

ВОЛНОВОД С КРЕСТООБРАЗНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ*

В. М. Седых, А. Ф. Зоркин

На основе решения уравнений поля получены формулы для определения критических частот волн низших порядков в крестообразном волноводе, а также найдена предельная мощность для основной волны H_{10} . Приводятся результаты экспериментальной проверки полученных формул.

В последнее время появился ряд статей [1, 2], посвященных вопросам теории и практического применения волноводов сложного поперечного сечения. К таким волноводам относятся $П$ - и $Н$ -волноводы, T -волновод [3], а также $Г$ - и $Ш$ -волноводы [4]. В настоящей работе приводятся расчеты критических частот волн низших порядков в волноводе с крестообразным поперечным сечением, а также расчет предельной мощности для основной волны H_{10} .

Как показывают расчеты и эксперимент, крестообразный волновод обладает более высокой критической частотой основного типа колебаний, чем соответствующий прямоугольный волновод (волновод без выступов). Следовательно, крестообразные волноводы могут найти применение в тех случаях, когда желательно увеличить размеры волновода, не изменяя критическую частоту. Это качество может быть особенно ценным в диапазоне миллиметровых волн, где размеры прямоугольных волноводов настолько малы, что возникают большие трудности как при их изготовлении, так и при эксплуатации. Кроме того, крестообразные волноводы за счет наличия наружных выступов в области пучности электрического поля могут пропускать большие мощности, чем соответствующий прямоугольный волновод.

1. РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКОЙ ДЛИНЫ ВОЛНЫ ДЛЯ ВОЛНЫ H_{10}

В случае волны H_{10} задача сводится к определению собственного числа $k = 2\pi/\lambda_c$ двухмерного волнового уравнения

$$\partial^2 H / \partial x^2 + \partial^2 H / \partial y^2 + k^2 H = 0, \quad (1)$$

где $H = H_z = H(x, y)$ — продольная составляющая магнитного поля, а λ_c — критическая длина волны крестообразного волновода. Все остальные компоненты поля магнитных волн можно выразить через продольную составляющую H_z .

Ввиду того, что поле волны H_{10} в крестообразном волноводе нельзя описать конечным числом известных функций, одновременно удовлетворяющим волновому уравнению (1) и граничным условиям

$$\partial H / \partial n = 0 \quad (2)$$

на сложном контуре поперечного сечения, разобьем сложную область

* Доклад на II Всесоюзной конференции МВО СССР по радиоэлектронике (Саратов, 1957) и на III Всесоюзной конференции МВО СССР по радиоэлектронике (Киев, 1959).

поперечного сечения (рис. 1) на более простые области, в которых переменные легко разделяются.

Так как поле волны H_{10} в крестообразном волноводе обладает зеркальной симметрией относительно горизонтальной оси, на которой выполняется условие (2), и так как для H_{n0} — волн при нечетном n функция $H(x, y)$ является нечетной относительно переменной x , можно ограничиться рассмотрением только правой верхней четверти волновода, как показано на рис. 1. При этом следует ввести дополнительное граничное условие

$$H = 0 \quad (3)$$

на линии AF .

Разобьем теперь получившуюся сложную область на две прямоугольные области I и II и запишем общие решения волнового уравнения (1) для этих областей с учетом граничных условий. Для области I

$$H_I = C_{10} \sin [k(x+a)] + \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} \sin [p_n(x+a)] \cos [s_n y]; \quad (4)$$

для области II

$$H_{II} = C_{110} \cos [k(x-b)] + \sum_{m=1}^{\infty} C_{11m} \cos [q_m(x-b)] \cos [r_m y]. \quad (5)$$

В этих формулах:

$$s_n = n\pi/g, \quad p_n = \sqrt{k^2 - s_n^2} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots);$$

$$r_m = m\pi/h, \quad q_m = \sqrt{k^2 - r_m^2} \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots).$$

Потребуем, чтобы на границе областей I и II выполнялись условия непрерывности:

$$H_I = H_{II}, \quad \partial H_I / \partial x = \partial H_{II} / \partial x \quad (6)$$

при $x=0$.

Воспользуемся теперь методом неопределенных коэффициентов [3]. Введем следующие обозначения:

$$C_{10} k \cos(ka) = M_0, \quad C_{10} \sin(ka) = Q_0, \quad (7)$$

$$C_{1n} p_n \cos(p_n a) = M_n, \quad C_{1n} \sin(p_n a) = Q_n;$$

$$C_{110} k \sin(kb) = N_0, \quad C_{110} \cos(kb) = R_0, \quad (8)$$

$$C_{11m} q_m \sin(q_m b) = N_m, \quad C_{11m} \cos(q_m b) = R_m.$$

Тогда из (6) следует, что

$$M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos [s_n y] = N_0 + \sum_{m=1}^{\infty} N_m \cos [r_m y] = \varphi(y); \quad (9)$$

$$Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos [s_n y] = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos [r_m y] = f(y). \quad (10)$$

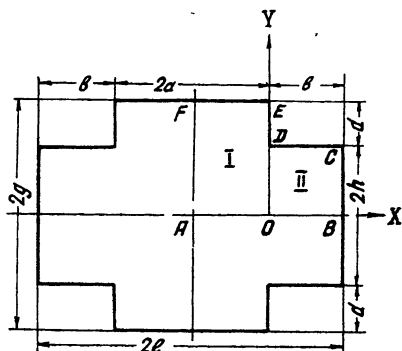


Рис. 1.

Коэффициенты в уравнении (9) можно рассматривать, как коэффициенты Фурье разложения в ряд функции $\varphi(y)$ по $\cos[s_n y]$ в интервале $(0, g)$. Следовательно,

$$M_0 = \frac{1}{g} \int_0^g \varphi(y) dy = \frac{1}{g} \int_0^h \varphi(y) dy. \quad (11)$$

Замена верхнего предела в (11) объясняется тем, что $\varphi(y) = 0$ на (h, g) . Подставим в (11) вместо $\varphi(y)$ ее значение из (9):

$$M_0 = \frac{1}{g} \int_0^h \left(N_0 + \sum_{m=1}^{\infty} N_m \cos[r_m y] \right) dy = \frac{h}{g} N_0. \quad (12)$$

Умножив левую и правую части уравнения (9) на $\cos[s_n y]$ и проинтегрировав на интервале $(0, g)$, найдем M_n :

$$M_n = \frac{2}{g} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{s_n \sin[s_n h]}{r_m^2 - s_n^2} N_m. \quad (13)$$

Совершенно аналогично, но пользуясь разложением в ряд функции $f(y)$ по $\cos(r_m y)$ в интервале $(0, h)$, определим R_m :

$$R_0 = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \frac{\sin[s_n h]}{s_n h}, \quad (14)$$

$$R_m = (-1)^{m+1} \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \frac{s_n \sin(s_n h)}{r_m^2 - s_n^2}, \quad (15)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$

Из полученных выражений видно, что все коэффициенты M_n выражаются через коэффициенты N_m , т. е. мы имеем бесконечную систему бесконечных однородных уравнений, которая имеет нетривиальное решение, если ее определитель Δ равен нулю.

Минимальный корень характеристического уравнения $\Delta = 0$ будет соответствовать волне H_{10} . Ограничиваясь первым приближением, получим следующее выражение для определения k :

$$\operatorname{ctg}(bk) - \frac{h}{g} \left\{ \operatorname{tg}(ak) + 2k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(ap_n)}{p_n} \left[\frac{\sin(s_n h)}{s_n h} \right]^2 \right\} = 0. \quad (16)$$

Для первой области $0 < k < s_1$ уравнение (16) можно переписать в следующем виде:

$$\operatorname{ctg}(bk) - \frac{h}{g} \left\{ \operatorname{tg}(ak) + 2k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th}(ap'_n)}{p'_n} \left[\frac{\sin(s_n h)}{s_n h} \right]^2 \right\} = 0, \quad (17)$$

где

$$p'_n = ip_n = i \sqrt{k^2 - s_n^2} = \sqrt{s_n^2 - k^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Следует отметить, что формула (17) для всех предельных случаев ($a \rightarrow 0$, $a \rightarrow l$, $g \rightarrow h$) дает известную формулу для определения k прямоугольного волновода: $k = 2\pi/\lambda_c = \pi/2l$. Очевидно, что формула (17) пригодна и для расчета критической частоты волны H_{01} .

2. РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКОЙ ДЛИНЫ ВОЛНЫ ДЛЯ СЛУЧАЯ ВОЛНЫ H_{20}

Расчет в данном случае аналогичен приведенному выше для волны H_{10} . Различие существует лишь в граничных условиях: на линии AF (рис. 1) это условие запишется в виде: $\partial H/\partial n = 0$.

Воспользовавшись тем же разбиением на прямоугольные области I и II, получим следующие выражения для полей в областях I и II соответственно:

$$H_I = \sum_{n=0}^{\infty} C_{In} \cos [p_n (x + a)] \cos (s_n y); \quad (18)$$

$$H_{II} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{II m} \cos [q_m (x - b)] \cos (r_m y). \quad (19)$$

Применяя прежний метод, получим следующую формулу для k из первой области $0 < k < s_1 = \pi/g$:

$$\operatorname{ctg} (bk) + \frac{h}{g} \left\{ \operatorname{ctg} (ak) - 2k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} (ap'_n)}{p'_n} \left[\frac{\sin (s_n h)}{s_n h} \right]^2 \right\} = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) позволяет определить k и, следовательно, критическую длину волны для крестообразного волновода с любыми размерами поперечного сечения. Формула (20) для всех предельных случаев ($a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$, $h \rightarrow g$) дает известное выражение для случая волны H_{20} в соответствующем прямоугольном волноводе: $k = \pi/l$.

По формулам (17) и (20) были построены графики зависимости критических длин волн от размера a для волн H_{10} , H_{01} и H_{20} при d , равном 4, 5 и 6 мм (рис. 2), и от размера d для тех же волн при $a = 5,1$ мм (рис. 3). При этом расчете были выбраны следующие размеры поперечного сечения соответствующего прямоугольного волновода: 23×10 мм. На графиках рис. 2, 3 кружками отмечены экспериментальные точки.

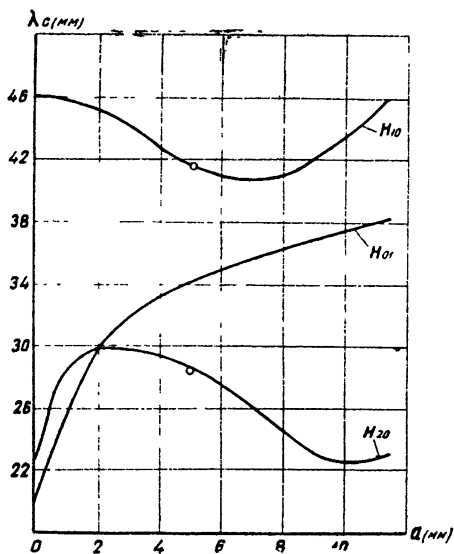


Рис. 2.

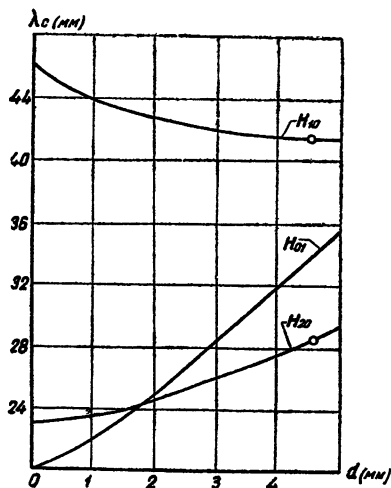


Рис. 3.

Интересно отметить, что при некоторых значениях ширины выступа a критическая длина волны H_{20} может стать меньше, чем у соответствующего прямоугольного волновода.

3. РАСЧЕТ ДЛИНЫ ЛИНЗЫ ВОЛНЫ H_{11}

В этом случае, исходя из конфигурации поля волны H_{11} , можно записать граничные условия:

$$H = 0 \quad (21)$$

на контуре FAB ,

$$\partial H / \partial n = 0 \quad (22)$$

на контуре $BCDEF$. Пользуясь тем же разбиением на области, запишем поля H_I и H_{II} в виде:

$$H_I = \sum_{n=0}^{\infty} C_{In} \sin [p_n (x + a)] \sin (s_n y); \quad (23)$$

$$H_{II} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{II m} \cos [q_m (x - b)] \sin (r_m y). \quad (24)$$

В этих формулах:

$$s_n = \pi (1 + 2n) / 2g; \quad p_n = \sqrt{k^2 - s_n^2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$r_m = \pi (1 + 2m) / 2h; \quad q_m = \sqrt{k^2 - r_m^2}; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Используя те же условия непрерывности и выполнив такие же операции, что и для волн H_{10} и H_{20} , получим окончательное соотношение для определения волнового числа k (первое приближение):

$$\frac{\operatorname{ctg} (bq_0)}{q_0} - \frac{4}{gh} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} (ap_n)}{p_n} \left[\frac{s_n \sin (s_n h)}{r_0^2 - s_n^2} \right]^2 = 0. \quad (25)$$

Для первой области ($0 < k < s_0 < r_0$) (25) запишется в виде:

$$\frac{\operatorname{cth} (bq'_0)}{q'_0} + \frac{4}{gh} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{th} (ap'_n)}{p'_n} \left[\frac{s_n \cos (hs_n)}{r_0^2 - s_n^2} \right]^2 = 0, \quad (26)$$

где

$$q'_0 = \sqrt{r_0^2 - k^2}, \quad p'_n = \sqrt{s_n^2 - k^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из (26) легко видеть, что решение в первой области не существует, так как при положительных аргументах гиперболические тангенс и котангенс положительны и с ростом аргумента стремятся к единице. Поэтому нужно взять следующую область ($s_0 < k < s_1$). Для этой области (25) запишется в виде:

$$\frac{\operatorname{ctg} (bq_0)}{q_0} - \frac{4}{gh} \left\{ \frac{\operatorname{tg} (ap_0)}{p_0} \left[\frac{s_0 \cos (s_0 h)}{r_0^2 - s_0^2} \right]^2 + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} (ap'_n)}{p'_n} \left[\frac{s_n \cos (s_n h)}{r_0^2 - s_n^2} \right]^2 \right\} = 0. \quad (27)$$

Это и есть искомое выражение для определения волнового числа $k = 2\pi/\lambda_c$.

Для предельных случаев ($a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$, $g \rightarrow h$, $h \rightarrow g$) формула (21) дает известное выражение для волны H_{11} в соответствующем прямоугольном волноводе:

$$k = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{lh}$$

Следует заметить, что предпринятая экспериментальная проверка формул (17), (20) и (27) показала хорошее совпадение теории и эксперимента. Расхождение между расчетными значениями критических длин волн и экспериментальными составило доли процента.

4. РАСЧЕТ ПРЕДЕЛЬНОЙ МОЩНОСТИ

При расчете предельной мощности крестообразного волновода на основной волне H_{10} за основу взят метод, примененный Барлоу для нахождения предельных мощностей прямоугольного и круглого волноводов [6].

Как известно, пробой в волноводе происходит в том случае, когда электрическое поле в какой-либо точке волновода достигает некоторого предельного значения \hat{E} , равного $2,9 \cdot 10^6$ в.м⁻¹. Зная поля в волноводе (4) и (5), мы можем найти поток мощности по известной формуле

$$P_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int [EH^*]_z ds, \quad (28)$$

а также максимальное значение напряженности электрического поля E_{\max} . Положив полученное значение E_{\max} равным \hat{E} , мы можем выразить поток мощности через \hat{E} , т. е. найти предельную мощность передачи по волноводу. Для случая крестообразного волновода ($2l = 23$ мм, $2h = 10$ мм, $2a = 10,2$ мм, $d = 4,56$ мм) имеем:

$$P_z = \frac{C_1 \hat{E}^2}{\eta \sin^2 bk} \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2} \approx 1100 \text{ квт}. \quad (29)$$

Здесь

$$C_1 = 2 \left\{ \frac{ag}{2} \left[\frac{h \sin(kb)}{g \cos(ka)} \right]^2 \left[1 + \frac{\sin(2ak)}{2ak} \right] + \right. \\ \left. + \frac{bh}{2} \left[1 - \frac{\sin(2bk)}{2bk} \right] \right\}; \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Напомним, что для прямоугольного волновода с сечением 23×10 мм предельная мощность равна 960 квт*.

* Приведенный расчет предельной мощности, пропускаемой крестообразным волноводом, справедлив при условии, если острые выступы внутри волновода будут соответствующим образом сглажены.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Сопп, Proc IRE, **35**, 783 (1947)
2. Л. Н. Дерюгин, Радиотехника, **3**, 49 (1948).
3. Н. Н. Малов, Уч. зап. МГПИ им. В. И. Ленина, **88**, 33 (1954).
4. А. Я. Яшкин, Уч. зап. МГПИ им. В. И. Ленина, **101**, 21 (1957).
5. Н. Ф. Фунтова, Уч. зап. МГПИ им. В. И. Ленина, **88**, 67 (1954).
6. Н. Ваглов, Proc. IRE, **99**, 21 (1952).

Харьковский государственный
университет

Поступила в редакцию

