ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том III, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1960*

КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ ПРОСТОГО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ОБЪЕКТА

В. А. Дозоров

Для объекта регулирования, описываемого одномерным уравнением диффузии в движущейся среде, найден коэффициент передачи и его асимптотическое представление.

Рассмотрим объект регулирования, процессы в котором описываются одномерным уравнением диффузии (теплопроводности) для движущейся среды

$$\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

с нулевыми начальными условиями и с граничными условиями третьего рода:

$$\left(u-\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}=u_{\text{вх}}\,; \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=1}=0, \tag{2}$$

где u — концентрация вещества (температура), $u_{\text{вх}}$ — концентрация вещества (температура) на входе объекта, x — приведенная безразмерная координата, t — приведенное безразмерное время. К системе (1), (2) сводится, например, описание процесса распространения катализатора со средней по сечению однородного реактора концентрацией, процесса переноса тепла теплоносителем в изолированной длинной трубе при наличии в ней бесконечной поперечной и конечной продольной диффузий и т. д.

Обозначая чертой сверху изображение функции по Лапласу относительно t, найдем коэффициент передачи по концентрации (температуре)[2]. Из (1) для $\bar{u}$ получим:

$$\bar{u}=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}, \tag{3}$$

где $\lambda_{1,2}=\alpha(1\pm\sqrt{1+2p/\alpha})$, A и B — постоянные, определяемые из граничных условий (2):

$$A=\bar{u}_{\text{вх}}\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2}}{(\lambda_2+p)e^{\lambda_2}-(\lambda_1+p)e^{\lambda_1}}\,; \quad B=\bar{u}_{\text{вх}}\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1}}{(\lambda_1+p)e^{\lambda_1}-(\lambda_2+p)e^{\lambda_2}}\,.$$

Подставляя выражения для A и B в (3), получим коэффициент передачи по концентрации от входа объекта до любого сечения x $(0<x\leqslant 1)$:

$$K(p,x)=\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1+\lambda_2 x}-\lambda_2 e^{\lambda_2+\lambda_1 x}}{(\lambda_1+p)e^{\lambda_1}-(\lambda_2+p)e^{\lambda_2}}\,. \tag{4}$$

Легко показать, что в случае бесконечного коэффициента диффузии $(\alpha=0)$ полученный коэффициент передачи совпадает с коэффициентом передачи одноемкостного звена:

$$\lim_{\alpha \to 0} K(p, x) = \frac{1}{1+p}.$$

При отсутствии диффузии ($\alpha = \infty$) уравнение (1) и граничные условия (2) вырождаются в уравнение первого порядка [3], когда объект представляет собой идеальное звено с запаздыванием и коэффициентом передачи e^{-px}.

После несложных преобразований выражение для коэффициента передачи от входа объекта до его выхода ($x = 1$) можно представить так:

$$K(p, 1) = \frac{e^{\alpha}}{(1 + p/\alpha)(1 + 2p/\alpha)^{-1/2} \operatorname{sh} \alpha \sqrt{1 + 2p/\alpha} + \operatorname{ch} \alpha \sqrt{1 + 2p/\alpha}}. \quad (5)$$

До сих пор при теоретическом приближенном моделировании распределенных объектов, описываемых уравнением (1) с граничными условиями (2), шли по пути разбиения всего объекта на ряд одинаковых дискретных одноемкостных звеньев. При этом приближенный коэффициент передачи имел вид:

$$K(p) = \frac{1}{(1 + T_n p)^n}. \quad (6)$$

Если же была известна экспериментально полученная функция переходной проводимости (реакция системы на ступенчатое входное возмущение), то по разработанной методике [1] находили ее приближенное представление с помощью функций переходной проводимости для звеньев с коэффициентом передачи вида

$$K_n(p, 1) = \frac{e^{-p\tau}}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n}, \quad (7)$$

чаще всего ограничиваясь значениями $n = 2{,}3$ при $\tau = 0$ и $n = 1{,}2$ при $\tau > 0$. Представление в виде (7) часто оказывается более простым и удобным для расчета систем регулирования по сравнению с (6), так как для коэффициента передачи вида (7) имеется хорошо разработанная методика расчета.

Однако приближенное выражение вида (7) для коэффициента передачи можно получить непосредственно из (5), не имея экспериментально снятой кривой. В самом деле, разлагая $\operatorname{sh} \alpha \sqrt{1 + 2p/\alpha}$ и $\operatorname{ch} \alpha \sqrt{1 + 2p/\alpha}$ в ряды по $\alpha \sqrt{1 + 2p/\alpha}$, получим из (5) для коэффициента передачи следующее выражение:

$$K(p, 1) = \frac{1}{1 + p + b_2 p^2 + \ldots + b_n p^n + \ldots}, \quad (8)$$

где

$$b_k = \frac{2^{k-1}}{e^{\alpha} \alpha^k k!} \sum_{n=k-1}^{\infty} n(n-1)\ldots(n+2-k)\, \alpha^{2n} \left[\frac{2(n+1-k)}{2n!} + \alpha \frac{2(n+1-k)+k}{2n+1!} \right] \quad (9)$$

$$(k = 2, 3, \ldots).$$

Ряд в знаменателе (8) и ряды (9) для определения b_k сходятся при любых p и α. Из предыдущего ясно, что

$$\lim_{\alpha \to 0} b_k = 0; \qquad \lim_{\alpha \to \infty} b_k = \frac{1}{k!}.$$

При приближенном представлении коэффициента передачи можно ограничиться некоторой степенью p в знаменателе (8):

$$K(p, 1) \simeq K_{n+1}(p, 1) = \frac{1}{1 + p + b_2 p^2 + \ldots + b_{n+1} p^{n+1}}, \tag{10}$$

так как остаток $\sum_{m=n+2}^{\infty} b_m p^m$ будет играть заметную роль при больших p, когда коэффициент передачи мал. Чтобы получить из (10) выражение для коэффициента передачи, по форме совпадающее с (7), сделаем еще одно приближение. Переносим в (7) $e^{-p\tau}$ в знаменатель и требуем, чтобы первые $(n+1)$ членов разложения по p знаменателей (7) и (8) совпадали, что дает $(n+1)$ уравнение для определения a_1, $a_2, \ldots, a_n$ и τ (в качестве τ нужно взять минимальный положительный корень уравнения $a_{n+1} = 0$):

$$a_k = b_k - b_{k-1}\tau + b_{k-2}\frac{\tau^2}{2!} - b_{k-3}\frac{\tau^3}{3!} + \ldots + b_0 \frac{(-\tau)^k}{k!}. \tag{11}$$

Например, при численных значениях $\alpha = 0{,}5$ и $\alpha = 10$ вычисления по (9), (11) дают следующие выражения для приближенных коэффициентов передачи: при $\alpha = 0{,}5$

$$K_4(p, 1) = \frac{1}{1 + p + 0{,}132p^2 + 0{,}603\cdot 10^{-2}p^3 + 0{,}13\cdot 10^{-3}p^4};$$

$$K_3(p, 1) = \frac{e^{-0{,}032p}}{1 + 0{,}968p + 0{,}1p^2 + 0{,}23\cdot 10^{-2}p^3};$$

$$K_2(p, 1) = \frac{e^{-0{,}0584p}}{1 + 0{,}94p + 0{,}0754p^2};$$

$$K_1(p, 1) = \frac{e^{-0{,}142p}}{1 + 0{,}858p};$$

при $\alpha = 10$

$$K_4(p, 1) = \frac{1}{1 + p + 0{,}452p^2 + 0{,}124p^3 + 0{,}023p^4};$$

$$K_3(p, 1) = \frac{e^{-0{,}37p}}{1 + 0{,}63p + 0{,}15p^2 + 0{,}0178p^3};$$

$$K_2(p, 1) = \frac{e^{-0{,}548p}}{1 + 0{,}452p + 0{,}05p^2};$$

$$K_1(p, 1) = \frac{e^{-0{,}691p}}{1 + 0{,}309p}.$$

С целью проверки того, насколько близки процессы, описываемые точным и приближенным коэффициентами передачи, на электронной цифровой машине ГИФТИ В. А. Мироновым для $\alpha = 0{,}5$ и $\alpha = 10$ было проведено известным методом [4] численное решение уравнения (1) с граничными условиями (2) при $u_{вх} = 1(t)$. Значения для функции переходной проводимости, полученные в результате численного решения (φ), и значения приближенных функций переходной проводимости (φ_i) сведены в таблицу 1, из которой видно, что при $\alpha = 0{,}5$

$$|\varphi - \varphi_1| < 0{,}04, \quad |\varphi - \varphi_2| < 0{,}02;$$

при $\alpha = 10$

$$|\varphi - \varphi_1| < 0{,}14, \quad |\varphi - \varphi_2| < 0{,}06, \quad |\varphi - \varphi_3| < 0{,}03.$$

Таблица 1

t	$\alpha = 0{,}5$			$\alpha = 10$			
	φ	$\varphi - \varphi_1$	$\varphi - \varphi_2$	φ	$\varphi - \varphi_1$	$\varphi - \varphi_2$	$\varphi - \varphi_3$
0	0	0	0	0	0	0	0
0,05	0,002	0,002	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
0,10	0,013	0,013	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000
0,15	0,046	0,037	0,007	0,000	0,000	0,000	0,000
0,20	0,085	0,021	0,007	0,000	0,000	0,000	0,000
0,25	0,131	0,013	0,009	0,000	0,000	0,000	0,000
0,30	0,178	0,010	0,010	0,000	0,000	0,000	0,000
0,35	0,225	0,011	0,012	0,001	0,001	0,001	0,001
0,40	0,270	0,011	0,014	0,002	0,002	0,002	0,001
0,45	0,312	0,011	0,016	0,007	0,007	0,007	0,003
0,50	0,352	0,011	0,016	0,016	0,016	0,016	0,002
0,55	0,389	0,011	0,016	0,036	0,036	0,036	0,001
0,60	0,425	0,012	0,016	0,067	0,067	0,053	0,001
0,65	0,459	0,013	0,017	0,110	0,110	0,052	0,000
0,70	0,490	0,013	0,017	0,164	0,138	0,042	0,003
0,75	0,519	0,012	0,016	0,227	0,053	0,033	0,008
0,80	0,547	0,012	0,014	0,296	0,002	0,025	0,013
0,85	0,574	0,012	0,016	0,371	—0,031	0,022	0,024
0,90	0,599	0,013	0,016	0,443	—0,050	0,020	0,029
0,95	0,623	0,013	0,016	0,511	—0,054	0,017	0,029
1,00	0,645	0,013	0,017	0,575	—0,057	0,016	0,029
1,10	0,687	0,017	0,017	0,691	—0,042	0,019	0,026
1,20	0,722	0,018	0,015	0,786	—0,020	0,025	0,020
1,40	0,783	0,017	0,015	0,905	0,003	0,026	0,003
1,60	0,830	0,014	0,013	0,960	0,012	0,020	—0,007
1,80	0,866	0,012	0,011	0,986	0,014	0,013	—0,005
2,00	0,896	0,011	0,011	0,996	0,011	0,008	0,000
2,20	0,918	0,010	0,010	0,998	0,006	0,001	0,002
∞	1	0	0	1	0	0	0

Из изложенного следует, что

1) предложенное приближенное представление коэффициента передачи особенно эффективно при малых значениях параметра α ($\alpha \not\ll 1$);

2) при $\alpha \leqslant 10$ с ошибкой в функции переходной проводимости, не превышающей 0,03, для приближенного коэффициента передачи можно пользоваться выражением:

$$K_3(p, 1) = \frac{e^{-p\tau}}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3},$$

где a_1, a_2, a_3 и τ определяются соотношениями (9), (11).

ЛИТЕРАТУРА

1 Р. Ольденбург и Г. Сарториус, Динамика автоматического регулирования, Госэнергоиздат, М.—Л., 1949.
2. М. И. Конторович, Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях, ГИТТЛ, М., 1955.
3 Я. Такахаси, Автоматическое регулирование, Сб. материалов конференции в Крэнфильде, ИЛ, М., 1954.
4 В. Э. Милн, Численное решение дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1955.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 ноября 1959 г.