

ПОСТРОЕНИЕ ОГИБАЮЩИХ РЕЗОНАНСНОЙ КРИВОЙ ЦЕПОЧЕЧНОГО ФИЛЬТРА

А. Б. Гур-Мильнер

Даны формулы для расчета резонансной кривой колебательной цепочки из одинаковых звеньев. Выведены уравнения огибающих резонансной кривой. Приведено упрощение формул для случая, когда потери энергии имеют место только на концах цепочки; в этом случае вид огибающих в полосе прозрачности не зависит от числа звеньев. Построение огибающих позволяет выяснить многие важные свойства резонансной кривой цепочечного фильтра, не прибегая к построению самой кривой.

Способы расчета электрических или механических фильтров обычно излагаются в литературе по электротехнике, радиосвязи и др. на базе общей теории четырехполюсников [1-11]; при этом иногда пользуются алгебраическим аппаратом теории матриц. Для частного случая цепочечных фильтров, составленных из одинаковых звеньев (так называемых однородных цепных схем), в некоторых руководствах, кроме того, опираются на аналогию с длинной линией, если изложение теории длинных линий предшествует рассмотрению цепочечных схем [2].

В то же время в ряде работ, посвященных приложениям общих математических методов, показано, что для цепей из одинаковых звеньев особенно удобен метод, основанный на применении теории уравнений в конечных разностях [12-14]; этот метод, в сущности, используется и в курсах, ссылающихся на теорию длинных линий, а также в некоторых других [15].

Предлагаемые ниже расчетные формулы для исследования резонансной кривой однородной цепной схемы выводятся с помощью уравнений в конечных разностях без применения общей теории четырехполюсников. При этом под резонансной кривой мы понимаем здесь график зависимости амплитуды установившихся колебаний на конце цепочки от частоты синусоидального возбуждения, приложенного в начале цепочки.

1. ИСХОДНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Уточним вид цепочек, которые мы будем рассматривать. Пусть цепь содержит n последовательно соединенных одинаковых звеньев, и, кроме того, еще по одному звену на каждом из концов, причем крайние звенья могут быть отличны от остальных (рис. 1). Таким образом, общее число звеньев будет равно $n + 2$. Обозначим через x_s параметр, изменение которого характеризует колебания в звене с номером s ($s = 0, 1, 2, \dots, n + 1$). нас будет интересовать амплитуда колебаний в последнем звене при условии, что к начальному звену приложено возбуждение вида $f \sin(\omega t)$, где f и ω — постоянные, не зависящие от времени t (при этом не исключается случай, когда f зависит от ω).

Мы будем предполагать, что связь между звеньями может быть математически выражена системой уравнений вида:

$$\begin{aligned} a_0 x_0 - a_1 x_1 &= f \sin \omega t, \\ -b x_{s-1} + a x_s - b x_{s+1} &= 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n), \\ -a_n x_n + a_{n+1} x_{n+1} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $a_0, a_1, a_n, a_{n+1}, a, b$ — линейные дифференциальные (или интегро-дифференциальные) операторы с постоянными коэффициентами.

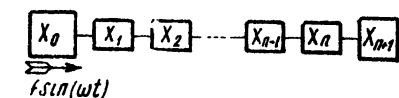


Рис. 1. Однородная цепная схема.

Если, имея в виду расчет установившегося режима, заменим $\sin(\omega t)$ в правой части первого уравнения на $e^{i\omega t}$, то подстановкой $x_s = X_s e^{i\omega t}$ ($s = 0, 1, 2, \dots, n+1$) система (1.1) приведет к алгебраическим уравнениям вида:

$$A_0 X_0 - A_1 X_1 = f, \quad (1.2)$$

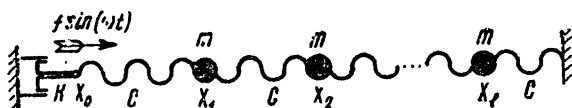
$$-B X_{s-1} + A X_s - B X_{s+1} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (1.3)$$

$$-A_n X_n + A_{n+1} X_{n+1} = 0, \quad (1.4)$$

где коэффициенты при X_s — функции от ω , получаемые из соответствующих дифференциальных операторов заменой операции дифференцирования умножением на $i\omega$ (и операции интегрирования — делением на $i\omega$).

Для примера рассмотрим показанную на рис. 2 цепь из l одина-

Рис. 2. Цепь из l равных масс с демпфером. Массы с пружиной соединены шарнирно.



ковых масс m , способных совершать малые колебания вдоль фиксированной прямой. Массы соединены друг с другом и с неподвижным основанием пружинами одинаковой жесткости c , причем между первой пружиной и основанием имеется демпфер вязкого трения; коэффициент демпфирования равен k . На подвижную часть демпфера действует сила с амплитудой f . Обозначая через x_0 отклонение этой части демпфера и через x_1, x_2, \dots, x_l — отклонения масс от положения равновесия, получим уравнения:

$$k \frac{dx_0}{dt} + c(x_0 - x_1) = f \sin(\omega t),$$

$$m \frac{d^2 x_s}{dt^2} + c(x_s - x_{s-1}) + c(x_s - x_{s+1}) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, l-1), \quad (1.5)$$

$$m \frac{d^2 x_l}{dt^2} + c(x_l - x_{l-1}) = 0.$$

Сравнивая это с (1.1), видим, что в данном случае

$$n+1 = l, \quad a_0 = k \frac{d}{dt} + c, \quad a_{n-1} = a = m \frac{d^2}{dt^2} + 2c, \quad a_1 = a_n = b = c$$

и, следовательно,

$$A_0 = k \omega i + c, \quad A_{n+1} = A = 2c - m \omega^2, \quad A_1 = A_n = B = c. \quad (1.6)$$

Разумеется, систему (1.2) — (1.4) можно составлять и непосредственно, без предварительного составления дифференциальных уравнений, пользуясь символическим методом в той или иной его форме. Рассмотрим, например, электрический фильтр, показанный на рис. 3, где z_0, z_{n+1}, z_a, z_b обозначают комплексные сопротивления соответствующих участков, i_s — токи в соответствующих контурах, f — амплитуда напряжения, подаваемого источником. Обозначая через J_s комплексную амплитуду тока i_s , получим уравнения:

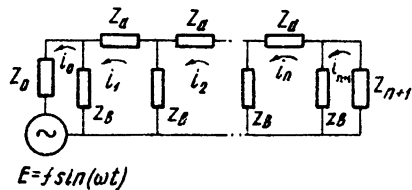


Рис. 3. Пример электрической цепи.

$$\begin{aligned} z_0 J_0 + z_b (J_0 - J_1) &= f, \\ z_a J_s + z_b (J_s - J_{s-1}) + z_b (J_s - J_{s+1}) & \quad (s=1, 2, \dots, n), \\ z_{n+1} J_{n+1} + z_b (J_{n+1} - J_n) &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Сравнивая эту систему с (1.2) — (1.4), находим, что

$$A_0 = z_0 + z_b, \quad A_{n+1} = z_{n+1} + z_b, \quad A = z_a + 2z_b, \quad A_1 = A_n = B = z_b. \quad (1.8)$$

2. РЕЗОНАНСНАЯ КРИВАЯ

Рассматривая (1.3) как уравнение в конечных разностях относительно X_s и полагая $A = 2B \operatorname{ch} \lambda$, найдем общее решение этого уравнения в виде:

$$X_s = \alpha \operatorname{ch} (s \lambda) + \beta \operatorname{sh} (s \lambda). \quad (2.1)$$

Определяя затем коэффициенты α и β из граничных условий (1.2) и (1.4), получим:

$$X_s = \frac{f}{A_1 \Delta} \{ \zeta_n \operatorname{sh} [(n+1-s)\lambda] - \operatorname{sh} [(n-s)\lambda] \} \quad (s=0, 1, \dots, n+1), \quad (2.2)$$

где

$$\Delta = \zeta_1 \zeta_n \operatorname{sh} [(n+1)\lambda] - (\zeta_1 + \zeta_n) \operatorname{sh} [n\lambda] + \operatorname{sh} [(n-1)\lambda], \quad (2.3)$$

$$\zeta_1 = A_0/A_1, \quad \zeta_n = A_{n+1}/A_n, \quad \operatorname{ch} \lambda = A/2B. \quad (2.4)$$

Амплитуду колебаний в последнем звене H найдем, положив в (2.2) $s = n + 1$ и поставив знак модуля:

$$H = \left| \frac{f \operatorname{sh} \lambda}{A_1 \Delta} \right|; \quad (2.5)$$

полученное равенство мы можем рассматривать как уравнение резонансной кривой.

Если, отделяя вещественные и мнимые части, положим $\lambda = \mu + i\nu$, $A/2B = u + iv$, то числа μ и ν определяются соотношениями:

$$\operatorname{ch} \mu \cos \nu = u, \quad \operatorname{sh} \mu \sin \nu = v \quad (2.6)$$

или в явной форме

$$\operatorname{ch} (2\mu) = u^2 + v^2 + \sqrt{(u^2 + v^2 - 1)^2 + 4v^2}, \quad (2.7)$$

$$\cos (2\nu) = u^2 + v^2 - \sqrt{(u^2 + v^2 - 1)^2 + 4v^2}.$$

Для определенности мы будем выбирать значение ν в промежутке $0 \leq \nu \leq \pi$; знак числа μ определится в соответствии со вторым из уравнений (2.6).

Преобразуя равенство (2.3), можем написать:

$$\Delta = M \operatorname{sh}(n\lambda) + N \operatorname{ch}(n\lambda), \quad (2.8)$$

где

$$M = (\zeta_1 \zeta_n + 1) \operatorname{ch} \lambda - (\zeta_1 + \zeta_n), \quad N = (\zeta_1 \zeta_n - 1) \operatorname{sh} \lambda. \quad (2.9)$$

Равенство (2.9), в свою очередь, можем переписать в виде

$$\Delta = R \operatorname{sh}(n\lambda + \rho), \quad (2.10)$$

где R и ρ определяются соотношениями

$$R^2 = M^2 - N^2, \quad \operatorname{tg} \rho = N/M. \quad (2.11)$$

Полагая $\rho = \sigma + i\tau$, а также

$$M = P + iQ, \quad N = S + iT, \quad (2.12)$$

можем вывести из (2.11), что

$$\cos(2\tau) = \frac{P^2 + Q^2 - S^2 - T^2}{|R|^2}, \quad \sin(2\tau) = \frac{2(PT - QS)}{|R|^2}, \quad (2.13)$$

$$\operatorname{th} 2\sigma = V/U, \quad |R|^4 = U^2 - V^2, \quad (2.14)$$

где

$$U = P^2 + Q^2 + S^2 + T^2, \quad V = 2(PS + QT). \quad (2.15)$$

Заметим еще, что, преобразуя первую из формул (2.11) с помощью (2.9), можно получить соотношение:

$$R^2 = (\zeta_1^2 - 2\zeta_1 \operatorname{ch} \lambda + 1)(\zeta_n^2 - 2\zeta_n \operatorname{ch} \lambda + 1). \quad (2.16)$$

Подставляя (2.10) в (2.5) и вспоминая, что $\lambda = \mu + i\nu$, $\rho = \sigma + i\tau$ получим уравнение резонансной кривой в следующей форме:

$$H = \frac{f}{|A_1 R|} \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 \mu + \sin^2 \nu}{\operatorname{sh}^2(n\mu + \sigma) + \sin^2(n\nu + \tau)}}. \quad (2.17)$$

Приведем еще некоторые соотношения, связанные с числом σ . Из (2.14), можно найти, что

$$\operatorname{ch} \sigma = \frac{1}{2|R|} (\sqrt{U+V} + \sqrt{U-V}), \quad (2.18)$$

$$\operatorname{sh} \sigma = \frac{1}{2|R|} (\sqrt{U+V} - \sqrt{U-V})$$

или

$$|R|e^{-\sigma} = \sqrt{U+V}, \quad |R|e^{-\tau} = \sqrt{U-V}. \quad (2.19)$$

Из последних равенств следует также, что

$$e^{4\tau} = (U+V)/(U-V) \quad (2.20)$$

или

$$\sigma = \frac{1}{4} \ln \frac{U+V}{U-V}. \quad (2.21)$$

3. ОГИБАЮЩИЕ

Из уравнения (2.17) видно, что $H_1 \leq H \leq H_2$, где

$$H_1 = \frac{f\sqrt{\text{sh}^2 \mu + \sin^2 \nu}}{|A_1 R \text{ch}(n\mu + \sigma)|}, \quad H_2 = \frac{f\sqrt{\text{sh}^2 \mu + \sin^2 \nu}}{|A_1 R \text{sh}(n\mu + \sigma)|}, \quad (3.1)$$

т. е. что резонансная кривая лежит между двумя более плавными кривыми (3.1). Первая из кривых (3.1) ограничивает резонансную кривую снизу, касаясь ее в тех точках, где $n\nu + \tau = (2k - 1)\pi/2$, а вторая — сверху, касаясь в точках, где $n\nu + \tau = k\pi$ (k — целое число). Кривые (3.1) мы и будем называть огибающими.

По виду огибающих можно судить о ряде важных свойств резонансной кривой: о величине размахов ее резонансных пиков на том или ином участке, о границах резонансных амплитуд и т. п. Так как огибающие — кривые гораздо более простого вида, чем резонансная кривая (особенно при большом числе звеньев), то с их помощью можно упростить рассмотрение различных вопросов, связанных с расчетом цепочечного фильтра.

Чем ближе друг к другу расположены верхняя и нижняя огибающие, тем меньше возможные размахи резонансной кривой. Будем оценивать эту близость, вычисляя отношение ординат двух огибающих (эта величина будет функцией частоты ω). Из (3.1) следует, что

$$H_1/H_2 = \text{th}|n\mu + \sigma|. \quad (3.2)$$

Из (3.1) видно также, что если $\mu \neq 0$, то с увеличением числа звеньев n все ординаты огибающих, а следовательно, и лежащей между ними резонансной кривой, резко убывают. Вместе с тем, как видно из (3.2), уменьшается относительная величина размахов резонансных пиков (увеличивается лишь число резонансов). При достаточно большой величине числа $|n\mu + \sigma|$ огибающие практически сливаются друг с другом и с резонансной кривой, приближенное уравнение которой тогда принимает вид:

$$H = \frac{2f\sqrt{\text{sh}^2 \mu + \sin^2 \nu}}{|A_1 R| e^{|n\mu + \sigma|}}. \quad (3.3)$$

Если же $\mu = 0$, то вид огибающих не зависит от n .

4. СИСТЕМА БЕЗ ДИССИПАТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Если пренебречь рассеянием энергии во всех звеньях цепи, то числа ζ_1, ζ_n и $\text{ch} \lambda$, определенные формулами (2.4), будут вещественными. При этом следует различать два случая.

1) Пусть

$$|A/2B| < 1, \quad (4.1)$$

тогда $\lambda = \mu + i\nu$ будет чисто мнимым числом, т. е. $\mu = 0$, $\lambda = i\nu$. Числа Q, S и σ в формулах (2.12) — (2.15) окажутся равными нулю, и уравнение резонансной кривой (2.17) приведет к виду:

$$H = \frac{f \sin \nu}{|A_1 R \sin(n\nu + \tau)|}, \quad (4.2)$$

причем

$$\cos \nu = A/2B, \quad R^2 = P^2 + T^2, \quad \operatorname{tg} \tau = T/P, \quad (4.3)$$

$$P = (\zeta_1 \zeta_n + 1) \cos \nu - (\zeta_1 + \zeta_n), \quad T = (\zeta_1 \zeta_n - 1) \sin \nu.$$

Те значения ν , при которых $n\nu + \tau = k\pi$, соответствуют резонансным частотам; в них амплитуда H обращается в бесконечность. Соответственно этому уходит на бесконечность и верхняя огибающая. В тех точках, где $n\nu + \tau = (2k - 1)\pi/2$, резонансная кривая касается своей нижней огибающей, уравнение которой имеет вид:

$$H_1 = \frac{f \sin \nu}{|A_1 R|} \quad (4.4)$$

и не зависит от числа звеньев.

2) Пусть теперь

$$|A/2B| > 1. \quad (4.5)$$

Если $A/2B > 1$, то $\nu = 0$, $\lambda = \mu$; если же $A/2B < -1$, то $\nu = \pi$, $\lambda = \mu + i\pi$. Уравнение резонансной кривой получится из (4.2) заменой ν на

$$\mu/i \quad \text{при} \quad A/2B > 1; \quad (4.6)$$

$$\pi + \mu/i \quad \text{при} \quad A/2B < -1.$$

Вместо тригонометрических функций ν в уравнение войдут гиперболические функции μ , и полученная кривая, в отличие от (4.2), будет носить плавный характер, причем с увеличением n все ее ординаты будут стремиться к нулю.

Совокупность частот, удовлетворяющих неравенству (4.1), составляет зону, называемую в общей теории фильтров полосой прозрачности или полосой пропускания; неравенство (4.5) определяет полосу затухания или полосу задерживания.

5. СИСТЕМА С ДИССИПАТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ТОЛЬКО В КРАЙНИХ ЗВЕНЬЯХ

Если учитывать рассеяние энергии только в первом и последнем звеньях цепи, по-прежнему пренебрегая рассеянием в промежуточных звеньях, то величина $\operatorname{ch} \lambda$ опять будет вещественной, но ζ_1 и ζ_n станут комплексными. Определяя, как и раньше, полосу прозрачности неравенством $|A/2B| < 1$, получим в этой полосе $\mu = 0$, но $\sigma \neq 0$, и уравнение резонансной кривой (2.17) примет вид:

$$H = \frac{f \sin \nu}{|A_1 R| \sqrt{\operatorname{sh}^2 \sigma + \sin^2 (n\nu + \tau)}} \quad \left(\cos \nu = \frac{A}{2B} \right), \quad (5.1)$$

где R , σ и τ определяются общими формулами (2.13) — (2.16). Резонансная кривая ограничивается сверху и снизу огибающими, вид которых не зависит от n :

$$H_1 = \frac{f \sin \nu}{|A_1 R \operatorname{ch} \sigma|}, \quad H_2 = \frac{f \sin \nu}{|A_1 R \operatorname{sh} \sigma|}. \quad (5.2)$$

В силу (2.18) уравнения огибающих можно также переписать в форме:

$$H_1 = \frac{f \sin \nu}{|A_1 (\sqrt{U+V} + \sqrt{U-V})|}, \quad H_2 = \frac{f \sin \nu}{|A_1 (\sqrt{U+V} - \sqrt{U-V})|}. \quad (5.3)$$

Уравнение резонансной кривой в полосе затухания ($|A/2B| > 1$) получится из (5.1) заменой (4.6); там кривая будет плавной, причем с увеличением n все ее ординаты резко убывают.

В качестве примера рассмотрим опять механическую цепь, показанную на рис. 2. Из (1.6) и (2.4) находим, что

$$\zeta_1 = 1 + k \omega i/c, \quad \zeta_n = 2 - m \omega^2/c, \quad \text{ch } \lambda = 1 - m \omega^2/2c. \quad (5.4)$$

Полоса прозрачности определится неравенством

$$-1 < 1 - m \omega^2/2c < 1$$

или $0 < \omega < \Omega$, где $\Omega = 2\sqrt{c/m}$; в этой полосе $\lambda = i \nu$ и

$$\cos \nu = 1 - m \omega^2/2c \quad (5.5)$$

или

$$\omega = \Omega \sin (\nu/2). \quad (5.6)$$

Учитывая связь между ω и ν и вводя безразмерный коэффициент $\theta = k/\sqrt{mc}$, можем переписать первые две формулы (5.4) в виде:

$$\zeta_1 = 1 + 2i\theta \sin (\nu/2), \quad \zeta_n = 2 \cos \nu. \quad (5.7)$$

Отсюда, в соответствии с (2.9), (2.12) и (2.15), получается:

$$U = 4(1 + \theta^2) \sin^2 \frac{\nu}{2}, \quad V = 8 \sin^2 \frac{\nu}{2} \cos \frac{\nu}{2}. \quad (5.8)$$

Подставляя это в (5.3), находим уравнения огибающих:

$$H_1 = \frac{f}{2c} \frac{\cos (\nu/2)}{\sqrt{1 + \theta^2 + 2\theta \cos (\nu/2)} + \sqrt{1 + \theta^2 - 2\theta \cos (\nu/2)}}, \quad (5.9)$$

$$H_2 = \frac{f}{2c} \frac{\cos (\nu/2)}{\sqrt{1 + \theta^2 + 2\theta \cos (\nu/2)} - \sqrt{1 + \theta^2 - 2\theta \cos (\nu/2)}}.$$

Подберем коэффициент демпфирования k так, чтобы эти огибающие были возможно ближе друг к другу. Вычислив отношение H_1/H_2 , можно убедиться, что для любого фиксированного ν оно будет ближе всего к единице при $\theta = 1$, т. е. при $k = \sqrt{mc}$. В этом случае уравнения огибающих (5.9) приводятся к виду:

$$H_1 = \frac{f}{2c} \sqrt{1 - \sin \frac{\nu}{2}}, \quad H_2 = \frac{f}{2c} \sqrt{1 + \sin \frac{\nu}{2}} \quad (5.10)$$

или, в силу (5.6),

$$H_1 = \frac{f}{2c} \sqrt{1 - \frac{\omega}{\Omega}}, \quad H_2 = \frac{f}{2c} \sqrt{1 + \frac{\omega}{\Omega}}. \quad (5.11)$$

Опуская для краткости вычисления, укажем, что резонансная кривая при том же условии ($k = \sqrt{mc}$) может быть выражена уравнением:

$$H = \frac{f}{2c} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + \sin \alpha \sin (4l + 3)\alpha}} \quad \left(\sin \alpha = \frac{\omega}{\Omega} \right) \quad (5.12)$$

(здесь $\alpha = \nu/2$). Эта кривая попеременно касается то нижней, то верх-

ней огибающей в тех точках, где $\alpha = \frac{2s+1}{4l+3} \frac{\pi}{2}$. ($s=0, 1, 2, \dots, 2l$).

На границе полосы прозрачности, при $\omega = \Omega$,

$$H = \frac{f}{2c \sqrt{8l^2 + 12l + s}}; \quad (5.13)$$

в полосе затухания ($\omega > \Omega$)

$$H = \frac{f}{2c} \frac{\text{sh } \beta}{\sqrt{\text{ch } \beta \text{ ch } (4l+3)\beta - 1}} \cdot \left(\text{ch } \beta = \frac{\omega}{\Omega} \right). \quad (5.14)$$

На рис. 4 показаны резонансные кривые (5.12) — (5.14) для $l=3$ и $l=4$ с их огибающими (5.11).

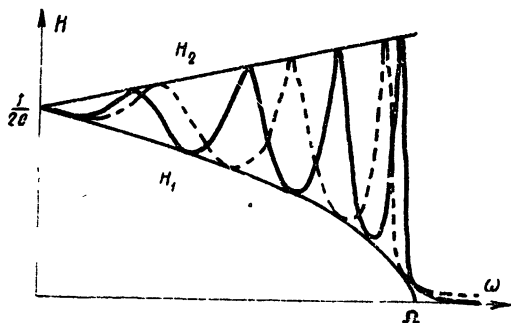


Рис 4. Резонансные кривые (пунктирная— $l=3$, сплошная— $l=4$) и огибающие (H_1 и H_2).

6. СЛАБОЕ РАССЕЯНИЕ ЭНЕРГИИ В КРАЙНИХ ЗВЕНЬЯХ

Дадим приближенное уравнение верхней огибающей для случая, когда рассеяние энергии в крайних звеньях можно считать незначительным, пренебрегая совсем рассеянием в остальных звеньях. Положим $\zeta_1 = \xi_1 + i\gamma_1$, $\zeta_n = \xi_n + i\gamma_n$. При полном отсутствии диссипативных элементов (см. раздел 4) числа γ_1 и γ_2 были равны нулю; теперь же мы должны считать их малыми числами. Если вычислить U и V по формулам (2.15), отбрасывая члены выше первого порядка малости относительно γ_1 и γ_2 , то после несложных преобразований можно получить:

$$U = R_1 R_n, \quad V = 2(\gamma_1 R_n + \gamma_n R_1) \sin \nu, \quad (6.1)$$

где

$$R_1 = \xi_1^2 - 2\xi_1 \cos \nu + 1, \quad R_n = \xi_n^2 - 2\xi_n \cos \nu + 1. \quad (6.2)$$

Пользуясь этим, найдем из (2.14), что с той же степенью приближения можно принять:

$$\sigma = V/2U, \quad |R| = \sqrt{U}. \quad (6.3)$$

Из (5.2), (6.1) и (6.3) видно, что уравнение верхней огибающей можно переписать в форме:

$$H_2 = \frac{f \sqrt{R_1 R_n}}{|A_1| (\gamma_1 R_n + \gamma_n R_1)}. \quad (6.4)$$

Что касается нижней огибающей, а также резонансной кривой на участке полосы затухания, то, как легко проверить, отбрасывая в их уравнениях члены выше первого порядка относительно γ_1 и γ_2 , мы придем к тем же уравнениям, какие были получены в предположении полного отсутствия рассеяния энергии.

7. СИММЕТРИЧНАЯ СИСТЕМА

Вернемся теперь к случаю произвольного (не обязательно слабого) рассеяния энергии в крайних звеньях, по-прежнему пренебрегая рассеянием в промежуточных звеньях, и рассмотрим симметричную цепь, т. е. такую, у которой крайние звенья одинаковы. Для этого допустим, что в дифференциальных уравнениях (1.1) $a_0 = a_{n+1}$, $a_1 = a_n$; тогда и в алгебраических уравнениях (1.2), (1.4) будет $A_0 = A_{n+1}$, $A_1 = A_n$. Обозначим общую величину чисел ζ_1 и ζ_n через ζ и положим

$$\zeta = \xi + i\eta. \quad (7.1)$$

Из (2.15) и (2.12) следует, что $U + V = |M + N|^2$, $U - V = |M - N|^2$. Для полосы прозрачности, где $\lambda = i\nu$, из (2.9) находим:

$$|M + N| = |\zeta^2 e^\lambda + e^{-\lambda} - 2\zeta| = |e^\lambda (\zeta - e^{-\lambda})| = |\zeta - e^{-i\nu}|, \quad (7.2)$$

откуда

$$\sqrt{U + V} = \xi^2 + \eta^2 + 1 - 2\xi \cos \nu + 2\eta \sin \nu. \quad (7.3)$$

Аналогично найдем

$$\sqrt{U - V} = \xi^2 + \eta^2 + 1 - 2\xi \cos \nu - 2\eta \sin \nu. \quad (7.4)$$

Подставляя во вторую из формул (2.18), получаем:

$$\operatorname{sh} \sigma = 2\eta \sin \nu |R|^{-1}. \quad (7.5)$$

Далее, из (7.3), (7.4) и второй из формул (2.14) следует, что

$$|R|^2 = (\xi^2 + \eta^2 + 1 - 2\xi \cos \nu)^2 - 4\eta^2 \sin^2 \nu. \quad (7.6)$$

В силу (7.5) и (7.6) уравнение резонансной кривой (5.1) принимает вид:

$$H = \frac{f \sin \nu}{|A_1| \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + 1 - 2\xi \cos \nu)^2 \sin^2 (n\nu + \tau) + 4\eta^2 \cos^2 (n\nu + \tau)}}. \quad (7.7)$$

При этом, как обычно, $\cos \nu = A/2B$, а τ , как нетрудно вывести с помощью (2.13), можно определять по формуле:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{(\xi^2 + \eta^2 - 1) \sin \nu}{(\xi^2 + \eta^2 + 1) \cos \nu - 2\xi}. \quad (7.8)$$

Огибающие резонансной кривой определяются уравнениями:

$$H_1 = \frac{f \sin \nu}{|A_1| (\xi^2 + \eta^2 + 1 - 2\xi \cos \nu)}, \quad H_2 = \frac{f}{2|A_1 \eta|}. \quad (7.9)$$

8. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

Применим предыдущие формулы к расчету электрической цепи, показанной на рис. 3, предполагая, что цепь симметрична и что активные сопротивления имеются только на концах цепи. Тогда числа z_a и z_b будут чисто мнимыми, но

$$z_0 = z_{n+1} = z_r + z_c, \quad (8.1)$$

где z_r — вещественно и соответствует активной части сопротивления z_0 , а z_c — чисто мнимое и соответствует реактивной части.

В силу соотношений (1.8) полоса прозрачности определится неравенством:

$$|1 + z_a/2z_b| < 1, \quad (8.2)$$

а величина ν — формулой:

$$\cos \nu = 1 + z_a/2z_b. \quad (8.3)$$

При обозначениях, введенных в предыдущем разделе имеем:

$$\zeta = 1 + \frac{z_0}{z_b} = 1 + \frac{z_c}{z_b} + \frac{z_r}{z_b}, \quad (8.4)$$

так что

$$\xi = 1 + z_c/z_b, \quad \eta = z_r/ir_b. \quad (8.5)$$

С помощью (8.3) и (8.5) уравнение резонансной кривой (7.7) приводится к виду:

$$H = 2f \sqrt{z_a^2 + 4z_a z_b} \{ [4z_r^2 + z_a z_b - (2z_c - z_b)^2] \sin^2(n\nu + \tau) + 16z_r^2 (z_a^2 + 4z_a z_b) \cos^2(n\nu + \tau) \}^{-1/2}, \quad (8.6)$$

где τ вычисляется по формуле (7.8). Уравнения огибающих будут:

$$H_1 = \frac{2f \sqrt{z_a^2 + 4z_a z_b}}{4z_r^2 + z_a^2 + 4z_a z_b - (2z_c - z_a)^2}, \quad H_2 = \frac{f}{2z_r}. \quad (8.7)$$

Верхняя огибающая представляется отрезком горизонтальной прямой; это значит, что все резонансные амплитуды имеют одинаковую величину.

Рассмотрим некоторые частные случаи. На рис. 5 показан фильтр, который можно представить себе составленным из l одинаковых симметричных T -образных звеньев. На вход цепочки подается синусоидальное напряжение от источника с внутренним сопротивлением r ; окончное сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника. Схема такой цепочки совпадает со схемой, описанной в начале этого раздела, если принять

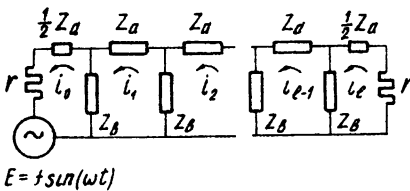


Рис. 5. Фильтр из симметричных T -звеньев.

$$z_r = r, \quad z_c = z_a/2, \quad n + 1 = l. \quad (8.8)$$

Из (8.3) и (8.5) видно, что в данном случае $\xi = \cos \nu$; отсюда по формуле (7.8) получается $\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \nu$, так что можно принять $\tau = \nu$. Произведя указанные замены в уравнении (8.6), найдем амплитуду тока в окончном сопротивлении:

$$H = \frac{f z_T}{\sqrt{(r^2 + z_T^2)^2 \sin^2 l \nu + 4r^2 z_T^2 \cos^2 l \nu}} \left(\cos \nu = 1 + \frac{z_a}{2z_b} \right), \quad (8.9)$$

где $z_T = 2^{-1} \sqrt{z_a^2 + 4z_a z_b}$. Заметим, что z_T есть повторное сопротивление T -звена.

Для огибающих резонансной кривой (8.9) получим уравнения:

$$H_1 = fz_T / (r^2 + z_T^2), \quad H_2 = f/2r. \quad (8.10)$$

При $r = z_T$, т. е. при частоте, соответствующей нагрузке на характеристическое сопротивление, $H_1 = H_2$; там нижняя огибающая смыкается с верхней. В полосе затухания

$$H = \frac{f |z_T|}{\sqrt{(z^2 + z_T^2)^2 \operatorname{sh}^2 l\mu - 4r^2 z_T^2 \operatorname{ch}^2 l\mu}} \quad \left(\operatorname{ch} \mu = \left| 1 + \frac{z_a}{2z_b} \right| \right), \quad (8.11)$$

где z_T определяется прежней формулой, но является чисто мнимой величиной. Если $l\mu$ достаточно велико, то приближенно

$$H = \frac{2f |z_T|}{e^{l\mu} (r^2 - z_T^2)}. \quad (8.12)$$

На рис. 6 изображена схема фильтра, составленного из l одинаковых Π -образных звеньев. Эта схема будет эквивалентна схеме рис. 3, если принять

$$z_0 = z_{n+1} = z_a + \frac{2z_b r}{2z_b + r}, \quad n = l - 2 \quad (8.13)$$

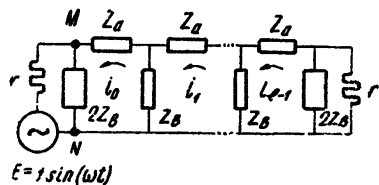


Рис. 6. Фильтр из симметричных Π -звеньев.

и, кроме того, величину f на схеме рис. 3 заменить амплитудой напряжения между узлами, обозначенными на рис. 6 буквами M и N , т. е. величиной

$$\left| \frac{2z_b f}{2z_b + r} \right|. \quad (8.14)$$

В силу (8.1) и (8.13) теперь следует считать, что

$$z_r = \frac{-4z_b^2}{r^2 - 4z_b^2}, \quad z_c = z_a + \frac{2z_b r^2}{r^2 - 4z_b^2}. \quad (8.15)$$

Далее, из (8.15), (8.5) и (7.8) в этом случае получается, что $\tau = 2\nu$. Выполняя преобразования в формуле (8.6), получим амплитуду тока, обозначенного на рис. 6 через i_{l-1} :

$$H = \frac{f z_{\Pi} \sqrt{r^2 - 4z_b^2}}{2 |z_b| \sqrt{(r^2 + z_{\Pi}^2)^2 \sin^2 l\nu + 4r^2 z_{\Pi}^2 \cos^2 l\nu}}, \quad (8.16)$$

где z_{Π} есть повторное сопротивление Π -звена:

$$z_{\Pi} = 2 \sqrt{\frac{z_a z_b^2}{z_a + 4z_b}}. \quad (8.17)$$

Однако амплитуда I тока в конечном сопротивлении связана с амплитудой H тока i_{l-1} соотношением:

$$I = H \left| \frac{2z_b}{2z_b + r} \right|; \quad (8.18)$$

поэтому, принимая за резонансную кривую график амплитуды тока в оконечном сопротивлении, получим для этой кривой уравнение:

$$I = \frac{fz_{II}}{\sqrt{(r^2 + z_{II}^2)^2 \sin^2 l\nu + 4r^2 z_{II}^2 \cos^2 l\nu}} \left(\cos \nu = 1 + \frac{z_a}{2z_b} \right). \quad (8.19)$$

Сравнивая это с (8.9), видим, что уравнение резонансной кривой для цепи из Π -звеньев получается из уравнения, составленного для T -звеньев, если вместо z_T подставить z_{II} . Так же получатся и уравнения огибающих:

$$H_1 = \frac{fz_{II}}{r^2 + z_{II}^2}, \quad H_2 = \frac{f}{2r}. \quad (8.20)$$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Л. Р. Нейман и П. Л. Калантаров, Теоретические основы электротехники, 2, Госэнергоиздат, М.—Л., 1959.
- 2 И. С. Гоноровский, Основы радиотехники, Связьиздат, М., 1957.
- 3 И. А. Кошечев, Основы теории электрической связи, Связьиздат, М., 1954.
- 4 В. И. Коваленков, Теория передачи по линиям электросвязи, 2, Связьиздат, М., 1938.
- 5 А. А. Харкевич, Теория электроакустических аппаратов, Связьиздат, М., 1940.
- 6 Т. Е. Ши, Четырехполюсники и электрические фильтры, Связьиздат, М., 1934.
- 7 Б. В. Булгаков, Колебания, ГИТТЛ, М., 1954.
- 8 В. А. Тафт, Основы методики расчета линейных электрических цепей, изд. АН СССР, М., 1954.
- 9 Н. Д. Босый, Электрические фильтры, Гостехиздат УССР, Киев, 1957.
- 10 С. С. Коган, Теория и расчет фильтров для установок дальней связи, Связьиздат, М., 1950.
- 11 Г. О. Сумцов и М. О. Трахтенберг, Электрические фильтры, Связьтехиздат, М., 1935.
- 12 Т. Карман и М. Био, Математические методы в инженерном деле, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
- 13 А. И. Лурье, Операционное исчисление и его приложения к задачам механики, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
- 14 М. Ф. Гарднер и Дж. Л. Бэрнс, Переходные процессы в линейных системах, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
- 15 С. П. Стрелков, Введение в теорию колебаний, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

Ленинградский политехнический институт

Поступила в редакцию
5 ноября 1959 г.