$\sim 10^5$ *эл · см*$^{-3}$, $\cos\alpha \sim 1$ и $L \sim \eta R_\odot \sim 3 \cdot 10^{11}$ *см*) угол $\Delta\Psi \sim 60°$. При $\eta \simeq 10$ ($H \sim 10^{-3}$ *эрстед*, $N \sim 10^4$ *эл · см*$^{-3}$, $\cos\alpha \sim 1$, $L \sim 10\ R_\odot$ *см*) $\Delta\Psi \sim 1°$. По своему характеру эти оценки близки к максимальным, если только напряженность поля не превосходит принятой. Последнее вполне возможно и, таким образом, даже при $\eta \simeq 10$ обсуждаемый метод может дать положительные результаты. Еще более вероятно это в отношении области меньших расстояний η (особенно при $\eta \simeq 5$), если только среднее значение $\cos\alpha$ вдоль луча зрения не очень мало в силу неблагоприятной конфигурации поля. Довольно сильная зависимость угла $\Delta\Psi$ от частоты ω открывает дополнительные возможности выделения обсуждаемого эффекта при работе на нескольких частотах.

ЛИТЕРАТУРА

1. A Hewish, Paris Symposium on Radio Astronomy, Stanford, 1959, стр. 268; В. В. Виткевич, там же, стр. 275.
2. В. В. Виткевич, Б. Н. Пановкин и А. Г. Суховей, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **2**, 1005 (1959)
3. C. H. Mayer, T. P. Mc Cullough, R. M. Sloanaker, Astrophys. J, **126**, 468 (1957).
4. А. Д. Кузьмин и В. А. Удальцов, Астрон ж, **36**, 33 (1959).
5. C. H. Mayer, R M. Sloanaker, Astron. J, **64**, 338 (1959).
6. Г. Г. Гетманцев и В. А. Разин, Труды 5-го совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М., 1956, стр. 496
7. D. E. Blackwell, Mon Not. Roy. Astron. Soc., **116**, 56 (1956).
8. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
9. В. Л. Гинзбург и В. В. Писарева, Труды 5-го совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М, 1956, стр. 229.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
25 марта 1960 г.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ТОЧЕЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В ОДНОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Ю. И. Неймарк

В настоящей заметке устанавливаются теоремы об устойчивости и неустойчивости неподвижной точки M^* (0, ..., 0) точечного отображения T вида

$$\overline{x}_i = x_i + \tau(x_1, x_2, ..., x_n)\left\{A_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + O\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)\right\}, \tag{1}$$

где $\tau(x_1, ..., x_n)$ — неотрицательная функция, обращающаяся в нуль в точке M^*. Менее общие результаты были ранее установлены в работе [1] и затем использованы для исследования устойчивости состояния равновесия релейной системы в работах [2,3].

Теорема 1. Неподвижная точка отображения (1) устойчива, если все $A_i = 0$ и если состояние равновесия системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum a_{ij}x_j, \tag{2}$$

асимптотически устойчиво.

При сформулированных требованиях неподвижная точка M^* будет асимптотически устойчивой, если в некоторой окрестности точки M^*

$$\tau(x_1, x_2, ..., x_n) > C\left(x_1^2 + ... + x_n^2\right), \tag{3}$$

где $C(r)$—непрерывная функция r, обращающаяся в нуль только при $r=0$.

Если предположить, что имеет место (3) или что в любой окрестности вблизи M^* есть точки, сумма значений τ в последовательных преобразованиях которых (если

они не покидают некоторой фиксированной окрестности точки M^*) неограниченно возрастает*, то будет иметь место следующая теорема.

Теорема 2. Неподвижная точка M^* отображения (1) неустойчива, если хотя бы одно $A_i \neq 0$ или если хотя бы один корень характеристического уравнения системы (2) имеет положительную действительную часть.

Пусть $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ — квадратичная форма, являющаяся функцией Ляпунова для системы дифференциальных уравнений (2), так что

$$\frac{dV}{dt} = \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} \sum a_{ij} x_j < -\left(x_1^2 + ... + x_n^2 \right). \tag{4}$$

Для доказательства теоремы 1 и утверждения теоремы 2 при $A_1 = ... = A_n = 0$ покажем, что эта же функция V является функцией Ляпунова [1] для точечного отображения (1). Действительно,

$$\begin{aligned} v(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) - v(x_1, ..., x_n) = \sum \tau \frac{\partial V}{\partial x_i} \left\{ \sum a_{ij} x_j + ... \right\} + \\ + \frac{\tau^2}{2} \sum \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \left(\sum a_{is} x_s + ... \right) \left(\sum a_{jk} x_k + ... \right), \end{aligned} \tag{5}$$

и поэтому в достаточно малой окрестности** неподвижной точки M^*

$$v(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) - v(x_1, ..., x_n) < -\frac{\tau}{2} \left(x_1^2 + ... + x_n^2 \right), \tag{6}$$

что и требовалось.

Допустим, что $A_1^2 + ... + A_n^2 \neq 0$, и рассмотрим функцию

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n,$$

где постоянные $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ выбраны так, что

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_n A_n = A > 0.$$

Из (1) непосредственно находим, что

$$V(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) - V(x_1, ..., x_n) = \tau\left(A + O\left(\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}\right)\right). \tag{7}$$

Если выполняется (3), то пусть M — любая точка, в которой $v > 0$. Если же имеет место второе предположение, то пусть точка M еще такова, что сумма значений τ в последовательных преобразованиях точки M неограниченно растет.

Согласно (7), либо последовательные преобразования точки $M\ TM,\ T^2M,\ T^3M, ...$ покидают некоторую фиксированную окрестность точки M^*, либо функция v в них неограниченно растет, т. е. опять-таки последовательные преобразования точки M покидают эту окрестность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, 1, 41 (1958).
2. С. Д. Кинялпин и Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, 20, 1153 (1959).
3. С. Д. Кинялпин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).

Научно-исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 30 марта 1960 г.

---

* Это предположение, например, имеет место, если в окрестности M^*

$$|\tau(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) - \tau(x_1, ..., x_n)| < B\tau^2(x_1, ..., x_n)$$

и если мера множества точек, в которых $\tau = 0$, равна нулю.

** Предполагается, что $\tau(x_1, ..., x_n) \to 0$, когда

$$M(x_1, x_2, ..., x_n) \to M^*.$$