ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том III, № 2 РАДИОФИЗИКА 1960

ШИРИНА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ И ФЛЮКТУАЦИИ ПАРАМЕТРОВ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ*

А. Н. Малахов

Рассматривается автоколебательная система со многими степенями свободы, дающая колебания, близкие к синусоидальным (при условии, что параметры системы испытывают достаточно малые флюктуации во времени). Определены флюктуации частоты и амплитуды колебания, а также ширина спектральной линии автоколебания, порождаемая флюктуациями параметров. Показано, что уширение спектральной линии автоколебания обязано в общем случае не только медленным (по сравнению с периодом автоколебания) флюктуациям параметров, но также и быстрым флюктуациям (параметрическое уширение).

1. Рассмотрим задачу о поведении автоколебательной системы при наличии случайных флюктуаций ее параметров, в общем случае сколь угодно быстрых, но достаточно малых.

Пусть автономная автоколебательная система, дающая колебания, близкие к синусоидальным, описывается дифференциальным уравнением n-го порядка (флюктуации параметров сначала не рассматриваем):

$$\sum_k a_k \frac{d^k x}{dt^k} = a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = F\left(x, \ldots, \frac{d^l x}{dt^l}, \ldots\right), \tag{1}$$

где $a_n \neq 0$, $l = 1,2, \ldots, m\,(m \leqslant n)$. Функция, стоящая в правой части (1), содержит нелинейные комбинации аргументов, входящие по условию с малым параметром, и те линейно входящие аргументы, которые также имеют множителем малый параметр**. Ни одно из a_k, входящих в левую часть, не имеет множителем малый параметр. Так, например, если в уравнении (1) имеется малый диссипативный член, то он тем самым находится в правой части.

Приближенное стационарное решение уравнения (1) ищем в виде:

$$x = R\cos\vartheta, \quad \vartheta = \omega t + \varphi. \tag{2}$$

Пусть правая часть (1) при подстановке (2) дает следующее фурье-разложение:

$$F(\cos\vartheta, -\omega R \sin\vartheta, \ldots) = \Psi(\omega, R)\cos\vartheta + \Phi(\omega, R)\sin\vartheta + \\ + (\text{высшие гармоники}). \tag{3}$$

В этом случае, как известно, стационарные значения амплитуды R_0 и частоты ω_0 автоколебания (2) являются корнями уравнений

$$R\,(a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - a_6\omega^6 + \ldots) = \Psi(\omega, R); \tag{4}$$

$$R\,(-a_1\omega + a_3\omega^3 - a_5\omega^5 + \ldots) = \Phi(\omega, R). \tag{5}$$

---

* Доклад на I Всесоюзной конференции по статистической радиофизике (Горький, 1958).

** Т. е. $F(x, \ldots, d^l x/dt^l, \ldots) = \mu F_1(x, \ldots, d^l x/dt^l)$. Однако в дальнейшем малый параметр μ явно вводить не будем.

Поэтому уравнение (1) имеет приближенное решение

$$x_0 = R_0 \cos \vartheta, \quad \vartheta = \omega_0 t + \varphi_0. \tag{6}$$

(Мы рассматриваем только устойчивые решения.)

Пусть теперь имеются N параметров σ_j ($j = 1,2, \ldots, N$), равных $\sigma_j = \bar{\sigma}_j + \Delta\sigma_j$, где $\Delta\sigma_j = \Delta\sigma_j(t)$ —флюктуации параметров, являющиеся достаточно малыми случайными функциями времени, $\bar{\sigma}_j$—среднее значение параметра σ_j. В общем случае некоторые $\bar{\sigma}_j$ могут быть равны нулю *. Уравнение автоколебательной системы, включающее в себя параметры σ_j, зависит, однако, в общем случае не только от самих σ_j, но и от их производных по времени $\sigma_j^{(i)}$ ($i = 0,1,2,\ldots, M$; $M < n$). При этом σ_j будем записывать как $\sigma_j^{(0)}$. Очевидно, что

$$\sigma_j^{(i)} = \Delta\sigma_j^{(i)}(t) \tag{7}$$

для $i > 0$. Далее, пусть коэффициенты и правая часть уравнения (1) зависят от $\sigma_j^{(i)}$ (что будем отмечать штрихом сверху):

$$\begin{aligned} a'_k &= a'_k(\sigma_j^{(i)}); \\ F' &= F'(\sigma_j^{(i)}). \end{aligned} \tag{8}$$

Учитывая малость $\Delta\sigma_j^{(i)}$, получим, ограничиваясь членами первого порядка малости,

$$a'_k = a_k + \sum_j \sum_i a_{kji} \Delta\sigma_j^{(i)};$$

$$F'_k = F + \sum_j \sum_i F_{ji} \Delta\sigma_j^{(i)},$$

где

$$\begin{gathered} a_{kji} = \left(\partial a'_k / \partial \sigma_j^{(i)}\right)_{\Delta\sigma_j^{(i)} = 0}, \\ F_{ji} = \left(\partial F' / \partial \sigma_j^{(i)}\right)_{\Delta\sigma_j^{(i)} = 0}; \\ a_k = \left(a'_k\right)_{\Delta\sigma_j^{(i)} = 0}; \qquad F = (F')_{\Delta\sigma_j^{(i)} = 0}; \end{gathered} \tag{9}$$

зависят только от средних значений параметров $\bar{\sigma}_j$.

Таким образом, вместо (1) будем иметь:

$$\sum_k a_k \frac{d^k x}{dt^k} = F\left(x, \ldots, \frac{d^l x}{dt^l}, \ldots\right) + E(t), \tag{10}$$

где

$$E(t) = -\sum_k \sum_j \sum_i a_{kji} \frac{d^k x}{dt^k} \Delta\sigma_j^{(i)} + \sum_j \sum_i F_{ji} \Delta\sigma_j^{(i)}. \tag{11}$$

В силу малости $\Delta\sigma_j^{(i)}$ малой будет и $E(t)$. Поэтому, используя метод возмущений, ищем решение уравнения (10) в виде:

$$x = (R_0 + \rho) \cos \vartheta; \quad \vartheta = \omega_0 t + \varphi = \omega_0 t + \int \nu \, dt, \tag{12}$$

где $\rho = \rho(t)$, $\varphi = \varphi(t)$—медленные функции времени, причем $|\rho| \ll 1$, $|\nu| \ll \omega_0$.

---

* Будем полагать для простоты, что решение (2) уравнения (1) не изменяет своего характера при любых значениях $\bar{\sigma}_j$.

Рассмотрим структуру $E(t)$. Подставляя x_0 в F_{jl}, получим:

$$F_{jl} = R_0 \sum_q \left[R_{qjl} \cos (q\vartheta) - T_{qjl} \sin (q\vartheta)\right], \tag{13}$$

где q—некоторые числа из натурального ряда, определяемые характером нелинейности автоколебательной системы. Здесь в противоположность (3) мы не должны ограничиваться случаем $q=1$, так как характер $\Delta\sigma_j(t)$ может быть таков, что высшие гармоники F_{jl} будут давать не меньший вклад в $E(t)$, чем основная гармоника $q=1$ (если, например, спектр $\Delta\sigma(t)$ сосредоточен в области $\omega=0$ и $\omega = 3\omega_0$, то следует учитывать члены с $q=1$, $q=2$, $q=4$).

Для производных d^kx/dt^k, входящих в $E(t)$, справедливы следующие соотношения:

$$\frac{d^kx_0}{dt^k} = \begin{cases} (-1)^{k/2} R_0 \omega_0^k \cos \vartheta & (k \text{ четное}) \\ -(-1)^{(k-1)/2} R_0 \omega_0^k \sin \vartheta & (k \text{ нечетное}) \end{cases}. \tag{14}$$

Подставляя (13) и (14) в выражение для $E(t)$ (11), имеем

$$\begin{aligned} E(t) = -R_0 \sum_j \sum_l \left[\left(b_{jl}^{+} - R_{1jl}\right) \cos \vartheta - \left(b_{jl}^{-} - T_{1jl}\right) \sin \vartheta\right] \Delta\sigma_j^{(l)} + \\ + R_0 \sum_{q>1} \sum_j \sum_l \left[R_{qjl} \cos (q\vartheta) - T_{qjl} \sin (q\vartheta)\right] \Delta\sigma_j^{(l)}, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$b_{jl}^{+} = \sum_{k \text{ четн.}} a_{kjl} (-1)^{k/2} \omega_0^k; \quad b_{jl}^{-} = \sum_{k \text{ нечетн.}} a_{kjl} (-1)^{(k-1)/2} \omega_0^k.$$

Полученное выражение (15) может быть записано как

$$E(t) = R_0 \sum_q E_q(t), \quad E_q(t) = A_q(t) \cos(q\vartheta) + B_q(t) \sin (q\vartheta), \tag{16}$$

где

$$A_q(t) = \begin{cases} -\sum_j \sum_l \left(b_{jl}^{+} - R_{1jl}\right) \Delta\sigma_j^{(l)}(t) & (q=1) \\ \sum_j \sum_l R_{qjl} \Delta\sigma_j^{(l)}(t) & (q>1) \end{cases}; \tag{17}$$

$$B_q(t) = \begin{cases} \sum_j \sum_l \left(b_{jl}^{-} - T_{1jl}\right) \Delta\sigma_j^{(l)}(t) & (q=1) \\ -\sum_j \sum_l T_{qjl} \Delta\sigma_j^{(l)}(t) & (q>1) \end{cases}. \tag{18}$$

Рассмотрим функции $E_q(t)$ и $E(t)$. Поскольку $A_q(t)$ и $B_q(t)$ являются случайными функциями, то $E_q(t)$ и $E(t)$ имеют сплошной спектр, существующий в общем случае на всех частотах. На автоколебательную систему эффективно действует только часть спектра, расположенная вблизи $\omega=\omega_0$. Ограничиваясь только этой частью спектра, мы можем записать:

$$E_q(t) = X_q(t) \cos \vartheta - Y_q(t) \sin \vartheta; \tag{19}$$

$$E(t) = X(t) \cos \vartheta - Y(t) \sin \vartheta, \tag{20}$$

где $X(t)$, $X_q(t)$, $Y(t)$, $Y_q(t)$ — медленные по сравнению с $\cos\vartheta$ функции, причем

$$X(t) = R_0 \sum_q X_q(t), \quad Y(t) = R_0 \sum_q Y_q(t). \tag{21}$$

В работе [1] рассмотрено воздействие шума, представленного в виде (20), на автоколебательную систему (уравнение (10)) и получены следующие уравнения для относительных флюктуаций амплитуды $\alpha(t) \equiv \rho(t)/R_0$ и флюктуаций частоты $\nu(t)$ колебания (12):

$$\dot{\nu} + p\nu = (-a_\parallel \dot{X} + a_\perp \dot{Y} + b_\perp X + b_\parallel Y)/\delta R_0; \tag{22}$$

$$\dot{\alpha} + p\alpha = (a_\parallel Y + a_\perp X)/\delta R_0, \tag{23}$$

где

$$p = (b_\parallel a_\perp - a_\parallel b_\perp)/(a_\parallel^2 + a_\perp^2); \quad \delta = a_\parallel^2 + a_\perp^2;$$

$$a_\parallel = 2a_2\omega_0 - 4a_4\omega_0^3 + 6a_6\omega_0^5 - 8a_8\omega_0^7 + \ldots;$$

$$a_\perp = a_1 - 3a_3\omega_0^2 + 5a_5\omega_0^4 - 7a_7\omega_0^6 + \ldots; \tag{24}$$

$$b_\parallel = -R_0\left[\frac{\partial}{\partial R}(\Psi/R)\right]_{\omega_0, R_0}; \quad b_\perp = -R_0\left[\frac{\partial}{\partial R}(\Phi/R)\right]_{\omega_0, R_0}.$$

Для частного случая $a_\perp = b_\parallel = 0$, часто встречающегося в реальных схемах (например, в изохронном генераторе), вместо (22) и (23) имеем:

$$\nu = -X(t)/a_\parallel R_0; \tag{25}$$

$$\dot{\alpha} + p\alpha = Y(t)/a_\perp R_0; \quad p = -b_\perp/a_\parallel. \tag{26}$$

Таким образом, флюктуации параметров в автоколебательной системе могут приводить к флюктуациям частоты и амплитуды автоколебания и, тем самым, к размытию его спектральной линии.

2. Для нахождения спектральной плотности флюктуаций частоты $W_\nu(\Omega)$ и относительных флюктуаций амплитуды $W_\alpha(\Omega)$ необходимо, как это следует из (22) и (23), знать $X(t)$, $Y(t)$, которые можно найти из (15), если заданы $\Delta\sigma_j^{(i)}(t)$. Однако этот путь является излишне громоздким, и мы поступим по-другому.

Рассмотрим уравнение (22). Можно показать *, что $W_\nu(\Omega)$ определяется соотношением

$$W_\nu(\Omega) = \frac{1}{\delta^2 R_0^2(\Omega^2+p^2)}\Big[(a_\parallel^2\Omega^2+b_\perp^2)W_X(\Omega) + (a_\perp^2+b_\parallel^2)W_Y(\Omega) + $$
$$+ 2(-a_\parallel a_\perp \Omega^2 + b_\perp b_\parallel)W_{XY}^0(\Omega) + 2\Omega(a_\perp b_\perp + a_\parallel b_\parallel)W_{XY}^1(\Omega)\Big], \tag{27}$$

где $W_X(\Omega)$, $W_Y(\Omega)$ — спектральные плотности функций $X(t)$ и $Y(t)$;

$$W_{XY}^0(\Omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Phi_{XY}^0(\tau)\cos\Omega\tau\, d\tau; \tag{28}$$

* См. приложение I.

$$W^1_{XY}(\Omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \Phi^1_{XY}(\tau)\sin\Omega\tau\, d\tau\,. \tag{29}$$

Здесь мы полагаем, что функция взаимной корреляции стационарных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ равна в общем случае

$$\Phi_{XY}(\tau) = \Phi^0_{XY}(\tau) + \Phi^1_{XY}(\tau)\,, \tag{30}$$

где $\Phi^0_{XY}(\tau)$—четная функция τ, $\Phi^1_{XY}(\tau)$ — нечетная функция τ. Аналогично для уравнения (23)

$$W_\alpha(\Omega) = \frac{1}{\delta^2 R_0^2(\Omega^2+p^2)}\left[a_\perp^2 W_X(\Omega) + a_\parallel^2 W_Y(\Omega) + 2a_\parallel a_\perp W^0_{XY}(\Omega)\right]. \tag{31}$$

В частном случае $a_\perp = b_\parallel = 0$ из (25) и (26) следует, что

$$W_\nu(\Omega) = W_X(\Omega)/a_\parallel^2 R_0^2\,; \tag{32}$$

$$W_\alpha(\Omega) = W_Y(\Omega)\,/\,a_\parallel^2 R_0^2(\Omega^2+p^2)\,. \tag{33}$$

Таким образом, для нахождения $W_\nu(\Omega)$ и $W_\alpha(\Omega)$ необходимо отыскать $W_X(\Omega)$, $W_Y(\Omega)$, $W^0_{XY}(\Omega)$ и $W^1_{XY}(\Omega)$. Эти спектральные плотности легко могут быть выражены (на основании соотношения (21)) через соответствующие спектральные плотности случайных функций $X_q(t)$ и $Y_q(t)$.

Используя метод, изложенный в приложении I, из (21) нетрудно получить:

$$W_X(\Omega) = R_0^2\sum_q W_{X_q}(\Omega) + 2R_0^2\sum_{q<p} W^0_{X_q X_p}(\Omega)\,; \tag{34}$$

$$W_Y(\Omega) = R_0^2\sum_q W_{Y_q}(\Omega) + 2R_0^2\sum_{q<p} W^0_{Y_q Y_p}(\Omega)\,; \tag{35}$$

$$W^0_{XY}(\Omega) = R_0^2\sum_q\sum_p W^0_{X_q Y_p}(\Omega)\,; \tag{36}$$

$$W^1_{XY}(\Omega) = R_0^2\sum_q\sum_p W^1_{X_q Y_p}(\Omega)\,. \tag{37}$$

Случайные величины $X_q(t)$, $Y_q(t)$ и $A_q(t)$, $B_q(t)$ связаны между собой соотношениями (16) и (19). Поэтому спектральные плотности для $X_q(t)$ и $Y_q(t)$ можно выразить через спектральные плотности величин $A_q(t)$ и $B_q(t)$.

Можно показать *, что для $q=1$ справедливы следующие соотношения, записанные для $\Omega \ll \omega_0$ (поскольку $X_q(t)$ и $Y_q(t)$ являются медленными процессами):

$$W_{X_1}(\Omega) = W_{A_1}(\Omega) + \frac{1}{2}\left[W_{A_1}(2\omega_0) + W_{B_1}(2\omega_0)\right] + W^1_{A_1B_1}(2\omega_0)\,; \tag{38}$$

$$W_{Y_1}(\Omega) = W_{B_1}(\Omega) + \frac{1}{2}\left[W_{A_1}(2\omega_0) + W_{B_1}(2\omega_0)\right] + W^1_{A_1B_1}(2\omega_0); \tag{39}$$

$$W^0_{X_1Y_1}(\Omega) = -\,W^0_{A_1B_1}(\Omega)\,; \tag{40}$$

* См. приложение II.

$$W^{1}_{X_1Y_1}(\Omega) = -W^{1}_{A_1B_1}(\Omega) + \Omega W^{1'}_{A_1B_1}(2\omega_0) + \\ + \frac{\Omega}{2}\left[W'_{A_1}(2\omega_0) + W'_{B_1}(2\omega_0)\right], \tag{41}$$

где $W'(2\omega_0) = [dW(\omega)/d\omega]_{\omega = 2\omega_0}$.

Для $q > 1$, в свою очередь, имеют место следующие соотношения:

$$W_{X_q}(\Omega) = W_{Y_q}(\Omega) = \frac{1}{2}\{W_{A_q}[(q-1)\omega_0] + W_{A_q}[(q+1)\omega_0] + \\ + W_{B_q}[(q-1)\omega_0] + W_{B_q}[(q+1)\omega_0]\} + \\ + W^{1}_{A_q B_q}[(q-1)\omega_0] + W^{1}_{A_q B_q}[(q+1)\omega_0]; \tag{42}$$

$$W^{0}_{X_q Y_q}(\Omega) \equiv 0;$$

$$W^{1}_{X_q Y_q}(\Omega) = -\frac{\Omega}{2}\{W'_{A_q}[(q-1)\omega_0] - W'_{A_q}[(q+1)\omega_0] + \\ + W'_{B_q}[(q-1)\omega_0] - W'_{B_q}[(q+1)\omega_0]\} + \\ + \Omega\{W^{1'}_{A_q B_q}[(q-1)\omega_0] - W^{1'}_{A_q B_q}[(q+1)\omega_0]\}. \tag{43}$$

В то же время для $1 < q \neq p$

$$W^{0}_{X_q X_p}(\Omega) = \frac{1}{2}\begin{cases} W^{0}_{A_q A_{q-2}}[(q-1)\omega_0] + W^{0}_{B_q B_{q-2}}[(q-1)\omega_0] + \\ + W^{1}_{A_q B_{q-2}}[(q-1)\omega_0] + W^{1}_{A_{q-2} B_q}[(q-1)\omega_0] & (p = q-2) \\ W^{0}_{A_q A_{q+2}}[(q+1)\omega_0] + W^{0}_{B_q B_{q+2}}[(q+1)\omega_0] + \\ + W^{1}_{A_q B_{q+2}}[(q+1)\omega_0] + W^{1}_{A_{q+2} B_q}[(q+1)\omega_0] & (p = q+2) \\ 0 & (\text{для других значений } p) \end{cases}; \tag{44}$$

$$W^{0}_{Y_q Y_p}(\Omega) = -W^{0}_{X_q X_p}(\Omega); \tag{45}$$

$$W^{0}_{X_q Y_p}(\Omega) = \frac{1}{2}\begin{cases} W^{0}_{A_q B_{q-2}}[(q-1)\omega_0] - W^{0}_{A_{q-2} B_q}[(q-1)\omega_0] - \\ - W^{1}_{A_q A_{q-2}}[(q-1)\omega_0] - W^{1}_{B_q B_{q-2}}[(q-1)\omega_0] & (p = q-2) \\ -W^{0}_{A_q B_{q+2}}[(q+1)\omega_0] + W^{0}_{A_{q+2} B_q}[(q+1)\omega_0] + \\ + W^{1}_{A_q A_{q+2}}[(q+1)\omega_0] + W^{1}_{B_q B_{q+2}}[(q+1)\omega_0] & (p = q+2) \\ 0 & (\text{для других значений } p) \end{cases}; \tag{46}$$

$$W^{1}_{X_q Y_p}(\Omega)=\frac{\Omega}{2}\begin{cases} W^{1'}_{A_q B_{q-2}}[(q-1)\omega_0]+W^{1'}_{A_{q-2} B_q}[(q-1)\omega_0]+ \\ +W^{0'}_{A_q A_{q-2}}[(q-1)\omega_0]+W^{0'}_{B_q B_{q-2}}[(q-1)\omega_0] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (p=q-2) \\ -W^{1'}_{A_q B_{q+2}}[(q+1)\omega_0]-W^{1'}_{A_{q+2} B_q}[(q+1)\omega_0]- \\ -W^{0'}_{A_q A_{q+2}}[(q+1)\omega_0]-W^{0'}_{B_q B_{q+2}}[(q+1)\omega_0] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (p=q+2) \\ 0 \qquad (\text{для других значений } p) \end{cases};\qquad(47)$$

Нам осталось вычислить спектральные плотности случайных функций $A_q(t)$ и $B_q(t)$, определяемых формулами (17) и (18). Ограничиваясь случаем одного параметра $j=0$, $\Delta\sigma_0(t)\equiv s(t)$, мы можем записать (17) и (18) в виде:

$$\begin{aligned} A_q(t)&=C_{0q}S+C_{1q}\dot{S}+C_{2q}\ddot{S}+\dots; \\ B_p(t)&=d_{0p}S+d_{1p}\dot{S}+d_{2p}\ddot{S}+\dots. \end{aligned}\qquad(48)$$

Используя метод, изложенный в приложении I, из (48) нетрудно получить спектральные плотности

$$\begin{aligned} W_{A_q}(\Omega)&=\left[(C_{0q}-C_{2q}\Omega^2+C_{4q}\Omega^4-\dots)^2+(C_{1q}\Omega-C_{3q}\Omega^3+\right. \\ &\qquad \left. C_{5q}\Omega^5-\dots)^2\right]W_S(\Omega); \\ W^{0}_{A_q B_p}(\Omega)&=\left[C_{0q}d_{0p}-\Omega^2(C_{0q}d_{2p}-C_{1q}d_{1p}+C_{2p}d_{0p})+\right. \\ &\left.+\Omega^4(C_{0q}d_{4p}-C_{1q}d_{3p}+C_{2q}d_{2p}-C_{3q}d_{1p}+C_{4q}d_{0p})+\dots\right]W_S(\Omega); \\ W^{1}_{A_q B_p}(\Omega)&=\left[-\Omega(C_{0q}d_{1p}-C_{1q}d_{0p})+\Omega^3(C_{0q}d_{3p}-C_{1q}d_{2p}+\right. \\ &\left.+C_{2q}d_{1p}-C_{3q}d_{0p})+\dots\right]W_S(\Omega). \end{aligned}\qquad(49)$$

Таким образом, зная спектральную плотность флюктуаций параметра $W_{\Delta\sigma}(\Omega)$, с помощью (49) можно найти спектральные плотности функций $A_q(t)$, $B(t)$, а затем с помощью (38) — (47) спектральные плотности функций $X_q(t)$, $Y_q(t)$. Далее с помощью формул (34)—(37) определяются $W_X(\Omega)$, $W_Y(\Omega)$, $W^{0,1}_{XY}(\Omega)$ и, наконец, на основании (27) и (31) находятся интересующие нас спектральные плотности флюктуаций частоты и амплитуды автоколебания.

Рассмотрим случай медленно меняющегося параметра $\Delta\sigma(t)$, когда его производными можно пренебречь. В этом случае $A_q(t)$ и $B_q(t)$ также будут медленно меняющимися функциями, спектральная плотность которых будет отлична от нуля только в области низких частот. Вследствие этого из спектральных плотностей W_{X_q}, W_{Y_q}, $W^{0,1}_{X_q X_p}$, $W^{0,1}_{Y_q Y_p}$, $W^{0,1}_{X_q Y_p}$ отличными от нуля будут только $W_{X_1}(\Omega)$, $W_{Y_1}(\Omega)$ и $W^{0,1}_{X_1 Y_1}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} &W_{X_1}(\Omega) = W_{A_1}(\Omega) = A_{10}^2 W_{\Delta\sigma}(\Omega)\,; \\ &W_{Y_1}(\Omega) = W_{B_1}(\Omega) = B_{10}^2 W_{\Delta\sigma}(\Omega)\,; \\ &W_{X_1Y_1}^0(\Omega) = -\,W_{A_1B_1}^0(\Omega) = -\,A_{10}B_{10}W_{\Delta\sigma}(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{50}$$

Из формул (34)—(37) имеем тогда:

$$\begin{aligned} &W_X(\Omega) = R_0^2 A_{10}^2 W_{\Delta\sigma}(\Omega); \quad W_Y(\Omega) = R_0^2 B_{10}^2 W_{\Delta\sigma}(\Omega)\,; \\ &W_{XY}^0(\Omega) = -\,R_0^2 A_{10}B_{10} W_{\Delta\sigma}(\Omega); \quad W_{XY}^1(\Omega) = 0 \end{aligned} \tag{51}$$

и, следовательно, для флюктуаций частоты и амплитуды (формулы (27) и (31)) получаем выражения:

$$\begin{aligned} &W_\nu(\Omega) = \frac{1}{\delta^2(\Omega^2+p^2)}\left[(a_{\parallel}A_{10}+a_{\perp}B_{10})^2\Omega^2+(b_{\perp}A_{10}-b_{\parallel}B_{10})^2\right]W_{\Delta\sigma}(\Omega)\,; \\ &W_\alpha(\Omega) = \frac{1}{\delta^2(\Omega^2+p^2)}\,(a_{\perp}A_{10}-a_{\parallel}B_{10})^2\,W_{\Delta\sigma}(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{52}$$

Для случая изохронного генератора, когда $a_{\perp} = b_{\parallel} = 0$,

$$W_\nu(\Omega) = A_{10}^2 W_{\Delta\sigma}(\Omega)/a_{\parallel}^2\,; \qquad W_\alpha(\Omega) = B_{10}^2 W_{\Delta\sigma}(\Omega)/a_{\parallel}^2(\Omega^2+p^2). \tag{53}$$

3. В общем случае ширина спектральной линии колебания (12) определяется видом $W_\nu(\Omega)$, ее поведением и значением вблизи $\Omega=0$. На основании [2] можно показать, что если выполняется условие

$$W_\nu^2(0) \ll \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty W_\nu(\Omega)\,d\Omega, \tag{54}$$

справедливое при достаточно большой ширине спектра флюктуаций частоты, то энергетическая ширина спектральной линии равна

$$\Delta F = \frac{\pi}{4}\,W_\nu(0)\,. \tag{55}$$

Если же имеет место обратное неравенство:

$$W_\nu^2(0) \gg \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty W_\nu(\Omega)\,d\Omega \tag{56}$$

(например, для случая, когда $W_\nu(\Omega)$ неограниченно возрастает при $\Omega \to 0$), то

$$\Delta F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_{1/T}^\infty W_\nu(\Omega)\,d\Omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\overline{\nu_T^2}}\,, \tag{57}$$

где T—время наблюдения, в течение которого исследуется ширина спектральной линии ΔF. Если в (57) интеграл при $T \to \infty$ сходится, то процесс флюктуаций частоты можно считать стационарным; в противном случае $\Delta F = \Delta F(T)$ и процесс нестационарен (сравни [3]).

4. *Первый пример*. Рассмотрим флюктуации емкости и крутизны в изохронном LC-генераторе с контуром в цепи анода. Обозначая через x ток через индуктивность контура, будем иметь для генератора

с переменной емкостью и крутизной:

$$CL\ddot{x} + \dot{C}L\dot{x} + (\dot{C}r + 1)x = (SM - Cr)\dot{x} - \alpha SM^3(\dot{x})^3. \tag{58}$$

Здесь $C(t)$, r, L—параметры контура, M—коэффициент взаимоиндукции в цепи обратной связи. Характеристика лампы берется в виде $i_a = v_g(1-\alpha v_g^2)$, где i_a—анодный ток, v_g—напряжение на сетке, $S=S(t)$—крутизна.

Флюктуирующими параметрами являются емкость и крутизна, равные соответственно

$$\sigma_1 = C = \bar{C} + \Delta C(t) = \bar{C}[1 + \delta C(t)] \qquad (|\delta C| \ll 1);$$

$$\sigma_2 = S = \bar{S} + \Delta S(t) = \bar{S}[1 + \delta S(t)] \qquad (|\delta S| \ll 1).$$

Сравнивая (58) с (1), (8) и (9), имеем:

$$\begin{gathered} a_2' = LC, \quad a_1' = L\dot{C}, \quad a_0' = 1 + r\dot{C}, \quad F' = (SM - Cr_2)\dot{x} - \alpha SM^3(\dot{x})^3; \\ a_2 = L\bar{C} = \omega_0^{-2}, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = 1, \quad F = \left(\overline{SM} - \overline{Cr}\right)\dot{x}, -\alpha\bar{S}M^3(\dot{x})^3. \\ a_{210} = L = a_{111}, \quad a_{011} = r, \quad F_{10} = -r\dot{x}, \quad F_{20} = M\dot{x} - \alpha M^3(\dot{x})^3. \end{gathered} \tag{59}$$

Остальные a_{kji} и F_{ji} равны нулю.

Подставляя в F_{10} и F_{20} $x_0 = R_0\cos\vartheta$, получаем (сравни (13)):

$$F_{10} = r\omega_0 R_0 \sin\vartheta;$$

$$F_{20} = \left(-\omega_0 M R_0 + \frac{3}{4}\alpha\omega^3 M^3 R_0^3\right)\sin\vartheta - \frac{1}{4}\alpha\omega^3 M^3 R_0^3 \sin 3\vartheta. \tag{60}$$

Для простоты последующих расчетов введем параметры стационарного решения. Из (59) и (3) следует, что

$$\begin{gathered} \Psi(\omega, R) = 0, \quad \Phi(\omega, R) = g\,\omega R - \frac{3}{4} b\,\omega^3 R^3, \\ g = \bar{S}M - \bar{C}r, \qquad b = \alpha\bar{S}M^3. \end{gathered} \tag{61}$$

Тогда (4) и (5) записываются в виде

$$R(1 - \omega^2\omega_0^{-2}) = 0, \qquad g - \frac{3}{4} b\,\omega^2 R^2 = 0,$$

откуда для стационарного решения

$$\omega^2 = \omega_0^2 = 1/LC, \qquad R_0^2 = 4g/3b\omega_0^2. \tag{62}$$

Кроме того, из (24) нетрудно получить, что

$$\begin{gathered} a_{\parallel} = 2/\omega_0, \quad a_{\perp} = 0, \quad b_{\parallel} = 0, \quad b_{\perp} = -2\omega_0 g, \\ p = g\omega_0^2, \qquad \delta = 4/\omega_0^2. \end{gathered} \tag{63}$$

Учитывая (62) и (61), выражения для F_{10} и F_{20} (60) можно записать в виде:

$$F_{10} = \frac{\omega_0 R_0}{\bar{C}}\tau_0 \sin\vartheta, \qquad F_{20} = -\frac{\omega_0 R_0}{\bar{S}}(\tau_0 \sin\vartheta + \tau^0 \sin 3\vartheta), \tag{64}$$

где $\tau_0 = \bar{C}r$, $\tau^0 = g/3$.

Сравнивая теперь (64) с (13), имеем: $R_{qjl} \equiv 0$, $T_{110} = -\tau_0\omega_0/\bar{C}$, $T_{120}=\omega_0\tau_0/\bar{S}$, $T_{320}=\omega_0\tau^0/\bar{S}$, остальные T_{qjl} тождественно равны нулю. Для вычисления $E(t)$ находим

$$b_{10}^{+}=a_{010}-\omega_0^2 a_{210}=-1/\bar{C},\quad b_{11}^{+}=q_{011}-\omega_0^2 a_{211}=\tau_0/\bar{C},\quad b_{11}^{-}=\omega_0 a_{111}=1/\omega_0\bar{C}.$$

Отсюда, согласно (15),

$$E(t)=\frac{R_0}{Q}\left\{(Q\cos\vartheta+\sin\vartheta)\,\delta C(t)+(-\cos\vartheta+Q\sin\vartheta)\,\frac{1}{\omega_0}\delta C'(t)-\right.$$
$$\left.-(\sin\vartheta+\beta\sin 3\vartheta)\,\delta S(t)\right\},\tag{65}$$

где $Q=\omega_0^{-1}\tau_0^{-1}$—добротность контура, $\beta=\tau^0/\tau_0$, $\delta C'(t)=d\delta C(t)/dt$.

Будем теперь для простоты считать, что флюктуации емкости и крутизны статистически независимы, вследствие чего расчет для них можно вести независимо. Рассмотрим сначала флюктуации емкости. Сравнивая (65), где полагаем $\delta S(t)\equiv 0$, с (16), нетрудно видеть, что

$$A_1(t)=\delta C(t)-\frac{1}{Q\omega_0}\delta C'(t)\quad (A_q=B_q=0,\ q>1);$$
$$B_1(t)=\frac{1}{Q}\delta C(t)+\frac{1}{\omega_0}\delta C'(t)\tag{66}$$

и, следовательно,

$$W_X(\Omega)=R_0^2 W_{X_1}(\Omega),\quad W_Y(\Omega)=R_0^2 W_{Y_1}(\Omega)\tag{67}$$

(см. (21) и (34)). С другой стороны, на основании (66) и (49) нетрудно получить, что

$$W_{A_1}(\Omega)=\left(1+\frac{\Omega^2}{Q^2\omega_0^2}\right)W_{\delta C}(\Omega);$$
$$W_{B_1}(\Omega)=\left(Q^{-2}+\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)W_{\delta C}(\Omega);$$
$$W_{A_1B_1}^0(\Omega)=\left(Q^{-1}-\frac{\Omega^2}{Q\,\omega_0^2}\right)W_{\delta C}(\Omega);\tag{68}$$
$$W_{A_1B_1}^1(\Omega)=-\Omega\left(\frac{1}{\omega_0}+\frac{1}{Q^2\omega_0}\right)W_{\delta C}(\Omega).$$

Отсюда, учитывая, что $Q\gg 1$ и $\Omega\ll\omega_0$, получаем, что, согласно (38), (39), (67),

$$W_X(\Omega)=R_0^2\left[W_{\delta C}(\Omega)+\frac{1}{2}W_{\delta C}(2\omega_0)\right];$$
$$W_Y(\Omega)=R_0^2\left[\left(\frac{1}{Q^2}+\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)W_{\delta C}(\Omega)+\frac{1}{2}W_{\delta C}(2\omega_0)\right].\tag{69}$$

Тогда из (32), (33) следует, что спектральные плотности флюктуаций частоты и амплитуды, порождаемых флюктуациями емкости, равны

$$W_\nu(\Omega)=\frac{\omega_0^2}{4}\left[W_{\delta C}(\Omega)+\frac{1}{2}W_{\delta C}(2\omega_0)\right];$$
$$W_\alpha(\Omega)=\frac{\omega_0^2}{4(\Omega^2+p^2)}\left[\left(\frac{1}{Q^2}+\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)W_{\delta C}(\Omega)+\frac{1}{2}W_{\delta C}(2\omega_0)\right].\tag{70}$$

Проанализируем полученные результаты. Пусть спектр флюктуаций емкости сосредоточен в области нулевых частот, что будет при достаточно медленных флюктуациях емкости. В этом случае $W_{\delta C}(2\omega_0)=0$ и (70) примет вид:

$$W_\nu(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{4} W_{\delta C}(\Omega);$$
$$W_\alpha(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{4} \frac{Q^{-2} + \Omega^2/\omega_0^2}{p^2 + \Omega^2} W_{\delta C}(\Omega). \tag{71}$$

Поскольку $p = 3\beta\omega_0/Q$, последнее выражение может быть записано в виде:

$$W_\alpha(\Omega) = \frac{1}{4} \frac{Q^{-2} + \Omega^2/\omega_0^2}{9\beta^2 Q^{-2} + \Omega^2/\omega_0^2} W_{\delta C}(\Omega). \tag{72}$$

С другой стороны, при достаточно медленных флюктуациях емкости их можно считать квазистатическими и, следовательно, $W_\nu(\Omega)$ и $W_\alpha(\Omega)$ при сколь угодно малых Ω можно получить непосредственно из уравнений (62), определяющих стационарные значения частоты и амплитуды колебания.

Действительно, дифференцируя (62), нетрудно найти:

$$2\frac{d\omega}{\omega_0} \equiv 2\frac{\nu}{\omega_0} = -\frac{dC}{C} \equiv -\delta C;$$
$$\frac{dR}{R} \equiv \alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3\beta}\right)\delta C; \tag{73}$$

откуда, принимая во внимание, что $\beta \ll 1$, получаем:

$$\nu = -\frac{\omega_0}{2}\delta C, \qquad \alpha = -\frac{1}{6\beta}\delta C \tag{74}$$

и

$$W_\nu(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{4} W_{\delta C}(\Omega), \qquad W_\alpha(\Omega) = \frac{1}{36\beta^2} W_{\delta C}(\Omega), \tag{75}$$

что совпадает с (71) и с (72), где следует принять $\Omega \ll 3\omega_0\beta/Q$.

Таким образом, нетрудно видеть, что случай квазистатики с точки зрения амплитудных флюктуаций в рассматриваемом генераторе наступает при частотах $\Omega \ll p$, а с точки зрения частотных флюктуаций — при $\Omega \ll \omega_0$. Эта разница является характерной чертой изохронного генератора, где есть инерционность по амплитуде автоколебаний (определяемая прочностью предельного цикла p) и нет ее для изменения частоты (сравни [1]). Условие $\Omega \ll \omega_0$ не является следствием инерционности, а является следствием применяемого метода вычисления флюктуаций, справедливого, как уже указывалось, только при $\Omega \ll \omega_0$.

Вторые слагаемые в формулах (70) показывают влияние быстрых флюктуаций емкости генератора на флюктуации частоты и амплитуды колебаний генератора. Легко видеть, что это влияние будет в том случае, если спектр флюктуаций емкости лежит в области $2\omega_0$—удвоенной частоты собственных колебаний генератора. Последнее, как нетрудно показать более строго, свидетельствует о параметрическом влиянии флюктуаций емкости на колебания генератора.

Рассмотрим теперь ширину спектральной линии генератора, обязанную флюктуациям емкости, причем для простоты ограничимся частными случаями. Пусть, во-первых, $W_{\delta C}(0)=0$; тогда $W_\nu(\Omega)$ подчиняется условию (54) и, следовательно, ширина линии будет равна

$$\Delta F = \frac{\pi}{32}\,\omega_0^2 W_{\delta C}(2\omega_0)\,. \tag{76}$$

Если, во-вторых, $W_{\delta C}(\Omega)$ удовлетворяет условию (54), то $W_\nu(\Omega)$ также подчиняется ему и ширина спектральной линии будет равна

$$\Delta F = \frac{\pi}{16}\,\omega_0^2\left[W_{\delta C}(0)+\frac{1}{2}\,W_{\delta C}(2\omega_0)\right]. \tag{77}$$

Пусть теперь $W_{\delta C}(\Omega)$ удовлетворяет условию (56). В этом случае вторым слагаемым в (70) можно пренебречь и мы получим, что ширина спектральной линии равна

$$\Delta F = \frac{\omega_0}{2\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_{1/T} W_{\delta C}(\Omega)\,d\Omega} = \frac{\omega_0}{2\sqrt{2\pi}}\sqrt{\overline{\delta C_T^2}} \tag{78}$$

и относительная ширина спектральной линии равна

$$\delta F = \sqrt{\frac{\pi}{2}\,\overline{\delta C_T^2}}\,. \tag{79}$$

Этот случай соответствует существованию медленных флюктуаций емкости в генераторе. Последние могут порождаться, в частности, фликкер-шумом лампы, флюктуациями емкости конденсаторов [4] и т. п. Эти медленные флюктуации емкости всегда существуют в реальных генераторах и они, по-видимому, определяют в основном так называемую „техническую ширину“ линии генератора (сравни [5]).

5. *Второй пример*. Рассмотрим флюктуации крутизны генератора. Из (65), полагая $\delta C(t)\equiv 0$, найдем:

$$E(t) = -\frac{R_0}{Q}\,(\sin\vartheta+\beta\sin 3\vartheta)\,\delta S(t)\,.$$

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере, можно получить следующие спектральные плотности флюктуаций частоты и амплитуды генератора, обязанные флюктуациям крутизны:

$$\begin{aligned} W_\nu(\Omega) &= \frac{\omega_0^2}{8Q^2}\left[(1+\beta)^2\,W_{\delta S}(2\omega_0)+\beta^2\,W_{\delta S}(4\omega_0)\right];\\ W_\alpha(\Omega) &= \frac{\omega_0^2}{8Q^2(\Omega^2+p^2)}\left[2W_{\delta S}(\Omega)+(1-\beta)^2 W_{\delta S}(2\omega_0)+\beta^2 W_{\delta S}(4\omega_0)\right]. \end{aligned} \tag{80}$$

Проанализируем эти результаты. Для медленных флюктуаций крутизны из (80) следует, что

$$W_\nu(\Omega)\equiv 0,\qquad W_\alpha(\Omega)=\frac{\omega_0^2}{4Q^2(\Omega^2+p^2)}\,W_{\delta S}(\Omega)\,. \tag{81}$$

Таким образом, в рассмотренном изохронном генераторе медленные флюктуации крутизны не приводят в первом порядке малости к флюктуациям частоты и, следовательно, к размытию линии, а вызывают лишь флюктуации амплитуды колебаний. Квазистатическое нахождение флюктуаций амплитуды по флюктуациям крутизны на основании (62) приводит к соотношению

$$\frac{dR}{R} = \sigma = \frac{\omega_0}{2Qp}\delta S\,, \tag{82}$$

при этом

$$W_\alpha\,(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{4Q^2p^2}\,W_{\delta S}(\Omega)\,, \tag{83}$$

что совпадает с (81), если в выражении (81) положить $\Omega \ll p$.

Формула (80) показывает, что в общем случае быстрых флюктуаций крутизны последние параметрически приводят к флюктуациям частоты и амплитуды автоколебания.

6. В заключение остановимся на вопросе о влиянии фликкер-шума лампы на ширину спектральной линии генератора. Как известно [6], фликкер-шум лампы всегда вызывает когерентные ему флюктуации крутизны и между ними существует связь

$$W_{\delta S}(\Omega) = DW_{\delta j}(\Omega)\,, \tag{84}$$

где D—постоянная, зависящая от параметров лампы и каскада, $j=j(t)$— флюктуации катодного тока лампы. Поскольку фликкер-шум является медленным случайным процессом, то, объединяя (81) и (84), получим:

$$W_\nu(\Omega) \equiv 0; \quad W_\alpha(\Omega) = \frac{\omega_0^2 D}{4Q^2(\Omega^2+p^2)}W_{\delta j}(\Omega)\,. \tag{85}$$

Таким образом, фликкер-шум приводит только (в первом порядке малости) к амплитудным флюктуациям и не приводит к частотным. Эти же результаты получены в работах Троицкого [5,7], где, однако, использован другой метод расчета (с учетом „нестационарного“ влияния фликкер-шума, модулируемого автоколебанием). Кроме того, в [7] даны оценки влияния фликкер-шума на флюктуации частоты во втором порядке малости.

В общем случае фликкер-шум, по-видимому, приводит к флюктуациям не только крутизны, но и емкости лампы [7,8], в результате чего следует учитывать как $\delta S(t)$ так и $\delta C(t)$ одновременно ($\delta S(t)$ и $\delta C(t)$ могут быть коррелированы). Поскольку $W_{\delta C}(\Omega)$ и $W_{\delta S}(\Omega)$ существенны примерно до частот $\Omega = 60\cdot 10^3$, то в случае, если $4\omega_0$ меньше $60\cdot 10^3$, в формулах (70) и (80) следует учитывать все слагаемые; если же $2\omega_0 \gg 60\cdot 10^3$, то нужно учитывать только медленные слагаемые $W_{\delta C}(\Omega)$ и $W_{\delta S}(\Omega)$.

В заключение отметим следующее. Если предположить, что фликкер-шум лампы приводит к таким флюктуациям емкости лампы, при которых $\Delta C/C \simeq \Delta j/j$ (j — катодный ток), то, согласно [3], $\overline{\delta j_T^2} = \overline{\delta C_T^2} = 10^{-14}$ за любую практическую длительность наблюдения $T > 1$ *сек*. Следовательно, на основании (79) относительная ширина линии должна быть равна $\delta F = 10^{-7}$.

Как было найдено экспериментально [9], для генератора на частоте $f_0 = 190$ *мгц* $\delta F = 0{,}6\cdot 10^{-7}$ (емкость лампы составляла значительную долю емкости контура). Это может, по-видимому, косвенно подтверждать, что для фликкер-шума ламп имеет место равенство $\delta j \simeq \delta C$, тем более, что других данных о флюктуациях емкости нет.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{z} + pz = a_1\dot{x} + a_2\dot{y} + b_1x + b_2y\,. \tag{I}$$

Будем считать, что для случайных стационарных процессов $x(t)$ и $y(t)$ заданы их функции корреляции $\Phi_x(\tau) = \overline{x(t)\,x(t+\tau)}$ $\Phi_y(\tau) = \overline{y(t)y(t+\tau)}$ и $\Phi_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t+\tau)}$ и соответствующие спектральные плотности. Требуется найти спектральную плотность случайной функции $z(t)W'_z(\Omega)$.

Запишем уравнение I для момента времени $t' = t+\tau$ и затем перемножим соответственно левые и правые части уравнений для t (1) и для t'. Полученное уравнение усредним. Используя следующие свойства функций корреляции:

$$\Phi_{xy}(\tau) = \Phi_{yx}(-\tau);\quad \Phi_{x\dot{y}}(\tau) = d\Phi_{xy}(\tau)/d\tau;\quad \Phi_{\dot{x}\dot{y}}(\tau) = -d^2\Phi_{xy}(\tau)/d\tau^2,$$

В результате усреднения получим:

$$-\ddot{\Phi}_z(\tau) + p^2\Phi_z(\tau) = -a_1^2\ddot{\Phi}_x(\tau) + b_1^2\Phi_x^2(\tau) - a_2^2\ddot{\Phi}_y(\tau) + b_2^2\Phi_y(\tau) -$$
$$-2a_1a_2\ddot{\Phi}_{xy}(\tau) + 2(a_2b_1 - a_1b_2)\,\dot{\Phi}_{xy}(\tau) + b_1b_2[\Phi_{xy}(\tau) + \Phi_{xy}(-\tau)].$$

Умножая обе части равенства на $\dfrac{1}{\pi}\cos(\Omega\tau)$ и производя интегрирование по τ от $-\infty$ до $+\infty$, получим окончательно:

$$(\Omega^2+p^2)W_z(\Omega) = \left(a_1^2\Omega^2 + b_1^2\right)W_x(\Omega) + \left(a_2^2\Omega^2 + b_2^2\right)W_y^1(\Omega) +$$
$$+ 2(a_1a_2\Omega^2 + b_1b_2)\,W_{xy}^0(\Omega) + 2\Omega(a_2b_1 - a_1b_2)W_{xy}^1(\Omega),$$

где

$$W_{xy}^0(\Omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{xy}(\tau)\cos(\Omega\tau)\,d\tau;\quad W_{xy}^1(\Omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{xy}(\tau)\sin(\Omega\tau)\,d\tau\,.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Рассмотрим функцию

$$z(t) = A_q(t)\cos(q\vartheta) + B_q(t)\sin(q\vartheta), \tag{I}$$

где $\vartheta = \omega_0 t$, $A_q(t)$ и $B_q(t)$ — случайные величины, имеющие произвольный спектр. Допустим, что из всего спектра функции нам нужно выделить только часть спектра около $\omega = \omega_0$ шириною много меньше ω_0. Функция, соответствующая этой части, может быть записана (сохраняя прежнее обозначение) в виде:

$$z(t) = X_q(t)\cos\vartheta - Y_q(t)\sin\vartheta\,, \tag{II}$$

где $X_q(t)$ и $Y_q(t)$ — медленные по сравнению с $\cos\vartheta$ функции. Требуется определить спектральные плотности функций $X_q(t)$ и $Y_q(t)$, выразив их через спектральные плотности $A_q(t)$ и $B_q(t)$.

Для определения спектральных плотностей $X_q(t)$ и $Y_q(t)$ нужно дать рецепт нахождения $X_q(t)$ и $Y_q(t)$ из заданной функции $z(t)$ (I). Допустим сначала, что $X_q(t)$ и $Y_q(t)$ в (II) являются постоянными. В этом случае они определяются аналогично коэффициентам Фурье:

$$X_q = \frac{2}{T}\int_0^T z(t)\cos\vartheta dt = \overline{\overline{2z(t)\cos\vartheta}} \equiv \overline{\overline{u(t)}};$$

$$Y_q = -\frac{2}{T}\int_0^T z(t)\sin\vartheta\, dt = -\overline{\overline{2z(t)\sin\vartheta}} = \overline{\overline{v(t)}},$$

где T — период, а двойная черта сверху означает усреднение по времени.

Для нахождения спектральных плотностей X_q и Y_q мы должны найти спектральные плотности $u(t)$ и $v(t)$ и взять их значения при $\Omega = 0$.

Если теперь $X_q(t)$ и $Y_q(t)$ хотя и медленно, но все же зависят от времени, их спектральные плотности получаются из спектральных плотностей $u(t)$ и $v(t)$ при значении частот $\Omega \ll \omega_0$. Другими словами,

$$W_{X_q}(\Omega) = W_u(\Omega), \quad W_{Y_q}(\Omega) = W_v(\Omega),$$
$$W^0_{X_q Y_p}(\Omega) = W^0_{uv}(\Omega), \quad W^1_{X_q Y_p}(\Omega) = W^1_{uv}(\Omega), \tag{III}$$

где $\Omega \ll \omega_0$.

Для простоты рассмотрим подробно лишь частный случай $q = 1$; для $q > 1$ соответствующие формулы основного текста ((42)—(47)) получаются совершенно аналогично. Итак, пусть,

$$z(t) = A_1(t)\cos\vartheta + B_1(t)\sin\vartheta.$$

Легко видеть, что

$$u(t) = A_1(t) + A_1(t)\cos 2\vartheta + B_1(t)\sin 2\vartheta;$$
$$v(t) = -B_1(t) + B_1(t)\cos 2\vartheta - A_1(t)\sin 2\vartheta. \tag{IV}$$

Полагая $A_1(t)$ и $B_1(t)$ стационарными случайными процессами, нетрудно найти функции корреляции случайных величин $u(t)$ и $v(t)$:

$$\Phi_u(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,u(t+\tau)dt \tag{V}$$

и т. д.

В результате вычисления интегралов (V) имеем:

$$\Phi_u(\tau) = \Phi_{A_1}(\tau) + \frac{1}{2}[\Phi_{A_1}(\tau) + \Phi_{B_1}(\tau)]\cos(2\omega_0\tau) + \Phi^1_{A_1B_1}(\tau)\sin(2\omega_0\tau); \tag{VI}$$

$$\Phi_v(\tau) = \Phi_{B_1}(\tau) + \frac{1}{2}[\Phi_{A_1}(\tau) + \Phi_{B_1}(\tau)]\cos(2\omega_0\tau) + \Phi^1_{A_1B_1}(\tau)\sin(2\omega_0\tau); \tag{VII}$$

$$\Phi_{uv}(\tau) = -\Phi_{A_1B_1}(\tau) + \Phi^1_{A_1B_1}(\tau)\cos(2\omega_0\tau) - \frac{1}{2}[\Phi_{A_1}(\tau) + \Phi_{B_1}(\tau)]\sin(2\omega_0\tau). \tag{VIII}$$

Умножая далее VI, VII на $\frac{1}{\pi}\cos(\Omega\tau)$, а VIII на $\frac{1}{\pi}\cos(\Omega\tau)$ и $\frac{1}{\pi}\sin(\Omega\tau)$, интегрируя результат по τ от $-\infty$ до $+\infty$, получим для $\Omega \ll \omega_0$ искомые спектральные плотности (формулы (38) — (41) основного текста).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 2, 79 (1958).
2. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 2, 1295 (1957).
3. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 4, 54 (1959).
4. К. С Популях, Изв. Ленинград. электротехн ин-та, 26, 89 (1955)
5. В С. Троицкий, Изв. высш уч зав.—Радиофизика, 1, 1, 20 (1958)
6. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 2, 438 (1957).
7. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 573 (1959).
8. C. S. Bull, Proc. IEE, **B 105**, 190 (1958).
9. Ю. А. Дрягин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 5—6, 93 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
12 ноября 1959 г.