theta_1]$  и  $[\theta_2, \theta_3]$ , где

и граничные точки двух

$$\begin{aligned} (p+q)(1+f)^{-1} &\leq \sin \tau \leq \\ &\leq (p+q)(1+f)^{-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

на отрезки динамической неопределенности [3]

$$\begin{aligned} (p+q)(1+f)^{-1} &\leq \sin \tau \leq \\ &\leq (p+q)(1+f)^{-1} \end{aligned}$$

$$\theta_1 = \arcsin [(p+q)(1+f)^{-1}]; \quad \theta_2 = \pi - \arcsin [(p+q)(1+f)^{-1}];$$

$$\theta_3 = \pi + \arcsin [(q-p)(1-f)^{-1}]; \quad \theta_4 = 2\pi - \arcsin [(q-p)(1-f)^{-1}],$$

т. е.

$$0 < \theta_1 < \pi/2; \quad \pi/2 < \theta_2 < \pi; \quad \pi < \theta_3 < \frac{3}{2}\pi; \quad \frac{3}{2}\pi < \theta_4 < 2\pi.$$

II.  $(p+q)(1+f)^{-1} < 1$ ;  $(p-q)(1-f)^{-1} \leq -1$  (рис. 1б). В этом случае имеется один отрезок скользящих движений  $[\theta_2, \theta_1]$ . Участок  $[\theta_1, \theta_2]$  фазовая точка проходит снизу вверх.

III.  $(p+q)(1+f)^{-1} < 1$ ;  $0 < (p-q)(1-f)^{-1}$ . В этом случае имеются либо два отрезка скользящих движений, которые расположены на отрезке  $0 < \tau < \pi$  (если  $(p-q)(1-f)^{-1} < (p+q)(1+f)^{-1}$ ), либо отрезки динамической неопределенности (если  $(p-q)(1-f)^{-1} > (p+q)(1+f)^{-1}$ ).

IV.  $(p+q)(1+f)^{-1} \geq 1$ . Поведение траекторий характеризуется тем, что все движения, начинающиеся в  $G^+$ , приходят в конце концов на  $G^0$ , а прида на  $G^0$ , фазовая точка либо через некоторое время переходит в  $G^-$  (если  $(p-q)(1-f)^{-1} \geq -1$ ), либо остается на  $G^0$  (если  $(p-q)(1-f)^{-1} \leq -1$ ).

Как видно из (4), при условии  $p < q$  фазовая точка, находясь в  $G^+$  или  $G^-$ , через некоторое время попадает на  $G^0$ . После этого она либо остается на  $G^0$ , если для всей окружности  $G^0$  выполняется (7), либо переходит в одну из областей  $G^+$  или  $G^-$ .

Если  $(p+q)(1+f)^{-1} < 1$ , то, как следует из выполнения неравенств (5), (6) и уравнения (4), фазовая точка отрезка  $[\theta_1, \theta_2]$  перейдет в  $G^+$ , а оттуда на отрезок  $[\theta_2, \theta_1]$ . Тем самым определяется точечное отображение  $T^+$  отрезка  $[\theta_1, \theta_2]$  в отрезок  $[\theta_2, \theta_1]$ .

Если  $M_0$  имеет координату  $\tau_0$ , то координата  $\tau_1$  точки  $M_1 = T^+ M_0$  найдется как наименьший положительный, больший  $\tau_0$ , корень уравнения

$$\cos \tau_1 - \cos \tau_0 + \sin \theta_1 (\tau_1 - \tau_0) = 0. \quad (8)$$

Аналогичным образом в случае  $|(p-q)(1-f)^{-1}| < 1$  определяется точечное преобразование  $T^-$  отрезка  $[\theta_3, \theta_4]$  в отрезки  $[\theta_4, \theta_3]$ . Если  $M'_0$  имеет координату  $\tau'_0$ , то координата  $\tau'_1$  точки  $M'_1 = T^- M'_0$  находится как наименьший положительный, больший  $\tau'_0$ , корень уравнения

$$\cos \tau'_1 - \cos \tau'_0 + \sin \theta_3 (\tau'_1 - \tau'_0) = 0. \quad (9)$$

Фазовая точка, находящаяся на отрезке скольжения  $[\theta_4, \theta_1]$ , переходит в точку  $\theta_1$ , а фазовая точка, находящаяся на отрезке скольжения  $[\theta_2, \theta_3]$ , переходит в точку  $\theta_3$ . В соответствии с этим обозначим через  $T^0$  точечное преобразование точек отрезков скольжения  $[\theta_4, \theta_1]$  и  $[\theta_2, \theta_3]$  в точки  $\theta_1$  и  $\theta_3$  соответственно.

*Классификация периодических движений.* Периодические движения могут изображаться только замкнутыми фазовыми кривыми, охватывающими цилиндр. Естественно, что период их кратен  $2\pi$ . Из структуры фазового пространства непосредственно следует, что не может быть периодического движения с периодом  $2\pi n$ , если  $n \geq 2$ . Действительно, такие периодические движения изображаются замкнутыми самопересекающимися кривыми. Поскольку, однако, из каждой точки фазового пространства выходит единственная траектория, само-пересечения траектории невозможны.

Рассмотрим различные случаи.

а) Существует неподвижная точка преобразования  $T^+ T^-$  (тогда существует и неподвижная точка преобразования  $T^- T^+$ ). Это значит, что существует точка  $M_0$ , которая преобразованием  $T^+$  переводится в точку  $M_1$ , а та, в свою очередь, преобразованием  $T^-$  переводится в точку  $M_0$ . Иными словами, при этом существует замкнутая траектория, охватывающая цилиндр. Периодический режим, изображаемый этой замкнутой траекторией, назовем  $P_1 P_1$ . Это — периодический режим без скольжения, при котором части этой замкнутой траектории не принадлежат отрезкам скольжения (рис. 2а).

б) Существует неподвижная точка преобразования  $T^+ T^- T^0$  (тогда существует неподвижная точка преобразований, получаемых из данного циклической перестановкой). Следовательно, существует замкнутая траектория, охватывающая цилиндр, причем часть этой траектории принадлежит отрезку скольжения (рис. 2б). Периодический режим этого вида назовем  $P_2$ .

в) Существует неподвижная точка преобразования  $T^+ T^0 T^-$ . Периодический режим, который соответствует этой неподвижной точке, назовем  $P_3$  (рис. 2в).

г) Существует неподвижная точка преобразования  $T^+ T^0$ . Периодический режим, соответствующий этой неподвижной точке, назовем  $P_4$  (рис. 2г).

д) Существует неподвижная точка преобразования  $T^0 T^-$ . Периодический режим, соответствующий этой неподвижной точке, назовем  $P_5$  (рис. 2д).

е) Существует неподвижная точка преобразования  $T^+ T^0 T^- T^0$ . Периодический режим, соответствующий этой неподвижной точке, назовем  $P_6$  (рис. 2е).

Таким образом, существует шесть типов периодических режимов, и легко видеть, что других типов быть не может. Действительно, каждому типу периодических режимов соответствует неподвижная точка преобразования, составленного из преобразований  $T^+$ ,  $T^-$  и  $T^0$ ; если принять, что преобразования, получаемые один из другого циклической перестановкой сомножителей, тождественны, то это соответствие будет и взаимно однозначным. Можно подсчитать число различных в этом смысле преобразований, составленных из  $T^+$ ,  $T^-$  и  $T^0$ , учитывая, что  $T^+$ ,  $T^-$  входят не более одного раза, а  $T^0$  не более двух раз (эти требования вытекают из условия, что период

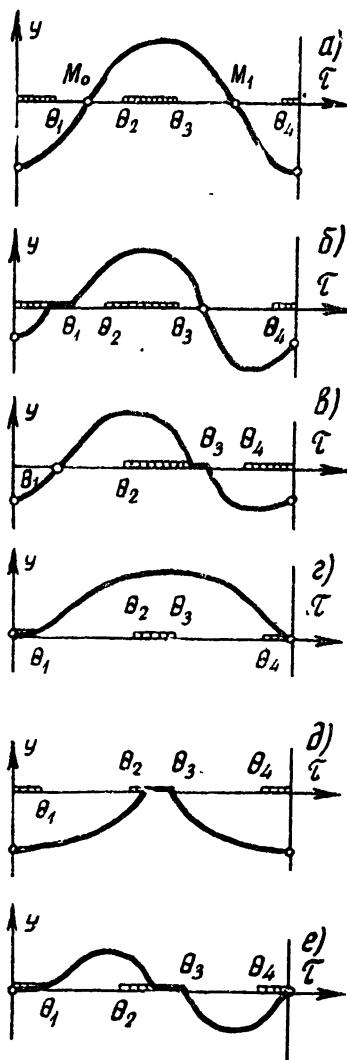


Рис. 2.

другого циклической перестановкой сомножителей, тождественны, то это соответствие будет и взаимно однозначным. Можно подсчитать число различных в этом смысле преобразований, составленных из  $T^+$ ,  $T^-$  и  $T^0$ , учитывая, что  $T^+$ ,  $T^-$  входят не более одного раза, а  $T^0$  не более двух раз (эти требования вытекают из условия, что период

периодического режима не превышает  $2\pi$ ), причем  $T^0$  не может встречаться два раза подряд. Оказывается, что число различных преобразований равно шести, т. е. данная выше классификация периодических движений будет исчерпывающей.

*Изучение движения вибротранспортера в случае существования периодического движения  $P_1$ .* Пусть существует периодическое движение  $P_1$  (рис. 2а). Тогда точка  $M_0 \in [\theta_1, \theta_2]$  преобразованием  $T^+$  переводится в точку  $M_1 \in [\theta_3, \theta_4]$ , а она, в свою очередь, преобразованием  $T^-$  переводится в точку  $M_2 = M_0$ . Следовательно, точка  $M_0$  есть неподвижная точка преобразования  $T^+ T^-$ . Если  $M_0$  имеет координаты  $(0, \tau_0^*)$ , а  $M_1$  координаты  $(0, \tau_0^* + T_1)$ , то точка  $M_2$  должна иметь координаты  $(0, \tau_0^* + T_1 + T_2)$ , где  $T_1 + T_2 = 2\pi$ . Уравнения, связывающие координаты  $\tau$  точек  $M_0, M_1$  и  $M_2$  можно записать в виде:

$$(p + q)(1 + f)^{-1} T_1 + \cos(\tau_0^* + T_1) - \cos \tau_0^* = 0; \quad (10)$$

$$(p - q)(1 - f)^{-1} (2\pi - T_1) + \cos \tau_0^* - \cos(\tau_0^* + T_1) = 0.$$

Из (10) находим:

$$T_1 = \frac{\pi(p - q)(1 + f)}{q - fp}; \quad T_2 = \frac{\pi(p + q)(1 - f)}{q - fp}. \quad (11)$$

Так как мы рассматриваем случай  $p < q$ , то из (11) следует, что периодический режим  $P_1$  будет существовать только в том случае, если  $f < 1$ .

Из (10) находим:

$$\begin{aligned} \tau_0^* &= \pi - \arcsin \left[ \frac{p + q}{1 + f} \frac{T_1}{2\sin(T_1/2)} \right] - \frac{T_1}{2}; \\ \tau_1^* &= \pi - \arcsin \left[ \frac{p + q}{1 + f} \frac{T_1}{2\sin(T_1/2)} \right] + \frac{T_1}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Периодическое движение существует, если  $p < q, f < 1, f < q$  и  $\tau_0^*, \tau_1^*$  из (12) удовлетворяют условиям:

$$\theta_1 \leq \tau_0^* < \theta_2, \quad \theta_3 \leq \tau_1^* < \theta_4. \quad (13)$$

В дальнейшем будет показано, что  $\tau_0^* < \theta_2$  и  $\tau_1^* < \theta_4$ .

Вопрос об устойчивости режима  $P_1$  можно свести к вопросу об устойчивости неподвижной точки преобразования  $T^+ T^-$  (или преобразования  $T^- T^+$ ). Рассмотрим плоскость  $(\tau_0, \tau_1)$  (рис. 3), где  $M^*$  — точка пересечения кривых  $F_{\theta_1} = 0$  и  $F_{\theta_3} = 0$  ( $F_{\theta_{1,3}} = \cos \tau_1 - \cos \tau_0 + \sin \theta_{1,3} (\tau_1 - \tau_0)$ ). Для того, чтобы периодический режим был абсолютно устойчив, достаточно выполнения неравенств

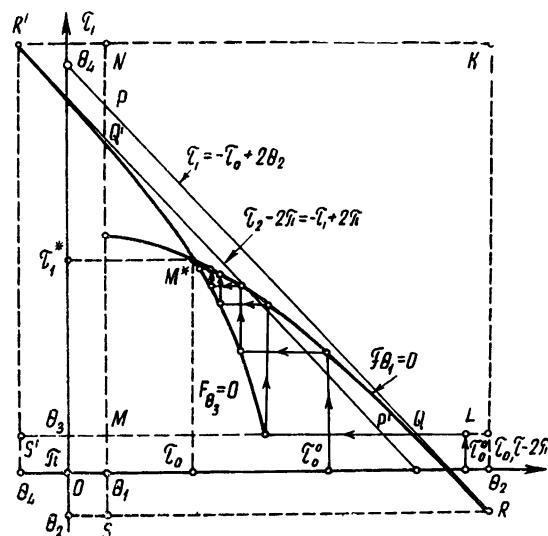


Рис. 3.

$$|d\tau_1/d\tau_0| < 1, \quad |d\tau_2/d\tau_1| < 1 \quad (14)$$

во всех точках кривых  $F_{\theta_1}(\tau_0, \tau_1) = 0$  и  $F_{\theta_3}(\tau_1, \tau_2 - 2\pi) = 0$ \*. Легко видеть, что  $d\tau_1/d\tau_0|_{\tau_0=\theta_1} = 0$ . Следовательно, значения производной функции  $F_{\theta_1} = 0$  колеблются в интервале от 0 до  $-1$ , причем значение, равное  $-1$ , принимается в точке  $(\theta_2, \theta_2)$ . Отсюда следует, что кривая  $F_{\theta_1} = 0$  лежит строго под прямой  $\tau_1 = -\tau_0 + 2\theta_2$  (рис. 3).

Аналогично, из того, что значения производной кривой  $F_{\theta_3}$  колеблются в интервале от 0 до  $-1$ , причем значение 0 принимается при  $\tau_0 = \theta_3$ , а  $-1$  — в точке  $(\theta_4, \theta_4)$ , следует, что кривая  $F_{\theta_3} = 0$  лежит под прямой  $\tau_2 - 2\pi = -\tau_1 + 2\pi$  (рис. 3).

Заметим, что кривую  $F_{\theta_1}(\tau_0, \tau_1) = 0$  в рассматриваемой области можно записать в виде  $\tau_1 = f_{\theta_1}(\tau_0)$ , а кривую  $F_{\theta_3}(\tau_1, \tau_2 - 2\pi) = 0$  — в виде  $\tau_2 = 2\pi + f_{\theta_3}(\tau_1)$ .

На рис. 3 показана диаграмма Кенигса—Лемеря. Кривая  $f_{\theta_1}$  лежит в треугольнике  $PSR$  ( $P$  и  $R$  — точки пересечения прямой  $\tau_1 = -\tau_0 + 2\theta_2$  соответственно с прямыми  $\tau_0 = \theta_1$  и  $\tau_1 = \theta_2$ ,  $S$  — точка с координатами  $(\theta_1, \theta_2)$ ), а кривая  $f_{\theta_3}$  — в треугольнике  $P'S'R'$  (где  $P'$  и  $R'$  — точки пересечения прямой  $\tau_2 - 2\pi = -\tau_1 + 2\pi$  соответственно с прямыми  $\tau_1 = \theta_3$  и  $\tau_0 = \theta_4$ ,  $S'$  — точка с координатами  $(\theta_4, \theta_3)$ ). Точка пересечения этих кривых  $M^*$  может находиться только в общей части этих треугольников. Легко видеть, что в случае пересечения кривых  $f_{\theta_1}(\theta_1) < \theta_4$  и  $f_{\theta_3}(\theta_3) < \theta_2$  (это означает, что не существует периодических движений типа  $P_4$  и  $P_5$ ).

Процесс установления происходит следующим образом. Возьмем произвольное  $\tau_0^0 \in [\theta_1, \theta_2]$ ; по  $\tau_0^0$  находим  $\tau_1^0$  как ординату соответствующей точки кривой  $f_{\theta_1}$ . Если  $\tau_1^0 > \theta_1$ , то по  $\tau_1^0$  можно найти  $\tau_0^1$  как абсциссу соответствующей точки на кривой  $f_{\theta_3}$ ; если  $\tau_1^0 < \theta_1$ , то на  $\tau_1^0$  действует преобразование  $T^0$  и переводит ее в  $\theta_1$ . Затем по  $\theta_1$  можно найти  $\tau_0^1$  и т. д. Последовательность  $\{\tau_0^i\}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) сходится к  $\tau_0^*$ , а последовательность  $\{\tau_1^j\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) сходится к  $\tau_1^*$  (где  $\tau_0^*$  и  $\tau_1^*$  — координаты точки  $M^*$ ), что следует из выполнения условия (14). Аналогично происходит процесс установления и в том случае, когда за начальное значение взято  $\tau_0^0 \in [\theta_3, \theta_4]$ . Отличие состоит лишь в том, что при  $\tau_0^1 = f_{\theta_3}(\tau_0^0) < \theta_3$ , следующим шагом нужно брать значение  $\theta_3$ . Таким образом, периодический режим  $P_1$  абсолютно устойчив, т. е. все движения асимптотически приближаются к этому режиму.

\* Покажем справедливость неравенства для кривой  $F_{\theta_1} = 0$ . Из соотношения

$$d\tau_1/d\tau_0 = - \frac{\sin \tau_0 - \sin \theta_1}{\sin \tau_1 + \sin \theta_1}$$

следует, что  $d\tau_1/d\tau_0 < 0$  (Нужно учесть, что  $\tau_0, \tau_1$  и  $\theta_1$  в этом выражении удовлетворяют уравнению (8).) Найдем сначала условия, при которых возможно равенство  $|d\tau_1/d\tau_0| = 1$ . Преобразовывая выражение для  $|d\tau_1/d\tau_0|$  и равенство (8), получим:

$$-\sin \frac{\tau_0 + \tau_1}{2} \sin \frac{\tau_1 - \tau_0}{2} + \sin \theta_1 \frac{\tau_1 - \tau_0}{2} = 0; \quad \sin \frac{\tau_0 + \tau_1}{2} \cos \frac{\tau_1 - \tau_0}{2} = \sin \theta_1.$$

Отсюда следует, что  $\sin \theta_1 = 0$  и  $\operatorname{tg} \frac{\tau_1 - \tau_0}{2} = \frac{\tau_1 - \tau_0}{2}$ , т. е. равенство возможно либо при  $\theta_1 = 0$ , либо при  $\tau_0 = \tau_1 = \theta_2$ . В остальных случаях, как нетрудно видеть,  $|d\tau_1/d\tau_0| < 1$  (так как  $\operatorname{tg} \frac{\tau_1 - \tau_0}{2} > \frac{\tau_1 - \tau_0}{2}$  при  $0 < \frac{\tau_1 - \tau_0}{2} < \pi$ ). Аналогично проверяется и второе из неравенств (14).

*Бифуркация периодического режима  $P_1$  в другие режимы.* При непрерывном изменении параметров уравнения (2) вид кривых  $f_{\theta_1}$  и  $f_{\theta_3}$  и их взаимное расположение будут непрерывно меняться, а следовательно, станет непрерывно меняться и точка их пересечения: точка  $M^* = M^*(p, q, f)$  будет перемещаться по плоскости  $(\tau_0, \tau_1)$ . Пока она находится внутри прямоугольника  $KLMN$  ( $K$  — точка с координатами  $(\theta_2, \theta_4)$ ,  $L$  — точка с координатами  $(\theta_2, \theta_3)$ ,  $M$  — точка с координатами  $(\theta_1, \theta_3)$  и  $N$  — точка с координатами  $(\theta_1, \theta_4)$ ; см. рис. 3), существует режим  $P_1$ , что следует из условия (13). Бифуркация  $P_1$  произойдет в том и только в том случае, если  $M^*$  выйдет за пределы этого прямоугольника.

В предыдущем разделе было указано, что точка пересечения лежит в общей части треугольников  $PSR$  и  $P'S'R'$ ; из этого следует, что  $\tau_0^* < \theta_2$  и  $\tau_1^* < \theta_4$ , т. е. точка пересечения не может попасть на стороны  $NK$  и  $KL$  (рис. 3). Доказательство устойчивости периодических режимов, которые возникают при исчезновении режима  $P_1$ , основано на том, что условия (14) остаются справедливыми при любом изменении параметров (за исключением случая  $\theta_1 = 0$  и  $\theta_3 = 0$ , когда  $|d\tau_1/d\theta_0| = 1$ ,  $|d\tau_2/d\theta_1| = 1$ ). При бифуркации режима  $P_1$  точка  $M^*$  (пересечение кривых) исчезает. Однако можно мысленно продолжить эти кривые до пересечения так, чтобы не нарушились условия (14). (Если рассматривать расположение кривых, близкое к бифуркационному, то для этого их надо продолжить в ту сторону, где „только что“ исчезла точка  $M^*$ . В дальнейшем фраза „точка  $M^*$  исчезла через сторону  $MQ'$ “ будет просто означать, что продолжение кривых происходит через эту сторону.) Тогда изображающая точка в процессе итерации будет приближаться к этой „воображаемой“ точке пересечения (в силу выполнения условий (14)) и на каком-то шаге выйдет за пределы прямоугольника  $KLMN$  (на фазовой плоскости это соответствует попаданию фазовой точки на отрезок скольжения). Последнее означает, что изображающая точка попадет в область действия преобразования  $T^0$ . Дальнейшее движение ее зависит от расположения кривых, а именно, от значений  $f_{\theta_1}(\theta_1)$  и  $f_{\theta_3}(\theta_3)$ .

Если точка  $M^*$  „исчезла“ через отрезок  $MQ'$ , то при этом могут иметь место три неравенства: а)  $\theta_3 < f_{\theta_1}(\theta_1) < \theta_4$ , б)  $f_{\theta_1}(\theta_1) \leq \theta_3$ , в)  $f_{\theta_1}(\theta_1) \geq \theta_4$ . Диаграммы Кенигса — Лемеря для этих случаев показаны на рис. 4а, б, в. Процесс итерации строится так же, как и для режима  $P_1$ , только в этом случае изображающая точка может несколько раз выходить за пределы прямоугольника  $KLMN$ , т. е. попадать в область действия преобразования  $T^0$ . В результате действия преобразования  $T^0$  изображающая точка должна возвратиться на ту сторону прямоугольника, через которую она вышла за его пределы.

В случае а) процесс установления периодического режима показан на рис. 4а. При любом начальном значении на некотором шаге изображающая точка в конце концов попадет на отрезок  $[c, c']$  ( $c$  ( $c'$ ) — точка пересечения  $f_{\theta_3}$  ( $f_{\theta_1}$ ) с прямой  $\tau = \theta_1$ ), а из него сначала в точку  $c'$ , затем в точку  $c''$  на кривой  $f_{\theta_3}$ . Из  $c''$  преобразованием  $T^0 T^+$  изображающая точка опять переводится в точку  $c'$ . Таким образом, устанавливается периодический режим, который на плоскости  $(\tau_0, \tau_1)$  изображается замкнутой линией  $c'c''c'$ . Нетрудно заметить, что точка  $c''$  есть неподвижная точка преобразования  $T^0 T^+ T^-$ , т. е. установившийся режимом будет режим  $P_2$ .

В случае б) процесс установления происходит следующим образом (рис. 4). После отражения от  $f_{\theta_1}$  изображающая точка не встретит

кривую  $f_{\theta_3}$ , как видно из рисунка 4б, т. е. ордината ее будет меньше  $\theta_3$ . При этом преобразование  $T^0$  увеличивает ординату изображающей точки до значения  $\theta_3$ . На рисунке для удобства это увеличение происходит по прямой  $\tau = \theta_1$ , так что после действия преобразования  $T^0$  изображающая точка попадет в точку  $M(\theta_1, \theta_3)$ . Из точки  $M$  изображающая точка попадет в  $c''$  (где  $c''$  — точка пересечения  $f_{\theta_3}$  с прямой  $\tau = \theta_3$ ) и преобразование  $T^0$  возвращает ее в точку  $M$ . Отражаясь затем от кривой  $f_{\theta_1}$ , она опять возвращается в точку  $M$ . Таким образом, устанавливается периодический режим, который изображается замкнутой линией  $Mc''Mc'M$ . Точка  $M$ , очевидно, есть неподвижная точка преобразования  $T^+T^0T^-T^0$ , т. е. установленный режим будет  $P_6$ .

Процесс установления в случае б) показан на рис. 4в. Придя на отрезок  $[c, c']$ , изображающая точка переходит в точку  $c'$ , которая является неподвижной точкой преобразования  $T^0T^+$ . Периодический режим, изображаемый точкой  $c'$ , относится к типу  $P_4$ .

Если же  $M^*$  „исчезла“ через отрезок  $MP'$ , то при дальнейшем изменении параметров могут реализоваться три случая: а)  $\theta_1 < f_{\theta_3}(\theta_3) < \theta_2$ , б)  $f_{\theta_3}(\theta_3) \leq \theta_1$ , в)  $f_{\theta_3}(\theta_3) \geq \theta_2$ . Аналогично предыдущему получим, что случаю а) соответствует абсолютно устойчивый периодический режим  $P_3$ , случаю б) — абсолютно устойчивый режим  $P_6$  и случаю в) — абсолютно устойчивый режим  $P_5$ .

Таким образом, в области I возможны все шесть типов периодических режимов, причем область существования каждого из них совпадает с областью его абсолютной устойчивости. Отсюда следует, что при этом всегда существует один и только один из указанных шести типов периодических режимов. В области II существует периодическое движение типа  $P_4$  (рис. 5). В этом случае даже без

периодическое движение

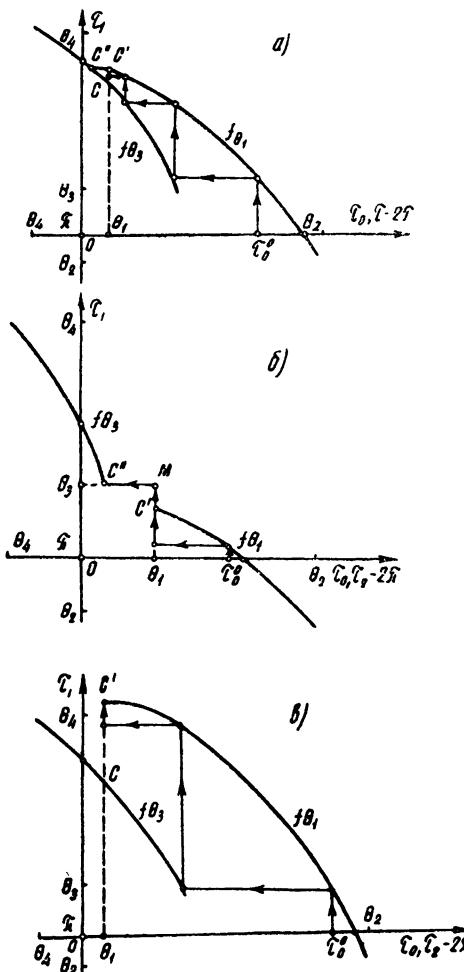


Рис. 4.

них совпадает с областью его абсолютной устойчивости. Отсюда следует, что при этом всегда существует один и только один из указанных шести типов периодических режимов. В области II существует периодическое движение типа  $P_4$  (рис. 5). В этом случае даже без

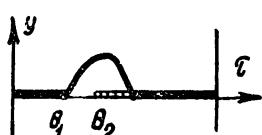


Рис. 5.

ские движения отсутствуют: все траектории уходят в бесконечность. В области IV существуют периодические режимы типа  $P_5$ . Исследование их устойчивости и единственности производится таким же образом.

На рис. 6 приводится данное в работе [2] разбиение пространства параметров на области различных режимов.

*Области существования периодических режимов, при которых имеет место движение тела вверх. Зависимость средней скорости от параметров.* Интегрируя (4), можно вычислить перемещение тела  $S_{\tau_0, \tau_1}^+$  и  $S_{\tau_0, \tau_1}^-$  за промежуток времени между двумя последовательными приходами фазовой точки на  $G^0$  соответственно через  $G^+$  и  $G^-$ :

$$S_{\tau_0, \tau_1}^{\pm} = \frac{1 \pm f}{2} \left[ -\frac{p \pm q}{1 \pm f} (\tau_1 - \tau_0)^2 + \right. \quad (15)$$

$$\left. + 2(\tau_1 - \tau_0) \cos \tau_0 - 2(\sin \tau_1 - \sin \tau_0) \right],$$

где  $\tau_0$  — начальный, а  $\tau_1$  — конечный моменты времени. Если нужно вычислить  $\Delta S = S_{\tau_0, \tau_1}^+ + S_{\tau_0, \tau_1}^-$  за период

при установленном режиме, то за  $\tau_0, \tau_1, \tau_0'$  и  $\tau_1'$  следует принять  $\tau_0 = \tau_0^*; \tau_1 = \tau_1^*, \tau_0' = 2\pi + \tau_0^*, \tau_1' = \tau_1$ , если имеет место режим  $P_1$ ;  $\tau_0 = \theta_1, \tau_1 = f_{\theta_1}(\theta_1), \tau_0' = \tau_1, \tau_1' = f_{\theta_1}(\tau_1)$ , если имеет место режим  $P_2$ ;  $\tau_0 = f_{\theta_3}(\theta_3), \tau_1 = f_{\theta_3}(\tau_0), \tau_0' = \theta_3, \tau_1' = \tau_0$ , если имеет место режим  $P_3$ ;  $\tau_0 = \theta_1, \tau_1 = f_{\theta_1}(\theta_1), \tau_0' = \theta_3, \tau_1' = f_{\theta_3}(\theta_3)$  при режиме  $P_6$ ;  $S^- = 0$  и  $\Delta S = S^+, \tau_0 = \theta_1, \tau_1 = f_{\theta_1}(\theta_1)$  при режиме  $P_4$ ;  $S^+ = 0$  и  $\Delta S = S^-; \tau_0' = \theta_3, \tau_1' = f_{\theta_3}(\theta_3)$  при режиме  $P_5$ .

В пространстве  $(p, q, f)$  существует область существования периодических режимов, при которых тело движется вверх. Границей ее будут плоскости  $p = 0, f = 0, f = q, p + q - f = 1$  и поверхность  $\Delta S = 0$ . Эта область в сечениях  $f = \text{const}$  представлена на рис. 7, где I — область существования  $P_1$ , IV — область существования  $P_4$ .

*Определение  $V_{cp}$  за период. Линии равной скорости в пространстве  $(\alpha, \beta, \omega^2)$  при  $k = 0,4$ .* Теперь вернемся к исходному уравнению (1) и параметрам  $\alpha, \beta, \omega, k$ , которые связаны с  $p, q, f$  формулами (3). Из них находим:

$$\tan \beta = \frac{1}{k} f; \quad \tan \alpha = k \frac{p}{q}; \quad \alpha \omega^2 = \frac{g \sin \alpha}{p \cos \alpha}. \quad (16)$$

Средняя скорость движения груза  $V_{cp} = (\alpha \omega / 2\pi) \cos \beta \Delta S$ .

Рассмотрим поведение линий  $V_{cp} = \text{const}$  в пространстве  $(\alpha, \beta, \omega^2)$  при  $k = 0,4$ . При таком коэффициенте трения движение вверх начинается с угла  $\alpha_{\max} \approx 22^\circ$ . На рис. 8 приведены кривые  $V^* = 2\pi V_{cp} / \sqrt{a} \doteq$

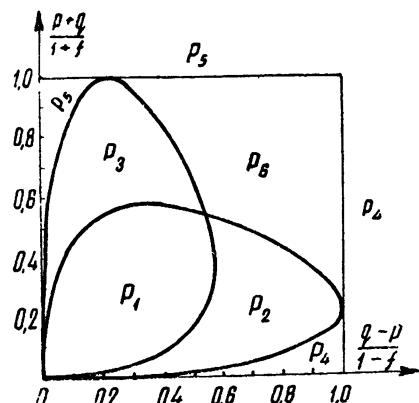


Рис. 6.

$= \text{const}$  для углов  $\alpha = 20^\circ, 18^\circ, 16^\circ, 14^\circ, 12^\circ$  и  $8^\circ$ . На этих графиках  $BC$  — образ  $f = q$ ,  $AC$  — образ  $\Delta S = 0$  в пространстве  $(\alpha, \beta, a\omega^2)^*$ .

Можно подобрать параметры таким образом, чтобы  $V_{cp}$  было для данного угла  $\alpha$  наибольшим. Прежде всего, чем больше амплитуда колебания, тем больше средняя скорость при равных  $\beta$  и  $a\omega^2$ . Далее

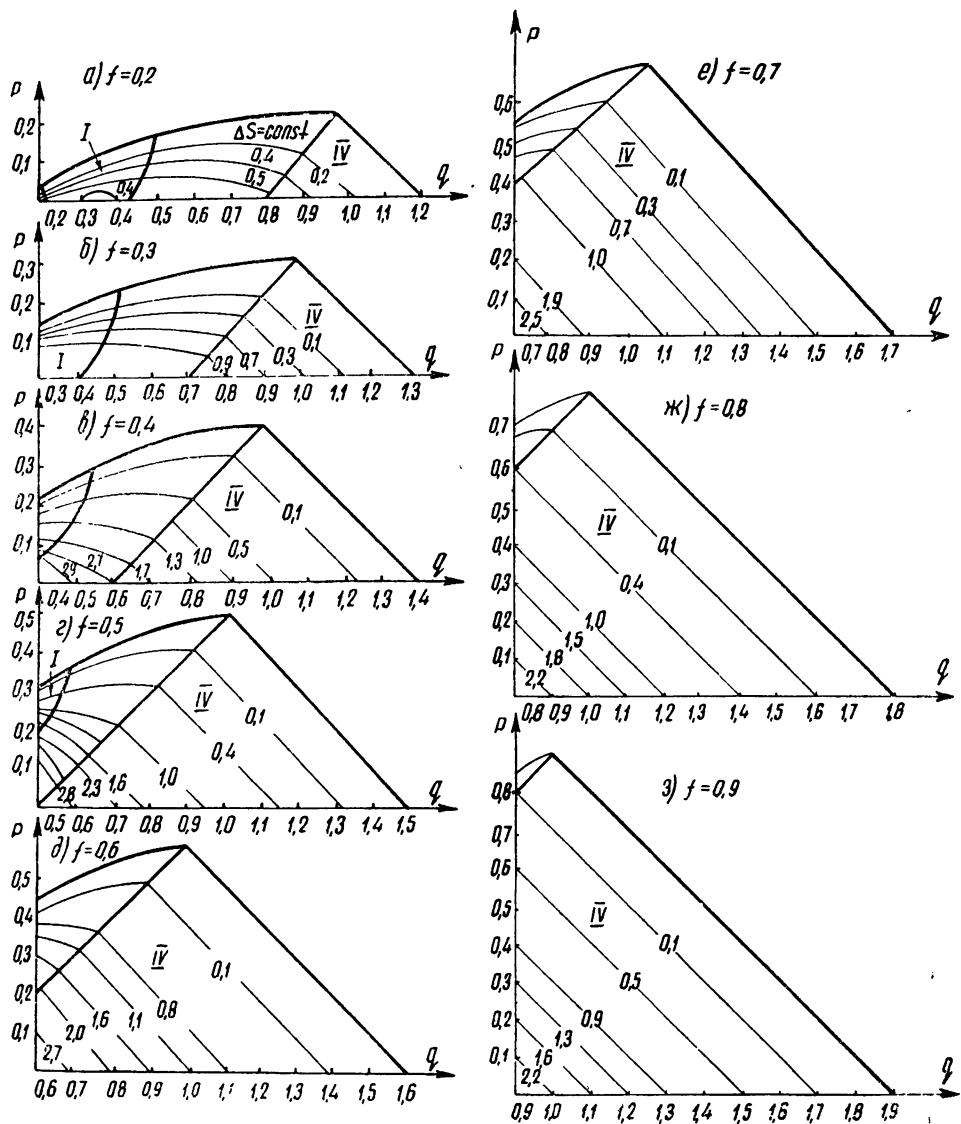


Рис. 7.

на рис. 8 для нужного значения  $\alpha$  (или близкого к нему) находим точку  $M_{\max}(\alpha)$ , соответствующую максимальному для этого  $\alpha$  значению средней скорости. Эта точка расположена на линии  $BC$ , т. е. на границе подпрыгивания. Чтобы осуществлялся режим без подпрыгива-

\* Графики на рис. 8 рассчитаны для значения  $k = 0.4$ . Пользуясь графиками на рис. 7 и формулами (16), можно построить такие же графики для любых  $k$ . Качественный ход кривых останется таким же, как на рис. 8.

вания, нужно взять точку, достаточно близкую к  $M_{\max}(x)$ , но не лежащую на границе подпрыгивания. Координаты этой точки дадут значения угла  $\beta$  и частоты  $\omega$ , при которых и будет осуществляться движение тела вверх с максимальной средней скоростью.

Из рис. 8 видно, что с уменьшением угла  $\alpha$  область движений вверх увеличивается и, кроме того, сдвигается в сторону более низких частот.

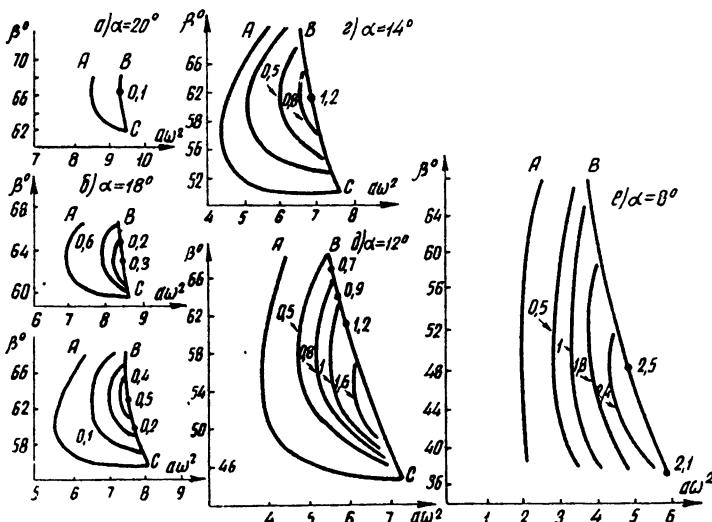


Рис. 8.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
2. И. И. Блехман, Инженерный сборник АН СССР, 11, 35 (1951).
3. Ю. И. Неймарк, Труды ГИФТИ и ГГУ, 30, 159 (1956).

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
12 ноября 1959 г.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМ

Ю. И. Неймарк, Л. П. Шильников

В настоящей работе, развивающей результаты предыдущей работы авторов [3], метод малого параметра [1-3] переносится на системы, близкие к кусочно-линейным. Попутно для произвольной кусочно-линейной системы находятся уравнения периодических движений заданного типа и характеристические уравнения, от корней которых зависит устойчивость.

### 1. ОПИСАНИЕ СТРУКТУРЫ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в зависимости от состояния и, возможно, предшествующего движения поведение рассматриваемой динамической системы описывается одной из  $N$  систем дифференциальных уравнений вида [9]:

$$\frac{dx_i^j}{dt} = X_i^j(t; x_1^j, \dots, x_{n_p}^j) \quad (1.1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_j; j = 1, 2, \dots, N).$$

Переход от описания  $p$ -ой системой к описанию  $q$ -ой системой происходит при попадании изображающей точки на поверхности

$$S_{pq}(t; x_1^p, \dots, x_{n_p}^p) = 0; \quad \Omega_{pq}^s(t; x_1^p, \dots, x_{n_p}^p) > 0 \quad (1.2)$$

$$(s = 1, \dots, r_{pq});$$

при этом значения новых переменных  $x_1^q, \dots, x_{n_q}^q$  в момент  $t$  определяются через значения старых переменных  $x_1^p, \dots, x_{n_p}^p$  в тот же момент  $t$  посредством формул:

$$x_j^q = G^{pq}(t; x_1^p, \dots, x_{n_p}^p) \quad (1.3)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n_q).$$

Функции  $X_i^j$  каждой из систем уравнений (1.1), а также функции  $S, \Omega, G$  будем предполагать достаточное число раз дифференцируемыми. Кроме того, в случае, если система является неавтономной, т. е. хотя бы в одну из функций  $X, S, \Omega, G$  входит явно время  $t$ , будем считать, что указанные функции являются периодическими по  $t$  периода  $2\pi$ .

Фазовое пространство описываемой выше системы состоит из фазовых подпространств  $\Phi_1, \dots, \Phi_N$  систем (1.1). Переход из одного фазового подпространства  $\Phi_p$  в другое подпространство  $\Phi_q$  осуществляется при выполнении условий (1.2) согласно преобразованию (1.3). В силу этого точки поверхности  $S_{pq}$  фазового подпространства  $\Phi_p$ , удовлетворяющего условиям (1.3), отождествим с соответствующими точками фазового подпространства  $\Phi_q$ . Кроме того, в случае неавтономной системы произведем отождествление точек с одинаковыми координа-

тами  $x_i^j$  и временами, отличающимися на целое число периодов. Поэтому под фазовым пространством описанной динамической системы будем понимать склеенные указанным способом фазовые подпространства системы (1.1).

В качестве примера системы, описание которой приводится к изложенной выше схеме, рассмотрим систему дифференциальных уравнений\*

$$\begin{aligned} dx_i/dt &= f_i(t; x_1, \dots, x_n) \\ (i &= 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (1.4)$$

у которых функции  $f_i$  терпят разрывы непрерывности первого рода на некоторых гладких поверхностях  $S_\alpha$ , разбивающих пространство  $D$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $t$  на области  $D_1, \dots, D_k$ . В каждой из областей  $D_j$  уравнения движения записываются в виде:

$$\begin{aligned} dx_i/dt &= f_i^j(t; x_1, \dots, x_n) \\ (i &= 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $f_i^j$  — достаточно гладкие функции в  $D_j$ , включая и границу. Таким образом, движение изображающей точки определено в каждой области  $D_j$ .

Для полного описания движения фазовой точки нужно установить, что с ней происходит после достижения границы области  $D_j$ . Для этого прежде всего рассмотрим различные случаи поведения фазовых траекторий вблизи поверхностей разрыва  $S_\alpha$ .

Пусть  $S_\alpha$  — некоторая поверхность, уравнение которой  $S_\alpha(t; x_1, \dots, x_n) = 0$ . Предположим, что уравнения движения в области больших значений  $S_\alpha(t; x) \geq 0$  будут

$$\dot{x}_i = f_i^+(t; x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.6)$$

а в области меньших значений  $S_\alpha(t; x) \leq 0$  будут

$$\dot{x}_i = f_i^-(t; x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.7)$$

Системы уравнений (1.6) и (1.7) описывают поведение фазовой точки в некоторых областях  $D_{j_1}$  и  $D_{j_2}$ , которые обозначим через  $D^+$  и  $D^-$ . Пусть точка  $M_0(t_0; x_1^0, \dots, x_n^0)$  лежит на поверхности  $S_\alpha$ . Рассмотрим решение системы (1.6), проходящее через указанную точку. При малых  $t - t_0$  оно может быть записано в виде:

$$x_i^+(t) = x_i^0 + f_i^+(t^0; x_1^0, \dots, x_n^0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} X_+(f_i^+)(t - t_0)^2 + \dots, \quad (1.8)$$

где через  $X_+$  обозначен дифференцирующий оператор

$$X_+ = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i^+ \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Поэтому траектория, начинающаяся в точке  $M_0$ , идет в область  $D^+$ , если при достаточно малых и положительных значениях\*\*  $t - t_0$

$$S_\alpha(t; x_1^+(t), \dots, x_n^+(t)) = X_+(S_\alpha)(t - t_0) + \frac{1}{2} X_+^2(S_\alpha)(t - t_0)^2 + \dots > 0, \quad (1.9)$$

\* Системы такого типа неоднократно рассматривались [4—6, 10, 13].

\*\* Здесь и всюду в дальнейшем  $S_\alpha, X(S_\alpha), X^2(S_\alpha), \dots$  берутся в точке  $M_0$ , соответствующей  $t = t_0$ .

и в область  $D^-$  при обратном неравенстве. Аналогично находим, что фазовая траектория системы (1.7) идет из точки  $M_0$  в область  $D^+$ , если

$$S_\alpha(t; x_1^-(t), \dots, x_n^-(t)) = X_-(S_\alpha)(t-t_0) + \frac{1}{2} X_{-}^2(S_\alpha)(t-t_0)^2 + \dots > 0, \quad (1.10)$$

и в область  $D^-$ , если

$$X_-(S_\alpha)(t-t_0) + \frac{1}{2} X_{-}^2(S_\alpha)(t-t_0)^2 + \dots < 0, \quad (1.11)$$

где.

$$X_- = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i^- \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Отсюда следует, что могут встретиться три случая: 1)  $X_+(S_\alpha) < 0$ ,  $X_-(S_\alpha) < 0$  или  $X_+(S_\alpha) > 0$ ,  $X_-(S_\alpha) > 0$ ; 2)  $X_+(S_\alpha) < 0$ ,  $X_-(S_\alpha) > 0$ ; 3)  $X_+(S_\alpha) > 0$ ,  $X_-(S_\alpha) < 0$ .

Пусть в рассматриваемой системе не могут иметь места скачки, т. е. переменные  $x_1, \dots, x_n$  меняются непрерывно. Тогда в первом случае фазовая траектория проходит через поверхность  $S_\alpha$  (рис. 1а и 1б);

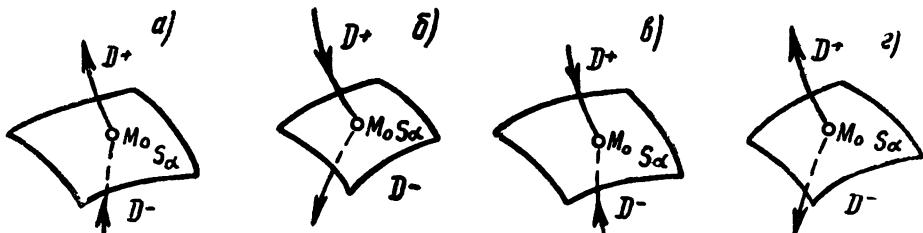


Рис. 1.

во втором случае фазовая точка, попав на поверхность  $S_\alpha$ , не может с нее сойти до тех пор, пока не нарушатся условия этого случая (рис. 1в)\*; в третьем случае траектория в зависимости от случайных факторов может пойти либо в  $D^+$ , либо в  $D^-$  (рис. 1г). Каждому из перечисленных случаев на поверхности  $S_\alpha$  отвечают некоторые области, границы которых определяются уравнением  $X_+(S_\alpha) = 0$  и уравнением  $X_-(S_\alpha) = 0$ .

Рассмотрим поведение фазовых траекторий в окрестности границы  $X_+(S_\alpha) = 0$ ,  $S_\alpha = 0$ .

В этом случае на фазовой траектории, близкой к границе,

$$S_\alpha(t; x_1^+(t), \dots, x_n^+(t)) = S_\alpha + X_+(S_\alpha)(t-t_0) + \frac{1}{2} X_+^2(S_\alpha)(t-t_0)^2 + \dots \quad (1.12)$$

В (1.12) возможны следующие случаи: 1)  $X_+^2(S_\alpha) > 0$  и 2)  $X_+^2(S_\alpha) < 0$  (рис. 2). Соответствующие неравенства имеют место и для граничной кривой  $X_-(S_\alpha) = 0$ ,  $S_\alpha = 0$  (рис. 2).

Если эти две границы сливаются, то в соответствии с неравенст-

\* Такие движения на поверхности  $S_\alpha$  называются скользящими [11–13].

вами, имеющими место для каждой из границ, могут быть реализованы четыре разных варианта, изображенных на рис. 3.

Фазовая точка, попав в область скользящих движений на поверхность  $S_\alpha$ , будет двигаться по ней, подчиняясь некоторым уравнениям вида\*:

$$\dot{y}_i = g_i(t_i; y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (1.13)$$

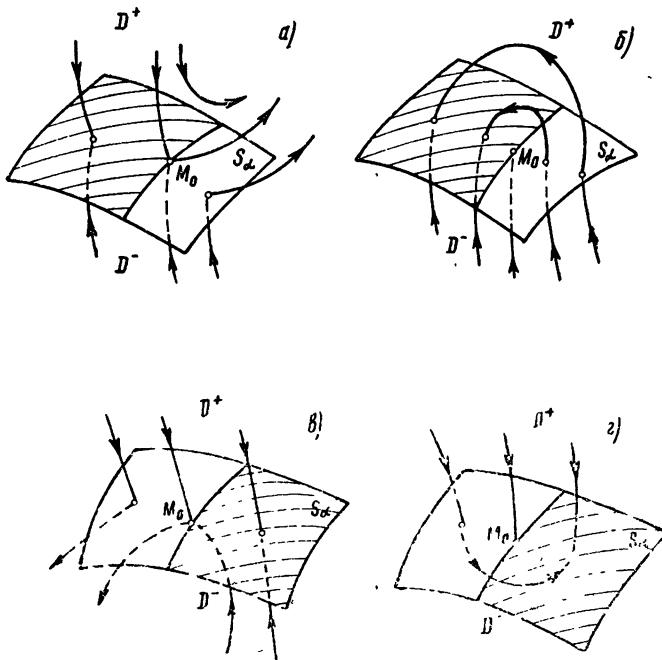


Рис. 2.

Выход фазовой точки из области скользящих движений возможен только при достижении ею края области скользящих движений. В связи с этим изучим подробнее поведение фазовых траекторий вблизи границы области скользящих движений.

Пусть уравнение этой границы будет для определенности  $X_+(S_\alpha) = 0$  или (в переменных  $y_1, \dots, y_{n-1}$ )  $\sigma_\beta(t; y_1, \dots, y_{n-1}) = 0^{**}$ . В зависимости

от знака величин  $X_+^2(S_\alpha)$  и  $Y(\sigma_\beta)$ , где  $Y = \partial/\partial t + \sum_{i=1}^{n-1} g_i \partial/\partial y_i$ , могут иметь место следующие четыре случая:

- 1)  $X_+^2(S_\alpha) > 0, \quad Y(\sigma_\beta) < 0$  (рис. 4а);
- 2)  $X_+^2(S_\alpha) > 0, \quad Y(\sigma_\beta) > 0$  (рис. 4б);
- 3)  $X_+^2(S_\alpha) < 0, \quad Y(\sigma_\beta) < 0$  (рис. 4в);
- 4)  $X_+^2(S_\alpha) < 0, \quad Y(\sigma_\beta) > 0$  (рис. 4г).

\* Эти уравнения в ряде случаев (например, для релейной системы [12, 13]) могут быть найдены по уравнениям движения (1.4).

\*\* При этом предполагается, что в области скользящих движений  $\sigma_\beta < 0$ ; при обратном неравенстве следует заменить  $\sigma_\beta$  на  $-\sigma_\beta$ .

В последнем случае, в отличие от предыдущих, фазовая точка, попав на границу области скользящих движений, движется по ней, подчиняясь некоторым новым уравнениям, для которых могут быть повторены все предыдущие рассуждения.

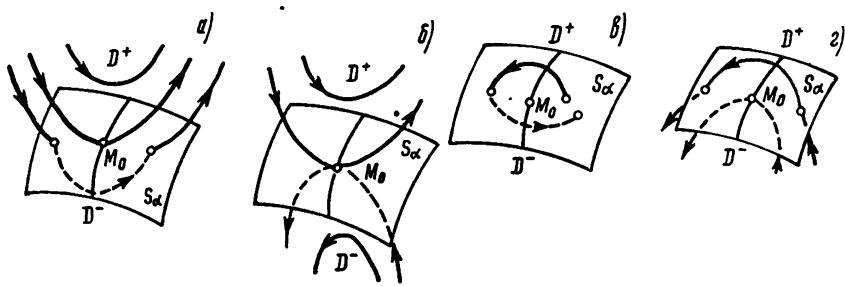


Рис. 3.

Таким образом, движение фазовой точки можно описать следующим образом.

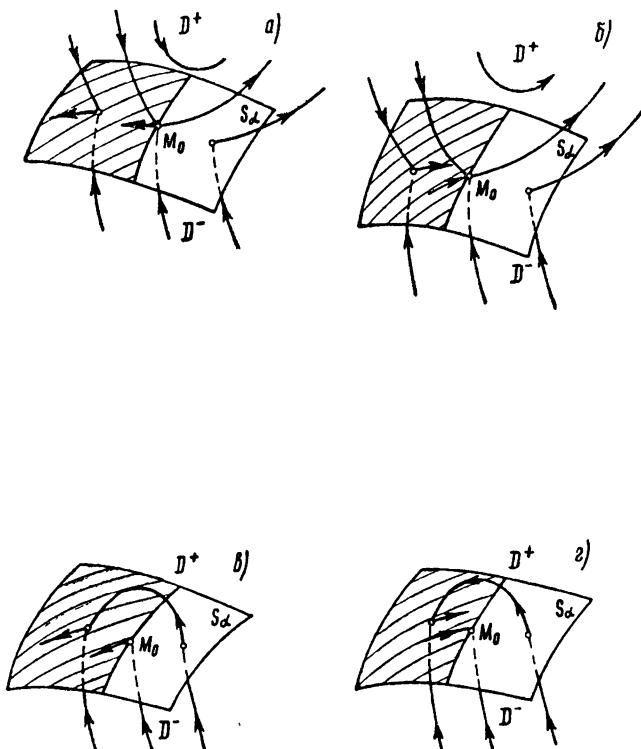


Рис. 4.

1) Если фазовая точка принадлежит области  $D_j$ , то ее движение описывается уравнениями (1.5).

2) Если фазовая точка достигает поверхности  $S_a$ , то она проходит через нее при  $X_+(S_a)X_-(S_a)>0$  и остается на ней, когда  $X_+(S_a)<0$ ,  $X_-(S_a)>0$ .

3) Если фазовая точка в результате скользящего движения на поверхности  $S_a$  приходит на край  $X_+(S_a)=S_a=0$ , то она уходит в область  $D^+$ , когда  $X_+^2(S_a)>0$ , и остается на крае при условии  $X_+^2(S_a)<0$ . Аналогично, в случае прихода на край  $X_-(S_a)=S_a=0$  она уходит в область  $D^-$ , если  $X_-^2(S_a)<0$ , и остается на крае, если  $X_-^2(S_a)>0$ . Тем самым описание движения изображающей точки приведено к изложенной ранее схеме, и фазовыми подпространствами  $\Phi_i$  будут области  $D_1, \dots, D_k$ , области скользящих движений, края областей скользящих движений, с которых не сходит фазовая траектория и т. д.

Периодическим движениям как автономной, так и неавтономной систем будут отвечать в фазовом пространстве этих систем замкнутые фазовые траектории. Каждая замкнутая траектория состоит из конечного числа отрезков  $\Gamma_{j_0}, \dots, \Gamma_{j_r}$  фазовых траекторий систем уравнений (1.1). Обозначая отрезок через  $\Gamma_{j_k}$ , мы тем самым указываем, что отрезок расположен в фазовом подпространстве  $\Phi_{j_k}$ , начинается на поверхности  $S_{j_{k-1} j_k}$  и оканчивается на поверхности  $S_{j_k j_{k+1}}$ . Отсюда видно, что каждому периодическому движению отвечает цепочка чисел  $(j_0, j_1, \dots, j_r, j_0)$ , которая характеризует смену фазовых подпространств. Поэтому естественно под типом периодического движения понимать последовательность номеров (с точностью до циклической перестановки) фазовых подпространств  $\Phi_1, \dots, \Phi_N$ , через которые проходит фазовая траектория.

Пусть замкнутая фазовая траектория  $\Gamma$  пересекает поверхности  $S_{j_0 j_1}, \dots, S_{j_r j_0}$  последовательно в точках  $M_0, M_1, \dots, M_r$ . Этой последовательности переходов от  $M_0$  к  $M_1$ , от  $M_1$  к  $M_2, \dots$ , от  $M_r$  к  $M_0$  отвечает отображение  $T$  поверхности  $S_{j_0 j_1}$  в себя, представляемое в следующем виде:

$$T_{j_{r-1} j_r j_0} G^{j_{r-1} j_r} T_{j_{r-2} j_{r-1} j_r} \dots T_{j_0 j_1 j_2} G^{j_0 j_1}, \quad (1.14)$$

где через  $T_{pqrs}$  обозначено отображение поверхности  $S_{pq}$  на  $S_{qr}$ , а через  $G^{pq}$  отображение (1.3), соответствующее замене переменных  $x_1^p, \dots, x_{n_p}^p$  на  $x_1^q, \dots, x_{n_q}^q$ . Между неподвижными точками отображения (1.14) и периодическими движениями типа  $(j_0 j_1, \dots, j_r j_0)$  существует тесная связь, а именно: устойчивым периодическим движениям соответствуют устойчивые неподвижные точки и наоборот.

В дальнейшем для систем описанного вида, при условии, что

$$X_i^j = a_{11}^j x_1^j + \dots + a_{in_j}^j x_{n_j}^j + \omega_i^j(t) + \mu F_i(t; x_1^j, \dots, x_{n_j}^j; \mu), \quad (1.15)$$

где  $\mu$  — малый параметр и функции  $\omega_i^j, F_i, S_{pq}, G^{pq}, \Omega_{pq}^r$  дважды непрерывно дифференцируемы по переменным  $t, x^j$  и  $\mu$ , решаются следующие задачи:

1) при  $\mu=0$  находятся необходимые и достаточные условия существования периодических решений данного типа и строится характеристическое уравнение;

2) отыскиваются порождающие периодические решения, т. е. те периодические решения системы с  $\mu=0$ , к которым стремятся периодические решения исходной системы при  $\mu \rightarrow 0$ , и исследуется устойчивость найденных периодических решений при достаточно малых  $\mu$ .

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧЕЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть фазовая траектория  $L$ , проходящая последовательно через фазовые подпространства  $\Phi_0, \dots, \Phi_r$ , пересекает поверхности  $S_0, S_1, \dots, S_r$  соответственно в точках  $M_0(t_0; x_1^0, \dots, x_{n_0}^0), M_1(t_1; x_1^1, \dots, x_{n_1}^1), \dots, M_r(t_r; x_1^r, \dots, x_{n_r}^r)$ \*. В подпространстве  $\Phi_k$  траектория  $L$  описывается  $k$ -ой системой (1.1), (1.15), которая в векторной форме может быть записана в виде:

$$\frac{dx_k}{dt} = A^k x_k + \omega_k(t) + \mu F_k(t; x_k; \mu), \quad (2.1)$$

где

$$x_k = (x_1^k(t), \dots, x_{n_k}^k(t)); \quad \omega_k(t) = (\omega_1^k(t), \dots, \omega_{n_k}^k(t));$$

$$F_k = (F_{k1}(t; x_1^k, \dots, x_{n_k}^k; \mu), \dots, F_{kn_k}(t; x_1^k, \dots, x_{n_k}^k; \mu)),$$

а  $A_k$  есть квадратная матрица  $(a_{ij}^k)$  порядка  $n_k$ . Уравнение фазовой траектории в векторной форме, как известно, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} X_k(t, t_{k-1}; x_{k0}^+; \mu) &= X_k^{(0)}(t, t_{k-1}; x_{k0}^+) + \\ &+ \mu \int_{t_{k-1}}^t Y_k(\tau - \tau) F_k(\tau; X_k^{(0)}(\tau; t_{k-1}; x_{k0}^+); 0) d\tau + \mu^2(\dots), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$X_k^{(0)}(t, t_{k-1}; x_{k0}^+) = Y_k(t - t_{k-1}) [x_{k0}^+ - \varphi_k(t_{k-1})] + \varphi_k(t) \quad (2.3)$$

есть решение системы (2.1) при  $\mu = 0$ , проходящее через точку  $M_k^+(x_{k0}^+; t_{k-1})$ \*\*, а  $Y_k(t)$  — фундаментальная матрица решений однородной системы (2.1) при  $\mu = 0$ .

Согласно (1.14), отображение  $T$  поверхности  $S_0$  в  $S_r$  представляется в виде произведения  $T_r G^{r-1} \dots T_1 G^0$ , где каждое из отображений  $T_k$  записывается (с учетом (2.2)) в виде:

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(t_k, t_{k-1}; x_k^+; \mu); \\ S_k(t_k; x_k) &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

а отображения  $G^k$  определяются формулами (1.3). Поэтому отображение  $T_k G^{k-1}$  с точностью до величины порядка  $\mu^2$  имеет вид:

$$x_k = X_k^{(0)}(t_k^0, t_{k-1}^0; G^{k-1}(t_{k-1}^0; x_{k-1})) + \mu X_k^{(1)}(t_k^0, t_{k-1}^0; x_{k-1}) + \mu^2(\dots);$$

$$S_k[t_k^0; X_k^{(0)}(t_k^0, t_{k-1}^0; G^{k-1}(t_{k-1}^0; x_{k-1})) + \mu \left\{ \nabla S_k X_k^{(1)} + \frac{\partial S_k}{\partial t_k} t_k^0 \right\} + \dots] = 0, \quad (2.5)$$

$\mu = 0$   
 $t_i = t_i^0$

\* Ради удобства здесь введены следующие упрощения в системе обозначений: фазовым подпространствам приписаны номера согласно порядку прохождения их фазовой точкой, а  $S_{j_k j_{k+1}}, G^{j_k j_{k+1}}, T_{j_{k-1} j_k j_{k+1}}$  в соответствии с этим обозначены через  $S_k, G^k$  и  $T_k$ .

\*\* Будем считать, что точка  $M_k^+$  лежит на склейке подпространств  $\Phi_{k-1}$  и  $\Phi_k$ .

где

$$\begin{aligned} X_k^{(1)}(t_k^0, t_{k-1}^0; \boldsymbol{x}_{k-1}) &= \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{X}_k^{(0)}}{\partial t_k} t_k^1 + \left( \frac{\partial \boldsymbol{X}_k^{(0)}}{\partial t_{k-1}} + \frac{\partial \boldsymbol{X}_k^{(0)}}{\partial \boldsymbol{x}_k^+} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{G}^{k-1}}{\partial t_k} \right) t_{k-1}^1 + \right. \\ &+ \left. \int_{t_{k-1}}^{t_k} Y_k(t_k - \tau) \boldsymbol{F}_k [\tau; \boldsymbol{X}_k^{(0)}(\tau, t_{k-1}; \boldsymbol{G}^{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1}, t_{k-1})), 0] d\tau \right\}_{\substack{\mu=0 \\ \boldsymbol{x}_k^+ = \boldsymbol{G}^{k-1} \\ t_i = t_i^0}} ; \end{aligned}$$

$$t_i = t_i^0 + \mu t_i^1 + \mu^2 (\dots) \quad (i = k-1, k); \quad \boldsymbol{G}_1^{k-1} = (G_1^{k-1}, \dots, G_{n_{k-1}}^{k-1}),$$

а  $\nabla S_{k-1}$  есть вектор с компонентами  $\partial S_{k-1}/\partial x_1, \dots, \partial S_{k-1}/\partial x_{n_{k-1}}$ .

Примем, что рассматриваемая фазовая траектория  $L$  при  $\mu = 0$  пересекает без касания поверхности  $S_1, \dots, S_r$  во внутренних точках, т. е. в точках пересечения для  $k = 1, 2, \dots, r$ :

$$X_k(S_k) \equiv \partial S_k / \partial t_k + \nabla S_k (A^k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{\omega}_k(t)) \neq 0. \quad (2.6)$$

При этом предположении отображение  $T$  поверхности  $S_0$  в  $S_r$  заведомо существует в некоторой окрестности  $M_0$  и будет дважды непрерывно дифференцируемым. Поэтому, приняв ради краткости обозначения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_k^0(t_k^0, \dots, t_0^0; \boldsymbol{x}_0) &= \boldsymbol{X}_k^{(0)}(t_k^0, t_{k-1}^0; \boldsymbol{G}^{k-1}(t_{k-1}^0; \boldsymbol{f}_{k-1}^0)); \\ \boldsymbol{f}_0^0(t_0^0; \boldsymbol{x}_0) &= \boldsymbol{G}^0(t_0^0; \boldsymbol{x}_0) \quad (k = 1, 2, \dots, r); \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$B_k^i = \begin{cases} Y_k(t_k^0 - t_{k-1}^0) \partial \boldsymbol{G}^{k-1} / \partial \boldsymbol{x}_{k-1} \dots Y_{i+1}(t_{i+1}^0 - t_i^0) \partial \boldsymbol{G}^i / \partial \boldsymbol{x}_i^0 \text{ при } i < k \\ \text{единичная матрица } n\text{-го порядка при } i = k; \\ \text{нулевая матрица } n_k\text{-го порядка при } i > k \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_k^i &= [B_k^i] [\partial \boldsymbol{X}_i^{(0)} / \partial t_i^0] + [B_k^{i+1}] [\partial \boldsymbol{X}_{i+1} / \partial t_i^0] + \\ &+ [B_k^{i+1}] Y_{i+1}(t_{i+1}^0 - t_i^0) [\partial \boldsymbol{G}^i / \partial t_i^0], \end{aligned} \quad (2.9)$$

преобразование  $T$  с точностью до величин порядка  $\mu^2$  можно записать в параметрической форме:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_r &= \boldsymbol{f}_r^0(t_r^0, t_1^0, t_0^0; \boldsymbol{x}_0) + \mu \sum_{i=1}^r (U_r^i t_i^1 + \\ &+ [B_r^i] \int_{t_{i-1}^0}^{t_i^0} Y_i(t_i^0 - \tau) \boldsymbol{F}_i(\tau; \boldsymbol{f}_i(\tau; t_{i-1}^0, \dots, t_0^0; \boldsymbol{x}_0, 0), 0) d\tau); \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$[S_k] \equiv S_k(t_k^0; \boldsymbol{f}_k^0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, r).$$

В (2.10) величины  $t_1^1, \dots, t_r^1$ , определяющие поправки порядка  $\mu$  к моментам пересечения траектории  $L$  с поверхностями  $S_1, \dots, S_r$ , находятся из следующей линейной системы уравнений:

$$\begin{aligned} ([\nabla S_k] U_k^1) t_1^1 + \dots + ([\nabla S_k] U_{k-1}^{k-1}) t_{k-1}^1 + \frac{\partial [S_k]}{\partial t_k^0} t_k^1 &= \\ = -[\nabla S_k] \sum_{i=1}^k B_k^i \int_{t_{i-1}^0}^{t_i^0} Y_i \boldsymbol{F}_i d\tau. \end{aligned} \quad (2.11)$$

(Здесь и всюду в дальнейшем предполагается, что функция, заключенная в квадратные скобки, вычислена при  $x_k = f_k^0$  и  $t_k = t_k^0$ ). Найдя из (2.11) величины  $t_1^1, \dots, t_r^1$  и подставив их выражения в (2.10), можно записать преобразование  $T$  в виде:

$$x_r = f_r^0(t_r^0, \dots, t_{r-1}^0; x_0) + \mu \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}^0}^{t_i^0} f^1(\tau; t_r^0, \dots, t_{r-1}^0; x_0) d\tau + \dots; \quad (2.12)$$

$$[S_k] = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, r).$$

### 3. ОТЫСКАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ПРИ $\mu = 0$

Предположим, что при  $\mu = 0$  у системы (1.1), ((1.15)) существует периодическое решение типа  $(j_0, j_1, \dots, j_r, j_0)$  с периодом  $2\pi l$  в случае неавтономной системы ( $l$  — целое положительное число) и с произвольным периодом в случае автономной системы. (Всюду в дальнейшем для простоты изложения будем предполагать, что в случае неавтономной системы в качестве поверхности  $S_0$  выбрана плоскость  $t = t_0$ .) В силу существования периодического решения отображение поверхности  $S_0$  в поверхность  $S_r$  будет иметь неподвижную точку  $M^*(x^*)$ , координаты которой определяются из системы:

$$x^* = f_r^0(t_r^*, \dots, t_1^*, t_0^0; x^*); \quad (3.1)$$

$$[S_k]_{x_0=x^*} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, r),$$

$$t_i^0 = t_i^*$$

в которой уравнение поверхности  $S_r$  в случае неавтономной системы будет  $t = t_0 + 2\pi l$ , а в случае автономной будет совпадать с уравнением  $S_0$ . Условия (3.1) будут достаточными для существования периодического решения данного типа, если  $t_1^*, \dots, t_r^*$  определяют моменты переключения. Для этого требуется, чтобы  $t_1^*, \dots, t_r^*$  были наименьшими корнями системы (3.1), удовлетворяющими неравенству  $t_0^0 < t_1^* < \dots < t_r^*$ .

Задача исследования устойчивости периодического решения сводится к исследованию устойчивости неподвижной точки. Линеаризируя уравнения преобразования (2.12) при  $\mu = 0$  в окрестности неподвижной точки  $M^*$  на поверхности  $S_0$ , приходим к следующим соотношениям:

$$dx_1 = [B_r^0]^* dx_0 + \sum_{k=1}^r (U_r^k)^* dt_k;$$

$$0 = [\nabla S_k]^* [B_k^0]^* dx_0 + \sum_{p=1}^{k-1} [\nabla S_k]^* (U_p^0)^* dt_p + \left( \frac{\partial [S_k]}{\partial t_k^0} \right)^* dt_k \quad (k = 0, 1, \dots, r), \quad (3.2)$$

где  $dx_0 = x_0 - x^*$ ,  $dx_1 = x_r - x^*$ ,  $dt_k = t_k^0 - t_k^*$ \*\*. Исключив в (3.2) вариации  $dt_1, \dots, dt_r$ , линеаризованное преобразование (3.2) можно представить в скалярной форме:

$$dx_j^1 = p_{j1}^{(1)} dx_1^0 + \dots + p_{jn_0}^{(1)} dx_{n_0}^0 \quad (j = 1, \dots, n_0) \quad (3.3)$$

\* Для автономной системы разность  $t_r^* - t_0$  определяет величину периода.

\*\* Для неавтономной системы в силу выбора поверхностей  $S_0$  и  $S_r$   $dt_0 = dt_r = 0$ .

для случая неавтономной системы и

$$\begin{aligned} dx_j^1 &= p_{j_1}^{(1)} dx_1^0 + \dots + p_{j_{n_0}}^{(1)} dx_{n_0}^0 \quad (j = 1, \dots, n_0); \\ 0 &= (\partial S_0 / \partial x_1^0)^* dx_1^0 + \dots + (\partial S_0 / \partial x_{n_0}^0)^* dx_{n_0}^0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

для случая автономной системы. Так как в (3.4) одно из соотношений линейно зависимо, то его можно отбросить. Поэтому, предположив, что  $\left(\frac{\partial S_0}{\partial x_{n_0}^0}\right)^* \neq 0$ , отображение (3.4) можно записать в виде:

$$dx_j^1 = p_{j_1}^{(2)} dx_1^0 + \dots + p_{j_{n_0-1}}^{(2)} dx_{n_0-1}^0 \quad (j = 1, \dots, n_0 - 1), \quad (3.5)$$

где

$$p_{ji}^{(2)} = p_{ji}^{(1)} - p_{j_{n_0}}^{(1)} (\partial S_0 / \partial x_i^0)^* (\partial S_0 / \partial x_{n_0}^0)^{* - 1}.$$

Положив в (3.3) и (3.5)  $dx_j^1 = z dx_j^0$  и исключив  $dx_j^0$ , найдем характеристическое уравнение:

$$\chi(z) = \begin{vmatrix} p_{11} - z & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} - z \end{vmatrix} = 0, \quad (3.6)$$

где  $p_{ij} = p_{ij}^{(1)}$ ,  $n = n_0$  для неавтономной системы и  $p_{ij} = p_{ij}^{(2)}$ ,  $n = n_0 - 1$  для автономной.

Периодическое решение будет устойчивым, если все корни характеристического уравнения (3.6) будут лежать внутри единичного круга.

Заметим, что, так как поверхности  $S_0, S_1, \dots, S_r$  могут быть разной размерности, характеристическое уравнение может иметь нулевые корни. В общем случае число нулевых корней равно разности размерности поверхности  $S_0$  и  $\sigma$ , где  $\sigma$  — наименьшая из размерностей поверхностей  $S_1, \dots, S_{r-1}$  [9].

#### 4. ОТЫСКАНИЕ ПОРОЖДАЮЩИХ РЕШЕНИЙ И ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Предположим, что при  $\mu = 0$  система допускает периодическое решение  $x(t)$  и  $M^*$  есть соответствующая неподвижная точка преобразования поверхности  $S_0$  в себя.

Из [3, 8, 9] непосредственно следует, что если характеристическое уравнение (3.6) не имеет корней, равных единице, то у системы (1.1) существует единственное периодическое решение  $x(t; \mu)$ , стремящееся к  $x(t)$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Однако это утверждение имеет место только для изолированных периодических решений  $x(t)$ .

Рассмотрим теперь случай, когда при  $\mu = 0$  у системы (1.1) существует семейство периодических решений размерности  $m+1$ . Тогда соответствующее преобразование поверхности  $S_0$  в себя при  $\mu = 0$  будет иметь множество  $J$  неподвижных точек, размерность которого равна  $m$ . Поэтому здесь отыскание периодических решений при достаточно малых  $\mu \neq 0$  требует, прежде всего, отыскания порождающих периодических решений, что эквивалентно нахождению тех неподвижных точек множества  $J$ , из которых рождаются неподвижные точки отображения  $T$  с  $\mu \neq 0$ .

Будем предполагать, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{m+1, m+1} - 1 & \dots & p_{m+1, n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n, m+1} & \dots & p_{nn} - 1 \end{vmatrix} \quad (4.1)$$

отличен от нуля. В силу этого уравнения множества  $J$  и моментов переключений, которые определяются выражениями (3.1), по теореме о неявных функциях могут быть представлены в явной форме:

$$\begin{aligned} x_j^0 &= \varphi_j(x_1^0, \dots, x_m^0) \quad (j = m+1, \dots, n); \\ t_k &= \psi_k(x_1^0, \dots, x_m^0) \quad (k = 0, 1, \dots, r). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Однако для отыскания неподвижных точек, которым соответствуют порождающие периодические решения, нет необходимости в нахождении уравнений (4.2). Условия, позволяющие выделить порождающие точки, сводятся к следующим [8]:

$$\Phi_j(x_1^*, \dots, x_n^*; t_1^*, \dots, t_r^*, t_0) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}^*}^{t_i^*} f_{ij}^1 d\tau & p_{jm+1} & \cdots & p_{jn} \\ \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}^*}^{t_i^*} f_{im+1}^1 d\tau & p_{m+1, m+1} - 1 & \cdots & p_{m+1, n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}^*}^{t_i^*} f_{in}^1 d\tau & p_{n, m+1} & \cdots & p_{nn} - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3)$$

Условие (4.3) будет достаточным для существования единственного периодического решения  $x(t; \mu)$ , стремящегося к порождающему при  $\mu \rightarrow 0$ , если определитель

вычисленный в неподвижной точке, отличен от нуля. Производные  $\partial\phi_{m+1}/\partial x_i^0, \dots, \partial\phi_n/\partial x_i^0, \partial\psi_1/\partial x_i^0, \dots, \partial\psi_r/\partial x_i^0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), входящие в (4.4), определяются из линейной системы

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i^0} = \frac{\partial f_{rj}^0}{\partial x_i^0} + \sum_{l=m+1}^n \frac{\partial f_{rj}^0}{\partial x_l^0} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i^0} + \sum_{k=1}^r \frac{\partial f_{rj}^0}{\partial t_k^0} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i^0} \quad (i=1,\dots,m; j=m+1,\dots,n; k=0,1,\dots,r); \quad (4.5)$$

$$\sum_{p=1}^n \left[ \frac{\partial S_p}{\partial x_p^0} \right] \left( \frac{\partial f_{kp}^0}{\partial x_i^0} + \sum_{l=m+1}^n \frac{\partial f_{kp}^0}{\partial x_l^0} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i^0} + \sum_{a=1}^r \frac{\partial f_{kp}^0}{\partial t_a^0} \frac{\partial \psi_a}{\partial x_i^0} \right) + \left[ \frac{\partial S_k}{\partial t_k^0} \right] \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i^0} = 0,$$

которая получается путем дифференцирования по  $x_i^0$  соотношений (3.1) после подстановки в них уравнений множества  $J$  и моментов переключения (4.2).

Из сформулированного ранее критерия устойчивости вытекают два следующих достаточных условия устойчивости периодических решений при малых  $\mu$  [8].

1) Если все корни характеристического уравнения (3.6) лежат внутри единичного круга, то периодическое решение при достаточно малых  $\mu$  будет устойчивым.

2) Пусть соответствующая неподвижная точка при  $\mu = 0$  принадлежит множеству  $J$ . Тогда периодическое решение при достаточно малых  $\mu > 0$  будет устойчивым, если  $n - m$  корней характеристического уравнения (3.6) по модулю меньше единицы и корни уравнения

$$\Delta(\sigma) = \begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & \dots & a_{1m} & p_{1,m+1} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} - \sigma & p_{m,m+1} & \dots & p_{mn} \\ \sigma \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x_1^0} & \dots & \sigma \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x_m^0} & p_{m+1,m+1} - 1 & \dots & p_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1^0} & \dots & \sigma \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_m^0} & p_{n,m+1} & \dots & p_{nn} - 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (4.6)$$

где

$$a_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} + \sum_{k=m+1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \sum_{p=1}^r \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_p} \frac{\partial \psi_p}{\partial x_j}$$

лежат на левой полуплоскости\*.

## 5. ПРИМЕРЫ

1) Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = \begin{cases} -\omega_1^2 x + \mu F_1(x, \dot{x}; \mu) & (x > 0) \\ -\omega_2^2 x + \mu F_2(x, \dot{x}; \mu) & (x < 0) \end{cases}, \quad (5.1)$$

которое описывает, например, колебания системы, близкой к осциллятору с пружиной, имеющей кусочно-линейную характеристику. При  $\mu = 0$  фазовая плоскость ( $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ ) полностью покрыта замкнутыми траекториями. Задачу стыскания периодических решений при малых  $\mu$  можно свести к отысканию неподвижных точек отображения  $T = T_2 T_1$

\* В работе [1] вычисление минора  $m$ -го порядка, расположенного в левом верхнем углу определителя (5.15), связано с линеаризацией отображения (с учетом величин порядка  $\mu$ ). Но если провести рассуждения, аналогичные приведенным в [2], стр. 22–23, то можно показать, что  $a_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\Phi_i / \Delta_2(1))$ , где через  $\Phi_i$  и  $\Delta_2(1)$  мы обозначили определители (5.19) и (5.16) статьи [8].

полупрямой  $[x_1=0, x_2>0]$  в себя (рис. 5а). Проинтегрировав указанным выше способом уравнение (5.1) в соответствующих полуплоскостях, найдем вид отображений  $T_1$  и  $T_2$ , а также выражения для моментов переключения  $t_1$  и  $t_2$ :

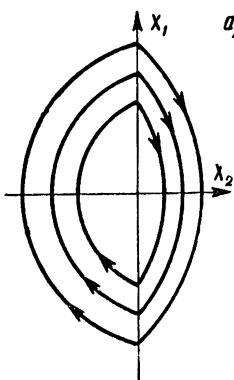


Рис. 5а.

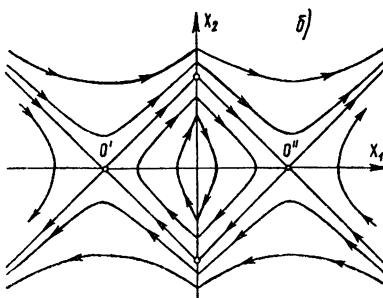


Рис. 5б.

$$x_2^k = -x_1^{k-1} - \mu \int_0^{\frac{\pi}{\omega_k}} F_k(x_2^{k-1} \sin(\omega_k \tau), x_2^{k-1} \cos(\omega_k \tau); 0) \cos(\omega_k \tau) d\tau + \dots; \quad (5.2)$$

$$t_k = \frac{\pi}{\omega_k} + \mu \frac{1}{x_2^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{\omega_k}} F_k(x_2^{k-1} \sin(\omega_k \tau), x_2^{k-1} \cos(\omega_k \tau); 0) \sin(\omega_k \tau) d\tau + \dots \quad (5.3)$$

$(k = 1, 2).$

Зная (5.2) и (5.3), легко составить отображение  $T$ :

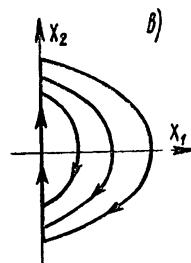


Рис. 5в.

$$x_2^2 = x_2^0 + \mu \left[ \int_0^{\frac{\pi}{\omega_1}} F_1(x_2^0 \sin \omega_1 \tau, x_2^0 \cos \omega_1 \tau; 0) \times \right. \\ \times \cos \omega_1 \tau d\tau + \int_{\frac{\pi}{\omega_1}}^{\frac{2\pi}{\omega_2}} F_2(x_2^0 \sin \omega_2 \tau, x_2^0 \cos \omega_2 \tau; 0) \times \\ \left. \times \cos \omega_2 \tau d\tau \right] + \dots \quad (5.4)$$

Согласно (4.3), положительные корни уравнения

$$\Phi(x_2^*) = \int_0^{\frac{\pi}{\omega_1}} F_1(x_2^* \sin(\omega_1 \tau), x_2^* \cos(\omega_1 \tau); 0) \cos(\omega_1 \tau) d\tau + \\ + \int_{\frac{\pi}{\omega_1}}^{\frac{2\pi}{\omega_2}} F_2(x_2^* \sin(\omega_2 \tau), x_2^* \cos(\omega_2 \tau); 0) \cos(\omega_2 \tau) d\tau = 0 \quad (5.5)$$

будут определять те точки на оси  $x_2$ , которым соответствуют периодические решения уравнения (5.1) при малых  $\mu$ . Найденное периодическое решение будет устойчивым при  $\mu > 0$ , если (см. (4.6))

$$\Phi'(x_0^*) < 0. \quad (5.6)$$

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\ddot{x} = \mu(\alpha - \gamma \dot{x}^2) \dot{x} + \begin{cases} -\omega_1^2 x & (x > 0) \\ -\omega_2^2 x & (x < 0) \end{cases}, \quad (5.7)$$

где  $\alpha > 0$  и  $\gamma > 0$ . В этом случае

$$\Phi(x_2^*) = \frac{\alpha\pi x_2^*}{2\omega_1} + \frac{\alpha\pi x_2^*}{2\omega_2} - \frac{3\gamma\pi(x_2^*)^3}{8\omega_1} - \frac{3\gamma\pi(x_2^*)^3}{8\omega_2} = 0. \quad (5.8)$$

Из (5.8) находим координаты неподвижной точки  $M^*$   $(0; 2\sqrt{\alpha/3\gamma})$ , вблизи которой на фазовой плоскости проходит замкнутая траектория. Так как

$$\Phi'(x_2^*) = -(1/\omega_1 + 1/\omega_2)\alpha\pi < 0, \quad (5.9)$$

то найденное периодическое решение при  $\mu > 0$  будет устойчивым.

2) Будем искать периодические решения уравнения

$$\ddot{x} - x = \begin{cases} -1 + \mu F_1(x, \dot{x}; \mu) & (x > 0) \\ +1 + \mu F_2(x, \dot{x}; \mu) & (x < 0) \end{cases}. \quad (5.10)$$

Фазовая плоскость при  $\mu = 0$  изображена на рис. 5б. Ясно, что при малых  $\mu$  вопрос о нахождении порождающих периодических решений сводится только к нахождению неподвижных точек преобразования  $T = T_2 T_1$  отрезка  $(x_1 = 0; 0 < x_2 < 1)$ . Отображение  $T$  запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_2^2 &= x_2^0 + \mu \left[ \frac{1}{x_2^0} \int_0^{t_1} F_1(x^{(0)}(\tau), \dot{x}^{(0)}(\tau); 0) \operatorname{sh}(t_1 - \tau) d\tau - \frac{1}{x_2^0} \int_0^{t_1} F_2(-x^{(0)}(\tau), \right. \\ &\quad \left. -\dot{x}^{(0)}(\tau); 0) \operatorname{sh}(t_1 - \tau) d\tau - \int_0^{t_1} F_1(x^{(0)}(\tau), \dot{x}^{(0)}(\tau); 0) \operatorname{ch}(t_1 - \tau) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{t_1} F_2(-x^{(0)}(\tau), -\dot{x}^{(0)}(\tau); 0) \operatorname{ch}(t_1 - \tau) d\tau \right] + \dots, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где

$$x^{(0)}(\tau) = -\operatorname{ch}\tau + x_2^0 \operatorname{sh}\tau + 1, \quad t_1 = \ln \frac{1 + x_2^0}{1 - x_2^0}.$$

Обозначив выражение в квадратных скобках в (5.11) через  $\Phi(x_2^0)$  и приравняв его к нулю, найдем уравнение для координат неподвижных точек. Период  $\Theta$  соответствующего периодического решения будет равен  $2 \ln \frac{1 + x_2^0}{1 - x_2^0}$ . Как и в предыдущем случае, соответствующее периодическое решение будет устойчивым, если  $\mu\Phi'(x_2^0) < 0$ .

3) В качестве следующего примера рассмотрим колебания с уда-

ром шарика, падающего на почти упругую плоскость. Уравнения движения шарика:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -1 + \mu F(x, \dot{x}) \quad (x > 0); \\ \dot{x}_1 &= -(1 + \mu \lambda(\dot{x}_0)) \dot{x}_0 \quad (x = 0).\end{aligned}\tag{5.12}$$

(Второе соотношение (5.12) определяет условие удара.)

Из рис. 5в, на котором изображены при  $\mu = 0$  фазовые траектории системы, ясно, что нахождение разрывных периодических решений при малых  $\mu$  может быть сведено к отысканию неподвижных точек  $T = GT_1$ , где  $T_1$  — отображение точек положительной полуоси  $Ox_2$  в отрицательную полуось  $Ox_2$ , а  $G$  — отображение  $\bar{x}_2 = -(1 + \mu \lambda(x_2)) x_2$  при  $x_1 = 0$ . Без труда находим, что  $T$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}x_2^2 &= x_2^0 + \mu \left[ (-x_2^0) x_2^0 + \frac{1}{x_2^0} \int_0^{2x_2^0} \int_0^{\tau_1} F\left(-\frac{\tau^2}{2} + x_2^0 \tau, -\tau + x_2^0\right) d\tau d\tau_1 - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2x_2^0} F\left(-\frac{\tau^2}{2} + x_2^0 \tau, -\tau + x_2^0\right) d\tau \right] + \dots\end{aligned}\tag{5.13}$$

Неподвижные точки отображения  $T$  определяются из уравнения

$$\Phi(x_2^*) = \lambda(-x_2^*) x_2^* + \frac{1}{x_2^*} \int_0^{2x_2^*} \int_0^{\tau_1} F d\tau_1 d\tau - \int_0^{2x_2^*} F d\tau = 0.\tag{5.14}$$

В частном случае, когда  $f(x, \dot{x}) = -h\dot{x}$  и  $\lambda(\dot{x}) = \frac{|\dot{x}|}{1 + \dot{x}^2}$ , (5.14) сводится к уравнению

$$\Phi(x_2^*) = +\frac{(x_2^*)^2}{1+x_2^*} - \frac{2}{3} h (x_2^*)^2.\tag{5.15}$$

Из (5.15) находим координату неподвижной точки  $x_2^* = \sqrt{3/2 h - 1}$ . Поскольку

$$\Phi'(x_2^*) = -\frac{2(x_2^*)^3}{1+(x_2^*)^2},\tag{5.16}$$

при  $\mu > 0$  найденное периодическое движение будет устойчивым.

Соответствующая бифуркационная диаграмма изображена на рис. 6.

4) Рассмотрим также колебания шарика под действием внешней периодической силы периода  $2\pi$ . Уравнения движения в этом случае имеют вид:

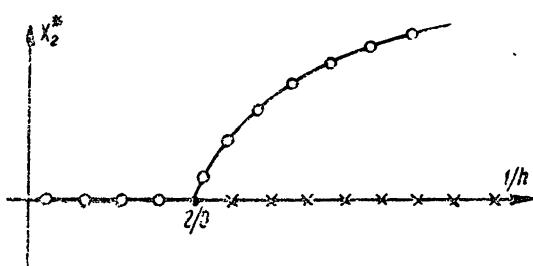


Рис. 6

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -1 + \mu F(t; x, \dot{x}) \quad (\dot{x} > 0); \\ \dot{x}_1 &= -[1 + \mu \lambda(\dot{x}_0)] \dot{x}_0 \quad (x = 0).\end{aligned}\tag{5.17}$$

Фазовым пространством рассматриваемой динамической системы будет полуслой

$$x_1 \geq 0, -\infty < x_2 < +\infty, 0 \leq t \leq 2\pi$$

(см. рис. 7).

При  $\mu = 0$  система (5.17) становится автономной. Она обладает тем свойством, что фазовая траектория, проходящая через точку

$M(x_1, x_2)$  фазового пространства, будет периодической с полупериодом  $\Theta = \sqrt{2x_1 + x_2^2}$ . Поэтому все фазовые траектории автономной системы, проходящие через точки кривой

$$2x_1 + x_2^2 = \Theta, \tag{5.18}$$

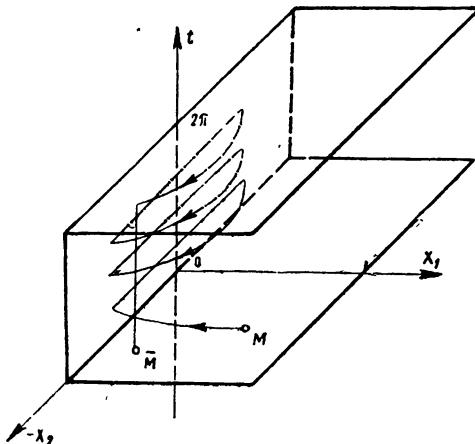


Рис. 7.

будут иметь одинаковый период. Отсюда следует, что уравнением множества неподвижных точек  $J_{n,k}$ , соответствующих периодическим движениям периода  $2\pi k$  с  $n$  ударами (где  $n$  и  $k$  — взаимно-простые целые числа), служит соотношение

$$2x_1 + x_2^2 = \left( \frac{\pi k}{n} \right)^2 \tag{5.19}$$

(так как необходимо, чтобы выполнялось условие  $2n\Theta = 2\pi k$ ).

Мы ограничимся исследованием периодических движений периода  $2\pi k$  с одним ударом. В этом случае отображение  $T$  полуплоскости  $t = 0$  в себя запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= -2^{-1} \left( 2\pi k - x_2 - \sqrt{2x_1 + x_2^2} \right) \left( 2\pi k - x_2 - 3\sqrt{2x_1 + x_2^2} \right) + \\ &\quad + \mu \Phi_1(x_1, x_2) + \mu^2 (\dots);\end{aligned}\tag{5.20}$$

$$\bar{x}_2 = -2\pi k + x_2 + 2\sqrt{2x_1 + x_2^2} + \mu \Phi_2(x_1, x_2) + \mu^2 (\dots),$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1(x_1, x_2) &= \int_{x_2 + \sqrt{2x_1 + x_2^2}}^{2\pi k} \int_0^\tau F(\tau, -2^{-1}(\tau - x_2 - \sqrt{2x_1 + x_2^2})^2 + \\ &\quad + (\tau - x_2 - \sqrt{2x_1 + x_2^2}) \sqrt{2x_1 + x_2^2}, -\tau + x_2 + \sqrt{2x_1 + x_2^2}) d\tau d\tau_1 + \\ &\quad + 2 \int_0^{x_2 + \sqrt{2x_1 + x_2^2}} \int_0^{\tau_1} F(\tau, -\tau^2/2 + x_2 \tau + x_1, -\tau + x_2) d\tau d\tau_1 + \\ &\quad + (2\pi k - x_2 - \sqrt{2x_1 + x_2^2}) \left[ \lambda \left( \sqrt{2x_1 + x_2^2} \right) \sqrt{2x_1 + x_2^2} - \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{x_2 + \sqrt{2x_1 + x_2^2}} F(\tau, -\tau^2/2 + x_2 \tau + x_1, -\tau + x_2) d\tau + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2x_1 + x_2^2}} \left[ \int_0^{x_2 + \sqrt{2x_1 + x_2^2}} \int_0^{\tau_1} F(\tau, -\tau^2/2 + x_2 \tau + x_1, -\tau + x_2) d\tau d\tau_1; \right. \\
& \quad \left. \Phi_2(x_1, x_2) = \lambda \left( \sqrt{2x_1 + x_2^2} \right) \sqrt{2x_1 + x_2^2} + \right. \\
& \quad \left. \int_{x_2 + \sqrt{2x_1 + x_2^2}}^{2\pi k} F(\tau, -2^{-1}(\tau - x_2 - \sqrt{2x_1 + x_2^2})^2 + (\tau - x_2 - \sqrt{2x_1 + x_2^2}) \sqrt{2x_1 + x_2^2}, \right. \\
& \quad \left. -\tau + x_2 + \sqrt{2x_1 + x_2^2}) d\tau d\tau_1 - \int_0^{x_2 + \sqrt{2x_1 + x_2^2}} F(\tau, -\tau^2/2 + x_2 \tau + x_1, -\tau + x_2) d\tau + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{\sqrt{2x_1 + x_2^2}} \int_0^{x_2 + \sqrt{2x_1 + x_2^2}} \int_0^{\tau_1} F(\tau, -\tau^2/2 + x_2 \tau + x_1, -\tau + x_2) d\tau d\tau_1. \right]
\end{aligned}$$

В окрестности точки  $M_0(x_1^0, x_2^0)$ , лежащей на кривой (5.19), отображение (5.20) при  $n=1$  представляется в виде:

$$\begin{aligned}
\xi &= \left( 1 - \frac{2x_2^0}{\pi k} \right) \xi - \frac{2(x_2^0)^2}{\pi k} \eta + \mu \left[ \Phi_1(x_1^0, x_2^0) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \Phi_1(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \xi + \frac{\partial \Phi_1(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \eta \right] + \dots; \tag{5.21}
\end{aligned}$$

$$\bar{\eta} = \frac{2}{\pi k} \xi + 1 + \frac{2x_2^0}{\pi k} \eta + \mu \left[ \Phi_2(x_1^0, x_2^0) + \frac{\partial \Phi_2(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \xi + \frac{\partial \Phi_2(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \eta \right] + \dots,$$

где

$$\xi = x_1 - x_1^0, \eta = x_2 - x_2^0, \bar{\xi} = \bar{x}_1 - x_1^0, \bar{\eta} = \bar{x}_2 - x_2^0,$$

а многоточия означают, что не выписаны члены более высокого порядка относительно  $\mu$ ,  $\xi$  и  $\eta$ .

Для того, чтобы указанная точка была порождающей, необходимо, чтобы выполнялось условие

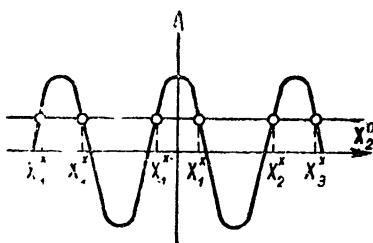
$$\Phi_1 \left( \frac{(\pi k)^2 - (x_2^*)^2}{2}, x_2^* \right) + x_2^* \Phi_2 \left( \frac{(\pi k)^2 - (x_2^*)^2}{2}, x_2^* \right) = 0. \tag{5.22}$$

В частном случае, когда  $F(t; x, \dot{x}) = \sin \tau$ , уравнение (5.22) имеет вид:

$$-2\pi k \cos x_2^* + (\pi k)^2 \lambda(-\pi k) = 0. \tag{5.23}$$

В этом случае у системы будет существовать  $2k$  периодических решений при достаточно малых  $\mu$ , если  $(\pi k/2) |\lambda(-\pi k)| < 1$  (рис. 8).

Для исследования устойчивости линеаризуем отображение (5.21) в окрестности неподвижной точки и составляем характеристическое уравнение, которое при достаточно малых  $\mu$  можно записать в виде:



$$\begin{aligned} \sigma^2 - \mu & \left( \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \right)^* + \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \right)^* \right) \sigma + \\ & + \mu \frac{2}{\pi k} \left[ (x_2^*)^2 \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \right)^* - \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \right)^* + \right. \\ & \left. + x_2^* \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \right)^* - x_2^* \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \right)^* \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Для устойчивости при  $\mu > 0$  требуется, чтобы корни этого уравнения лежали в левой полуплоскости.

Рис. 8.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, Ж. прикл. физ., 7, 3 (1930).
2. И. Г. Малкин, Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
3. Ю. И. Неймарк, Л. П. Шильников, Изв. АН СССР, ОТН, 6, 51 (1959).
4. А. А. Андронов, Н. Н. Баутин, ДАН СССР, 43, 197 (1944).
5. А. А. Андронов, А. Г. Майер, ДАН СССР, 47, 345 (1945).
6. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
7. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 41 (1958).
8. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 2, 95 (1958).
9. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 5—6, 146 (1958).
10. М. А. Айзerman, Ф. Р. Гантмахер, ПММ, 20, 627 (1956).
11. Г. Н. Никольский, Труды Центральной лаборатории проводной связи, 1, 1934.
12. Ю. В. Долголенко, Труды II Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, 1, изд. АН СССР, М., 1955.
13. Ю. И. Неймарк, Труды ГИФТИ и радиофизич. факта ГГУ, 30, изд. Сов. радио, М., 1956.
14. С. Д. Киняпин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 88 (1958).

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
16 января 1960 г.

## О РАЗРЫВНОМ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОМ ТОЧЕЧНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПРЯМОЙ В ПРЯМОУЮ

*Н. Н. Леонов*

Исследуется разрывное кусочно-линейное преобразование прямой в прямую, имеющее разрыв первого рода. Проведено разбиение пространства параметров преобразования на области существования устойчивых неподвижных точек различных кратностей и типов, а также выделены в пространстве параметров области существования непериодических, устойчивых по Пуассону движений соответствующей динамической системы.

Применение метода точечных отображений при исследовании ряда динамических систем (скрипичной струны, возбуждаемой смычком [1], гидротарана [2], двухпозиционного регулятора температуры печи [3], электромагнитного прерывателя [4], виброударника для забивки шпунта и свай [5]; мультивибратора, синхронизируемого периодически повторяющимися импульсами [6], и т. д.) приводит к изучению разрывного преобразования прямой в прямую. Настоящая работа содержит исследование разрывного преобразования  $\Pi$ , распадающегося на два линейных преобразования  $T_1$  и  $T_2$ :

$$\bar{x} = \Pi x = \begin{cases} T_1 x = a + \lambda_1 x & (x < 0) \\ T_2 x = b + \lambda_2 x & (x > 0) \end{cases}. \quad (1)$$

С точностью до масштаба  $x$  преобразование  $\Pi$  характеризуется тремя параметрами  $\Delta$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , где  $\Delta = |ab^{-1}|$ .

Поставим себе целью получить в результате исследования разбиение пространства параметров  $\lambda_2 \Delta \lambda_1$  (будем его в дальнейшем обозначать через  $\Lambda$ ) на области существования устойчивых неподвижных точек преобразования  $\Pi$ . В предыдущей работе [7] эта задача была решена для случая  $a > 0$ ;  $b < 0$ , когда преобразование  $\Pi$  не имело простых неподвижных точек. Здесь рассматриваются остальные случаи для  $a > 0$ ;  $b < 0$ : 1)  $0 < \lambda_1 < 1$ ,  $\lambda_2 > 1$ ; 2)  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 1$ ; 3)  $\lambda_1 > 1$ ,  $\lambda_2 > 1$ ; 4)  $\lambda_1 > 1$ ,  $0 < \lambda_2 < 1$ ; 5)  $\lambda_1 > 1$ ,  $\lambda_2 < 0$ .

Случаи 4 и 5, как нетрудно проверить подстановкой

$$x = -y, \bar{x} = -\bar{y}, \lambda_1 = \alpha_2, \lambda_2 = \alpha_1, a_1 = -b, b_1 = -a, \quad (2)$$

сводятся к случаям 1 и 2 соответственно. Поэтому будем исследовать лишь случаи 1, 2 и 3.

Для удобства изложения будем говорить о движении изображающей точки  $X(x)$  вдоль оси  $x$ , подразумевая при этом, что в процессе движения  $x$  принимает последовательно значения  $x$ ,  $\Pi x$ ,  $\Pi^2 x, \dots, \Pi^n x, \dots$ , где  $\Pi^n$  —  $n$  раз последовательно примененное преобразование  $\Pi$ . Преобразование  $\Pi^n$  можно записать в терминах преобразований  $T_1$  и  $T_2$  следующим образом:  $T_{j_1} T_{j_2} \dots T_{j_n}$ , где  $j_i$  есть либо 1, либо 2. Обозначим простую неподвижную точку преобразования  $T_{j_1} T_{j_2} \dots T_{j_n}$  через

$x_{j_1 j_2 \dots j_n}^*$ . Эта неподвижная точка, а также неподвижные точки  $x_{j_n j_1 \dots j_{n-1}}^*, x_{j_{n-1} j_n \dots j_{n-2}}^*, \dots, x_{j_2 j_3 \dots j_1}^*$  являются  $n$ -кратными неподвижными точками преобразования  $\Pi$  и при фиксированных  $j_i$  образуют цикл. Как известно [8], корни характеристического уравнения преобразования  $\Pi^n$  для всех точек цикла одинаковы. Следовательно, при исследовании  $n$ -членного цикла достаточно все интересующие нас вопросы рассмотреть лишь для одной какой-нибудь точки этого цикла. В дальнейшем мы так и будем поступать.

Перейдем к исследованию указанных выше случаев.

1.  $0 < \lambda_1 < 1, \lambda_2 > 1$ . В этом случае преобразование  $\Pi$  имеет простую неустойчивую неподвижную точку  $x_2^* = -b(\lambda_2 - 1)^{-1}$ . Область пространства  $\Lambda$ , отвечающая рассматриваемому случаю, разобьем на три области (здесь  $\Delta$  будем обозначать через  $\Delta_1$ ).

а) Область  $\Lambda_{1a}$ , для которой  $T_1 b > x_2^*$ , т. е.  $\Delta_1 > \lambda_1 + (\lambda_2 - 1)^{-1}$ . Здесь изображающая точка уходит в бесконечность из любого начального положения, за исключением неподвижной точки  $x_2^*$  и точек  $T_1^{-n} x_2^*$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ее сепаратрисы \*.

б) Область  $\Lambda_{1b}$ , для которой  $a < x_2^*$ , т. е.  $\Delta_1 < (\lambda_2 - 1)^{-1}$ . Здесь изображающая точка при любых начальных  $x > x_2^*$  уходит в бесконечность, а при начальных  $x < x_2^*$  приходит в ограниченную область, где  $b \leq x \leq a$ , из которой выйти не может.

в) Область  $\Lambda_{1c}$ , для которой  $a > x_2^* > T_1 b$ , т. е.  $(\lambda_2 - 1)^{-1} < \Delta_1 < \lambda_1 + (\lambda_2 - 1)^{-1}$ .

Рассмотрим область  $\Lambda_{1c}$ . Как было сказано выше, преобразование  $\Pi$  имеет здесь единственную простую неподвижную точку  $x_2^*$ . Теперь перед нами встает задача — исследовать вопросы, касающиеся много-кратных неподвижных точек этого преобразования. Среди  $(n+1)$ -кратных неподвижных точек преобразования  $\Pi$  рассмотрим сначала те, которые являются простыми неподвижными точками преобразований  $T_1^n T_2, T_1 T_2^n$ .

#### Преобразование

$$T_1^n T_2 x = \lambda_1^n \lambda_2 x + \lambda_1^n b + a(1 - \lambda_1^n)(1 - \lambda_1)^{-1}, \quad (3)$$

переводящее точки интервала  $(0, a)$  в точки этого же интервала, может иметь единственную для каждого  $n$  простую неподвижную точку .

$$x_{n1}^* = [\lambda_1^n b + a(1 - \lambda_1^n)(1 - \lambda_1)^{-1}] (1 - \lambda_1^n \lambda_2)^{-1}, \quad (4)$$

устойчивую при  $\lambda_1^n \lambda_2 < 1$ . Согласно условию  $0 \leq x_{n1}^* \leq a$ , область существования устойчивой неподвижной точки  $x_{n1}^*$  задается выражением:

$$(1 - \lambda_2)(\lambda_1^{1-n} - 1)^{-1} \leq \Delta_1 \leq (1 - \lambda_1)[\lambda_1^{1-n} - 1 + \lambda_2(1 - \lambda_1)]^{-1}. \quad (5)$$

Для области существования неустойчивой неподвижной точки  $x_{n1}^*$  знаки неравенства в (5) следует заменить на обратные.

\* Следует Витту [1], назовем сепаратрисой всякую последовательность итераций, строящуюся к неустойчивой неподвижной точке или к точке разрыва непрерывности преобразования  $\Pi$ .

Все области существования  $P_{n1}$  устойчивых неподвижных точек  $x_{n1}^*$  находятся целиком в той части пространства  $\Lambda$ , для которой  $0 \leq \Delta_1 \leq \lambda_2^{-1}$  (см. (5)), т. е. все принадлежат целиком области  $\Lambda_{16}$ . Области  $P_{n1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) образуют в пространстве  $\Lambda$  бесконечную последовательность попарно непересекающихся областей. Границные поверхности этих областей пересекаются вдоль линий  $\Delta_1 = (1 - \lambda_1)(\lambda_1^n - 1)^{-1}$ ,  $\lambda_1^n \lambda_2 = 1$ , которые принадлежат поверхности

$$\Delta_1 = (1 - \lambda_1)(\lambda_2 - 1)^{-1}. \quad (6)$$

Преобразование

$$T_1 T_2^n x = \lambda_1 \lambda_2^n x + a + b \lambda_1 (\lambda_2^n - 1) (\lambda_2 - 1)^{-1}, \quad (7)$$

переводящее точки интервала  $(T_1 b, a)$  в точки этого же интервала, может иметь единственную для каждого  $n$  простую неподвижную точку

$$x_{1n}^* = [a + \lambda_1 (\lambda_2^n - 1) (\lambda_2 - 1)^{-1} b] (1 - \lambda_1 \lambda_2^n)^{-1}, \quad (8)$$

устойчивую при  $\lambda_1 \lambda_2^n < 1$ . Область существования  $P_{1n}$  устойчивой неподвижной точки  $x_{1n}^*$  является одновременно областью существования устойчивой неподвижной точки преобразования  $T_2^n T_1$ , в силу того, что обе эти точки входят в один цикл. Выражение для этой области получается из (5), заменой, согласно (2),  $\lambda_1$  на  $\lambda_2$ ,  $\lambda_2$  на  $\lambda_1$  и  $\Delta_1$  на  $\Delta_1^{-1}$ . Поэтому области  $P_{1n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) находятся, как это нетрудно проверить, в той части пространства параметров  $\Lambda_{16}$ , где  $\lambda_1 \ll \Delta_1 \ll (1 - \lambda_1) \times (\lambda_2 - 1)^{-1}$ , и образуют бесконечную последовательность попарно непересекающихся областей.

Таким образом, области  $P_{n1}, P_{1n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) находятся в той части пространства  $\Lambda_{16}$ , для которой  $\Delta_1 \ll (1 - \lambda_1)(\lambda_2 - 1)^{-1}$ , назовем ее  $\Lambda^*$ , и образуют бесконечную в обе стороны последовательность попарно непересекающихся областей. Оставшиеся между последними области, для которых  $\Delta_1 \ll (1 - \lambda_1)(\lambda_2 - 1)^{-1}$ , назовем „пустыми“ и обозначим „пустые“ области, расположенные между областями  $P_{n1}, P_{n-1,1}$  и  $P_{1n}, P_{1,n+1}$ , соответственно через  $S_{n1}$  и  $S_{1n}$ . Если теперь рассмотрим преобразование, переводящее точки интервала  $(0, a)$  в точки этого же интервала, и преобразование, переводящее точки интервала  $(T_1 b, a)$  в точки интервала  $(T_1 b, a)$ , то нетрудно обнаружить, что эти преобразования в областях  $S_{n1}, S_{1n}$  соответственно являются разрывными и сжимающими

и имеют вид, изображенный на рис. 1 (так как в каждой, соседней с „пустой“, области соответствующее преобразование является сжимающим).

Разрывное преобразование такого типа было исследовано в работе [7]. На основании этого исследования мы можем теперь провести разбиение пространства  $\Lambda^*$  на области существования неподвижных точек различных классов сложности. Согласно [7], в каждой области  $S_{i,j_1}$  существует бесконечная, в обе стороны последовательность попарно непересекающихся областей  $P_{i,j_1,i,j_2}$ , ( $i_k$  и  $j_k$  одновременно больше единицы

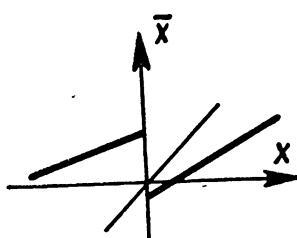


Рис. 1.

быть не могут), которые являются областями существования устойчивых неподвижных точек  $x_{i_1 j_1 i_2 j_2}^*$  преобразований  $T_{i_1 j_1 i_2 j_2} = T_{i_1 j_1}^{i_2} T_{i_1 - \eta_1, j_1 + 1 - \eta_1}^{j_2}$ ,

где  $\eta_1 = \begin{cases} 0, & i_1 = 1 \\ 1, & i_1 > 1 \end{cases}$ . Оставшиеся между  $P_{i_1 j_1 i_2 j_2}$ , „пустые“ области  $S_{i_1 j_1 i_2 j_2}$ ,

содержат бесконечные в обе стороны последовательности попарно непересекающихся областей  $P_{i_1 j_1 i_2 j_3 i_3 j_3}$  и т. д. В каждой „пустой“ области  $S_{i_1 j_1 \dots i_N j_N}$  существует бесконечная в обе стороны последовательность попарно непересекающихся областей  $P_{i_1 j_1 \dots i_N j_{N+1}}$  существования устойчивых неподвижных точек  $x_{i_1 j_1 \dots i_{N+1} j_{N+1}}^*$  преобразований

$$T_{i_1 j_1 \dots i_{N+1} j_{N+1}} = T_{i_1 j_1 \dots i_N j_N}^{i_{N+1}} T_{i_1 j_1 \dots i_{N-1} j_{N-1}, i_N - \eta_N, j_N + 1 - \eta_N}^{j_{N+1}}, \quad \text{где } \eta_N = \begin{cases} 0, & i_N = 1 \\ 1, & i_N > 1 \end{cases}$$

( $i_k, j_k$  одновременно при любом  $k=1, 2, \dots, N+1$  не

могут быть больше единицы). Области  $P_{i_1 j_1 \dots i_r j_r \dots}$  представляют собой поверхности в пространстве  $\Lambda^*$  и являются областями существования устойчивых по Пуассону непериодических движений динамической системы. Неподвижные точки  $x_{i_1 j_1 \dots i_N j_N}^*$  и были в [7] названы точками класса сложности  $N$ .

Покажем теперь, что области существования устойчивых неподвижных точек  $P_{i_1 j_1 \dots i_N j_N}$  целиком принадлежат области  $\Lambda^*$ , т. е. что линии пересечения граничных поверхностей областей  $P_{i_1 j_1 \dots i_N j_N}$  принадлежат поверхности (6). Преобразования, переводящие точки интервала  $(0, a)$  в точки интервала  $(0, a)$ , и преобразования, переводящие точки интервала  $(T_1 b, a)$  в точки интервала  $(T_1 b, a)$ , соответственно в  $S_{n1}$  и в  $S_{1n}$ , можно записать в виде:

$$\Pi_2 x = \begin{cases} T_{i_1 j_1} x & (x < x^{(1)}) \\ T_{i_1 - \eta_1, j_1 + 1 - \eta_1} x & (x > x^{(1)}) \end{cases}, \quad (9)$$

где  $x^{(1)}$  таково, что  $T_{i_1 j_1} x^{(1)} = a$ . С помощью замены  $x = x^{(1)} + u_2$ ,  $\Pi_2 x = x^{(1)} + \Pi_2 u_2$ ,  $a_2 = a - x^{(1)}$ ,  $b_2 = T_{i_1 - \eta_1, j_1 + 1 - \eta_1} x^{(1)} - x^{(1)}$  соотношение (9) преобразуется к виду:

$$\Pi_2^0 u_2 = \begin{cases} a_2 + \lambda_{12} u_2 & (u_2 < 0) \\ b_2 + \lambda_{22} u_2 & (u_2 > 0) \end{cases}, \quad (10)$$

где  $\lambda_{12} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ,  $\lambda_{22} = \lambda_1^{i_1 - \eta_1} \lambda_2^{i_2 + 1 - \eta_1}$ . Далее, преобразования, переводящие точки интервала  $(0, a_2)$  в точки интервала  $(0, a_2)$ , и преобразования, переводящие точки интервала  $(T_{i_1 j_1} b_2, a_2)$  в точки интервала  $(T_{i_1 j_1} b_2, a_2)$ , в областях  $S_{i_1 j_1 i_2 j_2}$  могут быть записаны в виде:

$$\Pi_1 x = \begin{cases} T_{i_1 j_1 i_2 j_2} x & (x < x^{(2)}) \\ T_{i_1 j_1, i_2 - \eta_2, j_2 + 1 - \eta_2} x & (x > x^{(2)}) \end{cases}, \quad (11)$$

где  $x^{(2)}$  таково, что  $T_{i_1 j_1 i_2 j_2} x^{(2)} = a$ . С помощью замены  $x = x^{(2)} + u_3$ ,  $\Pi_3 x = x^{(2)} + \Pi_3^0 u_3$ ,  $a_3 = a - x^{(2)}$ ,  $b_3 = T_{i_1 j_1, i_2 - \eta_2, j_2 + 1 - \eta_2} x^{(2)} - x^{(2)}$  соотношение (11) преобразуется к виду:

$$\Pi_3^0 u_3 = \begin{cases} a_3 + \lambda_{13} u_3 & (u_3 < 0) \\ b_3 + \lambda_{23} u_3 & (u_3 > 0) \end{cases}, \quad (12)$$

где  $\lambda_{13} = \lambda_{12}^{i_1} \lambda_{22}^{j_2}$ ,  $\lambda_{23} = \lambda_{12}^{i_2 - \eta_2} \lambda_{22}^{j_2 + 1 - \eta_2}$ . И вообще, преобразования, переводящие точки интервала  $(0, a_N)$  в точки интервала  $(0, a_N)$ , и преобразования, переводящие точки интервала  $(T_{i_1 j_1 \dots i_{N-1} j_{N-1}} b_N, a_N)$  в точки интервала  $(T_{i_1 j_1 \dots i_{N-1} j_{N-1}} b_N, a_N)$ , в  $S_{i_1 j_1 \dots i_N j_N}$  можно записать в виде:

$$\Pi_{N+1} x = \begin{cases} T_{i_1 j_1 \dots i_N j_N} x & (x < x^{(N)}) \\ T_{i_1 j_1 \dots i_N - \eta_N, j_N + 1 - \eta_N} x & (x > x^{(N)}) \end{cases}, \quad (13)$$

где  $x^{(N)}$  таково, что  $T_{i_1 j_1 \dots i_N j_N} x^{(N)} = a$ . Заменой  $x = x^{(N)} + u_{N+1}$ ,  $\Pi_{N+1} = x^{(N)} + \Pi_{N+1}^0 u_{N+1}$ ,  $a_{N+1} = a - x^{(N)}$ ,  $b_{N+1} = T_{i_1 j_1 \dots i_N - \eta_N, j_N + 1 - \eta_N} x^{(N)} - x^{(N)}$ , (13) преобразуется к виду:

$$\Pi_{N+1}^0 u_{N+1} = \begin{cases} a_{N+1} + \lambda_{1, N+1} u_{N+1} & (u_{N+1} < 0) \\ b_{N+1} + \lambda_{2, N+1} u_{N+1} & (u_{N+1} > 0) \end{cases}, \quad (14)$$

где

$$\lambda_{1, N+1} = \underbrace{\lambda_{1N}^{i_N}}_{1N} \underbrace{\lambda_{2N}^{j_N}}_{2N}, \quad \lambda_{2, N+1} = \underbrace{\lambda_{1N}^{i_N - \eta_N}}_{1N} \underbrace{\lambda_{2N}^{j_N + 1 - \eta_N}}_{2N}. \quad (15)$$

Если теперь обозначим через  $\Delta_N$  величину  $|a_N b_N^{-1}|$ , то, согласно [7],

$$\Delta_N = (1 - \lambda_{2N}^{-i_N}) (1 - \lambda_{2N})^{-1} + \lambda_{1N} (1 + \Delta_{N+1}^{-1})^{-1} \quad (\text{при } i_N = 1); \quad (16)$$

$$\Delta_N^{-1} (1 - \lambda_{1N}^{-i_N} - 1) (1 - \lambda_{1N})^{-1} + \lambda_{2N} (1 + \Delta_{N+1}) \quad (\text{при } j_N = 1). \quad (17)$$

Линии пересечения граничных поверхностей областей существования устойчивых неподвижных точек класса сложности  $N+1$  в пространстве  $\lambda_{2, N+1} \Delta_{N+1} \lambda_{1, N+1}$  принадлежат поверхности:

$$\Delta_{N+1} = (1 - \lambda_{1, N+1}) (\lambda_{2, N+1} - 1)^{-1}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (16) и (17) и учитывая (15), получим, что  $\Delta_N = (1 - \lambda_{1N}) (\lambda_{2N} - 1)^{-1}$ . Продолжая этот процесс дальше, получим при  $N=1$  уравнение (6), что и требовалось.

Таким образом, поверхность (6) отделяет в пространстве  $\Lambda$  области устойчивости рассмотренных неподвижных точек от их областей неустойчивости. Согласно [7], в  $\Lambda^*$  областей существования иных неподвижных точек, отличных от выше рассмотренных, не существует. Этим и кончается исследование преобразования  $\Pi$  в области  $\Lambda^*$ .

В области  $\Lambda_{16}^* = \Lambda_{16} - \Lambda^*$  рассмотренные неподвижные точки неустойчивы. Кроме этих неподвижных точек, в  $\Lambda_{16}^*$  могут существовать и другие неподвижные точки. Рассмотрим сначала многократные неподвижные точки преобразования  $\Pi$ , являющиеся простыми неподвижными точками преобразований

$$T_1^m T_2^n x = \lambda_1^m \lambda_2^n x + a (1 - \lambda_1^m) (1 - \lambda_1)^{-1} + b \lambda_1^m (\lambda_2^n - 1) (\lambda_2 - 1)^{-1}; \quad (19)$$

$$\dot{T}_2^n T_1^m x = \lambda_1^m \lambda_2^n x + a \lambda_2^n (1 - \lambda_1^m) (1 - \lambda_1)^{-1} + b (\lambda_2^n - 1) (\lambda_2 - 1)^{-1}, \quad (20)$$

где  $m$  и  $n$  одновременно больше единицы. Обозначим неподвижные точки этих преобразований через  $x_{mn}$  и  $\tilde{x}_{mn}$  соответственно. Они устойчивы, если  $\lambda_1^m \lambda_2^n < 1$ . Границы их области существования определяются из условий  $x_{mn}^* < a$ ,  $\tilde{x}_{mn}^* > b$ , и в случае  $\lambda_1^m \lambda_2^n < 1$  сама область существования задается неравенствами  $\delta > \Delta_1 > \sigma$ , где

$$\delta = (\lambda_2^n - 1)(\lambda_2 - 1)^{-1} \lambda_1^m (1 - \lambda_1) (\lambda_1 - \lambda_1^m + \lambda_1^m \lambda_2^n - \lambda_1^{m+1} \lambda_2^n)^{-1}, \quad .$$

$$\sigma = (1 - \lambda_1) \{(1 - \lambda_1^m) \lambda_2^n [\lambda_2^n (1 - \lambda_1^m) + \lambda_2 (\lambda_1^m \lambda_2^n - 1)] (\lambda_2 - 1)\}^{-1}.$$

Неподвижные точки  $x_{mn}$  и  $\tilde{x}_{mn}$ , для которых  $m$  и  $n$  одновременно больше единицы, могут существовать лишь при условии, что одновременно справедливы неравенства  $T_1 b < 0$ ,  $T_2 a > 0$  (т. е. в области  $\lambda_1 > \Delta_1 > \lambda_2^{-1}$ ). Последняя область принадлежит области  $\Lambda_{16}^*$ , так как при условии  $\lambda_1 > \lambda_2^{-1}$  справедливо неравенство  $\lambda_2^{-1} > (1 - \lambda_1)(\lambda_2 - 1)^{-1}$ . В то же время при  $\lambda_1^m \lambda_2^n < 1$  получаем, что  $\delta$  и  $\sigma$  меньше  $(1 - \lambda_1) \times (\lambda_2 - 1)^{-1}$ . Таким образом, преобразование  $\Pi$  может иметь лишь неустойчивые неподвижные точки типа  $x_{mn}^*$  и  $\tilde{x}_{mn}$ .

Рассмотрим теперь следующие преобразования: а) при  $T_1 b > 0$  — преобразование  $R_1$ , отображающее точки интервала  $(T_1 b, a)$  на этот же интервал (это преобразование разрывное, кусочно-линейное и распадается на следующие:  $T_1 T_2^n$ ,  $T_1 T_2^{n-1}$ , ...,  $T_1 T_2^{n_1}$ , где  $1 \leq n_1 \leq n-2$ ); б) при  $T_2 a < 0$  — преобразование  $R_2$ , отображающее точки интервала  $(0, a)$  на интервал  $(0, a)$  (это преобразование распадается на преобразования:  $T_1^m T_2$ ,  $T_1^{m-1} T_2$ , ...,  $T_1^{m_1} T_2$ , где  $1 \leq m_1 \leq m-2$ ); в) при  $T_1 b < 0$ ,  $T_2 a > 0$  — преобразование  $R_3$ , отображающее точки интервала  $(0, a)$  в точки этого же интервала (преобразование  $R_3$  является разрывным и распадается на преобразования:  $T_1^m T_2$ ,  $T_1^{m-1} T_2$ , ...,  $T_1 T_2$ ;  $T_1^m T_2^2$ ,  $T_1^{m-1} T_2^2$ , ...,  $T_1 T_2^2$ ; ...;  $T_1^m T_2^n$ ,  $T_1^{m-1} T_2^n$ , ...,  $T_1^{m_1} T_2^n$ , где  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$ ,  $1 \leq m_1 \leq m$ ). Для преобразований  $R_1$  и  $R_2$  случаи  $n_1 = n-1$ ,  $n$  и  $m_1 = m-1$ ,  $m$  рассматривать здесь не будем, так как выше было показано, что соответствующие неподвижные точки устойчивы лишь в области  $\Lambda^*$ .

Рассмотрим сначала преобразование  $R_1$ . Как уже было сказано, оно распадается на преобразования  $T_1 T_2^n$ , ...,  $T_1 T_2^{n_1}$ , что имеет место, если одновременно  $T_1 b \leq T_1 T_2^n$ ,  $T_1 b \leq a$ ,  $T_1 b \leq T_1 T_2^{n_1}$ ,  $a \leq a$ . В пространстве параметров  $\Lambda_{16}^*$  эти условия выделяют область, для которой

$$(1 - \lambda_2^{1-n_1}) (\lambda_2 - 1)^{-1} + \lambda_1 \leq \Delta_1 \leq (1 - \lambda_2^{-n_1}) (\lambda_2 - 1)^{-1} + \lambda_1;$$

$$(1 - \lambda_2^{1-n_1}) (\lambda_2 - 1)^{-1} \leq \Delta_1 \leq (1 - \lambda_2^{-n_1}) (\lambda_2 - 1)^{-1}.$$

Выше показано, что неподвижные точки преобразований  $T_1 T_2^{n-1}$ , ...,  $T_1 T_2^{n_1+1}$  неустойчивы в  $\Lambda_{16}^*$ , т. е.  $\lambda_1 \lambda_2^k > 1$  ( $k = n_1 + 1$ ,  $n_1 + 2$ , ...,  $n-1$ ), поэтому  $\lambda_1 \lambda_2^n > 1$ . Если и  $\lambda_1 \lambda_2^{n_1} > 1$ , то  $R_1$  не может иметь устойчивых неподвижных точек любой кратности. Если же  $\lambda_1 \lambda_2^{n_1} < 1$ , то на пути

исследования встречаются значительные трудности, заключающиеся в том, что  $R_1$  имеет не один разрыв непрерывности, а любое конечное или счетное количество разрывов. Полное исследование ввиду этих трудностей в данном случае не проведено; рассмотрены лишь отдельные случаи. Например, преобразование  $R_1$  не может иметь устойчивых кратных неподвижных точек, являющихся простыми неподвижными точками преобразований  $(T_1 T_2^n)^p (T_1 T_2^n)^q$ , где  $p \leq (n - n_1 - 1) q$  ( $q=1, 2, \dots$ ) (так как  $\lambda_1^{q+p} \lambda_2^{pn_1+qn} > 1$  в силу того, что  $\lambda_1 \lambda_2^{n_1+1} > 1$ ).

Преобразование  $R_2$  распадается на  $T_1^m T_2, \dots, T_1^{m_1} T_2$ , что возможно при одновременном выполнении условий:  $0 \leq T_1^m T_2 0 \leq a$ ,  $0 \leq T_1^{m_1} T_2 a \leq a$ , выделяющих в  $\Lambda_{16}^*$  область

$$(1 - \lambda_1)(\lambda_1^{1-m} - 1)^{-1} \leq \Delta_1 \leq (1 - \lambda_1)(\lambda_1^{1-m} - 1)^{-1}, [\lambda_2 + (1 - \lambda_1)^{-1} \times \\ \times (\lambda_1^{1-m_1} - 1)]^{-1} \leq \Delta_1 \leq [\lambda_2 + (1 - \lambda_1)^{-1} (\lambda_1^{1-m_1} - 1)]^{-1}.$$

В этой области  $\lambda_1^k \lambda_2 > 1$  ( $k = m_1, m_1 + 1, \dots, m-1$ ). В той части области, где  $\lambda_1^m \lambda_2 > 1$ ,  $R_2$  устойчивых неподвижных точек любой кратности иметь не может, а для той части, где  $\lambda_1^m \lambda_2 < 1$ , вопрос о возможности существования устойчивых неподвижных точек остается открытым. Известно лишь, что здесь  $R_2$  не может иметь устойчивых кратных неподвижных точек, являющихся простыми неподвижными точками преобразований  $(T_1^m T_2)^p (T_1^{m_1} T_2)^q$ , где  $p \leq q(m - m_1 - 1)$  ( $q=1, 2, \dots$ ) в силу того, что  $\lambda_1^{m-1} \lambda_2 > 1$ . Преобразование  $R_3$  распадается на ряд преобразований  $T_1^m T_2, \dots, T_1^{m_1} T_2^n$ , если одновременно  $0 \leq T_1^m T_2 0 \leq a$ ,  $0 \leq T_1^m T_2^n a \leq a$ . Последнее имеет место в  $\Lambda_{16}$  в области

$$(1 - \lambda_1)(\lambda_1^{1-m} - 1)^{-1} \leq \Delta_1 \leq (1 - \lambda_1)(\lambda_1^{1-m} - 1)^{-1}, (\lambda_2^n - 1)(\lambda_2 - 1)^{-1} \times \\ \times [\lambda_2^n + (\lambda_1^{1-m_1} - 1)(1 - \lambda_1)^{-1}]^{-1} \leq \Delta_1 \leq (\lambda_2^n - 1)(\lambda_2 - 1)^{-1} \times \\ \times [\lambda_2^n + (\lambda_1^{1-m_1} - 1)(1 - \lambda_1)^{-1}]^{-1}.$$

Как показано выше, преобразования  $T_1^{m-1} T_2, \dots, T_1^{m_1+1} T_2^n$  не могут иметь устойчивых неподвижных точек в  $\Lambda_{16}^*$ . Следовательно, для них  $\lambda_1^{m-1} \lambda_2 > 1$ ,  $\lambda_1^{m-2} \lambda_2 > 1, \dots, \lambda_1^{m_1+1} \lambda_2^n > 1$ , а поэтому и  $\lambda_1^m \lambda_2^n > 1$ . Если, кроме того, и  $\lambda_1^m \lambda_2 > 1$ , то  $R_3$  вообще не может иметь устойчивых неподвижных точек. Если же  $\lambda_1^m \lambda_2 < 1$ , то здесь о возможности существования устойчивых неподвижных точек преобразования  $R_3$  сказать почти ничего нельзя, за исключением того, что  $R_3$  не может иметь устойчивых кратных неподвижных точек, являющихся простыми неподвижными точками преобразований  $(T_1^m T_2)^p (T_1^{m_1} T_2^n)^q$ , где  $p \leq q(mn - n - m_1)$  ( $q=1, 2, \dots$ ) в силу того, что  $\lambda_1^{m-1} \lambda_2 > 1$ .

Перейдем к области  $\Lambda_{16}$ . Изучение преобразования  $P$  в этом случае можно свести к изучению преобразования  $Q_1$ , переводящего точки интервала  $(T_1 b, x_2^*)$  в точки этого же интервала, если  $T_1 b > 0$ , и к изучению преобразования  $Q_2$ , переводящего точки интервала  $(0, x_2^*)$  в точки интервала  $(0, x_2^*)$ , если  $T_1 b \leq 0$ . Оба эти преобразования разрывные, кусочно-линейные, имеющие счетное множество разрывов первого рода. При этом  $Q_1$  распадается на линейные преобразования  $T_1 T_2^n$ ,  $T_1 T_2^{n+1}$ ,  $T_1 T_2^{n+2}$ , ..., если  $T_1 T_2^n T_1 b \leq x_2^* \leq T_1 T_2^{n-1} T_1 b$ , где  $n$  может быть любым натуральным числом.

Покажем, что при выполнении условий  $T_1 T_2^n T_1 b < T_1 b$ ,  $x_2^* < T_1 T_2^{n-1} T_1 b$ , которые выделяют в  $\Lambda_{1B}$  область

$$\begin{aligned} (\lambda_2 - 1)^{-1} (\lambda_1 \lambda_2^{n-1} + 1)^{-1} [1 - \lambda_1 (\lambda_2^{n-1} - 1) - (\lambda_2 - 1) \lambda_1^2 \lambda_2^{n-1}] < \\ < \Delta_1 < \lambda_1 + (1 - \lambda_2^{1-n}) (\lambda_2 - 1)^{-1}, \end{aligned}$$

интервал  $(T_1 b, x_2^*)$ , за исключением точек множества меры нуль, является частью области притяжения интервала  $(x_2^*, a)$ , а следовательно, частью области притяжения бесконечности.

Действительно, в этом случае интервалы  $T_2^{-s} T_1^{-1} (T_1 b, x_2^*)$  и  $T_2^{-s} T_1^{-1} (x_2^*, a)$  ( $s = n, n+1, \dots$ ) попарно не пересекаются и составляют в сумме интервал  $(0, x_2^*)$ , причем

$$T_2^{-s} T_1^{-1} (T_1 b, x_2^*) \in (T_1 b, x_2^*), \quad T_2^{-s} T_1^{-1} (x_2^*, a) \in (T_1 b, x_2^*)$$

и, кроме того, часть интервала  $T_2^{1-n} T_1^{-1} (x_2^*, a)$  принадлежит интервалу  $(T_1 b, x_2^*)$ . Если обозначить через  $A_0$  множество точек интервалов  $T_2^{-s} T_1^{-1} (x_2^*, a)$ , принадлежащих интервалу  $(T_1 b, x_2^*)$ , через  $A_1$  — множество точек  $\sum_n^\infty T_2^{-s} T_1^{-1} A_0$ , принадлежащих интервалу  $(T_1 b, x_2^*), \dots,$

через  $A_{i+1}$  — множество точек  $\sum_n^\infty T_2^{-s} T_1^{-1} A_i$ , принадлежащих интервалу  $(T_1 b, x_2^*), \dots$ , а через  $\alpha_i$  — меру множества  $A_i$ , то нетрудно обнаружить, что  $A_i$  и  $A_j$  при  $i \neq j$  не имеют общих точек и  $\sum_0^\infty \alpha_i = x_2^* - T_1 b$ .

В самом деле,

$$\begin{aligned} A_0 &\in (T_1 b, x_2^*), \quad A_1 \in \sum_n^\infty T_2^{-s} T_1^{-1} (T_1 b, x_2^*) = (T_1 b, x_2^*) - A_0, \quad A_2 \in \\ &\in \sum_n^\infty T_2^{-s} T_1^{-1} [(T_1 b, x_2^*) - A_0] = (T_1 b, x_2^*) - A_1 - A_0, \dots, \quad A_{i+1} \in \\ &\in \sum_n^\infty T_2^{-s} T_1^{-1} [(T_1 b, x_2^*) - \sum_0^{i-1} A_k] = (T_1 b, x_2^*) - \sum_0^i A_k, \end{aligned}$$

откуда следует, что множества  $A_i$  и  $A_j$  не имеют общих точек, если  $i \neq j$ . Далее,

$$\alpha_0 = \sum_n^\infty \lambda_2^{-s} \lambda_1^{-1} (a - x_2^*) + T_2^{1-n} T_1^{-1} a - T_1 b;$$

$$\alpha_1 = \sum_n^\infty \lambda_2^{-s} \lambda_1^{-1} \alpha_0 = \lambda_1^{-1} \lambda_2^{1-n} (\lambda_2 - 1)^{-1} \alpha_0, \dots, \quad \alpha_{i+1} = \lambda_1^{-1} \lambda_2^{1-n} (\lambda_2 - 1)^{-1} \alpha_i, \dots,$$

и поэтому

$$\sum_0^\infty \alpha_i = [1 - \lambda_1^{-1} \lambda_2^{1-n} (\lambda_2 - 1)^{-1}]^{-1} \alpha_0 = -[\lambda_1 + (\lambda_2 - 1)^{-1}] b - a = x_2^* - T_1 b.$$

Таким образом, показано, что интервал  $(T_1 b, x_2^*)$ , за исключением точек множества меры нуль, является частью области притяжения интервала  $(x_2^*, a)$ . Что можно сказать об этом множестве? Если обозначим через  $B_0$  множество точек интервала  $(T_1 b, x_2^*)$ , через  $B_1$  — мно-

жество точек  $\sum_n^{\infty} T_2^{-s} T_1^{-1} B_0, \dots$ , через  $B_{l+1}$  — множество точек

$\sum_n^{\infty} T_2^{-s} T_1^{-1} B_l, \dots$ , то нетрудно убедиться в том, что предельное множество

стремится к множеству  $B_{\infty}$  имеет меру нуль. Из процесса построения множества  $B_{\infty}$  следует, что  $B_{\infty}$  подобно канторову дисконтинууму, т. е. представляет собой совершенное, нигде не плотное на действительной оси, имеющее мощность континуума множество. Очевидно также, что  $B_{\infty}$  состоит из многократных неподвижных точек преобразования  $Q_1$ , т. е. преобразования  $\Pi$ , и точек, соответствующих устойчивым по Пуассону не-периодическим движениям динамической системы.

В областях пространства  $\Lambda_{1a}$ , для которых  $T_1 b \leq T_1 T_2^n T_1 b \leq x_2^*$ , интервалы  $T_2^{-s} T_1^{-1}(T_1 b, x_2^*)$  для  $s > n$  принадлежат своему образу  $(T_1 b, x_2^*)$ , и лишь часть интервала  $T_2^{-n} T_1^{-1}(T_1 b, x_2^*)$  принадлежит интервалу  $(T_1 b, x_2^*)$ . Поэтому  $\lambda_2^{s-n} \lambda_1 > 1$  для  $s > n$ , а  $\lambda_2^n \lambda_1$  может принимать значения как большие, так и меньшие единицы. Если  $\lambda_2^n \lambda_1 > 1$ , то о преобразовании  $Q_1$  можно сказать лишь то, что оно не имеет в этом случае устойчивых неподвижных точек. Если же  $\lambda_2^n \lambda_1 < 1$ , то и вопрос о возможности существования устойчивых неподвижных точек преобразования  $Q_1$  остается открытым.

Преобразование  $Q_2$  распадается на линейные преобразования  $T_1^r T_2^s$  ( $r=1, 2, \dots, m$ ;  $s=1, 2, \dots$ ), если  $T_1^m T_2 0 < x_2^* < T_1^{m+1} T_2 0$ . При выполнении условий  $a > T_1^{m+1} T_2 0 > x_2^*$ , выделяющих в  $\Lambda_{1b}$  ряд соответствующих областей, интервал  $(0, x_2^*)$ , за исключением точек множества меры нуль, является частью области притяжения интервала  $(x_2^*, a)$ , а следовательно, частью области притяжения бесконечности. Доказывается это утверждение таким же образом, как и выше приведенное утверждение для преобразования  $Q_1$ . Что касается областей в  $\Lambda_{1b}$ , для которых  $0 < T_1^m T_2 0 < x_2^*$ , то преобразование  $Q_2$  в этих областях не имеет устойчивых неподвижных точек, если  $\lambda_1^m \lambda_2 > 1$ ; при  $\lambda_1^m \lambda_2 < 1$  преобразование  $Q_2$  здесь осталось неисследованным.

Таким образом, в рассмотренном случае для каждого  $\lambda_2, \Delta_1, \lambda_1$ , таких, что точка  $(\lambda_2, \Delta_1, \lambda_1)$  принадлежит  $\Lambda^*$ , преобразование  $\Pi$  либо имеет единственный устойчивый цикл, либо изображающая точка совершает непериодические движения, устойчивые по Пуассону. Если точки  $(\lambda_2, \Delta_1, \lambda_1) \in \Lambda_{1a}$ , то все движения уводят изображающую точку в бесконечность. В  $\Lambda_{1b}^*$  выделены области, для которых преобразование  $\Pi$  не имеет устойчивых циклов, но существуют непериодические устойчивые по Пуассону движения. В  $\Lambda_{1b}$  выделены области, где все движения, за исключением множества неустойчивых циклов и непериодических движений, устойчивые по Пуассону, уводят изображающую точку в бесконечность (рис. 2).

2.  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 1$ . В этом случае преобразование  $\Pi$  опять имеет простую неустойчивую неподвижную точку  $x_2^* = -b(\lambda_2 - 1)^{-1}$ . Разделим область пространства  $\Lambda$ , отвечающую значениям  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 1$ , как и выше, на три части.

а) Область  $\Lambda_{2a}$ , для которой  $a > x_2^*$ , т. е.  $\Delta > (\lambda_2 - 1)^{-1}$ . Изображающая точка в этом случае из всех начальных положений, за исключением точки  $x = x_2^*$ , уходит в бесконечность.

б) Область  $\Lambda_{26}$ , для которой  $T_1 b < x_2^*$ , т. е.  $\Delta < \lambda_1 + (\lambda_2 - 1)^{-1}$ . Здесь при всех  $x > x_2^*$  и при всех  $x < T_1^{-1} x_2^*$  изображающая точка уходит в бесконечность; из положений, для которых  $T_1^{-1} x_2^* < x < x_2^*$ , она приходит в ограниченную область, где  $b \leq x \leq T_1 b$ , из которой выйти уже не может.

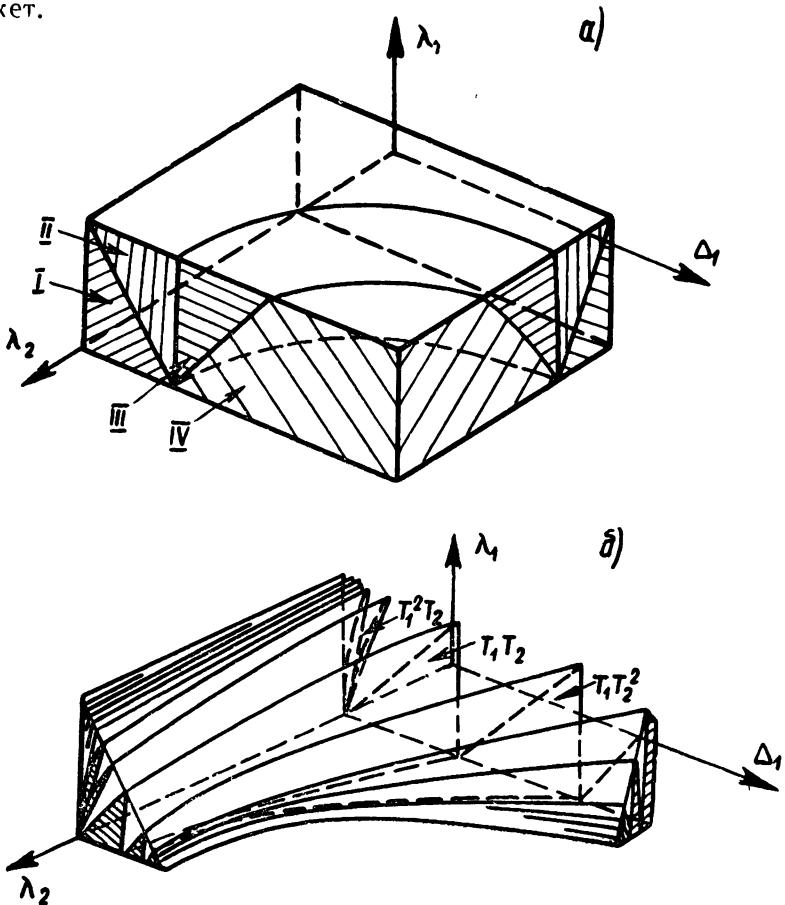


Рис. 2. а) I, II, III, IV — области  $\Lambda^*$ ,  $\Lambda_{16}^*$ ,  $\Lambda_{1b}$ ,  $\Lambda_{1a}$ ; б) области существования устойчивых неподвижных точек первого класса сложности.

в) Область  $\Lambda_{2b}$ , для которой  $a < x_2^* < T_1 b$ , т. е.  $\lambda_1 + (\lambda_2 - 1)^{-1} < \Delta < (\lambda_2 - 1)^{-1}$ .

В области  $\Lambda_{2b}$ , как показывают исследования, устойчивыми циклами преобразования  $T_1$  могут быть лишь циклы, содержащие простые неподвижные точки преобразований  $T_1 T_2^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Поэтому рассмотрим сначала преобразование  $T_1 T_2^n$ , описываемое уравнением (7), которое может иметь единственную для каждого  $n$  простую неподвижную точку  $x_{1n}^*$ , определенную формулой (8). Эта неподвижная точка устойчива, если  $|\lambda_1| \lambda_2^n < 1$ , а область ее существования  $P_n$  задается следующим образом:

$$\lambda_1 + (1 - \lambda_2^{1-n})(\lambda_2 - 1)^{-1} < \Delta < (1 - \lambda_2^{-n})(\lambda_2 - 1)^{-1}. \quad (21)$$

На линии  $L$  ( $\lambda_1 = \text{const}$ ,  $\lambda_2 = \text{const}$ ) области  $P_n$  выделяют соответствующие интервалы  $p_n$ , из которых каждый перекрывает оба соседние интервалы  $p_{n-1}$  и  $p_{n+1}$  на величину  $|\lambda_1|$  (см. (21)). Заметим, кроме

того, что интервалы  $p_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) образуют на  $L$  бесконечную последовательность, сходящуюся при  $n \rightarrow \infty$  к интервалу  $[\lambda_1 + (\lambda_2 - 1)^{-1}, (\lambda_2 - 1)^{-1}]$ .

Рассмотрим, как изменится число и устойчивость неподвижных точек при изменении  $\lambda_1$ . Обозначим интервал между правыми концами интервалов  $p_{n-1}$  и  $p_n$ , длина которого равна  $\lambda_2^{-n}$ , через  $q_n$ . Пусть  $\Delta \in q_n$  и пусть  $\lambda_1$  таково, что  $|\lambda_1| < \lambda_2^{-n-1}$ . Тогда  $q_n$  имеет общую часть лишь с  $p_{n+1}$ . Если при этом  $\Delta$  принадлежит лишь интервалу  $q_n$ , то существует единственная устойчивая неподвижная точка  $x_{1n}^*$ ; если же  $\Delta$  принадлежит еще и  $p_{n+1}$ , то существуют одновременно две неподвижные точки  $x_{1n}^*$  и  $x_{1,n+1}^*$ , обе устойчивые. Нетрудно заметить, что длины интервалов  $p_n$  увеличиваются с ростом  $|\lambda_1|$ . Следовательно, если при некотором  $\Delta$  существует лишь устойчивая неподвижная точка  $x_{1n}^*$ , то при увеличении  $|\lambda_1|$   $\Delta$  попадет и в  $q_n$  и в  $p_{n+1}$ , т. е. появится еще неподвижная точка  $x_{1,n+1}^*$ , устойчивая, если к этому моменту  $|\lambda_1| < \lambda_2^{-n-1}$ , и неустойчивая, если  $|\lambda_1| > \lambda_2^{-n-1}$ .

При дальнейшем увеличении  $|\lambda_1|$  появится возможность одновременного существования нескольких неподвижных точек. Если  $\lambda_1$  таково, что

$$\sum_{k=1}^m \lambda_2^{-n-k} < |\lambda_1| < \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_2^{-n-k}, \quad (22)$$

то существует общая часть всех интервалов с  $p_n$  по  $p_{n+m}$ , а интервалы  $p_n$  и  $p_{n+m+1}$  общих точек не имеют. Поэтому при  $\Delta \in q_n$  могут существовать одна, две, ...,  $m$  неподвижных точек  $x_{1n}^*$ ,  $x_{1,n+1}^*$ , ...,  $x_{1,n+m}^*$  одновременно. Из левой части (22) следует, что  $|\lambda_1| > \lambda_2^{-n-k}$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ), т. е. все эти неподвижные точки, кроме  $x_{1n}^*$ , неустойчивы. Если  $|\lambda_1| < \lambda_2^{-n}$ , то  $x_{1n}^*$  устойчива, а если  $|\lambda_1| > \lambda_2^{-n}$ , то неустойчива и  $x_{1n}^*$ .

Пусть теперь точка  $x_{1n}^*$  устойчива и  $\lambda_1$  удовлетворяет условию:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_2^{-n-k} < |\lambda_1| < \lambda_2^{-n}. \quad (23)$$

Выполнение этого условия возможно лишь в том случае, если

$$\lambda_2^m (\lambda_2 - 2) > -1. \quad (24)$$

Если  $\lambda_2 > 2$ , то (24) справедливо для любого  $m$ . В этом случае могут одновременно существовать одна устойчивая неподвижная точка  $x_{1n}^*$  и любое конечное число или бесчисленное множество неустойчивых неподвижных точек  $x_{1,n+k}^*$ . Если же  $\lambda_2$  таково, что  $1 < \lambda_2 < 2$ , то (24) справедливо лишь для  $m < -[\ln \lambda_2]^{-1} \ln (2 - \lambda_2)$ .

Рассмотрим теперь преобразование  $Q$ , переводящее точки интервала  $(a, T_1 b)$  в точки этого же интервала. Преобразование  $Q$  является разрывным, кусочно-линейным, распадающимся на преобразования  $T_1 T_2^n$ ,  $T_1 T_2^{n+1}$ , ...,  $T_1 T_2^{n+m}$ . С помощью соответствующей диаграммы Ламерей нетрудно убедиться в том, что  $Q$  не может иметь устойчивых неподвижных точек, отличных от вышеуказанных точек  $x_{1n}^*$ .

Та часть  $\Lambda_{26}$ , где преобразование  $P$  не имеет устойчивых неподвижных точек, соответствует непериодическим, устойчивым по Пуас-

сому движениям изображающей точки, не выходящим из интервала  $b \leq x \leq T_1 b$ . Если преобразование  $\Pi$  имеет два устойчивых цикла, то интервал  $(T_1^{-1} x_2^*, x_2^*)$  разбивается сепаратрисами, приходящими в точку разрыва непрерывности преобразования, на области притяжения этих устойчивых циклов. Наконец, в том случае, если  $\Pi$  имеет лишь один устойчивый цикл, весь интервал  $(T_1^{-1} x_2^*, x_2^*)$ , за исключением множества меры нуль, является областью притяжения данного устойчивого цикла. Действительно, интервал  $(a, T_2^{-n} 0)$  целиком принадлежит области притяжения этого цикла, а все точки интервала  $(T_2^{-n} a, T_1 b)$ , за исключением точек множества меры нуль, через некоторое число итераций попадают, как это будет сейчас показано, в интервал  $(a, T_2^{-n} 0)$ .

Обозначим через  $A_0$  множество точек интервалов

$$\sum_{j=n+1}^{n+m-1} T_2^{-j} T_1^{-1}(a, T_2^{-n} 0) + (T_2^{-n-m} T_1^{-1} T_2^{-n} 0, T_1 b),$$

через  $A_1$  — множество точек  $\sum_{n+1}^{n+m} T_2^{-j} T_1^{-1} A_0, \dots$ , через  $A_i$  — множество точек  $\sum_{n+1}^{n+m} T_2^{-j} T_1^{-1} A_{i-1}, \dots$ , а через  $\alpha_i$  — меру множества  $A_i$ . Аналогично

тому, как было сделано выше, можно показать, что  $A_i$  и  $A_j$  не имеют общих точек, если  $i \neq j$ . Мы должны убедиться в том, что множество  $\sum_0^n A_i$  отличается от множества точек интервала  $(T_2^{-n} 0, T_1 b)$  лишь на

множество меры нуль. Мера множества  $\sum_0^n A_i$  равна  $\sum_0^\infty \alpha_i = [1 + \lambda_2^{-n} \lambda_1^{-1} \times$

$$\times (1 - \lambda_2^{-m}) (\lambda_2 - 1)^{-1}]^{-1} \alpha_0, \quad \text{а } \alpha_0 = \sum_{j=n+1}^{n+m-1} |\lambda_1|^{-1} \lambda_2^{-j} (T_2^{-n} 0 - a) + T_1 b -$$

$- T_2^{-n-m} T_1^{-1} T_2^{-n} 0$ ; после несложных выкладок получаем, что  $\sum_0^\infty \alpha_i =$

$= T_1 b - T_2^{-n} 0$ , что и доказывает высказанное утверждение. После этого становится очевидным, что весь интервал  $(T_1^{-1} x_2^*, x_2^*)$ , за исключением точек множества меры нуль, является областью притяжения устойчивого цикла.

Рассмотрим теперь область  $\Lambda_{2B}$ . Отметим сначала, что правая граничная поверхность области существования неподвижной точки  $x_2^*$  пересекается с граничной поверхностью области  $\Lambda_{2B}$ , для которой  $x_2^* = T_1 b$ , вдоль линии

$$\Delta =: (1 - \lambda_2^{-n}) (\lambda_2 - 1)^{-1}, \quad \lambda_1 \lambda_2^n + (\lambda_2 - 1)^{-1} = 0.$$

Эта линия находится ниже поверхности  $\lambda_1 = -\lambda_2^{-n-1}$ , а при  $\lambda_2 > 2$  выше поверхности  $\lambda_1 = -\lambda_2^{-n}$ . Следовательно, при  $\lambda_2 > 2$  в  $\Lambda_{2B}$  может существовать единственная для каждой точки  $(\lambda_2, \Delta, \lambda_1)$  устойчивая неподвижная точка  $x_{1n}^*$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). В случае наличия этого устойчивой неподвижной точки преобразование  $\Pi$  имеет устойчивый  $(n+1)$ -членный цикл и интервал  $(T_1^{-1} x_2^*, x_2^*)$  разбивается сепаратрисами, при-

ходящими к точке разрыва непрерывности преобразования  $\Pi$ , на области притяжения этого устойчивого цикла и бесконечности. В случае отсутствия устойчивых неподвижных точек у преобразования  $\Pi$  весь интервал  $(T_1^{-1}x_2^*, x_2^*)$ , за исключением точек множества меры нуль, является частью области притяжения бесконечности (если  $T_2^{-n}T_1^{-1}x_2^* > a > T_2^{1-n}0$ ). Доказательство этого проводится аналогично приведенным выше доказательствам подобных же утверждений. Если же преобразование  $\Pi$  имеет лишь неустойчивые неподвижные точки и  $T_2^{-n}T_1^{-1}x_2^* < a < T_2^{-1}0$ , то интервал  $(T_1^{-1}x_2^*, x_2^*)$ , за исключением некоторого точечного множества  $M$ , является частью области притяжения бесконечности, но мера множества  $M$  здесь неизвестна.

Таким образом, в этом случае преобразование  $\Pi$  при  $(\lambda_2, \Delta, \lambda_1) \in \Lambda_{2\delta}$  может иметь один или два устойчивых цикла или может устойчивых циклов не иметь, но при этом изображающая точка может совершать непериодические устойчивые по Пуассону движения. Если  $(\lambda_2, \Delta, \lambda_1) \in \Lambda_{2a}$ , то все движения уводят изображающую точку в бесконечность. В  $\Lambda_{2b}$  выделены области существования единственного для каждой точки  $(\lambda_2, \Delta, \lambda_1)$  устойчивого цикла преобразования  $\Pi$ , а также области, где все движения, за исключением множества неустойчивых циклов и непериодических устойчивых по Пуассону движений, уводят изображающую точку в бесконечность (рис. 3).

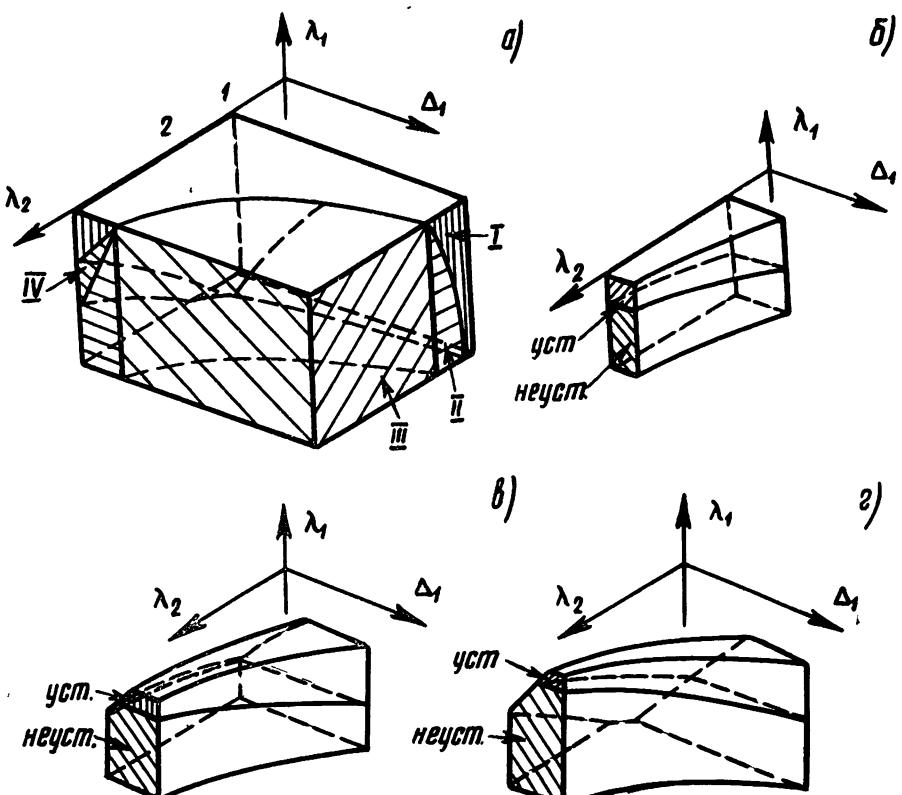


Рис. 3. а) I, II, III — области  $\Lambda_{2b}, \Lambda_{23}, \Lambda_{2a}$ ; IV — часть  $\Lambda_{2b}$ , где расположены области существования устойчивых циклов; б), в), г) — области существования неподвижных точек преобразований  $T_1T_2, T_1T_2^2, T_1T_2^3$

3.  $\lambda_1 > 1$ ,  $\lambda_2 > 1$ . В этой области преобразование  $\Pi$  имеет две простые неустойчивые неподвижные точки  $x_1^* = -a(\lambda_1 - 1)^{-1}$  и  $x_2^* = -b(\lambda_2 - 1)^{-1}$ . Устойчивых неподвижных точек преобразование  $\Pi$  иметь не может.

Если  $a \leq x_2^*$  и  $b \geq x_1^*$  одновременно, что имеет место в области  $\lambda_1 - 1 \leq \Delta \leq (\lambda_2 - 1)^{-1}$ , то изображающая точка не сможет выйти из интервала  $x_1^* \leq x \leq x_2^*$ , совершая непериодические устойчивые по Пуассону движения. Если же изображающая точка начнет движение из точки, не принадлежащей интервалу  $(x_1^*, x_2^*)$ , то она в своем последующем движении уйдет в бесконечность.

Если  $a > x_2^*$  и  $b < x_1^*$ , то нетрудно показать, как это не раз делалось выше, что интервал  $(x_1^*, x_2^*)$ , за исключением точек множества меры нуль, является частью области притяжения бесконечности. Тот же результат получится, если  $a \leq x_2^*$ ,  $b < x_1^*$  и  $T_2^{-n} 0 < a < T_2^{-n-1} x_1^*$  и если  $a > x_2^*$ ,  $b \geq x_1^*$  и  $T_1^{-n-1} \times x_2^* < b < T_1^{-n} 0$ . Если же  $a \leq x_2^*$ ,  $b < x_2^*$  и  $T_2^{-n} 0 > a > T_2^{-n} x_1^*$  и если  $a > x_2^*$ ,  $b \geq x_1^*$

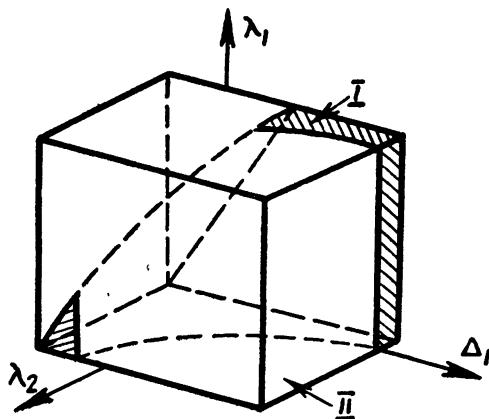
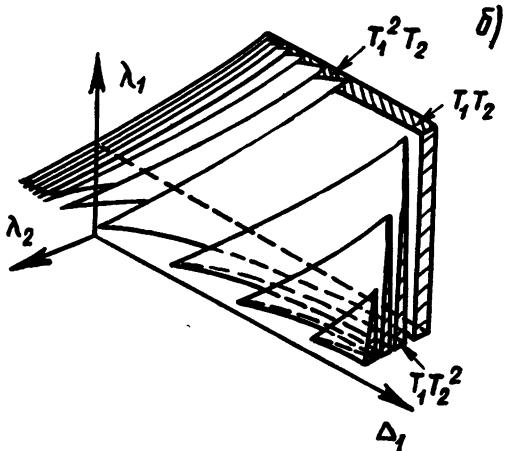
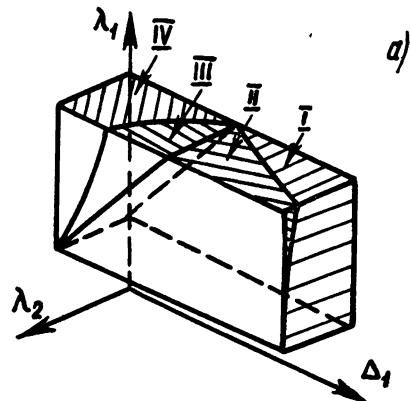


Рис. 4.1 — область существования ограниченных непериодических устойчивых по Пуассону движений,  $\Pi$  — область отсутствия ограниченных движений.

и  $T_1^{-n} x_2^* > b > T_1^{-n} 0$ , то частью области притяжения бесконечности является интервал  $(x_1^*, x_2^*)$ , за исключением точек множества, мера которого неизвестна. Пространство параметров для данного случая изображено на рис. 4.

Для случаев 4 и 5 пространства параметров изображены соответственно на рис. 5 и 6.

Рис. 5 а) I, II, III, IV — области, соответствующие областям  $\Lambda^*$ ,  $\Lambda_{16}^*$ ,  $\Lambda_{1b}$ ,  $\Lambda_{1a}$  случая 1; б) — области существования устойчивых неподвижных точек первого класса сложности.



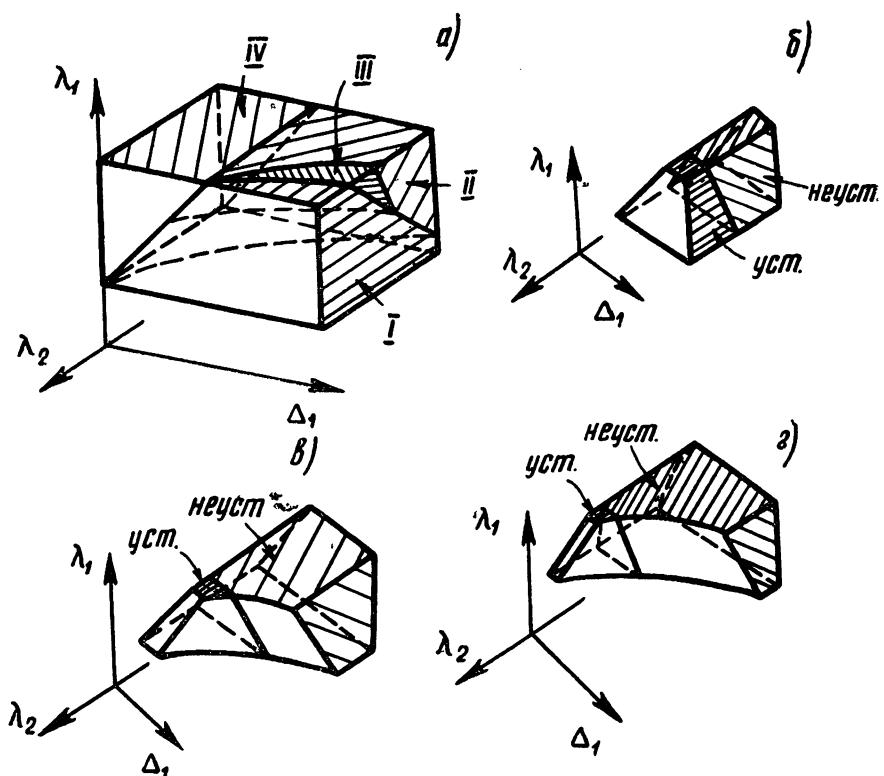


Рис. 6. а) I, II, III, IV — области, соответствующие областям  $\Lambda_{26}$ ,  $\Lambda_{2B}$ ,  $\Lambda_{2a}$ ,  $\Lambda_{2B}$  случая 2; б), в), г) — области существования неподвижных точек преобразований  $T_1 T_2$ ,  $T_1^2 T_2$ ,  $T_1^3 T_2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. А. Витт, ЖТФ, 6, 1459 (1936)
- 2 А. А. Андронов, Г. В. Аронович, Инж. сб. ин-та механики АН СССР, 20, 3 (1954)
- 3 А. С. Алексеев, Труды ГИФТИ и радиофака ГГУ, 35, 105 (1956)
- 4 Н. А. Фуфаев, Сб. памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 1955, стр. 334.
- 5 Л. В. Беспалова, Изв. АН СССР, сер. техн., 5, 3 (1957)
- 6 А. С. Алексеев, Н. А. Железцов, И. М. Клибанов, Труды ГИФТИ и радиофака ГГУ, 30, 206 (1956)
- 7 Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав. Радиофизика, 2, 942 (1959)
- 8 Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав. Радиофизика, 1, 2, 95 (1958).
- 9 А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
27 ноября 1959 г.

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДВУХКАСКАДНОЙ РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

C. D. Киягин

В настоящей работе метод исследования устойчивости нелинейного состояния равновесия, предложенный в [6] для случая релейной системы с одним реле, применяется к двухкаскадной релейной системе. В основе решения задачи лежит сведение к точечному преобразованию и использование теоремы об исследовании устойчивости в критическом случае, когда все корни характеристического уравнения равны по модулю единице.

### 1. ПОСТАНОВКА И СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К ТОЧЕЧНОМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ

Рассмотрим двухкаскадную релейную систему, представленную на рис. 1, где

$$K_1(p) = \frac{A_1(p)}{B_1(p)} = \frac{a'_0 p^{m_1} + a'_1 p^{m_1-1} + \dots + a'_{m_1}}{p^{n_1} + b'_1 p^{n_1-1} + \dots + b'_{n_1}} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{c_{i1}}{p + \lambda_{i1}},$$

$$K_2(p) = \frac{A_2(p)}{B_2(p)} = \frac{a''_0 p^{m_2} + a''_1 p^{m_2-1} + \dots + a''_{m_2}}{p^{n_2} + b''_1 p^{n_2-1} + \dots + b''_{n_2}} = \sum_{i=1}^{n_2} \frac{c_{i2}}{p + \lambda_{i2}}$$

— коэффициенты передачи линейных звеньев системы. В канонических переменных [1, 2] данная система описывается следующими дифференциальными уравнениями:

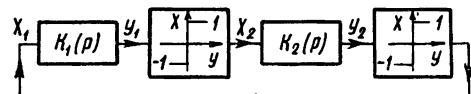


Рис. 1.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1} + \lambda_{i1} x_{i1} &= c_{i1} \operatorname{sgn} y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n_1); \\ \dot{x}_{i2} + \lambda_{i2} x_{i2} &= c_{i2} \operatorname{sgn} y_1 \quad (i = 1, 2, \dots, n_2); \\ y_1 &= \sum_{i=1}^{n_1} x_{i1}; \quad y_2 = \sum_{i=1}^{n_2} x_{i2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Дифференцируя  $y_1$  и  $y_2$  по  $t$  и подставляя  $x_{ij}$  ( $j = 1, 2$ ) из (1), получим следующие выражения для  $\dot{y}_1$  и  $\dot{y}_2$ :

$$\dot{y}_1 = - \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_{i1} x_{i1} + \operatorname{sgn} y_2 \sum_{i=1}^{n_1} c_{i1}; \tag{2}$$

$$\dot{y}_2 = - \sum_{i=1}^{n_2} \lambda_{i2} x_{i2} + \operatorname{sgn} y_1 \sum_{i=1}^{n_2} c_{i2}.$$

В окрестности состояния равновесия  $x_{ij} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n_j$ ;  $j = 1, 2$ ) знак  $\dot{y}_j$  ( $j = 1, 2$ ) определяется либо знаком  $y_j$ , если  $\sum_{i=1}^{n_j} c_{ij} \neq 0$  (что

соответствует случаю равенства единице разности между степенями знаменателя  $n_j$  и числителя  $m_j$  коэффициента передачи соответствующей линейной системы:  $n_j - m_j = 1$ , либо знаком —  $\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \lambda_{ij}$ , если  $\sum_{i=1}^{n_j} c_{ij} = 0$  (что соответствует случаю  $n_j - m_j > 1$ ). На рис. 2 представлены  $(n_1 + n_2)$ -мерные фазовые пространства системы (1) для трех различных случаев:  $n_1 - m_1 = 1$ ,  $n_2 - m_2 = 1$ ;  $n_1 - m_1 = 2$ ,  $n_2 - m_2 = 1$  и  $n_1 - m_1 = 2$ ,  $n_2 - m_2 = 2$ .

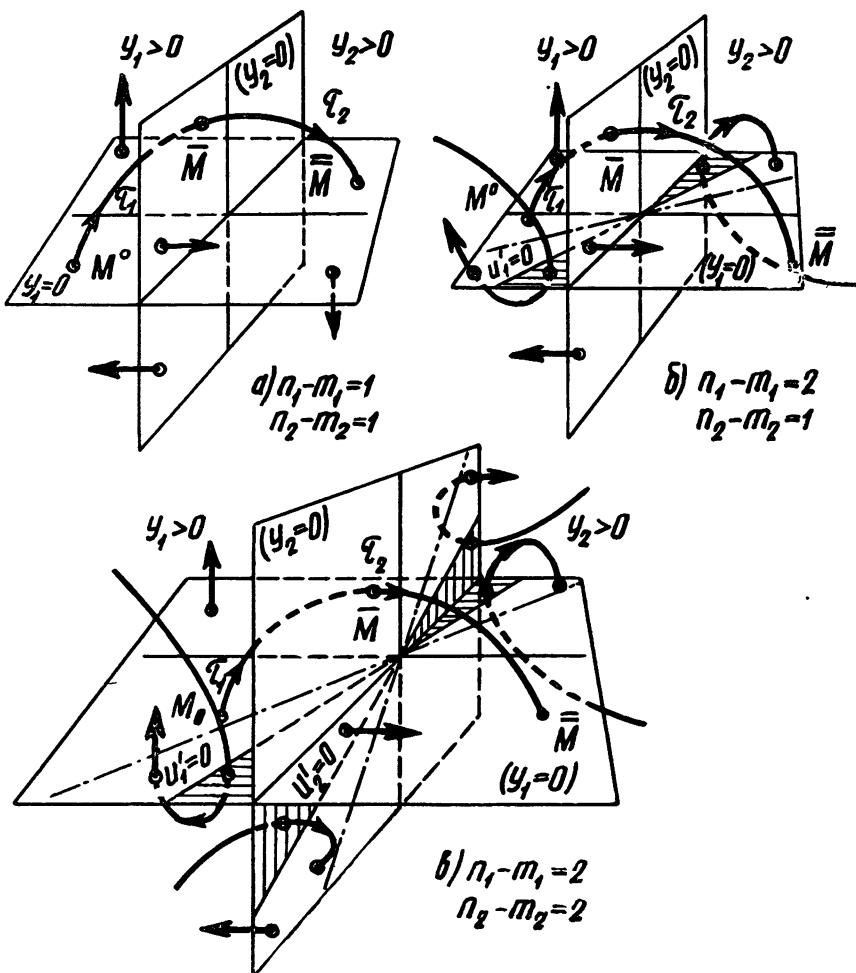


Рис. 2.

$n_1 - m_1 = 2$ . В фазовом пространстве особо выделены  $(n_1 + n_2 - 1)$ -мерные „плоскости“ переключений  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 0$  и „прямые“  $y_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$  и  $y_2 = 0$ ,  $y_2 = 0$ , которые разделяют „плоскости“ переключений на две „полуплоскости“ с разным поведением траекторий.

Для движения изображающей точки, начинаящегося, например, на полуплоскости  $y_1 = 0$ ,  $y_2 < 0$  в пространстве  $y_1 > 0$ ,  $y_2 < 0$ , логически возможны три следующих типа движений:

- 1) изображающая точка, не пересекая плоскости  $y_2 = 0$ , приходит

в точку, лежащую на той же полуплоскости  $y_1=0$ ,  $y_2<0$  (обозначим это точечное преобразование  $V$ );

2) изображающая точка приходит в точку, лежащую на „полуплоскости“  $y_2=0$ ,  $y_1>0$  (обозначим это точечное преобразование  $T$ );

3) изображающая точка, не пересекая ни полуплоскость  $y_1=0$ ,  $y_2<0$ , ни полуплоскость  $y_2=0$ ,  $y_1>0$ , уходит в бесконечность.

Рассмотрим точечное преобразование  $V$ . Оно существует только в том случае, когда  $n_1-m_1$  и  $n_2-m_2$  не равны одновременно единице. Выберем изображающую точку  $M_V^0(x_{11}^0, \dots, x_{1n_1}^0; x_{21}^0, \dots, x_{2n_2}^0)$ , лежащую в момент  $t=t_0=0$  на части полуплоскости  $y_1=0$ ,  $y_2<0$ ,  $y_1>0$ . Согласно (1), она будет двигаться в фазовом пространстве  $y_1>0$ ,  $y_2<0$  по траектории

$$\begin{aligned} x_{i1}(t) &= x_{i1}^0 e^{-\lambda_{i1} t} - \frac{c_{i1}}{\lambda_{i1}} (1 - e^{-\lambda_{i1} t}) \quad (i = 1, 2, \dots, n_1); \\ x_{i2}(t) &= x_{i2}^0 e^{-\lambda_{i2} t} + \frac{c_{i2}}{\lambda_{i2}} (1 - e^{-\lambda_{i2} t}) \quad (i = 1, 2, \dots, n_2) \end{aligned} \quad (3)$$

до тех пор, пока не достигнет точки  $\bar{M}_V(\bar{x}_{11}, \dots, \bar{x}_{1n_1}, \bar{x}_{21}, \dots, \bar{x}_{2n_2})$ , лежащей на той же полуплоскости  $y_1=0$ ,  $y_2<0$ . Из условия  $y_1=0$  находится время перехода  $\tau$  изображающей точки от точки  $M_V^0$  до  $\bar{M}_V$ , именно  $\tau$  является наименьшим положительным корнем уравнения

$$\sum_{i=1}^{n_1} x_{i1}^0 e^{-\lambda_{i1} \tau} - \frac{c_{i1}}{\lambda_{i1}} (1 - e^{-\lambda_{i1} \tau}) = 0. \quad (4)$$

Если выбрать изображающую точку  $M_V^0$  в момент  $t=t_0=0$  на части полуплоскости  $y_1=0$ ,  $y_2>0$ ,  $y_1>0$ , то, согласно (1), она будет двигаться в фазовом пространстве ( $y_1>0$ ,  $y_2>0$ ) по траектории:

$$\begin{aligned} x_{i1}(t) &= x_{i1}^0 e^{-\lambda_{i1} t} + \frac{c_{i1}}{\lambda_{i1}} (1 - e^{-\lambda_{i1} t}) \quad (i = 1, 2, \dots, n_1); \\ x_{i2}(t) &= x_{i2}^0 e^{-\lambda_{i2} t} + \frac{c_{i2}}{\lambda_{i2}} (1 - e^{-\lambda_{i2} t}) \quad (i = 1, 2, \dots, n_2), \end{aligned} \quad (5)$$

и время ее перехода из  $M_V^0$  в точку  $\bar{M}_V$ , лежащей на той же полуплоскости  $y_1=0$ ,  $y_2>0$ , определяется как наименьший положительный корень уравнения

$$\sum_{i=1}^{n_1} x_{i1}^0 e^{-\lambda_{i1} \tau} + \frac{c_{i1}}{\lambda_{i1}} (1 - e^{-\lambda_{i1} \tau}) = 0. \quad (6)$$

Сравнение (4) и (6) показывает, что не существует  $V$  для какой-либо полуплоскости (поскольку одно из значений  $\tau$  меньше нуля), а следовательно, в силу симметрии системы (1) относительно начала координат, отсутствие точечного преобразования  $VV'$ .

На основании вышеизложенного, после одного шага точечного преобразования  $V$  движение изображающей точки переходит в движение типа 2 или 3. В том случае, когда после первого шага преобразования движение переходит в движение типа 3, имеется целый „уголок“, заштрихованный на рис. 2, с вершиной в исследуемой точке, все точки которого принадлежат движению типа 3. Отсюда непосредственно следует, что состояние

равновесия такой системы неустойчиво. Точечное преобразование 2-го типа допускает многократное повторение, и исследование задачи фактически сводится к исследованию этого точечного преобразования, к рассмотрению которого мы и перейдем. Выберем изображающую точку  $M^0(x_{11}^0, \dots, x_{1n_1}^0, x_{21}^0, \dots, x_{2n_2}^0)$ , лежащую в момент  $t=t_0=0$  на полуплоскости  $y_1=0$ ,  $y_2<0$ ,  $y_1>0$ . Согласно (1), она будет двигаться в фазовом пространстве по траектории (3) до тех пор, пока не достигнет точки  $\bar{M}(\bar{x}_{11}, \bar{x}_{12}, \dots, \bar{x}_{1n_1}, \bar{x}_{21}, \dots, \bar{x}_{2n_2})$ , лежащей на „плоскости“ переключений  $y_2=0$ . Время перехода изображающей точки  $\tau_1$  от точки  $M^0$  до точки  $\bar{M}$  определяется как наименьший положительный корень уравнения

$$\sum_{i=1}^{n_2} x_{i2}^0 e^{-\lambda_{i2}\tau_1} + \frac{c_{i2}}{\lambda_{i2}} (1 - e^{-\lambda_{i2}\tau_1}) = 0. \quad (7)$$

Соотношения (3), (7) определяют преобразование  $T_1$  точек „плоскости“ переключений  $y_1=0$  в точки „плоскости“ переключений  $y_2=0$ :

$$\begin{aligned} \bar{x}_{i1} &= x_{i1}^0 e^{-\lambda_{i1}\tau_1} - \frac{c_{i1}}{\lambda_{i1}} (1 - e^{-\lambda_{i1}\tau_1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n_1); \\ \bar{x}_{i2} &= x_{i2}^0 e^{-\lambda_{i2}\tau_1} - \frac{c_{i2}}{\lambda_{i2}} (1 - e^{-\lambda_{i2}\tau_1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n_2); \\ \sum_{i=1}^{n_2} x_{i2}^0 e^{-\lambda_{i2}\tau_1} + \frac{c_{i2}}{\lambda_{i2}} (1 - e^{-\lambda_{i2}\tau_1}) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично находится преобразование  $T_2$  точек  $\bar{M}$  „плоскости“ переключений  $y_2=0$  в точки  $\bar{M}$  „плоскости“ переключений  $y_1=0$ :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}}_{i1} &= \bar{x}_{i1} e^{-\lambda_{i1}\tau_2} + \frac{c_{i1}}{\lambda_{i1}} (1 - e^{-\lambda_{i1}\tau_2}) \quad (i = 1, 2, \dots, n_1); \\ \bar{\bar{x}}_{i2} &= \bar{x}_{i2} e^{-\lambda_{i2}\tau_2} + \frac{c_{i2}}{\lambda_{i2}} (1 - e^{-\lambda_{i2}\tau_2}) \quad (i = 1, 2, \dots, n_2), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\tau_2$  — наименьший положительный корень уравнения

$$\sum_{i=1}^{n_1} \bar{x}_{i1} e^{-\lambda_{i1}\tau_2} + \frac{c_{i1}}{\lambda_{i1}} (1 - e^{-\lambda_{i1}\tau_2}) = 0. \quad (10)$$

Воспользовавшись симметрией системы (1) относительно начала координат, находим точечное преобразование  $W$  „полуплоскости“  $y_1=0$ ,  $y_2<0$ ,  $y_1>0$  в себя ( $W$  — точечное преобразование  $T_1$ ,  $T_2$ , в котором  $x_{ij}$  заменены на  $-\bar{x}_{ij}$  ( $j = 1, 2$ )):

$$\begin{aligned} -\bar{\bar{x}}_{i1} &= x_{i1}^0 e^{-\lambda_{i1}(\tau_1+\tau_2)} + \frac{c_{i1}}{\lambda_{i1}} [1 - 2e^{-\lambda_{i1}\tau_2} + e^{-\lambda_{i1}(\tau_1+\tau_2)}] \quad (i = 1, 2, \dots, n_1); \\ -\bar{\bar{x}}_{i2} &= x_{i2}^0 e^{-\lambda_{i2}(\tau_1+\tau_2)} + \frac{c_{i2}}{\lambda_{i2}} [1 - e^{-\lambda_{i2}(\tau_1+\tau_2)}] \quad (i = 1, 2, \dots, n_2), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  есть наименьшие положительные корни уравнений

$$\sum_{i=1}^{n_2} x_{i2}^0 e^{-\lambda_{i2}\tau_1} + \frac{c_{i2}}{\lambda_{i2}} (1 - e^{-\lambda_{i2}\tau_1}) = 0; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_1} \bar{x}_{ii} e^{-\lambda_{ii} \tau_2} + \frac{c_{ii}}{\lambda_{ii}} (1 - e^{-\lambda_{ii} \tau_2}) = \\ = \sum_{i=1}^{n_1} x_{ii}^0 e^{-\lambda_{ii} (\tau_1 + \tau_2)} + \frac{c_{ii}}{\lambda_{ii}} [1 - 2e^{-\lambda_{ii} \tau_2} + e^{-\lambda_{ii} (\tau_1 + \tau_2)}] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно [5, 6], для асимптотической устойчивости состояния равновесия двухкаскадной релейной системы необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

- 1) условия существования точечного преобразования  $W^*$ ;
- 2) условия устойчивости неподвижной точки  $x_{ij}=0$  ( $i=1, 2, \dots, n_j$ ;  $j=1, 2$ ) точечного преобразования  $W$ .

Записывая (12), (13) в виде

$$\varphi(\tau) = \Theta(\tau), \quad (14)$$

где

$$\varphi(\tau) = \sum_{i=1}^{n_j} \tilde{x}_{ij} e^{-\lambda_{ij} \tau_j}; \quad \Theta(\tau) = - \sum_{i=1}^{n_j} \frac{c_{ij}}{\lambda_{ij}} (1 - e^{-\lambda_{ij} \tau_j}) \quad (j=1, 2)$$

( $\sim$  над  $x$  обозначает  $\bar{x}$ , когда  $j=1$ , и  $x^0$ , когда  $j=2$ ), замечаем, что первое условие оказывается выполненным, если первый не равный нулю коэффициент разложения  $\Theta(\tau)$  в ряд по  $\tau$  имеет тот же знак, что и  $\sum_{i=1}^{n_j} \tilde{x}_{ij} = \tilde{y}_j$ . Следовательно, первый отличный от нуля коэффициент ряда

$$\Theta_1(\tau_1) = -\tau_1 d_2^0 + \frac{\tau_1^2}{2} d'_2 + \dots + (-1)^{k+1} \frac{\tau_1^{k+1}}{(k+1)!} d_2^k + \dots \quad (15)$$

отрицателен; первый не равный нулю коэффициент ряда

$$\Theta_2(\tau_2) = -\tau_2 d_1^0 + \frac{\tau_2^2}{2} d'_1 + \dots + (-1)^{k+1} \frac{\tau_2^{k+1}}{(k+1)!} d_1^k + \dots \quad (16)$$

положителен (здесь для сокращения записи введены обозначения  $d_1^k = \sum_{i=1}^{n_1} c_{ii} \lambda_{ii}^k$ ;  $d_2^k = \sum_{i=1}^{n_2} c_{ii} \lambda_{ii}^k$ ).

В дальнейшем исследование устойчивости неподвижной точки  $x_{ij}=0$  ( $i=1, 2, \dots, n_j$ ;  $j=1, 2$ ) точечного преобразования  $W$  в зависимости от разности степеней числителя и знаменателя коэффициентов передачи соответствующих линейных систем, а именно—в случаях а)  $n_1 - m_1 = 1$ ,  $n_2 - m_2 = 1$ , б)  $n_1 - m_1 = 2$ ,  $n_2 - m_2 = 1$ , в)  $n_1 - m_1 = 2$ ,  $n_2 - m_2 = 2$ , будут проводиться отдельно.

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

а)  $n_1 - m_1 = 1$ ,  $n_2 - m_2 = 1$  ( $d_1^0 < 0$ ,  $d_2^0 > 0$ ). Разлагая правые части (11)–(13) в ряды по  $\tau$ , получим следующие формулы для точечного преобразования  $W$  в окрестности неподвижной точки  $x_{ij}=0$  ( $i=1, 2, \dots, n_j$ ;  $j=1, 2$ ):

\* В окрестности неподвижной точки  $x_{ij}=0$  ( $i = 1, 2, \dots, n_j$ ;  $j = 1, 2$ ) точечного преобразования (11) положительные корни уравнений (12), (13) должны стремиться к нулю при приближении точки  $M(x_{11}, \dots, x_{1n_1}, x_{21}, \dots, x_{2n_2})$  к состоянию равновесия.

$$\begin{aligned}
 -\bar{\bar{x}}_{ii} &= x_{ii}^0 \left\{ 1 - \lambda_{ii} (\tau_1 + \tau_2) + \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{2} \lambda_{ii}^2 + \dots \right\} + \\
 &+ \frac{c_{ii}}{\lambda_{ii}} \left\{ -\lambda_{ii} (\tau_1 + \tau_2) + \dots - 2 \left( -\lambda_{ii} \tau_2 + \frac{\tau_2^2}{2} \lambda_{ii}^2 + \dots \right) \right\} \\
 &\quad (i = 1, 2, \dots, n_1); \\
 -\bar{\bar{x}}_{i2} &= x_{i2}^0 \left\{ 1 - \lambda_{i2} (\tau_1 + \tau_2) + \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{2} \lambda_{i2}^2 + \dots \right\} + \\
 &+ \frac{c_{i2}}{\lambda_{i2}} \left\{ \lambda_{i2} (\tau_1 + \tau_2) - \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{2} \lambda_{i2}^2 + \dots \right\} (i = 1, 2, \dots, n_2),
 \end{aligned} \tag{11a}$$

где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n_2} x_{i2}^0 \left( 1 - \lambda_{i2} \tau_1 + \frac{\tau_1^2}{2} \lambda_{i2}^2 + \dots \right) + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{c_{i2}}{\lambda_{i2}} \left( \lambda_{i2} \tau_1 - \frac{\tau_1^2}{2} \lambda_{i2}^2 + \dots \right) &= 0; \tag{12a} \\
 \sum_{i=1}^{n_1} x_{ii}^0 \left\{ 1 - \lambda_{ii} (\tau_1 + \tau_2) + \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{2} \lambda_{ii}^2 + \dots \right\} + \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_1} \frac{c_{ii}}{\lambda_{ii}} \left\{ -\lambda_{ii} (\tau_1 + \tau_2) + \dots - 2 \left( -\lambda_{ii} \tau_2 + \frac{\tau_2^2}{2} \lambda_{ii}^2 + \dots \right) \right\} = 0. \tag{13a}
 \end{aligned}$$

В (11a)–(13a) многоточие, как обычно, означает невыписанные члены более высокого порядка малости.

Для дальнейшего удобно перейти к новым переменным

$$u_1^s = \sum_{i=1}^{n_1} x_{ii} \lambda_{ii}^s; \quad u_2^s = \sum_{i=1}^{n_2} x_{i2} \lambda_{i2}^s (s = 1, 2, \dots, n_1 - 1; s_1 = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1).$$

Умножая первую группу уравнений на  $\lambda_{ii}^s$ , вторую группу — на  $\lambda_{i2}^s$  и затем почленно складывая каждую группу, перепишем (11a)–(13a) в новых переменных:

$$\begin{aligned}
 -\bar{\bar{u}}_1^s &= u_1^s - (\tau_1 + \tau_2) u_1^{s+1} + \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{2} u_1^{s+2} + \dots \\
 &\dots + (\tau_2 - \tau_1) d_1^s + \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{2} d_1^{s+1} - \tau_2^2 d_1^{s+2} + \dots \quad (s = 1, 2, \dots, n_1 - 1);
 \end{aligned} \tag{11б}$$

$$-\bar{\bar{u}}_2^s = u_2^s - (\tau_1 + \tau_2) u_2^{s+1} + \dots + (\tau_1 + \tau_2) d_2^s - \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{2} d_2^{s+1} + \dots \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1); \tag{12б}$$

$$u_2^0 - \tau_1 u_2' + \frac{\tau_1^2}{2} u_2^2 + \dots + \tau_1 d_2^0 - \frac{\tau_1^2}{2} d_2' + \dots = 0; \tag{12б}$$

$$\begin{aligned}
 -(\tau_1 + \tau_2) u_1' + \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{2} u_1^2 + \dots + (\tau_2 - \tau_1) d_1^0 + \\
 + \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{2} d_1' - \tau_2^2 d_1' + \dots = 0.
 \end{aligned} \tag{13б}$$

Как и следовало ожидать, обычный метод исследования устойчивости неподвижной точки

$$u_1^s = u_2^{s_1} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} s = 1, 2, \dots, n_1 - 1 \\ s' = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1 \end{array} \right)$$

не приводит к цели, поскольку все корни характеристического уравнения оказываются равными по модулю единице. Поэтому, действуя аналогично [6], подставим

$$\tau_1 = -\frac{u_2^0}{d_2^0} - \frac{u_2^0 u_2'}{(d_2^0)^2} + \frac{(u_2^0)^2 d_2'}{2(d_2^0)^3} + \dots; \quad (17)$$

$$\tau_2 = -\frac{u_2^0}{d_0^2} - \frac{u_2^0 u_2'}{(d_2^0)^2} + \frac{(u_2^0)^2}{(d_2^0)^2} \left( \frac{d_2'}{2d_2^0} - \frac{d_1'}{d_1^0} \right) - \frac{2u_1' u_2^0}{d_1^0 d_2^0} + \dots; \quad (18)$$

$$\tau_1 + \tau_2 = -\frac{2u_2^0}{d_2^0} - \frac{2u_2^0 u_2'}{(d_2^0)^2} - \frac{2u_1' u_2^0}{d_1^0 d_2^0} + \frac{(u_2^0)^2}{(d_2^0)^2} \left( \frac{d_2'}{d_2^0} - \frac{d_1'}{d_1^0} \right) + \dots; \quad (19)$$

$$\tau_1 - \tau_3 = \frac{2u_2^0 u_1'}{d_1^0 d_2^0} + \frac{(u_2^0)^2 d_1'}{(d_2^0)^2 d_1^0} + \dots, \quad (20)$$

найденные из (12б), (13б), в соотношение (11б). Тогда мы получим следующие формулы для точечного преобразования  $W$ :

$$\bar{\bar{u}}_1' = -u_1' - \frac{2u_2^0 u_1^2}{d_2^0} + \frac{2u_2^0 u_1' d_1'}{d_2^0 d_1^0} + \frac{(u_2^0)^2 (d_1')^2}{(d_2^0)^2 d_1^0} - \frac{(u_2^0)^2 d_1^2}{(d_2^0)^2} + \dots;$$

$$\bar{u}_1^{n_1-1} = -u_1^{n_1-1} - \frac{2u_0^0 u_1^{n_1}}{d_1^0} + \frac{2u_0^0 u_1' d_1^{n_1-1}}{(d_1^0)^2 d_1^0} + \frac{(u_2^0)^2 d_1' d_1^{n_1-1}}{(d_1^0)^2 d_1^0} - \frac{(u_2^0)^2 d_1^{n_1}}{(d_1^0)^2} + \dots;$$

$$\bar{\bar{u}}_2^0 = \hat{u}_2 + \frac{2u_2^0 u_1'}{d_1^0} + \frac{(u_2^0)^2}{d_2^0} \left( \frac{d_2'}{d_2^0} + \frac{d_1'}{d_1^0} \right) + \dots; \quad (21)$$

$$\bar{\bar{u}}_2' = -u_2' + \frac{2u_2^0 d_2'}{d_2^0} - \frac{2u_2^0 u_2^2}{d_2^0} + \frac{2u_2^0 u_2' d_2'}{(d_2^0)^2} + \frac{2u_2^0 u_1' d_2'}{d_2^0 d_1^0} -$$

$$-\frac{(u_2^0)^2 d'_2}{(d_2^0)^2} \left( \frac{d'_2}{d_2^0} - \frac{d'_1}{d_1^0} \right) + \frac{2(u_2^0)^2 d_2^2}{(d_2^0)^2} + \dots$$

$$\bar{\bar{u}}_2^{n_2-1} = -u_2^{n_2-1} + \frac{2u_2^0 d_2^{n_2-1}}{d_2^0} - \frac{2u_2^0 u_2^{n_2}}{d_2^0} + \frac{2u_2^0 u_2' d_2^{n_2-1}}{(d_2^0)^2} +$$

$$+ \frac{2u_2^0 u_1' d_2^{n_2-1}}{d_2^0 d_1^0} - \frac{(u_2^0)^2 d_2^{n_2-1}}{(d_2^0)^2} \left( \frac{d_2'}{d_2^0} - \frac{d_1'}{d_1^0} \right) + \frac{2(u_2^0) d_2^{n_2}}{(d_2^0)^2} + \dots$$

Составим точечное преобразование  $W^2 = WW$ :

$$u_1'^* = u_1' + \frac{4u_2^0 u_1^2}{d_2^0} - \frac{4u_2^0 u_1' d_1'}{d_2^0 d_1^0} + \dots ;$$

$$u_1^{n_i-1*} = u_1^{n_i-1} + \frac{4u_2^0 u_1^{n_i}}{d_2^0} - \frac{4u_2^0 u_1' d_1^{n_i-1}}{d_2^0 d_1^0} + \dots$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{0*} &= u_2^0 + \frac{2(u_2^0)^2}{d_2^0} \left( \frac{d'_2}{d_2^0} + \frac{d'_1}{d_1^0} \right) + \dots; \\
 u_2'^* &= u_2' + \frac{4u_2^0 u_2^2}{d_2^0} - \frac{4u_2^0 u_2' d_2'}{(d_2^0)^2} + \frac{2(u_2^0)^2 d_2'}{(d_2^0)^2} \left( \frac{d'_2}{d_2^0} + \frac{d'_1}{d_1^0} \right) - \\
 &\quad - \frac{4(u_2^0)^2 d_2^2}{(d_2^0)^2} + \frac{4(u_2^0)^2 (d'_1)^2}{(d_2^0)^3} + \dots;
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{n_2-1*} &= u_2^{n_2-1} + \frac{4u_2^0 u_2^{n_2}}{d_2^0} - \frac{4u_2^0 u_2' d_2^{n_2-1}}{(d_2^0)^2} + \frac{2(u_2^0)^2 d_2^{n_2-1}}{(d_2^0)^2} \left( \frac{d'_2}{d_2^0} + \frac{d'_1}{d_1^0} \right) - \\
 &\quad - \frac{4(u_2^0)^2 d_2^{n_2}}{(d_2^0)^2} + \frac{4(u_2^0)^2 d_2' d_2^{n_2-1}}{(d_2^0)^3} + \dots.
 \end{aligned}$$

Согласно § 8 работы [5], неподвижная точка точечного преобразования  $W^2$  (а, следовательно, и  $W$ ) устойчива или неустойчива в зависимости от того, устойчиво или неустойчиво (в линейном приближении) состояние равновесия системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{du'_1}{dt} &= \frac{4u_2^0 u_1^2}{2d_2^0(\tau_1+\tau_2)} - \frac{4u_2^0 u_1' d'_1}{2d_2^0 d_1^0 (\tau_1+\tau_2)} + \dots; \\
 \frac{du_1^{n_1-1}}{dt} &= \frac{4u_2^0 u_1^{n_1}}{2d_2^0(\tau_1+\tau_2)} - \frac{4u_2^0 u_1' d_1^{n_1-1}}{2d_2^0 d_1^0 (\tau_1+\tau_2)} + \dots; \\
 \frac{du_2^0}{dt} &= \frac{2(u_2^0)^2}{2d_2^0(\tau_1+\tau_2)} \left( \frac{d'_2}{d_2^0} + \frac{d'_1}{d_1^0} \right) + \dots; \\
 \frac{du_2^{n_2-1}}{dt} &= \frac{4u_2^0 u_2^{n_2}}{2d_2^0(\tau_1+\tau_2)} - \frac{4u_2^0 u_2' d_2^{n_2-1}}{2(d_2^0)^2 (\tau_1+\tau_2)} + \frac{2(u_2^0)^2 d_2^{n_2-1}}{2(d_2^0)^2 (\tau_1+\tau_2)} \left( \frac{d'_2}{d_2^0} + \frac{d'_1}{d_1^0} \right) - \\
 &\quad - \frac{4(u_2^0)^2 d_2^2}{2(d_2^0)^2 (\tau_1+\tau_2)} + \frac{4(u_2^0)^2 d_2' d_2^{n_2-1}}{2(d_2^0)^3 (\tau_1+\tau_2)} + \dots.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Эта система получена из формул (22) точечного преобразования  $W^2$  заменой  $(u_i^{s*} - u_i^s)/2(\tau_1 + \tau_2)$  на  $du_i^s/dt$ .

Устойчивость состояния равновесия

$$u_1^s = u_2^{s_1} = 0 \quad \begin{cases} s = 1, 2, \dots, n_1 - 1 \\ s_1 = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1 \end{cases}$$

системы (23) исследуется обычным образом. Именно, замечая, что после подстановки, согласно (19),

$$\frac{2u_2^0}{d_2^0(\tau_1 + \tau_2)} = -1 + \dots \tag{24}$$

в систему уравнений (23) она в первом приближении распадается на две независимых системы и что, кроме того, между переменными  $u_j^s$  ( $j = 1, 2$ ) имеют место соотношения [6]

$$(-1)^{n_1} b'_{n_1} u_1^0 + (-1)^{n_1-1} b'_{n_1-1} u'_1 + \dots - b'_1 u_1^{n_1-1} + u_1^{n_1} = 0; \quad (25)$$

$$(-1)^{n_2} b^2_{n_2} u_2^0 + (-1)^{n_2-1} b^2_{n_2-1} u'_2 + \dots - b^2_2 u_2^{n_2-1} + u_2^{n_2} = 0, \quad (26)$$

запишем характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений (23) в виде:

$$\Delta(p) = \Delta_1(p) \Delta_2(p) \left[ p + \frac{1}{2} (d'_2/d_2^0 + d'_1/d_1^0) \right] = 0, \quad (27)$$

где

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} (-1)^{n_i-1} b^i_{n_i-1} & (-1)^{n_i-2} b^i_{n_i-2} & (-1)^{n_i-3} b^i_{n_i-3} & \dots & -b^i_1 & 1 \\ p - \frac{d'_i}{d_i^0} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{d_i^2}{d_i^0} & p & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{d_i^{n_i-1}}{d_i^0} & 0 & 0 & \dots & p & 1 \end{vmatrix}.$$

Определитель  $\Delta_i$  совпадает с числителем коэффициента передачи соответствующей линейной системы (см. приложение), а условие

$$d'_2/d_2^0 + d'_1/d_1^0 > 0 \quad (28)$$

сводится к условию  $a_1 - a_0 b_1 > 0$ , где  $a_1, a_0, b_1$  — соответствующие коэффициенты числителя и знаменателя коэффициента передачи  $K(p) = K_1(p) K_2(p)$ . Действительно,

$$K_1(p) K_2(p) = \frac{a_0 p^{n_1+n_2-2} + a_1 p^{n_1+n_2-3} + \dots + a_{n_1+n_2-2}}{p^{n_1+n_2} + b_1 p^{n_1+n_2-1} + \dots + b_{n_1+n_2}} = \frac{A_1(p) A_2(p)}{B_1(p) B_2(p)} =$$

$$= \frac{\{d_1^0 p^{n_1-1} + (d_1^0 b_1' - d_1') p^{n_1-2} + \dots\} [d_2^0 p^{n_2-1} + p^{n_2-2} (d_2^0 b_2^2 - d_2')] + \dots}{[p^{n_1} + b_1' p^{n_1-1} + \dots + b_{n_1}'] [p^{n_2} + b_2^2 p^{n_2-1} + \dots + b_{n_2}^2]},$$

$$a_0 = d_1^0 d_2^0; \quad b_1 = b_1' + b_1^2; \quad a_1 = d_1^0 (d_2^0 b_2^2 - d_2') + d_2^0 (d_1^0 b_1' - d_1');$$

$$a_1 - a_0 b_1 = d_1^0 (d_2^0 b_2^2 - d_2') + d_2^0 (d_1^0 b_1' - d_1') - d_1^0 d_2^0 (b_1' + b_1^2) =$$

$$= -d_1^0 d_2^0 \left( \frac{d_2'}{d_2^0} + \frac{d_1'}{d_1^0} \right),$$

где в соответствии с (15), (16)

$$-a_0 = -d_1^0 d_2^0 > 0. \quad (29)$$

Согласно сказанному ранее, в случае  $n_1 - m_1 = 1, n_2 - m_2 = 1$  состояние равновесия двухкаскадной релейной системы асимптотически устойчиво, если все корни числителя коэффициента передачи  $K(p) = K_1(p) K_2(p)$  лежат в левой полуплоскости и, кроме того, выполнены следующие неравенства для коэффициентов  $K(p) = K_1(p) K_2(p)$ :  $a_0 < 0; a_1 - a_0 b_1 > 0$ .

б)  $n_1 - m_1 = 2$ ;  $n_2 - m_2 = 1$  ( $d_1^0 = 0$ ;  $d'_1 > 0$ ;  $d_2^0 > 0$ ). Запишем уравнения (11а)–(13а) в новых переменных:

$$-\bar{\bar{u}}'_1 = u'_1 + (\tau_2 - \tau_1) d'_1 + \dots;$$

• • • • • • • • • • • • •

$$-\bar{\bar{u}}_1^{n_1-1} = u_1^{n_1-1} + (\tau_2 - \tau_1) d_1^{n_1-1} + \dots; \quad (30)$$

$$-\bar{\bar{u}}_2^0 = u_2^0 + (\tau_1 + \tau_2) d_2^0 + \dots;$$

• • • • • • • • • • • • • •

$$= \overline{\overline{u}}_2^{n_2-1} = u_2^{n_2-1} + (\tau_1 + \tau_2) d_2^{n_2-1} + \dots;$$

$$u_2^0 + \tau_1 d_2^0 + \dots = 0;$$

$$-(\tau_1 + \tau_2) u'_1 + \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{2} u_1^2 + \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{2} d'_1 - \tau_2^2 d'_1 + \dots = 0. \quad (32)$$

Из (31) и (32) находим, что

$$\tau_1 - \tau_2 = \frac{2\sigma u'_1}{(2-\sigma)d'_1} + \frac{4u_2^0(\sigma-1)}{(2-\sigma)d_2^0} + \dots ; \quad (33)$$

$$\tau_1 + \tau_2 = -\frac{2\sigma u'_1}{(2-\sigma)d'_1} - \frac{4u^0_2}{(2-\sigma)d^0_2} + \dots, \quad (34)$$

где  $\sigma = (\tau_1 + \tau_2)/\tau_2 > 1$ .

Заметим, что поскольку  $\dot{y}_1 > 0$  (или  $u'_1 < 0$ ,  $u_2^0 < 0$ ), неравенство  $\tau_1 + \tau_2 > 0$  имеет место только в том случае, если выполнено неравенство  $2 - \sigma > 0$  ( $\tau_2 > \tau_1$ ).

Подставляя (33), (34) в (37), придем к следующим формулам для точечного преобразования  $W$ :

$$-\bar{\bar{u}}_1' = u_1' - \frac{2\sigma u_1'}{2-\sigma} - \frac{4(\sigma-1)u_2^0 d_1'}{(2-\sigma)d_2^0} + \dots;$$

• • • • • • • • • • • • • • • • •

$$-\bar{u}_1^{n_1-1} = u_1^{n_1-1} - \frac{2\sigma u_1' d_1^{n_1-1}}{(2-\sigma) d_1'} - \frac{4(\sigma-1) u_2^0 d_1^{n_1-1}}{(2-\sigma) d_2^0} + \dots;$$

$$-\bar{\bar{u}}_2^0 = u_2^0 - \frac{2\sigma u_1' d_2^0}{(2-\sigma) d'} - \frac{4u_2^0}{2-\sigma} + \dots ;$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

$$-\bar{u}_2^{n_2-1} = u_2^{n_2-1} - \frac{2\sigma u'_1 d_2^{n_2-1}}{(2-\varsigma) d'_1} - \frac{4u_1^0 d_2^{n_2-1}}{(2-\sigma) d_2^0} + \dots,$$

характеристическое уравнение которого

$$\Delta = \begin{vmatrix} p + \frac{2 - 3\sigma}{2 - \sigma} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{4(\sigma-1)d'_1}{(2-\sigma)d_2^0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{2\sigma d_1^2}{(2-\sigma)d'_1} & p+1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{4(\sigma-1)d_1^2}{(2-\sigma)d_2^0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ -\frac{2\sigma d_1^{n_1-1}}{(2-\sigma)d'_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & p+1 & -\frac{4(\sigma-1)d_1^{n_1-1}}{(2-\sigma)d_2^0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{2\sigma d_2^0}{(2-\sigma)d'_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p - \frac{2+\sigma}{2-\sigma} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{2\sigma d'_2}{(2-\sigma)d'_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{4d'_2}{(2-\sigma)d_2^0} & p+1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ -\frac{2\sigma d_2^{n_2-1}}{(2-\sigma)d'_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{4d_2^{n_2-1}}{(2-\sigma)d_2^0} & 0 & 0 & \dots & 0 & p+1 \end{vmatrix} = 0 \quad (36)$$

имеет  $(n_1 + n_2 - 3)$ -кратный корень, равный  $-1$ ; кроме того, два оставшихся корня определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} p + \frac{2 - 3\sigma}{2 - \sigma} - \frac{4(\sigma-1)d'_1}{(2-\sigma)d_2^0} \\ -\frac{2\sigma d_2^0}{(2-\sigma)d'_1} & p - \frac{2+\sigma}{2-\sigma} \end{vmatrix} = 0. \quad (37)$$

Один корень уравнения (37) по модулю больше единицы; поэтому неподвижная точка

$$u_1^s = u_2^{s_1} = 0 \quad \begin{cases} s = 1, 2, \dots, n_1 - 1 \\ s_1 = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1 \end{cases}$$

точечного преобразования  $W$  неустойчива, а следовательно, неустойчиво и состояние равновесия рассматриваемой релейной системы.

в)  $n_1 - m_1 = 2$ ;  $n_2 - m_2 = 2$  ( $d_1^0 = d_2^0 = 0$ ;  $d'_1 > 0$ ;  $d'_2 < 0$ ). Введем новую переменную  $v = u_2^0/\tau_1$  и запишем уравнения (11а) – (13а) в виде:

$$-\bar{\bar{u}}'_1 = u'_1 + (\tau_2 - \tau_1) d'_1 + \dots;$$

...

$$-\bar{\bar{u}}_1^{n_1-1} = u_1^{n_1-1} + (\tau_2 - \tau_1) d_1^{n_1-1} + \dots;$$

$$-\bar{v} = v - \delta u'_2 - \delta \frac{\tau_1 - \tau_2}{2} d'_2 + \dots; \quad (38)$$

$$-\bar{\bar{u}}'_2 = u'_2 + (\tau_1 + \tau_2) d'_2 + \dots;$$

• • • • • • • • • • • • • •

$$-\bar{\bar{u}}_2^{n_2-1} = u_2^{n_2-1} + (\tau_1 + \tau_2) d_2^{n_2-1} + \dots;$$

$$v - u'_2 - \frac{\tau_1}{2} d'_2 + \dots = 0; \quad (39)$$

где  $\delta = (\tau_1 + \tau_2)/\tau_1$ .

Подставляя, согласно (39), (40),

$$\tau_2 - \tau_1 = - \frac{2\sigma u'_1}{(2-\sigma) d'_1} + \frac{4(\sigma-1)(v-u'_2)}{(2-\sigma) d'_2} + \dots ; \quad (41)$$

$$\tau_1 + \tau_2 = - \frac{2\sigma u'_1}{(2-\sigma) d'_1} + \frac{4(v - u'_2)}{(2-\sigma) d'_2} + \dots \quad (42)$$

в (38) (заметим, что, как и ранее, из  $\tau_1 + \tau_2 > 0$  следует  $\tau_2 > \tau_1$ ), при-  
дем к следующим формулам для преобразования  $W$ :

$$-\bar{\bar{u}}_1' = -\frac{3\sigma - 2}{2 - \sigma} u_1' + \frac{4(\sigma - 1)d_1'}{(2 - \sigma)d_2'} v - \frac{4(\sigma - 1)d_1'}{(2 - \sigma)d_2'} u_2' + \dots;$$

$$-\bar{\bar{u}}_2' = -\frac{2\sigma d_1^2}{(2-\sigma)d_1'} u_1' + \frac{4(\sigma-1)d_1^2}{(2-\sigma)d_2'} v - \frac{4(\sigma-1)d_1^2}{(2-\sigma)d_2'} + u_1^2 + \dots;$$

$$-\bar{\bar{u}}_1^{n_1-1} = -\frac{2\sigma d_1^{n_1-1}}{(2-\sigma)d_1'} u_1' + \frac{4(\sigma-1)d_1^{n_1-1}}{(2-\sigma)d_2'} v - \frac{4(\sigma-1)d_1^{n_1-1}}{(2-\sigma)d_2'} u_2' + u_1^{n_1-1} \dots,$$

$$-\bar{v} = \frac{\sigma\delta u'_1}{(2-\sigma)d'_1} + \frac{2-\sigma-2\delta}{2-\sigma} v + \frac{\sigma\delta}{2-\sigma} u'_2 + \dots ; \quad (43)$$

$$-\bar{\bar{u}}_2' = -\frac{2\sigma d_2'}{(2-\sigma)d_1'} u_1' + \frac{4v}{2-\sigma} - \frac{2+\sigma}{2-\sigma} u_2' + \dots;$$

$$-\bar{\bar{u}}_2^2 = -\frac{2\sigma d_2^2}{(2-\sigma)d'_1} u'_1 + \frac{4d_2^2 v}{(2-\sigma)d'_1} - \frac{4d_2^2 u'_2}{(2-\sigma)d'_\sigma} + u_2^2 + \dots;$$

[View Details](#) | [Edit](#) | [Delete](#)

$$-\bar{u}_2^{n_2-1} = -\frac{2\sigma d_2^{n_2-1}}{(2-\sigma)d_1'} u_1' + \frac{4d_2^{n_2-1}}{(2-\sigma)d_3'} - \frac{4d_2^{n_2-1}}{(2-\sigma)d_3'} u_2' + u_2^{n_2-1} + \dots$$

Характеристическое уравнение преобразования (43)

$$\Delta = \begin{vmatrix} p - \frac{3\sigma - 2}{2 - \sigma} & 0 & 0 \dots 0 & 0 & \frac{4(\sigma - 1) d'_1}{(2 - \sigma) d'_2} & -\frac{4(\sigma - 1) d'_1}{(2 - \sigma) d'_2} & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ -\frac{2\sigma d_1^2}{(2 - \sigma) d'_1} & p + 1 & 0 \dots 0 & 0 & \frac{4(\sigma - 1) d_1^2}{(2 - \sigma) d'_2} & -\frac{4(\sigma - 1) d_1^2}{(2 - \sigma) d'_2} & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ -\frac{2\sigma d_1^{n_1-1}}{(2 - \sigma) d'_1} & 0 & 0 \dots 0 & p + 1 & \frac{4(\sigma - 1) d_1^{n_1-1}}{(2 - \sigma) d'_2} & -\frac{4(\sigma - 1) d_1^{n_1-1}}{(2 - \sigma) d'_2} & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ \frac{\sigma \delta d'_2}{(2 - \sigma) d'_1} & 0 & 0 \dots 0 & 0 & p + \frac{2 - \sigma - 2\delta}{2 - \sigma} & \frac{\sigma \delta}{2 - \sigma} & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ -\frac{2\sigma d'_2}{(2 - \sigma) d'_1} & 0 & 0 \dots 0 & 0 & \frac{4}{2 - \sigma} & p - \frac{2 + \sigma}{2 - \sigma} & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ -\frac{2\sigma d_2^2}{(2 - \sigma) d'_1} & 0 & 0 \dots 0 & 0 & \frac{4d_2^2}{(2 - \sigma) d'_2} & -\frac{4d_2^2}{(2 - \sigma) d'_2} & p + 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ -\frac{2\sigma d_2^{n_2-1}}{(2 - \sigma) d'_1} & 0 & 0 \dots 0 & 0 & \frac{4d_2^{n_2-1}}{(2 - \sigma) d'_2} & -\frac{4d_2^{n_2-2}}{(2 - \sigma) d'_2} & 0 & 0 \dots 0 & p + 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (44)$$

имеет  $(n_1 + n_2 - 4)$ -кратный корень, равный  $-1$ ; кроме того, три корня определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} p - \frac{3\sigma - 2}{2 - \sigma} & \frac{4(\sigma - 1) d'_1}{(2 - \sigma) d''_2} & -\frac{4(\sigma - 1) d'_1}{(2 - \sigma) d'_2} \\ \frac{\delta \sigma d'_2}{(2 - \sigma) d'_1} & p + \frac{2 - \sigma - 2\delta}{2 - \sigma} & \frac{\delta \sigma}{2 - \sigma} \\ -\frac{2\sigma d'_2}{(2 - \sigma) d'_1} & \frac{4}{2 - \sigma} & p - \frac{2 + \sigma}{2 - \sigma} \end{vmatrix} = 0, \quad (45)$$

которое имеет хотя бы один корень, по модулю больший единицы, поскольку коэффициент при  $p^2$ , равный по модулю  $(5\sigma + 2\delta - 2)(2 - \sigma)^{-1}$ , больше трех. Следовательно, неподвижная точка  $v = u_1^s = u_2^s = 0$  ( $s = 1, 2, \dots, n_j - 1$ ) точечного преобразования  $W$ , а также точка  $u_1^s = u_2^s = 0$  ( $\begin{cases} s = 1, 2, \dots, n_1 - 1 \\ s = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1 \end{cases}$ ) неустойчивы, а следовательно, неустойчиво и состояние равновесия рассматриваемой релейной системы. Таким образом, состояние равновесия рассматриваемой релейной системы устойчиво, если разность числителя и знаменателя коэффициента передачи  $K(p) = K_1(p)K_2(p)$  равна двум, все корни числителя этого коэффициента передачи лежат в левой полуплоскости и, кроме того, выполнены условия  $a_0 < 0$ ,  $a_1 - a_0 b_1 > 0$ ; в остальных случаях состояние равновесия неустойчиво. Следует отметить, что полученные

условия асимптотической устойчивости состояния равновесия двухкаскадной релейной системы могут быть получены путем замены релейных элементов безынерционными усилителями с бесконечно большими коэффициентами усиления (см. [3,4]).

### Приложение

Раскрывая  $\Delta_i$  определителя (27) по первому столбцу, получаем, что

$$\Delta_i = (-1)^{n_i-1} b_{n_i-1}^i - \left( p - \frac{d'_i}{d_i^0} \right) \Delta_2 + \frac{d_i^2}{d_i^0} \Delta_3 + \dots + \frac{d_i^{n_i-1}}{d_i^0} \Delta_n, \quad (I)$$

где

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} (-1)^{n_i-k} b_{n_i-k}^i & (-1)^{n_i-k-1} b_{n_i-k-1}^i & \dots & \dots & -b_1^i & 1 \\ p & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & 1 \end{vmatrix},$$

согласно [7], определяется соотношением:

$$\Delta_k = (-1)^{n_i-k} [b_{n_i-k}^i + b_{n_i-k-1}^i p + \dots + b_1^i p^{n_i-k-1} + p^{n_i-k}]. \quad (II)$$

Подставляя (II) в (I) и сокращая на несущественный множитель  $(-1)^{n_i-1} (d_i^0)^{-1}$ , найдем, что

$$\begin{aligned} \Delta_i = & d_i^0 p^{n_i-1} + p^{n_i-2} (d_i^0 b_1^i - d'_i) + p^{n_i-3} (d_i^0 b_2^i - d'_i b_1^i + d_i^2) + \\ & + \dots + p^k (d_i^0 b_{n_i-k-1}^i - d'_i b_{n_i-k-2}^i + \dots + (-1)^{n_i-k-1} d_i^{n_i-k-1}) + \\ & + \dots + p (d_i^0 b_{n_i-2}^i - d'_i b_{n_i-3}^i + \dots + (-1)^{n_i-2} d_i^{n_i-2}) + \\ & + (d_i^0 b_{n_i-1}^i - d'_i b_{n_i-2}^i + \dots + (-1)^{n_i-1} d_i^{n_i-1}). \end{aligned} \quad (III)$$

Приведенное выражение совпадает с числителем коэффициента передачи соответствующей линейной системы, записанной в виде:

$$\begin{aligned} A_i(p) = & c_{1i} (p + \lambda_{2i}) (p + \lambda_{3i}) \dots (p + \lambda_{n_i i}) + \\ & + (p + \lambda_{1i}) c_{2i} (p + \lambda_{3i}) \dots (p + \lambda_{n_i i}) + \\ & + \dots + (p + \lambda_{1i}) (p + \lambda_{2i}) \dots (p + \lambda_{n_i-1, i}) c_{n_i i}. \end{aligned} \quad (IV)$$

В самом деле, коэффициент перед  $p^k$  в  $A_i(p)$  равен

$$\begin{aligned} a_{n_i-k}^i = & c_{1i} [\underbrace{\lambda_{1i} \lambda_{2i} \dots \lambda_{n_i-k-2, i}}_{n_i-k-1} + \underbrace{\lambda_{1i} \lambda_{2i} \dots \lambda_{n_i-k-3, i} \lambda_{n_i-k, i}}_{n_i-k-2} + \dots \\ & + \lambda_{2i} \lambda_{3i} \dots \lambda_{n_i-k-1, i} + \dots + \lambda_{k+1, i} \lambda_{k+2, i} \dots \lambda_{n_i-1, i} \lambda_{n_i, i}] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_{2i} \left[ \lambda_{1i} \lambda_{2i} \dots \lambda_{n_i - k - 2, i} + \lambda_{1i} \lambda_{2i} \dots \lambda_{n_i - k - 3, i} \lambda_{n_i - k, i} + \dots \right. \\
& \dots + \lambda_{2i} \lambda_{3i} \dots \lambda_{n_i - k - 1, i} + \dots + \lambda_{k+1, i} \lambda_{k+2, i} \dots \lambda_{n_i - 1, i} \lambda_{n_i, i} \left. \right] + \\
& + \dots + \\
& + c_{n_i^r i} \left[ \lambda_{1i} \lambda_{2i} \dots \lambda_{n_i - k - 2, i} + \lambda_{1i} \lambda_{2i} \dots \lambda_{n_i - k - 3, i} \lambda_{n_i - k, i} + \dots \right. \\
& \dots + \lambda_{2i} \lambda_{3i} \dots \lambda_{n_i - k - 1, i} + \dots + \lambda_{k+1, i} \lambda_{k+2, i} \dots \lambda_{n_i - 1, i} \lambda_{n_i, i} \left. \right],
\end{aligned}$$

где  $\wedge$  над слагаемым означает, что этот член не входит в сумму. Поэтому, добавляя указанные члены в скобках и вычитая такие же выражения, придем к следующим формулам для  $a_{n_i-k}^i$ :

$$a_{n_i-k}^i = d_i^i b_{n_i-k-1}^i - c_{i1} \lambda_{i1} \underbrace{[\lambda_{n_i-k-2,i} + \lambda_{n_i-k-3,i} \lambda_{n_i-k,i} + \dots]}_{n_i-k-2} - \dots - c_{n_i} \lambda_{n_i,i} [\dots + \lambda_{k+1,i} \dots \lambda_{n_i-1,i}] .$$

Добавляя в скобках члены до получения суммы всевозможных произведений по  $n_i - k - 2$  элементов из  $n_i$  величин  $\lambda_{1i}, \lambda_{2i} \dots \lambda_{ni}$  и т. д., окончательно получим, что

$$a_{m_i-k}^i = d_i^0 b_{n_i-k-1}^i - d_i^1 b_{n_i-k-2}^i + \dots + (-1)^{n_i-k-1} d_i^{n_i-k-1}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, М.—Л., 1951
  - 2 Ю. И. Неймарк, Труды ГИФТИ и радиофиз. ф-та ГГУ, Уч. зап., 30, 159, сер. физ., 1956.
  - 3 Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, М., 1955.
  - 4 М. В. Мееров, Синтез структур автоматического регулирования высокой точности, Физматгиз, М., 1959.
  - 5 Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 1, 1, 41 (1958)
  - 6 С. Д. Киняпин, Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, 20, 1153 (1959).
  - 7 Д. К. Фадеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, Гостехиздат, М., 1945, стр. 159—193.

# Научно-исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
22 декабря 1959 г.

## К ВОПРОСУ О СИНТЕЗЕ СМЕШАННЫХ РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫХ СХЕМ КЛАССА П

*В. И. Шестаков*

Рассматривается проблема синтеза релейно-контактных схем класса П в общем случае и определяются границы применения булевой алгебры для синтеза схем этого класса. Вводится понятие схем, разделимых на однорелейные схемы класса П, устанавливается, что для синтеза существенно неразделимых схем класса П булева алгебра недостаточна. Особенностью изложения является систематическое использование алгебры двухполюсных схем класса П, которая позволила заменить все чертежи схем их алгебраическими выражениями.

### ВВЕДЕНИЕ

С тех пор как высказанное еще в 1910 году Эренфестом предположение о возможности создания на базе алгебры логики „алгебры распределительных схем“ [1] нашло подтверждение и обоснование в работах [2–4], булева алгебра [5] получила широкое применение как в теории релейно-контактных схем, так и в теории электронных релейных и любых релейных схем и автоматов [6–8]. Однако несмотря на то, что булева алгебра является вполне адекватным математическим аппаратом для анализа, преобразования и синтеза контактных схем класса П, она оказывается недостаточной для структурного анализа и синтеза релейно-контактных схем класса П в общем случае (когда схемы этого класса, кроме контактов реле, кнопок и ключей, содержат также обмотки реле и добавочные сопротивления конечной величины). Хотя существует специальная алгебра [3,4] любых двухполюсных схем класса П, содержащая как частный случай алгебру контактных схем класса П, проблема синтеза релейно-контактных схем класса П в общем случае еще не решена. Решение этой задачи позволило бы сделать дальнейший шаг в деле математизации и автоматизации синтеза релейных схем, имеющих важное значение в современной вычислительной и управляющей технике и автоматике вообще.

В работах Рогинского [9–11] была сделана попытка решить указанную проблему путем создания теории синтеза так называемых смешанных релейно-контактных схем класса П, в которых контактные цепи могут быть соединены как параллельно, так и последовательно с обмотками реле, а сами обмотки также могут быть соединены одна с другой как последовательно, так и параллельно. Однако эта попытка не увенчалась успехом. Предложенная В. Н. Рогинским теория основывается на ошибочной идеи о возможности синтеза смешанных релейно-контактных схем посредством оперирования лишь с проводимостями или „порядками проводимости“ элементов синтезируемой схемы без явного учета других физических величин, определяющих работу реле в схеме. Кроме того, эта теория является неудовлетворительной также и в математическом отношении. Таким образом, проблема синтеза релейно-контактных схем класса П в общем случае по-прежнему остается нерешенной.

Логически первым шагом к решению этой проблемы является

выяснение тех возможностей, которые дает булева алгебра для синтеза релейно-контактных схем класса П в общем случае, и определение границ области применения этой алгебры, т. е. выявление тех типов релейно-контактных схем, для синтеза которых булева алгебра уже не является достаточной. Рассмотрение этих вопросов — задача настоящей статьи.

## 1. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ И ПОНЯТИЯ АЛГЕБРЫ ДВУХПОЛЮСНЫХ СХЕМ КЛАССА П

Основная цель, которая преследовалась при создании алгебры двухполюсных схем,—найти такие операции, с помощью которых можно было бы проводимость (или сопротивление) всякой двухполюсной схемы записывать посредством алгебраического выражения, взаимно-однозначно соответствующего строению (структуре) схемы, описываемой этим выражением. Тогда всякое преобразование двухполюсной схемы в эквивалентную ей (т. е. имеющую ту же проводимость) двухполюсную схему сводилось бы к эквивалентному преобразованию одного алгебраического выражения схемы в другое.

Это оказывается возможным только в том случае, если ограничиться двухполюсными схемами, построенными из элементарных двухполюсников посредством лишь последовательных и параллельных соединений. Такие двухполюсные схемы были названы первоначально [3,4] схемами класса А (А-схемами), но в настоящее время их обычно называют последовательно параллельными схемами или схемами класса П (П-схемами). Все остальные двухполюсные схемы называют мостиковыми схемами или схемами класса Н (Н-схемами).

Всякая П-схема может быть взаимно-однозначно представлена посредством алгебраического выражения, члены которого связаны двумя операциями—сложения и гармонического сложения. Операция гармонического сложения определяется формулой [4]

$$X \cdot Y = (X' + Y')', \quad (1)$$

где плюс служит знаком обычного сложения, а штрих—знаком инверсии, определяемой равенствами [4]

$$X' = 1/X \quad (X \neq 0, X \neq \infty); \quad 0' = \infty; \quad \infty' = 0. \quad (2)$$

Гармоническую сумму  $n$  величин  $X_1, \dots, X_k, \dots, X_n$  будем записывать символом  $\prod_{k=1}^n \cdot X_k$ , определяемым формулой:

$$\prod_{k=1}^n \cdot X_k = \left( \sum_{k=1}^n X'_k \right)',$$

где  $\sum$  — знак обычной суммы.

В случае, если, как обычно принято в алгебре П-схем, двухполюсники обозначаются символами их проводимостей, то в алгебраическом выражении П-схемы знакам сложения, т. е. плюсам, однозначно соответствуют контуры, образованные параллельным соединением двухполюсников, между символами которых стоят эти знаки. Знакам гармонического сложения, т. е. жирным точкам, в этом выражении однозначно соответствуют узлы, в которых осуществлены последовательные соединения соответствующих двухполюсников. Двухполюсники, проводимость которых может быть равна лишь нулю или бесконечности, называют [4] вырожденными двухполюсниками и обозначают ма-

лыми буквами латинского алфавита. Невырожденные и вообще любые двухполюсники обозначают большими буквами того же алфавита. Скобки в алгебраическом выражении П-схемы указывают, как и обычно, последовательность выполнения операций сложения и гармонического сложения; однако в случае, когда внутри скобок оказываются лишь гармонические суммы, скобки можно опускать. Например, выражение  $(x \cdot Y) + (x' \cdot Z)$  можно записать в следующем виде:  $x \cdot Y + x' \cdot Z$ . Это условие аналогично принятому в обычной алгебре условию: писать произведение буквенных или числовых сомножителей без скобок.

Установленное в алгебре П-схем [4] взаимно-однозначное соответствие между начертанием П-схем и написанием их алгебраических выражений позволяет производить анализ, преобразования и синтез П-схем, не прибегая к чертежам. В этом отношении алгебра П-схем аналитична аналитической геометрии, позволяющей производить анализ и преобразование кривых и поверхностей весьма широкого класса посредством анализа и преобразования соответствующих им функций, не пользуясь графическими изображениями этих кривых и поверхностей.

Следуя примеру аналитической геометрии, мы не будем применять здесь чертежей П-схем, а будем использовать лишь соответствующие этим схемам алгебраические выражения.

Для вырожденных величин, т. е. величин, могущих принимать только два значения: 0 и  $\infty$ , операции сложения, гармонического сложения и инверсии совпадают, как было показано [3,4], с основными операциями булевой алгебры — булева сложения, булева умножения и дополнения до 1 (отрицания) соответственно. Алгебра вырожденных П-схем, т. е. схем, построенных исключительно из вырожденных двухполюсников, является, стало быть, булевой алгеброй, а именно, простейшей из булевых алгебр [5] — двухзначной или точнее двухэлементной булевой алгеброй.

Алгебра контактных П-схем является именно такой булевой алгеброй, так как контактные схемы с очень большой степенью приближения можно рассматривать как вырожденные. Булева алгебра и ее логическая интерпретация — исчисление предложений — является адекватным математическим аппаратом для анализа и синтеза контактных П-схем. Но для синтеза любых П-схем булева алгебра уже не является достаточной, так как алгебра этих схем уже не является булевой. Однако булеву алгебру все же можно применять, как будет показано ниже, для синтеза любых однорелейных и некоторых типов  $n$ -релейных П-схем.

## 2. ОДНОРЕЛЕЙНЫЕ П-СХЕМЫ

В совокупности всех однорелейных П-схем различают обычно схемы нормального, инверсного и смешанного типа. Схемами нормального и инверсного типа называют схемы, имеющие соответственно следующий вид:  $x \cdot Y$  и  $x + Y$  (А), где  $x$  — любая контактная П-схема, а  $Y$  — обмотка некоторого однообмоточного реле. Смешанными однорелейными схемами называют всеостальные однорелейные П-схемы [9].

Соединяя любую контактную П-схему  $u$  параллельно с нормальной схемой  $x \cdot Y$  и последовательно с инверсной схемой  $x + Y$ , получаем смешанные схемы:  $u + x \cdot Y$  и  $u \cdot (x + Y)$  (Б), которые назовем схемами инверсно-нормального и нормально-инверсного типа соответственно.

Подобно тому как эти схемы были получены из контактной П-схемы  $u$  и схем нормального и инверсного типов, из любой контактной П-схемы  $v$  и этих схем могут быть построены схемы  $v \cdot (u + x \cdot Y)$

и  $v + u \cdot (x + Y)$  (В), которые будем называть нормально-инверсно-нормального и инверсно-нормально-инверсного типа соответственно. Аналогично может быть построена любая сколь угодно сложная смешанная однорелейная П-схема.

Основными из смешанных однорелейных П-схем являются схемы инверсно-нормального и нормально-инверсного типов, так как любая смешанная однорелейная П-схема путем тождественных преобразований, т. е. преобразований, не изменяющих реле и проводимостей схемы, может быть сведена к схеме одного из этих двух типов.

Действительно, используя доказанные ранее [4] дистрибутивные законы

$$x \cdot (Y_1 + Y_2) = x \cdot Y_1 + x \cdot Y_2; \quad x + Y_1 \cdot Y_2 = (x + Y_1) \cdot (x + Y_2), \quad (3)$$

схемы вида (В) можно преобразовать в тождественно равные им схемы вида (Б):

$$v \cdot (u + x \cdot Y) = v \cdot u + v \cdot x \cdot Y; \quad v + u \cdot (x + Y) = (v + u) \cdot (v + x + Y).$$

Аналогично любую смешанную однорелейную П-схему можно преобразовать в тождественную ей схему инверсно-нормального или нормально-инверсного типа.

Напротив, схемы вида (А) и (Б) не могут быть преобразованы друг в друга посредством тождественных преобразований. Таким образом, существует четыре различных типа однорелейных П-схем: нормальный, инверсный, инверсно-нормальный и нормально-инверсный.

Условия срабатывания реле  $Y$  в схемах этих типов выражаются соответственно следующими равенствами:

$$y = x, \quad y = x', \quad y = u' \cdot x, \quad y = u \cdot x', \quad (4)$$

где  $y$  — замыкающий контакт реле  $Y$ .

Равенства (4) содержат только вырожденные величины, связанные операциями сложения, гармонического сложения и инверсии, которые для вырожденных величин являются, как известно [4], операциями булевой алгебры. Поэтому булева алгебра достаточна для анализа и синтеза однорелейных П-схем вида (А) и (Б). В силу того, что к схемам вида (А) и (Б) путем тождественных преобразований сводятся любые однорелейные П-схемы, можно утверждать, что булева алгебра достаточна для анализа и синтеза любых однорелейных П-схем.

### 3. РАЗДЕЛИМЫЕ РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫЕ П-СХЕМЫ

Условимся называть разделимыми или сепарабельными П-схемами, во-первых, любые однорелейные П-схемы и, во-вторых, такие релейно-контактные схемы класса П, содержащие  $n$  реле, которые можно разложить на  $n$  непересекающихся однорелейных двухполюсных подсхем так, чтобы при присоединении каждого из двухполюсников к отдельному источнику напряжения реле в них работало бы совершенно так же, как и в исходной схеме.

Разделительными П-схемами являются следующие  $n$ -релейные П-схемы:

- I) схемы нормального типа, т. е. схемы вида  $\sum_{k=1}^n x_k \cdot Y_k;$
- II) схемы инверсного типа, т. е. схемы вида  $\prod_{k=1}^n \cdot (x_k + Y_k);$

III) схемы вида  $\sum_{k=1}^n G_k \cdot (u_k + x_k \cdot Y_k)$  и  $\sum_{k=1}^n G_k \cdot u_k \cdot (x_k + Y_k)$ ;

IV) схемы вида  $\prod_{k=1}^n \cdot (G_k + u_k \cdot (x_k + Y_k))$  и  $\prod_{k=1}^n \cdot (G_k + u_k + x_k \cdot Y_k)$ ,

где  $G_k$  — двухполюсники, имеющие конечное сопротивление.

Двухполюсники  $G_k$  являются совершенно необходимыми в схемах типа III и IV, так как без них реле  $Y_k$  не могут работать независимо друг от друга; схемы этих типов не будут разделительными в случае отсутствия в них указанных двухполюсников. Надлежащим образом подобранные или рассчитанные конечные сопротивления двухполюсников  $G_k$  позволяют устраниТЬ нежелательные связи между однорелейными подсхемами в схемах типа III и IV и, тем самым, разделить или разобщить эти подсхемы друг от друга. Желая подчеркнуть эту функцию разделения или изоляции друг от друга сднорелейных подсхем, которую двухполюсники  $G_k$  выполняют в схемах типа III и IV, мы будем называть эти двухполюсники разделительными или развязывающими.

Разделительные двухполюсники одновременно служат также и для защиты источника приложенного к схеме напряжения от короткого замыкания, которое оказалось бы возможным при некоторых комбинациях замыканий контактных цепей в схемах III и IV в случае отсутствия в них этих двухполюсников. Однако эта защитная функция является для разделительных двухполюсников лишь побочной.

Для защиты источника напряжения от короткого замыкания достаточно иметь в его цепи одно защитное или ограничительное сопротивление, роль которого в некоторых случаях может исполнять внутреннее сопротивление самого источника напряжения. Во всяком случае мы всегда можем предполагать, что цепь источника напряжения содержит сопротивление, достаточное для защиты от короткого замыкания, и мы можем поэтому не вводить в алгебраические выражения схем букв, обозначающих специальные защитные или ограничительные сопротивления. Имея это в виду, мы так и поступали, когда писали выражения схем инверсного, инверсно-нормального и нормально-инверсного типа.

В схемах нормального и инверсного типа специальные разделительные двухполюсники не нужны, так как их роль выполняют здесь обмотки реле. В схемах нормального типа обмотки реле служат также и в качестве ограничительных или защитных двухполюсников.

В  $n$ -релейных разделимых схемах каждое из реле работает так, как оно работало бы в однорелейной схеме, питаемой отдельным источником напряжения. Поэтому анализ и синтез  $n$ -релейных разделимых П-схем можно производить совершенно так же, как анализ и синтез  $n$  отдельных П-схем, и, следовательно, булева алгебра достаточно для анализа и синтеза  $n$ -релейных разделимых П-схем.

#### 4. НЕРАЗДЕЛИМЫЕ РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫЕ П-СХЕМЫ

Согласно определению понятия разделимых релейно-контактных П-схем, не существует однорелейных неразделимых П-схем и, стало быть, неразделимые П-схемы содержат по крайней мере два реле. Неразделимые П-схемы, которые получаются из разделимых П-схем посредством замены некоторых реле какими-либо чисто релейными П-схемами, содержащими не менее двух реле, будем называть несущественно неразделимыми П-схемами. Простейшими из таких схем являются схемы

$$x \cdot (Y + Z), \quad x + Y + Z, \quad x \cdot Y \cdot Z, \quad x + Y \cdot Z,$$

в которых реле  $Y$  и  $Z$  дублируют работу друг друга. В общем случае в несущественно неразделимых П-схемах могут содержаться более чем по два дублирующих реле. Схемы с дублирующими реле оказываются необходимыми, когда некоторые из реле, используемые при синтезе, имеют число контактов, недостаточное для построения синтезируемой схемы. Анализ и синтез несущественно неразделимых П-схем тривиальным образом сводятся к анализу и синтезу разделимых П-схем, и поэтому можно утверждать, что для анализа и синтеза несущественно неразделимых П-схем булева алгебра также достаточна.

Простейшим примером существенно неразделимой П-схемы является схема  $Y \cdot (x + Z)$ , где  $x$ —любая контактная П-схема, а  $Y$  и  $Z$ —некоторые реле. Легко убедиться, что для анализа и синтеза этой схемы булева алгебра недостаточна.

Предположим сначала, что реле  $Y$  и  $Z$  совершенно одинаковы и что напряжение  $V$ , приложенное к этой схеме, достаточно для срабатывания каждого из этих реле порознь, но недостаточно для их срабатывания, когда они соединены последовательно.

В этом случае при разомкнутой контактной схеме  $x$ , т. е. при  $x=0$ , реле  $Y$  и  $Z$  в нашей схеме не будут возбуждены. При замкнутой контактной схеме  $x$ , т. е. при  $x=\infty$ , реле  $Z$  будет „закорочено“ этой схемой и, следовательно, не будет возбуждено; реле  $Y$  сработает, так как оно получит теперь полное напряжение  $V$ . Итак, в случае, когда напряжение  $V$  недостаточно для срабатывания последовательно соединенных реле  $Y$  и  $Z$ , реле  $Z$  вообще никогда не будет срабатывать и, стало быть, схема  $Y \cdot (x + Z)$  будет эквивалентна однорелейной схеме  $x \cdot Y$ .

Если мы повысим напряжение  $V$  так, чтобы оно стало достаточно для срабатывания реле  $Y$  и  $Z$  при их последовательном соединении, то при  $x=0$  схема  $Y \cdot (x + Z)$  будет эквивалентна схеме  $Y \cdot Z$ , в которой оба реле  $Y$  и  $Z$  будут возбуждены. При  $x=\infty$  реле  $Y$  будет по-прежнему возбуждено, но реле  $Z$ , будучи „закорочено“ замкнутой контактной схемой  $x$ , окажется невозбужденным. Таким образом, схема  $Y \cdot (x + Z)$  оказывается в этом случае эквивалентной схеме  $Y + x' \cdot Z$ , в которой реле  $Y$  возбуждено все время и потому является излишним. Схема  $Y \cdot (x + Z)$  оказывается эквивалентной в этом случае схеме  $x' \cdot Z$ . Итак, схема  $Y \cdot (x + Z)$ , в которой оба реле совершенно одинаковы, в зависимости от приложенного к ней напряжения будет эквивалентна либо схеме  $x \cdot Y$ , либо схеме  $x' \cdot Z$ .

Рассмотрим теперь случай, когда реле  $Y$  и  $Z$  различны, а именно таковы, что при некотором напряжении  $V$ , приложенном к их последовательному соединению, реле  $Z$  будет, а реле  $Y$  не будет срабатывать. В этом случае при подаче напряжения  $V$  на схему  $Y \cdot (x + Z)$  реле  $Y$  станет срабатывать тогда и только тогда, когда контактная схема  $x$  замкнута, а реле  $Z$ —когда схема  $x$  разомкнута. Таким образом, в этом случае схема  $Y \cdot (x + Z)$  будет эквивалентна следующей схеме нормального типа:  $x \cdot Y + x' \cdot Z$ .

Рассмотренный пример показывает, что для анализа даже простейшей существенно неразделимой П-схемы недостаточно знать условия размыкания и замыкания содержащейся в ней контактной П-схемы, а необходимо еще знать, одинаковы или различны реле, содержащиеся в схеме; если реле различны, то какое из них чувствительнее, а также каково приложенное к схеме напряжение и достаточно ли оно для срабатывания каждого из реле или же обоих реле, включенных по-

следовательно. Короче говоря, для анализа работы даже такой простой существенно неразделимой схемы как только что рассмотренная булева алгебра недостаточна. Тем более булева алгебра недостаточна для анализа, а следовательно, и синтеза любых существенно неразделимых П-схем.

Для анализа и синтеза такого рода схем недостаточно оперировать лишь с проводимостями всех элементов этих схем, но необходимо учитывать еще и силы токов срабатывания и отпускания реле, содержащихся в анализируемых или синтезируемых схемах, а также и напряжения, приложенные к этим схемам. При этом нельзя ограничиваться лишь качественным или грубо приближенным учетом всех этих физических факторов, как это делается при анализе и синтезе разделимых релейно-контактных П-схем, а следует количественно рассчитывать все физические параметры, определяющие работу реле в анализируемых или синтезируемых существенно неразделимых П-схемах.

Основным из этих параметров является сила тока  $J$ , протекающего через обмотку реле, так как от величины  $J$  зависит, срабатывает или не срабатывает реле, удерживает или отпускает оно свой якорь. Однако в силу закона Ома  $J = GV$  сила тока совершенно симметрично зависит от проводимости  $G$  цепи, в которую включена обмотка реле, и от напряжения  $V$ , приложенного к этой цепи. Поэтому при синтезе релейно-контактных схем в общем случае необходимо в равной мере учитывать как проводимости элементов в синтезируемой схеме, так и напряжения на них. Всякая попытка создания теории синтеза релейно-контактных схем класса П, оперирующей лишь с проводимостями элементов схемы и игнорирующей распределение и изменение напряжений на этих элементах, как это имеет место в теории синтеза смешанных схем Рогинского [9–11], обречена на неудачу.

Как известно, учет как проводимостей (или сопротивлений), так и напряжений на всех элементах схемы производится всегда при электротехническом расчете релейно-контактных схем, основанном на законах Кирхгофа. Поэтому проблема создания общей теории синтеза релейно-контактных схем сводится, собственно, к проблеме создания такого математического аппарата, который облегчал бы и упрощал этот расчет. Такой математический аппарат еще не создан, но можно думать, что он будет представлять собой объединение обычной алгебры с булевой алгеброй, причем объектами операции этой объединенной алгебры должны являться как проводимости элементов схемы, так и напряжения на них.

Что же касается лежащей в основе работ [9–11] идеи о возможности отделения так называемого „структурного синтеза“ релейно-контактных схем от их электротехнического расчета (в качестве его предварительного этапа), то она основана на незаконной экстраполяции тех частных случаев, когда работа реле в схеме действительно определяется исключительно значениями проводимости элементов данной схемы. Эта идея может быть осуществлена лишь в тех частных случаях, когда напряжения на отдельных реле независимы друг от друга и могут поэтому сохранять неизменными свои значения, как бы ни работали „соседние“ реле в данной схеме. Такими схемами являются лишь разделимые схемы, в которых взаимодействие между реле устранено разделительными двухполюсниками, и потому ток, проходящий через обмотку каждого реле, определяется только проводимостями цепей, управляющих данным реле. Однако, как было показано выше, для синтеза таких схем булева алгебра оказывается вполне достаточной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. П. Эренфест, Журн. русск. физ.-хим. общества, физ. отд., **42**, 382 (1910).
2. С. Е. Шаппоп, Trans. AJEE, **57**, 713 (1938).
3. В. И. Шестаков, Диссертация, МГУ, 1938.
4. В. И. Шестаков, ЖТФ, **11**, 532 (1941).
5. Г. Биркгоф, Теория структур, ИЛ, М., 1952, стр. 407.
6. М. А. Гаврилов, Теория релейно-контактных схем, Анализ и синтез структуры релейно-контактных схем, изд. АН СССР, М—Л, 1950, стр. 304.
7. Синтез электронных вычислительных и управляющих схем, пер с англ., ИЛ, М., 1954, стр. 258.
8. Автоматы, Сб. статей под ред. К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, ИЛ, М., 1956, стр. 403.
9. В. Н. Рогинский, Автоматика и телемеханика, **18**, 1120 (1957).
10. В. Н. Рогинский, ДАН СССР, **113**, 308 (1957).
11. В. Н. Рогинский, Сб. научн. работ по проводной связь, вып 6, изд. АН СССР, М., 1957, стр. 5.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
19 января 1960 г.

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

### К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СЛАБО РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

*Б. Н. Гершман*

В большинстве исследований по теории распространения электромагнитных волн в магнитоактивной плазме при учете теплового движения электронов используется нерелятивистское приближение (см., например, обзор [1]). Проведение достаточно общего релятивистского расчета, представляющего интерес в связи с изучением высокотемпературной плазмы, сопряжено с большими трудностями. По этой причине Трубникову удалось получить подробные результаты только для случая слабо анизотропной плазмы [2].

Здесь мы на основе релятивистских уравнений рассмотрим распространение всех трех возможных типов нормальных волн при наличии выраженной анизотропии, связанной с внешним постоянным магнитным полем  $H_0$ . Однако плазма считается не очень сильно нагретой (слабо релятивистской), так что имеет место условие

$$\beta^2 = \gamma T / m_0 c^2 \ll 1, \quad (1)$$

где  $m_0$  — масса покоя электрона,  $T$  — температура электронов,  $\gamma$  — постоянная Больцмана. Учитывая, что  $\beta^2 = 1,7 \cdot 10^{-10} T$ , мы при  $T = 10^8$  получаем, что  $\beta^2 = 1,7 \cdot 10^{-2}$ . Здесь, не говоря о более низких температурах, еще можно считать выполненным условие (1). При условии (1) релятивистские поправки будут малыми, если не рассматривать некоторые особые вопросы (см. ниже). Учет этих поправок не приводит к радикальным изменениям выводов нерелятивистского приближения. Несмотря на это, проведение последовательного релятивистского расчета представляется целесообразным, так как оно позволяет уточнить условия применимости нерелятивистского приближения и может быть полезным для контроля и сопоставлений при дальнейшем обобщении теории.

При анализе распространения необыкновенной, обыкновенной и плазменной волн (волны „1“, „2“ и „3“) мы исходим из системы, состоящей из релятивистского кинетического уравнения для электронов в форме, используемой в [2]\*. Далее будет приведено дисперсионное уравнение для этих волн, которое в нерелятивистском случае было получено в [4] (см. также [5]).

В качестве равновесной функции распределения для электронов плазмы мы возьмем релятивистскую максвелловскую функцию

$$f_0 = NC e^{-\epsilon / \kappa T}, \quad (2)$$

где  $\epsilon = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2} = m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$  — энергия электронов с концентрацией  $N$  ( $v$  — скорость,  $p$  — импульс электрона). Значение коэффициента  $C$  в (2) при нормировании  $f_0$  по импульсам приведено в [6], стр. 135. При нахождении дисперсионного уравнения, когда выполняется условие (1), проще всего провести расчет, непосредственно опираясь на результаты вычислений в нерелятивистском приближении [4]. При этом можно без труда внести корректиды, связанные с релятивистским характером рассмотрения.

Будем считать выполненными следующие условия:

$$(\beta^2 n^2 / u) \sin^2 \alpha \ll 1; \quad (3)$$

$$\beta n \cos \alpha \ll |1 - \sqrt{u}|; \quad \beta n \cos \alpha \ll |1 - 2\sqrt{u}|; \quad \beta n \cos \alpha \ll 1 (\cos \alpha > 0); \quad (4)$$

$$|1 - u| \gg \beta^2; \quad |1 - 4u| \gg \beta^2, \quad (5)$$

где  $\alpha$  — угол между волновым вектором  $k$  и полем  $H_0$ ,  $u = \omega_H^2 / \omega^2$  ( $\omega_H = e H_0 / m_0 c$  — гирочастота электронов в нерелятивистском случае,  $\omega$  — угловая частота волн),  $n = ck/\omega$  — показатель преломления. При выполнении условий (3)–(4), играющих су-

\* Вопрос о релятивистских кинетических уравнениях для плазмы был в последнее время детально исследован Климонтовичем [3].

щественную роль при нерелятивистском рассмотрении, специфическое для плазмы поглощение будет слабым [7]. Условия (5) характерны для релятивистского расчета. При не слишком малых значениях  $\cos\alpha$  ( $\cos\alpha \gg \beta n$ ) эти условия следуют из первых двух неравенств (4). Однако при квазиперечном распространении ( $\alpha \approx \pi/2$ ) условия (5), вообще говоря, нельзя рассматривать как следствия ограничений (4).

Если не принимать во внимание влияние соударений, то при указанных выше ограничениях можно получить следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} -\beta^2 v R_I n^6 + [1 - u - v + uv \cos^2\alpha + \beta^2 v (S_I + S_{II})] n^4 + \\ + [u(2-v) - 2(1-v)^2 - uv \cos^2\alpha + \beta^2 v (P_I + P_{II})] n^2 + \\ + (1-v)[(1-v)^2 - u] + \beta^2 v T_{II} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $v = 4\pi e^2 N/m\omega^2 = \omega_{0e}^2/\omega^2$  ( $\omega_{0e}$  — плазменная частота) и введены обозначения:

$$\begin{aligned} R_I &= \frac{3 \sin^4\alpha}{1-4u} + \sin^2\alpha \cos^2\alpha \left(1 + \frac{5-u}{(1-u)^2}\right) + 3(1-u) \cos^4\alpha; \\ S_I &= \frac{\cos^2\alpha}{(1-u)^2} [(1-v)(2+\sin^2\alpha)(1+3u) + 4uv \sin^2\alpha] + \\ &+ \frac{\sin^2\alpha}{1-4u} [(1-v)(4+3\sin^2\alpha+8u) + 8uv \sin^2\alpha] + \\ &+ \frac{\sin^2\alpha}{1-u} [2(2-v)\cos^2\alpha + (1-u-v)(1+\cos^2\alpha)] + \cos^2\alpha [3(1-u-v) - 2v \sin^2\alpha], \\ S_{II} &= \frac{5}{2} \left[ \sin^2\alpha \left( \frac{1+3u}{1-u} \right) + (1-u) \cos^2\alpha \right]; \\ P_I &= \frac{2\cos^2\alpha(v-1)}{(1-u)^2} [(1+3u)(1-v) + 2uv] + \frac{4(v-1)\sin^2\alpha}{1-4u} (1+2u-v) + \\ &+ [u - (1-v)^2] \left( 3\cos^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{1-u} \right); \\ P_{II} &= -\frac{5}{2} [(1-v)(2+\sin^2\alpha) + (1-u-v)(1+\cos^2\alpha)] - \\ &- \frac{10u}{1-u} (2+\sin^2\alpha - 2v); \\ T_{II} &= \frac{5}{2} [3(1-v)^2 - u] + \frac{10u(1-v)(2-v)}{1-u} \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение (6) выписано с учетом малых членов порядка  $\beta^2$ . Индексом I обозначены коэффициенты в слагаемых, соответствующих учету теплового движения, которые можно получить посредством нерелятивистского расчета. Индексом II снабжены те члены, появление которых обусловлено релятивистским характером расчета. Для перехода к нерелятивистскому дисперсионному уравнению [1,4,5,7] нужно в соотношении (6) формально положить  $S_{II} = P_{II} = T_{II} = 0$ .

Рассматривая отдельные слагаемые в уравнении (6), мы видим, что в принятом приближении для старшего члена остается справедливым выражение, полученное без учета релятивистских эффектов. Релятивистские поправки появляются в слагаемых с  $n^4$  и  $n^2$ . Они оказываются одного порядка с нерелятивистскими добавочными членами порядка  $\beta^2$ . Однако при условии (1) перечисленные поправки не оказывают существенного влияния на характер распространения нормальных волн. Последнее следует, в частности, из анализа, проведенного в нерелятивистском приближении [1,4]. Наиболее существенным результатом релятивистского расчета при условии (1) представляется появление в свободном члене уравнения (6) добавочного слагаемого порядка  $\beta^2$ . Поскольку обращение в нуль этого члена определяет условия отражения нормальных волн, отсюда следует, что учет релятивистских эффектов приводит к некоторому изменению обычных условий ограждения.

Для большей ясности целесообразно привести формулы для  $n_{1,2,3}^2$  при продольном распространении ( $\alpha = 0$ ). В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \left[ 1 - \frac{v}{1 - \sqrt{u}} \left( 1 - \frac{5}{2} \beta^2 \frac{1 + \sqrt{u}}{1 - \sqrt{u}} \right) \right] [1 + \beta^2 v / (1 - \sqrt{u})^3]^{-1}; \\ n_2^2 &= \left[ 1 - \frac{v}{1 + \sqrt{u}} \left( 1 - \frac{5}{2} \beta^2 \frac{1 - \sqrt{u}}{1 + \sqrt{u}} \right) \right] [1 + \beta^2 v / (1 + \sqrt{u})^3]^{-1}; \\ n_3^2 &= \left[ 1 - v \left( 1 - \frac{5}{2} \beta^2 \right) \right] (3 \beta^2 v)^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Формула (8) для  $n_3^2$  при  $\alpha = 0$  имеет тот же вид, что и в изотропном случае, и совпадает с полученным ранее соотношением из работы [8]. При нерелятивистском рассмотрении  $n_3^2 = \frac{1 - v}{3 \beta^2 v}$  (см., например, [1]). Из последней следует, что  $n_3^2 = 0$  при  $v = 1$ , тогда как из (8)  $n_3^2 = 0$  при  $v = \frac{1}{1 - \frac{5}{2} \beta^2} \simeq 1 + \frac{5}{2} \beta^2$ . Аналогичные изменения условий отражения имеют место и для волн „1“ и „2“, для которых в нерелятивистском приближении при  $\alpha = 0$  [1,4]

$$n_{1,2}^2 = \frac{1 \mp v / (1 \mp \sqrt{u})}{1 + \beta^2 v / (1 \mp \sqrt{u})^3}.$$

Мы рассмотрели случай распространения в направлении поля  $H_0$ . Однако в свободный член уравнения (7) угол  $\alpha$  вообще не входит. Поэтому в соответствии с (7), (8) можно в первом приближении утверждать, что при учете релятивистских поправок условия отражения при любых углах  $\alpha$  имеют вид:

$$v \left( 1 - \frac{5}{2} \beta^2 \frac{1 \pm \sqrt{u}}{1 \mp \sqrt{u}} \right) = 1 \mp \sqrt{u}; \quad v \left( 1 - \frac{5}{2} \beta^2 \right) = 1. \quad (9)$$

При этом только для  $\alpha = 0$  можно каждое из этих трех условий относить соответственно к волнам „1“, „2“ и „3“. При  $\alpha \neq 0$  эти равенства нужно относить только к волнам „1“, „2“ и при  $\beta^2 = 0$  они переходят в известные условия отражения необыкновенной и обыкновенной волн.

В заключение следует вновь подчеркнуть, что приведенные результаты законны при выполнении условий (5). Из рассмотрения совокупности условий (1), (4)–(5) легко установить, что самостоятельное значение неравенства (5) приобретают только при распространении в гирорезонансных областях ( $\omega \simeq \omega_H, 2\omega_H$ ) и в направлениях, близких к поперечному ( $\alpha \simeq \pi/2$ ). В работе [9] Гроссом было впервые обращено внимание на особый характер поведения волны „3“ при  $\alpha = \pi/2$  в областях гирорезонанса. В окрестностях частот  $\omega = \omega_H, 2\omega_H, 3\omega_H, \dots$  появляются узкие полосы частот, запрещенные для распространения электромагнитных волн. Можно показать, что такие полосы появляются при  $\alpha = \pi/2$  и для волн „1“, „2“. Существенно, что рассмотрение в [9] проводилось в нерелятивистском приближении, когда ограничения типа (5) вообще не возникают. Подробный анализ свидетельствует о том, что для исследования свойств указанных волн при  $\alpha = \pi/2$  учет релятивистских эффектов (в областях, где нарушаются условия (5)) весьма существенен. Однако подробное рассмотрение этих вопросов выходит за рамки данного сообщения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Б. Н. Гершман, В. Л. Гинзбург, Н. Г. Денисов, УФН, 61, 561 (1957).
- 2 Б. А. Трубников, Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 3, изд. АН СССР, М., 1958, стр. 104.
- 3 Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ, 37, 735 (1959).

- 4 Б Н Гершман, ЖЭТФ, 24, 659 (1953)
- 5 А Г Ситенко, К Н Степанов, ЖЭТФ, 31, 642 (1956).
- 6 Л. Д. Ландау, Е М Либшиц, Статистическая физика, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
- 7 Б Н. Гершман, ЖЭТФ, 37, 695 (1959).
- 8 R. C. Clemow, A J. Willson, Proc Roy. Soc., 237A, 117 (1956).
- 9 E P. Gross, Phys Rev, 82, 232 (1951).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
23 декабря 1959 г.

## ПАРАМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС В ЛАКМОИДЕ

*A. С. Лисеенко*

Как известно, лакмоид является одним из синтетических органических красителей и индикаторов на кислоты и щелочи. Лакмоид  $C_{12}H_9O_3N$  получается путем нагревания резорцина с водным раствором азотисто-кислого натрия до температуры  $90 \pm 110^\circ\text{C}$ . Структурная формула лакмоида неизвестна, в аналитической формуле также нельзя быть вполне уверенным. Поэтому представляет интерес исследовать указанное соединение методом парамагнитного резонанса.

Для наблюдения и изучения спектра был применен супергетеродинный спектрограф, для измерения магнитного поля — протонный измеритель. Образец представлял собой кристаллический порошок в количестве 0,05 г. Исследования велись при компактных температурах на частоте 9260 мгц.

В результате измерений обнаружена единичная линия с  $g$ -фактором, равным 2,0036, т. е. весьма близким к  $g$ -фактору свободного электрона. Ширина линии на высоте  $1/2 \pm 18$  эрстед Расчет отношения четвертых и вторых моментов линий показал, что имеет место заметное обменное взаимодействие (1,56).

В целях определения делокализации неспаренного электрона были предприняты попытки разрешить сверхтонкую структуру. Однако исследования, проведенные с водными и спиртовыми растворами лакмоида различной концентрации, не дали желаемых результатов.

В предположении, что спектр обусловлен разорванными химическими связями атомов углерода, была снята температурная зависимость поглощения. Такая работа

для природных и искусственных углей проведена Инграмом и др. [1]. Они показали, что при повышении температуры поглощение возрастает, достигает максимума и затем резко спадает. Для углей максимум поглощения при температуре  $550^\circ$  они объясняют тем, что при этой температуре выделяется большое количество водорода и остается много ненасыщенных связей. При дальнейшем возрастании температуры ароматические кольца становятся более подвижными, что ведет к соединению боковых связей с соседними кольцами: поглощение падает. На рис. 1 приведена кривая концентрации свободных радикалов  $N$  в зависимости от температуры лакмоида  $T$ . Как видно из графика, максимум поглощения наблюдается при температуре  $530^\circ\text{C}$ , в пределах

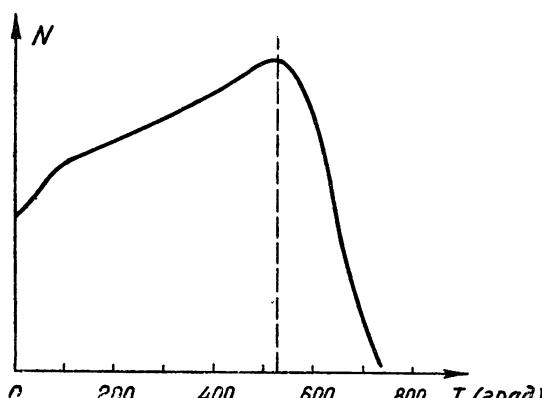


Рис. 1 Зависимость концентрации свободных радикалов  $N$  от температуры карбонизации  $T$ .

чувствительности спектроскопа сигнал полностью исчезал при температуре  $730^\circ\text{C}$ . Таким образом, температуры, при которых наблюдается максимум поглощения, для углей и лакмоида почти совпадают.

## ЛИТЕРАТУРА

1. D. I. E. Ingram, I. G. Tapley, R. Jackson, R. L. Bond, A. R. Mughan, Nature, 174, 797(1954).

Харьковский педагогический институт  
им Г. С. Сквороды

Поступила в редакцию  
15 февраля 1960 г.

## ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИИ ВОДЫ В ТУРБИННОМ ТРУБОПРОВОДЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РАБОТЫ ГЭС С УРАВНИТЕЛЬНЫМИ РЕЗЕРВУАРАМИ

Г. В. Аронович, Я. К. Любимцев

В теоретических исследованиях устойчивости стационарных режимов ГЭС с уравнительными резервуарами, в которых предполагается наличие идеального регулятора, поддерживающего на выходе системы мощность постоянной, всегда пренебрегают инерцией воды в напорном турбинном трубопроводе [1,2]. Между тем, учет даже сколь угодно короткого турбинного трубопровода как инерционного звена приводит к характеристическому уравнению с малым отрицательным коэффициентом при старшем члене, что свидетельствует о неустойчивости системы [3]. Этот результат, уже отмечавшийся ранее некоторыми авторами [4,5], указывает на необходимость более тщательной схематизации изучаемой динамической системы, так как физически ясно, что малая масса воды в турбинном трубопроводе не может нарушить устойчивости работы установки. В настоящей заметке показано, что указанный противоречиящий вывод снимается, если при идеальном регуляторе и учете инерции воды в турбинном трубопроводе дополнительно учитывать инерцию воды в уравнительном резервуаре. Это оправдывается тем, что массы воды в резервуаре и в трубопроводе обычно являются величинами одного порядка\*. При этом попутно выясняются условия, на-кладываемые на длину турбинного трубопровода.

Ограничиваюсь случаем прямого течения (от питающего бассейна к турбине) запишем следующие уравнения задачи (см. рис. 1):

1) уравнение неустановившегося движения в напорной деривации

$$\frac{L}{g} \frac{dv}{dt} + z + Pv^2 = - \frac{d}{dt} \left[ \frac{F}{fg} (H + z) \frac{dz}{dt} \right] = - \frac{F}{fg} \left[ (H + z) \frac{d^2z}{dt^2} + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right]; \quad (1)$$

2) уравнение неразрывности,

$$fv = f_1 v_1 + F \frac{dz}{dt}; \quad (2)$$

3) формула напора турбины

$$H_1 = H + z - P_1 v_1^2 - \frac{L_1}{g} \frac{dv_1}{dt} - \frac{H + z}{g} \frac{F}{f} \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{F}{gf} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2; \quad (3)$$

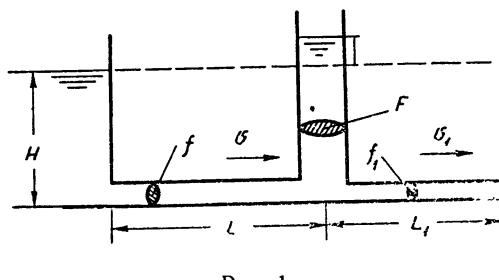


Рис. 1.

4) условие постоянства мощности (идеальный регулятор)

$$\eta f_1 v_1 H_1 = \text{const} \quad (\eta = \text{const}). \quad (4)$$

Здесь член  $\frac{d}{dt} \left[ \frac{F}{fg} (H + z) \frac{dz}{dt} \right]$  учитывает изменение количества движения переменной массы воды в уравнительном резервуаре. Обозначения всех величин обычные. Введем безразмерные переменные

$$x = z/Pv_0^2, \quad y = v/v_0, \quad y_1 = v_1/v_{10},$$

\* В работе [1] учет инерционного трубопровода проводится в предположении, что уравнительный резервуар имеет бесконечно большое сечение и что регулятор не является идеальным.

где индексом пуль обозначены величины, соответствующие стационарному режиму, а также обозначения:

$$\begin{aligned} z = Lv_0/gH, \quad z_1 = L_1v_{10}/gH, \\ \beta = Pv_0^2/H, \quad \beta_1 = P_1v_{10}^2/H, \quad F_1 = FPv_0^2/fg. \end{aligned}$$

Кроме того, учтем, что при стационарном режиме

$$z_0 + Pv_0^2 = 0, \quad fv_0 = f_1v_{10},$$

$$H_{10}v_{10} = (H + z_0 - P_1v_{10}^2)v_{10} = \text{const.}$$

Тогда в новых обозначениях уравнения (1)–(4) примут вид:

$$\alpha \frac{dy}{dt} + \beta(x + y^2) = -F_1 \left[ (1 + \beta x) \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right];$$

$$y = y_1 + F_1 \frac{g}{v_0} \frac{dx}{dt};$$

$$\left\{ 1 + \beta x - \beta_1 y_1^2 - \alpha_1 \frac{dy_1}{dt} - F_1 \left[ (1 + \beta x) \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right] \right\} y_1 = 1 - \beta - \beta_1.$$

Здесь стационарному режиму соответствуют значения  $x_0 = -1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y_{10} = 1$ . Полагая  $x = -1 + \xi$ ,  $y = 1 + \eta$ ,  $y_1 = 1 + \zeta$ , перейдем к системе уравнений в возмущениях:

$$\begin{aligned} F_1 \left[ (1 - \beta + \beta\xi) \frac{d^2\xi}{dt^2} + \beta \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 \right] + \beta\xi + \alpha_1 \frac{d\zeta}{dt} + \beta(2\eta + \eta^2) = 0; \\ F_1 \frac{g}{v_0} \frac{d\xi}{dt} - \eta + \zeta = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} F_1 \left[ (1 - \beta + \beta\xi) \frac{d^2\xi}{dt^2} + \beta \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 \right] - \beta\xi + \alpha_1 \frac{d\zeta}{dt} + \\ + \frac{\beta_1 \zeta^3 + 3\beta_1 \zeta^2 - (1 - \beta - 3\beta_1)\zeta}{1 + \zeta} = 0. \end{aligned}$$

Ограничаваясь в дальнейшем исследованием устойчивости невозмущенного движения в малом, составим характеристическое уравнение линеаризованной системы:

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= F_1 \left[ (1 - \beta)(z - z_1) - \frac{g}{v_0} \alpha z_1 \right]; \\ a_1 &= F_1 \left\{ (1 - \beta)(1 + \beta - 3\beta_1) + \frac{g}{v_0} \left[ z(1 - \beta - 3\beta_1) - 2\beta z_1 \right] \right\}; \\ a_2 &= \beta \left[ 2F_1 \frac{g}{v_0} (1 - \beta - 3\beta_1) - z - z_1 \right]; \\ a_3 &= \beta(1 - 3\beta - 3\beta_1). \end{aligned}$$

Система устойчива в малом, если  $a_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3, 0$ ) и  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ . Развернув последнее неравенство, получим:

$$\begin{aligned} 2F_1 \frac{g}{v_0} \left[ (1 - \beta)(1 + \beta - 3\beta_1) + \frac{g}{v_0} \alpha(1 - \beta - 3\beta_1) - 2\beta z_1 \frac{g}{v_0} \right] \times \\ \times (1 - \beta - 3\beta_1) + \frac{g}{v_0} [2\beta z_1^2 - z^2(1 - \beta - 3\beta_1)] - \\ - 2z(1 - \beta)(1 - \beta - 3\beta_1) - 4\beta z_1(1 - \beta) > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Условия  $a_0 > 0$  и  $a_1 > 0$  накладывают ограничения на длину турбинного трубопровода и заведомо выполняются при небольшой длине последнего (на практике обычно  $a \gg a_1$ ).

Условие  $a_3 > 0$ , аналогичное одному из условий Тома, накладывает ограничения на потери напора в напорной деривации и турбинном трубопроводе (в практических задачах оно также обязательно удовлетворяется). Условие  $a_2 > 0$  и условие (6) могут быть удовлетворены при помощи соответствующего подбора величины площади сечения уравнительного резервуара.

Таким образом, при одновременном учете инерции воды в турбинном трубопроводе и в уравнительном резервуаре в пространстве параметров системы можно выделить область значений, для которой невозмущенное движение будет устойчиво в малом.

Рассмотрим частный случай, когда  $a_1 = \beta_1 = 0$  (турбинный трубопровод отсутствует, а инерция воды в уравнительном резервуаре учитывается). Тогда условия  $a_0 > 0$  и  $a_1 > 0$  выполняются автоматически, условие  $a_3 > 0$  приводит к известному условию Тома

$$Pv_0^2 < H/3, \quad (7)$$

условия  $a_2 > 0$  и (6) сводятся в этом случае к одному неравенству

$$F > F_{\text{Тома}} \left[ 1 + \frac{H - 3Pv_0^2}{L + H + Pv_0^2} \right], \quad (8)$$

где

$$F_{\text{Тома}} = \frac{Lfv_0^2}{2g(H - Pv_0^2)Pv_0^2}.$$

Таким образом, учет инерции воды в уравнительном резервуаре несколько увеличивает площадь  $F_{\text{мин}}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Н. А. Картвелишвили, Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 75 (1958)
- 2 C. Jaeger, A Review of Surge Tank Stability Criteria Paper Amer Soc Mech Engrs, № 59—A—270, 1959, стр. 1—12
- 3 А. А. Андронов, А. А. Витти и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959, стр. 733—736
- 4 И. П. Андреева, Труды МЭИ, № 19, 95 (1956).
- 5 Н. А. Картвелишвили, Изв. АН СССР, ОТН, № 1, 43 (1957).

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
16 апреля 1960 г.

## УСТРОЙСТВО ДЛЯ НАБЛЮДЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

*Н. И. Ашбель, Г. Г. Денисов, В. А. Дозоров*

Электронный осциллограф успешно применяется для наблюдения двухмерного изображения фазовой плоскости динамических систем второго порядка [1]. При исследовании систем с полутора степенями свободы такой метод позволяет наблюдать лишь проекции фазовых траекторий на одну из трех координатных плоскостей. На экране одного осциллографа можно также осуществить одновременную запись трех проекций пространственного вектора [2].

В трехмерном случае существенный интерес представляет получение пространственного изображения фазовых траекторий. Для этой цели по предложению Андронова в Горьковском университете был разработан специальный прибор [3]. Идея сводилась к одновременному получению двух изображений плоских проекций фазовых

траекторий на экранах двух осциллографов — одного для правого, а другого для левого глаза наблюдателя. С помощью двух плоских зеркал эти изображения располагались в одной плоскости и при рассматривании в стереоскоп сливались в один зрительный образ, имеющий глубину.

Следует заметить, что этот метод может быть применен во всех случаях, когда имеется возможность получения электрических сигналов, пропорциональных координатам трехмерного объекта, в частности, для получения объемных электрокардиограмм.

Как показал расчет в линейном приближении произвольная точка  $M(x, y, z)$  трехмерного пространства проектируется в точку  $M_{\text{пр}}(y - kx, z)$  на плоской проекции для правого глаза и в точку  $M_{\text{лев}}(y + kx, z)$  на плоской проекции для левого глаза. Постоянный множитель  $k$  характеризует глубину изображения. Поскольку при выводе этих линейных преобразований координат не учитывалось изменение кажущихся размеров предмета при изменении расстояния от него до точки наблюдения, то при значительной глубине изображения могут возникать некоторые искажения стереоскопической картины; однако это не влияет на топологическую структуру пространственных фазовых траекторий.

Блок-схема установки для наблюдения трехмерного фазового пространства при помощи двух осциллографов приведена в работе [4]. Эта схема была использована для наблюдения фазового пространства электронной модели электромагнитного прерывателя [5].

Впоследствии для лабораторной практики была сконструирована более простая схема, в которой, в отличие от упомянутой, отпадает надобность во втором осциллографе, втором сумматоре и упрощается оптика.

Как явствует из представленной на рис. 1 блок-схемы электронной части прибора, устройство имеет три входа для величин, пропорциональных координатам  $x, y, z$  фазового пространства, и два выхода с одного из которых попеременно при помощи

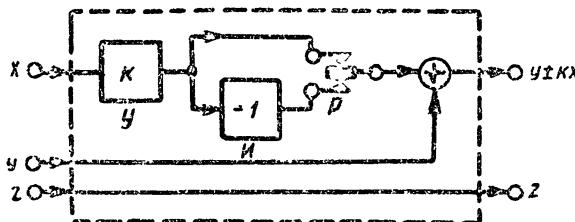


Рис. 1. Блок-схема электронной части прибора.

электронного или электромеханического переключателя Р выводятся напряжения, пропорциональные величинам  $y \pm kx$ . Для образования последних служит широкополосной усилитель У (с коэффициентом усиления  $k$ ), инвертор И и сумматор С; эти напряжения подключаются к горизонтально отклоняющим пластинам осциллографа. Напряжение, пропорциональное координате  $z$ , подводится со второго выхода к вертикально отклоняющим пластинам осциллографа. Таким образом, в описываемой установке оба изображения плоских проекций одновременно получаются на экране одного осциллографа и подготовлены к непосредственному наблюдению в стереоскоп.

На рис. 2 показана принципиальная схема прибора, предназначенного для работы в диапазоне звуковых частот. В качестве усилителя и инвертора используется половинка двойного триода 6Н8 (лампа  $L_1$ ). Переменные сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  служат соответственно для регулировки коэффициента усиления (глубины изображения) и уравнивания величин выходных напряжений. Анод и катод лампы  $L_1$  подключены к контактам электромеханического реле Р, питаемого от мультивибратора, собранного на двойном триоде 6Н8 (лампа  $L_5, L_6$ ). Сопротивление  $R_5$  служит для подстройки частоты мультивибратора. Сумматором является усилитель с отрицательной обратной связью, регулируемой переменным сопротивлением  $R_1$ , выполненный на пентоде 6Ж4 (лампа  $L_3$ ); анодной нагрузкой служит лампа  $L_2$ . Выходное напряжение сумматора подается на сетку катодного повторителя (лампа  $L_4$ ), выходные клеммы которого 1, 3 присоединяются к горизонтально отклоняющим пластинам осциллографа.

Напряжение, пропорциональное координате  $z$ , в определенном масштабе подается с исследуемой схемы на вертикально отклоняющие пластины осциллографа.

Расстояние между изображениями на экране можно варьировать при помощи сопротивления  $R_3$ .

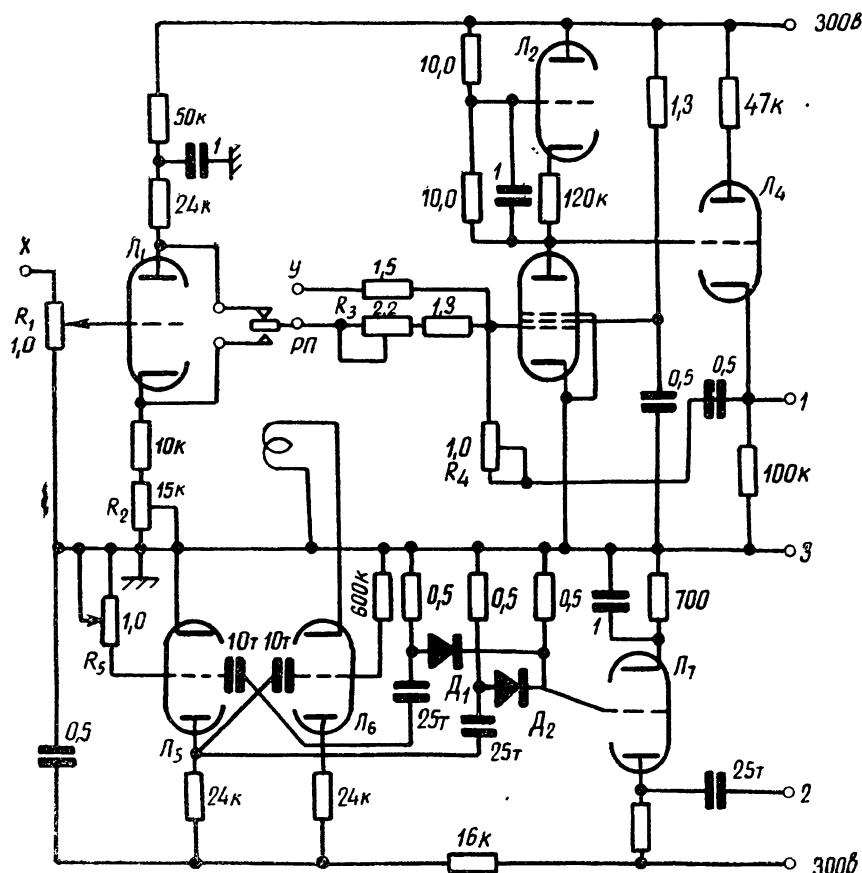


Рис. 2. Принципиальная схема прибора.

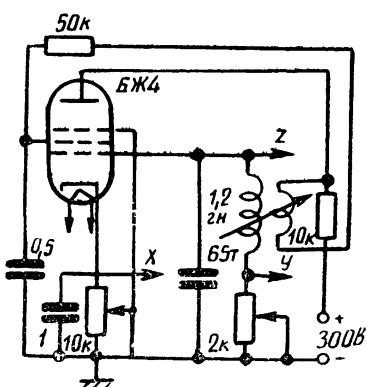


Рис. 3. Схема генератора с автосмещением в цепи катода.

пространства, обозначены на рис. 3 соответствующими изображениями плоских проекций для случая прерывистой генерации.

Для гашения мешающих линий, возникающих при переключениях якоря ре-  
ле, применяются две пассивные диффе-  
ренцирующие цепи, импульсы с которых  
через кристаллические диоды  $D_1$  и  $D_2$   
подаются на сетку лампы  $L_7$ , выходная  
клетка 2 этого каскада подключается к  
средней точке потенциометра „яркость“  
электронного осциллографа.

Схема питалась от стабилизирован-  
ного выпрямителя. Для получения про-  
странственных предельных циклов слу-  
жила схема  $LC$ -генератора с автосме-  
щением в цепи катода (рис. 3). Как  
известно [6], в такой системе, описы-  
ваемой дифференциальным уравнением  
третьего порядка, возможны режимы  
прерывистой генерации и самодуля-  
ции амплитуды автоколебаний. Точки  
с которых снимались напряжения, про-  
порциональные координатам фазового

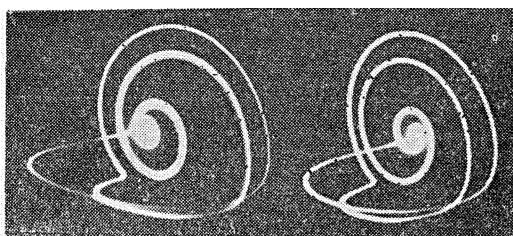


Рис. 4. Фотография плоских проекций пространственного предельного цикла.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. W. N. Bowschewegow, Techn. Phys. of the USSR, 11, 43 (1935).
2. И Акулиничев, Радио, 10, 27 (1958).
- 3 Г Г. Денисов, Дипломная работа, Горьк. ун-т, 1953.
4. А А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959, стр. 902.
5. Н. А. Фуфайев, Сб. памяти А. А. Андронова, изд АН СССР, М., 1955, стр 334.
6. Н. А. Железцов, ЖТФ, 18, 496 (1948).

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
23 января 1960 г.