ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том III, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1960*

К ВОПРОСУ О НЕРАВНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ

З. Фридрих

На основе теории приближения функций предлагаются новые методы дискретизации непрерывных сигналов с неравноотстоящими точками отсчетов. Интервалы между отсчетами связаны со степенью приближающего многочлена допустимой величиной погрешности приближения, причем отсчеты производятся не по мгновенным значениям сигнала, а по приближающей функции.

В настоящее время в системах автоматического контроля и регистрации все больше применяется дискретная техника. Последняя, как известно, улучшает условия передачи, хранения и переработки информации. Сами измеряемые объекты обладают непрерывной природой, и информация от них поступает в виде непрерывных от времени сигналов. Поэтому возникает задача представления непрерывного сигнала, получаемого от источника информации, в виде последовательности чисел, необходимых для правильной работы дискретного потребителя информации. В общем случае это преобразование производит устройство A/D, включенное между источником и потребителем информации (рис. 1).

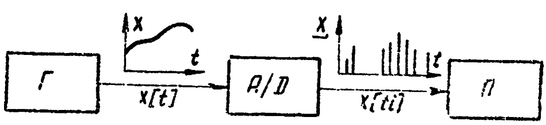

Рис. 1. Основная схема переработки информации: $Г$ — источник информации; A/D — блок дикретизации и квантования; $П$ — потребитель информации; $x(t)$ — непрерывный во времени сигнал; $\{x(t_i)\}$ — последовательность чисел.

В работе этого устройства можно выделить две фазы: дискретизацию, т. е. определение момента времени, в который нужно произвести очередной отсчет, и квантование — измерение и выдачу соответственно закодированного мгновенного значения сигнала. В связи с этим его можно разбить на две части, как показано на рис. 2. Часть квантования A/D (преобразователь непрерывных величин в дискретные), довольно хорошо разработана и освещена (см. обзоры [1,2]).

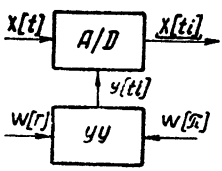

Рис. 2. Схема блока дискретизации и квантования A/D — устройство преобразования мгновенного значения сигнала $x(t)$ в соответствующий эквивалент $x(t_i)$; $УУ$ — управляющее устройство (определение момента отсчета); $y(t_i)$ — сигнал разрешения отсчета; $W(П)$ и $W(Г)$ — внешние воздействия соответственно со стороны потребителя $П$ и источника $Г$ информации.

Работа устройства дискретизации $УУ$ связана с принципом дискретизации, положенным в основу представления непрерывного сигнала последовательностью чисел. В случае равномерной дискретизации в качестве $УУ$ можно взять просто генератор импульсов $y(t_i)$ с постоянной частотой повторения, определенной по теореме Котельникова [3] или Железнова [4].

Применение принципов равномерной дискретизации в системах автоматического контроля и регистрации приводит к большой избыточности количества проводимых отсчетов и излишней работе устройств записи и переработки данных, так как сигналы, подлежащие дискретизации, характеризуются большим разбросом скорости изменения. Для предотвращения такой загрузки устройств автоматического контроля и регистрации можно предложить две меры: или включение между устройством A/D и потребителем информации соответствующих устройств предварительной переработки данных, на выходе которых появится меньшее, необходимое в данных условиях количество отсчетов, или введение дискретизации с неравноотстающими моментами выборок.

В случае неравномерной дискретизации устройство *УУ* получается более сложным, так как необходимо непрерывно наблюдать за воздействиями как со стороны источника информации $W(Г)$, так и потребителя $W(П)$. Однако благодаря текущему сравнению дискретизируемого сигнала с требованиями потребителя можно получить предельное уменьшение избыточности отсчетов.

В настоящее время применяется один простейший способ неравномерной дискретизации — квантование по уровню [5]. Здесь фиксируются некоторые уровни диапазона изменения сигнала $x(t)$ и отсчеты производятся при прохождении сигнала через эти уровни. В момент отсчета t_i производится измерение амплитуд сигнала $x(t_i)$ и эти величины используются для восстановления на приемном конце непрерывной функции $\bar{x}(t)$, соответствующей первоначальному сигналу $x(t)$.

Погрешность представления сигнала $x(t)$ функциями $\bar{x}(t)$ определяется формулой

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leqslant 2\varepsilon_0,$$

где $2\varepsilon_0$ — расстояние между фиксированными уровнями диапазона $x(t)$.

Следует подчеркнуть, что при определении интервала существования приближающей функции $\bar{x}(t)$ допустим некоторый произвол, как это указано на примерах рис. 3 (здесь принят в качестве $\bar{x}(t)$ многочлен нулевой степени). Этот факт вызван тем, что в этом принципе дискретизации ничего не говорится о построении непрерывной функции $\bar{x}(t)$, точнее, отсчеты никак не связаны с видом функции $\bar{x}(t)$ и областью ее существования.

В предлагаемой работе рассматривается возможность осуществления неравномерной дискретизации непрерывных сигналов на основе приближения многочленами, аргументом которых является время. При этом используется теория приближения функций (см., например, [6–8]).

1. ОБЩАЯ СХЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ СИГНАЛА

Дискретизация непрерывного во времени сигнала $x(t)$ общей длительности T представляет собой разбиение его на некоррелированные отрезки длительности $\tau_i (i = 1, 2, \ldots, N)$, на протяжении которых сигнал $x(t)$ заменяется некоторыми приближенными функциями $\bar{x}_i(t)$. Таким образом, сигнал $x(t)$ приближенно равен сумме $\bar{x}_i(t)$:

$$x(t) \simeq \sum_{i=1}^{N} \bar{x}_i(t), \tag{1}$$

причем

$$\bar{x}_i(t) = \begin{cases} \bar{x}_i(t) & \text{для } t\in\tau_i \\ 0 & \text{для } t\,\overline{\in}\,\tau_i \end{cases} \tag{2}$$

и

$$\sum_{i=1}^{N} \tau_i = T. \tag{3}$$

Функцию $\bar{x}_i(t)$, в свою очередь, можно представить в виде конечного отрезка обобщенного ряда Фурье:

$$\bar{x}_i(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^i \varphi_k(t). \tag{4}$$

Здесь $\varphi_k(t)$ представляют собой наперед заданные функции, по которым производится разложение сигнала $x(t)$, а коэффициенты α_k^i зависят от поведения сигнала на данном отрезке τ_i.

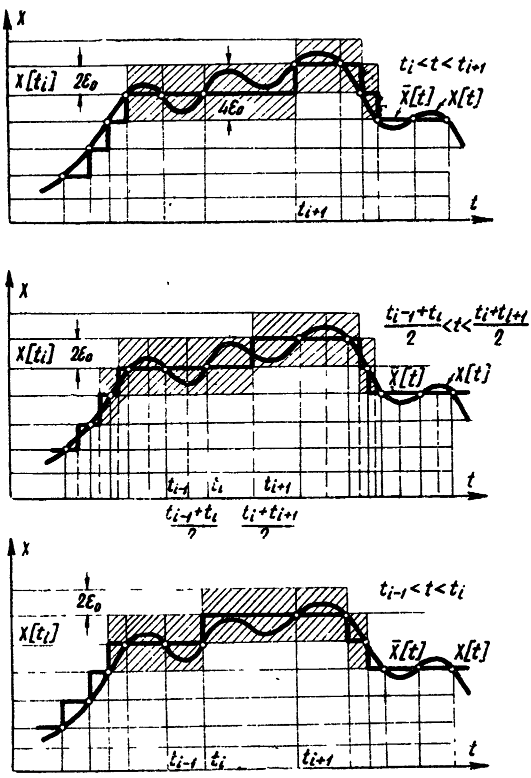

Рис. 3. Возможные случаи определения интервала существования приближающего многочлена $\bar{x}(t)$ при квантовании по уровню.

Для оценки приближения сигнала $x(t)$ функциями $\bar{x}(t)$ необходимо ввести критерий верности приближения. В системах автоматического контроля и регистрации, по-видимому, можно ограничиться следующими критериями:

критерий равномерного приближения

$$\max_{t \in \tau_i} |x(t) - \overline{x}(t)| \leqslant \varepsilon_0, \tag{5}$$

критерий квадратичного приближения

$$\int [x(t) - \overline{x}(t)]^2 \, dt \leqslant \mu_0, \tag{6}$$

критерий интегрального приближения

$$\int |x(t) - \overline{x}(t)| \, dt \leqslant \delta_0. \tag{7}$$

Выбор соответствующего критерия приближения, а также величины допустимой погрешности нужно a priori произвести на основе анализа работы потребителя информации *П*.

На основе приведенной выше схемы разложения сигнала $x(t)$ можно сформулировать принцип неравномерной дискретизации в следующем виде.

Сигнал $x(t)$ общей длительности T разбивается на неравномерные отрезки длительности τ_i, на продолжении которых сигнал заменяется многочленами $\overline{x}_i(t)$, заданной степени n; функции $\overline{x}_i(t)$ удовлетворяют условию наилучшего приближения, т. е. при данных прочих условиях приближают сигнал $x(t)$ на каждом отрезке τ с минимальной погрешностью. При этом погрешность этого приближения в смысле соответствующего критерия верности представления на каждом отрезке τ равна наперед заданной величине.

На каждом из N отрезков τ_i многочлен $\overline{x}_i(t)$ определяется $n+1$ коэффициентами α_k^i, Эти $n+1$ чисел и используются для дискретного представления сигнала $x(t)$.

Для того, чтобы блок дискретизации *УУ* мог осуществлять предлагаемую дискретизацию непрерывного сигнала $x(t)$, он должен циклически повторять следующие операции:

1) непрерывно вычислять текущую функцию наилучшего приближения $\tilde{\overline{x}}_i(t)$ (знаком $\sim$ обозначена зависимость функции $\tilde{\overline{x}}_i(t)$ от времени, прошедшего от начала очередного цикла);

2) вычислять текущую величину погрешности этого приближения;

3) сравнивать текущую погрешность с заданной допустимой и в моменте их равенства зафиксировать данное значение функции $\tilde{\overline{x}}_i(t)$; этот момент будет соответствовать концу очередного промежутка τ_i, а зафиксированное значение $\tilde{x}_i(t)$ — искомому значению приближающего многочлена $\overline{x}_i(t)$.

На этом цикл заканчивается и устройство *УУ* начинает новый цикл для следующего отрезка τ_{i+1}.

Для полного определения режима работы блока дискретизации необходимо ответить на ряд вопросов: что понимать под условием наилучшего приближения? Как вычислить функции $\tilde{\overline{x}}_i(t)$ и текущую величину погрешности? Как получить $n+1$ чисел, характеризующих многочлен $\overline{x}_i(t)$? Ответы зависят от выбора критерия верности приближения. Поэтому в дальнейшем рассмотрим строение принципа неравномерной дискретизации для основных критериев приближения.

2. РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Критерий равномерного приближения (5) является наиболее жестким, поскольку он требует, чтобы разница между сигналом $x(t)$ и приближающей функцией $\bar{x}(t)$ ни в какой точке не превосходила заданной величины ε_0. В системах автоматического контроля и регистрации это требование можно встретить чаще других, так как обычно недопустимы незарегистрированные выбросы контролируемого параметра, могущие привести к нарушению производственного процесса.

Приближающих многочленов $\bar{x}(t)$ степени не выше n, удовлетворяющих условию (5), может вообще существовать бесконечное количество. Однако существует некоторый оптимальный многочлен, определение которого дано Чебышевым в следующей теореме [7]. Для того, чтобы многочлен $\bar{x}(t)$ степени не выше n давал наилучшее равномерное приближение данной функции $x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы разность $x(t) - \bar{x}(t)$ достигала в промежутке τ своего максимума по модулю, по крайней мере, $n+2$ раза, последовательно при этом меняя знак. При этом задача наилучшего приближения посредством многочлена данной степени имеет единственное решение.

Начало искомого промежутка τ_i, очевидно, должно совпадать с моментом конца предыдущего интервала τ_{i-1}. Для избежания необходимости передачи в этот момент двух чисел, определяющих значение функции $\bar{x}(t)$ справа и слева на стыке двух смежных интервалов τ, естественно ввести добавочное требование, чтобы эти значения были либо равны друг другу, либо состояли в определенном отношении (например, их разница представляла постоянную величину, равную удвоенной величине допустимой погрешности ε_0). Это требование равнозначно требованию, чтобы функция $\bar{x}_i(t)$ в начале интервала τ_i принимала некоторое фиксированное значение, зависящее от значения функции $\bar{x}_{i-1}(t)$. Это ограничивает возможность построения оптимального многочлена Чебышева. Например, невозможно построить многочлен степени $n = 0$, удовлетворяющий условиям теоремы Чебышева на участках, где сигнал $x(t)$ немонотонный (см. на рис. 4 интервал τ_{i+3}).

Поэтому будем считать, что наилучшее приближение сигнала $x(t)$ с учетом указанного требования будет давать тот многочлен $\bar{x}(t)$, для которого разность $x(t) - \bar{x}(t)$ достигает по модулю своего максимума ε_0 в промежутке τ, по крайней мере, $n+1$ раз, последовательно при этом меняя знак.

Сложность алгоритма вычисления функции $\tilde{\bar{x}}_i(t)$, удовлетворяющей приведенному условию оптимальности, зависит от степени n. В случае приближения многочленом нулевого порядка ($n = 0$) сигнал $x(t)$ разбивается на интервалы $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, и функции $\tilde{x}_i(t) = \bar{x}_i(t) = \mathrm{const}$ определяются следующим образом:

$$\tilde{\bar{x}}_i(t) = \bar{x}_i(t) = x(t_i) \pm \varepsilon_0, \tag{8}$$

$$\bar{x}_i(t) = \bar{x}_{i-1}(t) \pm 2\,\varepsilon_0. \tag{8a}$$

В этих формулах знак + или — ставится в зависимости от поведения сигнала $x(t)$ на протяжении предыдущего интервала τ_{i-1}. Текущая величина погрешности приближения ε вычисляется по формуле (5), т. е.

$$\varepsilon = |x(t) - \bar{x}_i(t)|, \tag{5a}$$

а момент конца интервала τ_i определяется равенством

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \tag{9}$$

или, если это выразить значениями сигнала $x(t)$, соотношением:

$$|x(t) - x(t_i)| = \begin{cases} 2\varepsilon_0 \\ 0 \end{cases}. \tag{9a}$$

Равенства (8a) и (9a) указывают на необходимость наблюдения не только за амплитудой сигнала $x(t)$, но и за знаком его первой производной $\dot{x}(t)$.

Пример дискретизации с приближением многочленом нулевого порядка показан на рис. 4, а описание алгоритма работы устройства *УУ* при помощи логических схем [9–11] в приложении 1. Сравнение рис. 3 и 4а показывает внешнее сходство этих способов дискретизации, так как моменты отсчетов определяются прохождением сигнала $x(t)$ через фиксированные уровни с расстоянием в $2\varepsilon_0$. Однако использование для определения приближающего многочлена $x(t)$ не просто амплитуды сигнала $x(t_i)$ в моменты отсчетов, а некоторых других величин $x(t_i) \pm \varepsilon_0$ позволяет в предлагаемом методе дискретизации вдвое уменьшить погрешность.

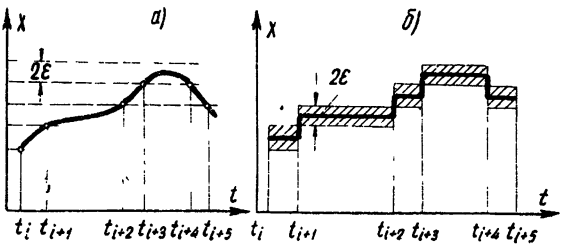

Рис. 4 Дискретизация (*а*) и приближение (*б*) сигнала $x(t)$ многочленом $\bar{x}(t)$ нулевой степени.

Этот выигрыш получается за счет включения в алгоритм работы *УУ* знака первой производной сигнала $\dot{x}(t)$ и различения отсчетов, возникающих при $|x(t) - \bar{x}_i(t)| = 2\varepsilon_0$ и $|x(t) - \bar{x}_i(t)| = 0$. Для сравнения приводим алгоритм работы *УУ* при квантовании по уровню:

$$\downarrow pDB\omega \uparrow,$$

где D — оператор измерения значения $x(t)$, B — оператор запоминания этого значения, p — логические условия, принимающие значение 1, когда $|x(t) - \bar{x}_i(t)|$ равно $2\varepsilon_0$ или 0.

При линейном приближении ($n = 1$) алгоритм вычисления текущей функции $\tilde{\tilde{x}}_i(t)$ получается очень сложным, так как при его строении необходимо учитывать изменение первой производной $\dot{x}(t)$ и знак второй производной $\ddot{x}(t)$. Описание алгоритма работы устройства *УУ* для дискретизации с линейным приближением приведено в приложении 1, а пример дискретизации показан на рис. 5.

Для параболических приближений ($n = 2$ и выше) алгоритм вычисления функции $\tilde{\tilde{x}}_i(t)$ не найден. Причиной является невозможность однозначного мгновенного варьирования одновременно всех коэффициентов α_k с индексами $k \geqslant 1$ в общей формуле функции

$$\tilde{\tilde{x}}_i(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n \tag{10}$$

согласно текущим изменениям сигнала для получения условия оптимального приближения (первый член α_0 зависит в (10) от значения сигнала $x(t)$ в конце предыдущего интервала τ_{i-1} и является постоянным).

При восстановлении непрерывной функции $\bar{x}(t)$, заменяющей первоначальный сигнал $x(t)$, можно воспользоваться общей формулой Лагранжа:

$$\bar{x}_i(t) = L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(i)} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{n} \frac{t - t_m}{t_k - t_m}, \tag{11}$$

где коэффициенты $\alpha_k^{(i)}$ связаны со значениями сигнала $x(t)$ в моменты отсчетов t_k:

$$\alpha_k^{(i)} = x(t_k) \pm \varepsilon_0. \tag{12}$$

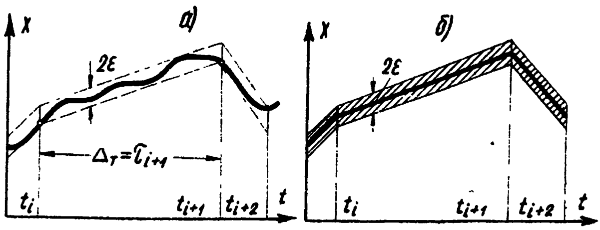

Рис. 5. Дискретизация (*а*) и приближенное воспроизведение (*б*) сигнала $x(t)$ многочленом $\bar{x}(t)$ первой степени (линейное приближение).

На протяжении интервала τ нужно производить $n+1$ отсчетов. В обоих рассмотренных вариантах приближения они совпадают с концами интервала дискретизации, причем в случае $n=0$ используется один отсчет (в начале интервала τ), а при $n=1$ — оба отсчета.

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Задача приближения по этому критерию сводится к выбору такой функции $\bar{x}(t)$ при заданном интервале приближения или к определению такой длины интервала, если известна функция $\bar{x}(t)$, чтобы

$$I = \int_0^{\tau} |x(t) - \bar{x}(t)|\, d\psi(t) \leqslant \delta_0. \tag{13}$$

где интегральный вес $\psi(t)$ определяет качество приближения по времени. Для $\psi(t) = t/\tau$, что отвечает приближению, равномерному по оси времени, (13) переходит в следующую формулу:

$$I = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} |x(t) - \bar{x}(t)| \partial t \leqslant \delta_0. \tag{14}$$

Такой критерий равнозначен требованию, чтобы среднее отклонение сигнала $x(t)$ и функция $\bar{x}(t)$ не превосходило величины δ_0, т. е. среднее значение

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leqslant \delta_0. \tag{15}$$

По теореме Маркова [6] задача нахождения функции $\bar{x}(t)$, наилучшей в смысле этого критерия, имеет единственное решение. Для этого нужно приравнять нулю частные производные от I по коэффициентам

α_k многочлена $\bar{x}(t)$ (из (4)) и из полученной системы уравнений вычислить значения этих коэффициентов:

$$\{\partial I/\partial\alpha_k = 0\} \to \alpha_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{16}$$

Возвращаясь к задаче построения принципа дискретизации по этому критерию, рассмотрим условия работы соответствующего *УУ*. Момент отсчета должен определяться условием (14). Поэтому *УУ* должно непрерывно вычислять текущее значение величины I_t и, когда наступит равенство $I_t = \delta_0$, разрешить отсчет. Величину I_t можно вычислить по формуле:

$$I_t = \frac{1}{t}\int_0^t |x(t) - \bar{x}(t)| dt = \frac{\varkappa}{t}\Bigg[\int_0^{t^1}[x(t) - \bar{x}(t)]\, dt + \int_{t^1}^{t^2}[\bar{x}(t) - x(t)]\, dt + \ldots + \int_{t^l}^{t}[x(t) - \bar{x}(t)]\, dt\Bigg], \tag{17}$$

где $\varkappa = \pm 1$, t^k — моменты времени, в которых $x(t^k) = \bar{x}(t^k)$ $(0 < t^k < t)$, 0 — момент последнего отсчета (начало интервала дискретизации).

Вместе с тем *УУ* должно непрерывно вычислять коэффициенты α_k по (16) и генерировать соответствующую им функцию $\bar{x}(t)$. Это значит, что моменты t^k не являются фиксированными; они меняются во время нарастания аргумента t, и все вычисление I_t нужно производить сначала. Очевидно, что для этого необходимо запомнить весь сигнал $x(t)$, начиная с момента начала интервала дискретизации.

Последнее обстоятельство вместе со сложным арифметическим устройством делают сомнительным практическое использование этого критерия для построения принципа дискретизации, тем более, что критерий минимальной суммы абсолютных отклонений не имеет преимуществ относительно других степенных приближений.

5. КВАДРАТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В этом случае требуется, чтобы на интервале τ сумма квадратов отклонения сигнала $x(t)$ и приближающей функции $\bar{x}(t)$ относительно данного интегрального веса $\psi(t)$ не превышала заданной величины μ_0, т. е.

$$I = \int_0^\tau [x(t) - \bar{x}(t)]^2\, d\psi(t) \leqslant \mu_0 . \tag{18}$$

Этот критерий тоже называют эффективным критерием, так как если рассматривать разность $x(t) - \bar{x}(t)$ как некоторый сигнал ошибки, то в случае $\bar{x}(t)$, определенной при условии (18), получается сигнал, эффективное значение которого на протяжении τ является наименьшим (равным μ_0).

Работа *УУ* в этом случае сводится к вычислению текущей функции $\tilde{x}(t)$ заданной степени n, удовлетворяющей условию минимального значения I_t, т. е, к вычислению наилучшего приближающего данный отрезок сигнала $x(t)$ и одновременно текущего значения интеграла I_t. Момент конца очередного интервала дискретизации тогда будет определяться условием

$$I_t = \mu_0. \tag{19}$$

Сами отсчеты при этом будут производиться не по сигналу $x(t)$, а по его приближению $\bar{x}(t)$. Очевидно, что в качестве отсчетов можно передавать также коэффициенты α_k, определяющие функцию $\tilde{x}(t)$ в момент конца интервала. Этот способ более удобен при приближении многочленами высших степеней n.

Функция $\approx x(t)$ определяется по формуле (16). Для примера в качестве функции $\varphi_k(t)$ (4) примем линейные комбинации последовательных степеней аргумента t и ограничимся линейным приближением, т. е. возьмем $n=1$. В этом случае функция $\bar{x}_i(t)$ имеет вид:

$$\bar{x}_i(t)=\alpha_0+\alpha_1 t. \tag{20}$$

Чтобы избежать разрывов $\bar{x}(t)$ в точках отсчетов, необходимо принять добавочное условие фиксированного значения $\bar{x}_i(0)$ в начале интервала дискретизации, равное значению функции $\bar{x}_{i-1}(\tau)$ в конце предыдущего интервала. При этих условиях получаем следующие уравнения: значение приближающей функции $\bar{x}_i(t)$ в конце интервала дискретизации, т. е. в момент отсчета, равно

$$\bar{x}_i(\tau)=\frac{3}{2}\beta_1-\frac{1}{2}\beta, \tag{21}$$

а текущее значение величины интеграла I_t есть

$$I_t=\beta_3+\frac{1}{4}\beta^2+\frac{3}{2}\beta\beta_1-2\beta\beta_2-\frac{3}{4}\beta_1^2, \tag{22}$$

где β — значение $\bar{x}_i(0)=\bar{x}_{i-1}(\tau)$;

$$\beta_1=\frac{2}{t^2}\int_0^t tx(t)dt;\quad \beta_2=\frac{1}{t}\int_0^t x(t)dt;\quad \beta_3=\frac{1}{t}\int_0^t x^2(t)dt$$

(здесь начало интервала дискретизации обозначено знаком 0; t — текущее значение аргумента).

6. УСЛОВИЯ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ СИГНАЛА

Принцип неравномерной дискретизации сигнала $x(t)$ общей длительности T представляет собой разбиение его на отрезки длины τ_i, внутри которых сигнал представлен многочленом $\bar{x}_i(t)$ степени n. При этом $\bar{x}_i(t)$ является наилучшим приближающим многочленом относительно выбранного критерия приближения и заданной величины погрешности. Сама функция $\bar{x}_i(t)$, в свою очередь, представляется последовательностью $n+1$ отсчетов, следующих друг за другом через интервалы $\Delta_j^{(i)} (j=1, 2,\ldots, n)$.

Для восстановления на приемном конце функции $\bar{x}_i(t)$ нужно сложить все $n+1$ отсчетов по общей формуле (4). Отсюда следует, что процесс восстановления $\bar{x}_i(t)$ на любом отрезке τ_i может начаться только после приема всех $n+1$ отсчетов, определяющих эту функцию, т. е. для восстановления необходима задержка, равная длительности τ_i. Единственный путь уменьшения этой задержки — это выбор низкой степени многочлена $\bar{x}_i(t)$. Поэтому можно рекомендовать выбор $n=0$ (задержка тоже равна нулю) или $n=1$ (тогда задержка равна длительности $\Delta_T^{(i)}=\tau_i$).

Для непрерывного воспроизведения всего сигнала $\bar{x}(t)$ следует составить сумму (1). Величину необходимой при этом задержки ϑ воспроизведения можно определить из требования отсутствия на стыке двух смежных функции $\bar{x}_i(t)$ „пустых“ мест:

$$\sum_{i=1}^{k} \tau_i \leqslant \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i + \vartheta \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, N). \tag{23}$$

Отсюда получаем, что

$$\vartheta \geqslant \sum_{i=1}^{k} \tau_i - \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i \quad \text{или} \quad \vartheta \geqslant \max\left[\sum_{i=1}^{k} \tau_i - \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i\right] = \tau_{i_{\text{макс}}} \tag{24}$$

т. е. минимальная величина задержки, необходимой для непрерывного восстановления $\bar{x}(t)$, равна максимально возможной длительности отрезка τ. Для равноотстоящей дискретизации, когда все τ_i равны друг другу, получаем:

$$\vartheta_{\text{равн}} = \tau. \tag{25}$$

Из (24) следует, что для непрерывного воспроизведения функции $\bar{x}(t)$, приближающей сигнал $x(t)$, необходимо ввести ограничение длительности интервала τ, равное допустимой максимальной задержке воспроизведения.

Следует подчеркнуть, что наличие неизбежной задержки при воспроизведении и использовании информации резко уменьшает возможность применения неравномерной дискретизации, ограничивая его случаем, когда $n = 0$ (т. е. когда задержка равна нулю). Неравномерная дискретизация, несомненно, окажется полезной при разном виде записи, например, при цифровой, печатной или графической, в условиях, когда информация используется много позже момента ее записи.

В заключение проведенного анализа неравномерной дискретизации можно отметить следующие ее преимущества и недостатки. Преимуществами являются:

1) повышение удельной информационной содержательности отсчетов, так как нет повторяющихся отсчетов;

2) обеспечение постоянства погрешности в приближенном представлении сигнала (при этом предел допустимой погрешности „используется“ полностью; существует возможность вести дискретизацию по заданной характеристике погрешности);

3) возможность экономии необходимого для регистрации носителя [12].

К недостаткам непрерывной дискретизации можно отнести следующее:

1) необходимость непрерывного наблюдения сигнала $x(t)$;

2) сложность УУ вследствие громоздких вычислений;

3) неизбежная задержка в использовании полученной дискретной информации;

4) необходимость датирования моментов отсчетов при регистрации;

5) сложность непрерывно воспроизводящей аппаратуры (устройства с переменными параметрами).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Описание алгоритма работы *УУ* при помощи логических схем

В случае, когда приближающий многочлен $\bar{x}_i(t)$ имеет нулевой порядок, алгоритм работы *УУ* состоит в следующем.

Операторы управления: B — оператор записи в фиксирующий элемент значения сигнала $x(t)$ в момент интервала t_0; $D(+)$, $D(-)$, — операторы измерения соответственного значения $x(t)+\varepsilon_0$ и $x(t)-\varepsilon_0$.

Логические условия:

$$p_1\begin{pmatrix}|x-k|=2\varepsilon_0\\ |x-k|=0\end{pmatrix}\begin{matrix}=1\\=0\end{matrix};\quad p_2\begin{pmatrix}\operatorname{sgn}\dot{x}(t_0)=+1\\ \operatorname{sgn}\dot{x}(t_0)=-1\end{pmatrix}\begin{matrix}=1\\=0\end{matrix};$$

ω — всегда ложное условие,

где $k=x(t_0)$ — значение сигнала $x(t)$ вначальный момент интервала дискретизации t_0, записанное в фиксирующем элементе, $x=x(t)$ — текущее значение сигнала $x(t)$, $\operatorname{sgn}\dot{x}(t_0)$ — знак первой производной в момент t_0.

Логическая схема:

$$\overset{3}{\downarrow} p_1 \overset{1}{\uparrow} B\ p_2 \overset{2}{\uparrow}\ \overset{4}{\downarrow} D(+)\,\omega \overset{3}{\uparrow}\ \overset{1}{\downarrow} p_2 \overset{4}{\uparrow}\ \overset{2}{\downarrow} D(-)\,\omega \overset{3}{\uparrow}\ .$$

Описание алгоритма управления *УУ* при помощи логической схемы для линейного приближения

Для линейного приближения алгоритм управления *УУ* при помощи логической схемы сводится к следующему.

Операторы управления: B_1, B_2 — операторы записи производной сигнала $x(t)$ фиксирующим элементом Φ_1 или Φ_2, $D(+)$, $D(-)$ — операторы измерения величины $x(t)+\varepsilon_0$ или $x(t)-\varepsilon_0$.

Логические условия:

$$p_1\begin{pmatrix}f=2\varepsilon\\ g_2=0\\ g_1=0\end{pmatrix}\begin{matrix}\to 1\\ \to 2\\ \to 3\end{matrix};\qquad p_4\begin{pmatrix}h=0\\ g_1=0\end{pmatrix}\begin{matrix}=0\\=1\end{matrix};$$

$$p_5\begin{pmatrix}h=2\varepsilon\\ g_2=0\end{pmatrix}\begin{matrix}=0\\=1\end{matrix};$$

$$p_2\begin{pmatrix}f=0\\ g_1=0\\ g_2=0\end{pmatrix}\begin{matrix}\to 4\\ \to 3\\ \to 2\end{matrix};\qquad p_6\begin{pmatrix}y_+\ \dot{x}_+\ ;\ y_-\ \ddot{x}_-\\ y_+\ \ddot{x}_-\ ;\ y_-\ \ddot{x}_+\end{pmatrix}\begin{matrix}=0\\=1\end{matrix};$$

$$p_3\begin{pmatrix}f=0\\ f=2\varepsilon\end{pmatrix}\begin{matrix}=0\\=1\end{matrix};\qquad p_7\begin{pmatrix}y_-\\ y_+\end{pmatrix}\begin{matrix}=0\\=1\end{matrix},$$

где

$$g_1=|\dot{x}(t)-\dot{x}^{(1)}(t)|;\ h=|x(t)-\bar{x}(t)|;\ \bar{x}(t)=x(t_0)+\dot{x}^{(i)}(t)\,t;$$

$$g_2=|\dot{x}(t)-\dot{x}^{(2)}(t)|;\ f=|x(t)-\overset{\approx}{x}(t)|;\ \overset{\approx}{x}(t)=x(t_0)+\dot{x}(t)t.$$

Логическая схема:

$$\overset{9}{\downarrow} p_6 \overset{4}{\uparrow} p_3 \overset{4}{\uparrow}\ \overset{1}{\downarrow} B_1 \overset{3}{\downarrow} p_4 \overset{5}{\uparrow} p_2 \overset{2,3,4}{\Uparrow}\ \overset{4}{\downarrow} B_2 \overset{2}{\downarrow} p_5 \overset{7}{\uparrow} p_1 \overset{1,2,3}{\Uparrow} \overset{5}{\downarrow} p_7 \overset{6}{\uparrow}\ \overset{8}{\downarrow} D(+)\,\omega \overset{9}{\uparrow}\ \overset{7}{\downarrow} p_7 \overset{8}{\uparrow}\ \overset{6}{\downarrow} D(-)\,\omega \overset{9}{\uparrow},$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Рыжов, Автоматическое управление и вычислительная техника, под ред Солодовникова, в 1, МАШГИЗ, М., 1958.
2. А. П. Таланцев, Автоматика и телемеханика, **20**, 361 (1959).

3. В. А. Котельников, Материалы радиосекции к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции связи, 1933.
4. Н. А. Железнов, Труды ЛКВВИА, вып. 191, 1957.
5. Ф. Е. Темников, Диссертация, МЭИ, 1959.
6. И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
7 Ш Е. Микеладзе, Численные методы математического анализа, ГИТТЛ, М., 1953.
8. В. Л Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, ГИТТЛ, М., 1954.
9. А. А. Ляпунов, Математика в СССР за сорок лет, 1, ГИФМЛ, М., 857, 1959.
10 А А. Ляпунов, Проблемы кибернетики, вып, 1, ГИФМЛ, М., 46, 1958.
11 Ю И Янов, Проблемы кибернетики, вып. 1, ГИФМЛ, М, 75, 1958.
12. Ф Е. Темников, Автоматические регистрирующие приборы, Машгиз, М., 1954

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
23 ноября 1959 г.