

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЯДЕРНЫХ МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ С АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ

Н. М. Померанцев

Изучена работа автодинных датчиков сигналов ядерного магнитного резонанса при высоком разрешении. Установлено, что имеет место увеличение частоты генератора прецессией ядерных магнитных моментов в резонансной области частота генератора следует за частотой ларморовой прецессии. После прохождения области резонанса частота изменяется скачком и возвращается к стационарному значению. При этом наблюдаются колебания, сопровождающие сигналы ядерного магнитного резонанса даже при очень медленной развертке поля. Сигналы запаздывают по сравнению с сигналами, определяемыми уравнениями Блоха.

Как известно, сигналы ядерного магнитного резонанса (ЯМР), получаемые с помощью генераторов слабых колебаний [1], подвержены искажениям [2-4]. Необходимость детального рассмотрения причин этих искажений обусловлена тем, что в настоящее время генераторы слабых колебаний широко используются в ядерных магнетометрах, спектрометрах ЯМР для записи широких линий и других устройствах. Между тем, в литературе работа автоколебательных систем при наличии ЭДС ЯМР освещена еще недостаточно.

В [2] решалась задача о форме сигналов ЯМР, получаемых при помощи автоколебательных систем, причем предполагалось, что амплитуда и фаза стационарных колебаний испытывают малые возмущения. Такая постановка задачи позволила объяснить искажения, возникающие при малой устойчивости колебаний и заключающиеся в частичном подавлении верхних частот сигнала („эффект интегрирования“).

В некоторых случаях, однако, наблюдаются искажения другого рода. При больших временах релаксации и однородном поле сигналы, получаемые с помощью генераторов слабых колебаний, сопровождаются переходными процессами даже при очень малой скорости изменения магнитного поля (см. экспериментальную часть настоящей статьи). В этом случае для нахождения формы сигналов необходимо решать уравнения без предположения о малости изменения стационарной фазы. Теоретическому и экспериментальному исследованию этого случая и посвящена эта работа.

Как мы увидим ниже, кроме нелинейности, обусловленной автоколебательной системой, уравнения будут содержать вторую нелинейность, обусловленную тем, что изменение фазы колебаний пропорционально дисперсионной компоненте сигнала ЯМР. Благодаря этой нелинейности возникает явление, которое напоминает явление захватывания генератора внешней ЭДС. Роль внешней ЭДС в нашем случае будет играть ЭДС прецессии ядерных магнитных моментов.

1. ТЕОРИЯ

Для описания поведения генератора слабых колебаний при наличии ЭДС ЯМР в [2] использована система уравнений, состоящая из уравнения второго порядка для напряжения на контуре генератора

и уравнений Блоха. Представляя характеристику электронной лампы полиномом третьей степени, можно привести эту систему уравнений к следующему виду:

$$\begin{aligned} d^2V/dt^2 + \omega^2 V &= \epsilon(1 - 4V^2) dV/dt - 2AdM_x/dt; \\ dM_x/dt + \mu M_x - \gamma H_z M_y &= 0; \\ dM_y/dt + \mu M_y + \gamma H_z M_x - 2BM_z dV/dt &= 0; \\ dM_z/dt + \nu(M_z - M_0) + 2BM_y dV/dt &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В этой системе уравнений V — приведенная величина напряжения на контуре генератора (отношение напряжения к его стационарной амплитуде), ω — резонансная частота контура, ϵ — параметр, зависящий от коэффициентов полинома, представляющего характеристику лампы, и затухания контура, $2A$ и $2B$ — постоянные, зависящие от геометрии катушки контура и степени ее заполнения образцом, M_x , M_y и M_z — компоненты результирующего вектора ядерной намагниченности, M_0 — его равновесное значение, μ и ν — величины, обратные временам релаксации T_2 и T_1 , γ — гиромагнитное отношение атомных ядер, H_z — продольная компонента магнитного поля.

Производя замену переменных

$$\begin{aligned} V &= \rho \sin(\omega t - \varphi), \\ dV/dt &= \omega\rho \cos(\omega t - \varphi), \\ M_x + iM_y &= (u + iv) e^{-i(\omega t - \varphi)} \end{aligned} \quad (2)$$

и отбрасывая высшие компоненты Фурье (подобно тому, как это сделано в [2]), получим следующую систему „укороченных“ уравнений:

$$\begin{aligned} d\rho/dt &= \frac{\epsilon}{2} \rho(1 - \rho^2) - Av; \\ \rho \frac{d\varphi}{dt} &= Au; \\ du/dt &= (\gamma H_z - \omega + d\varphi/dt)v - \mu u; \\ dv/dt &= -(\gamma H_z - \omega + d\varphi/dt)u - \mu v + B\omega\rho M_z; \\ dM_z/dt &= \nu(M_0 - M_z) + B\omega\rho v. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение этой системы значительно упрощается при следующих предположениях: а) амплитуда колебаний генератора мало отклоняется от стационарной ($\rho = 1 + \rho'$), б) $M_z \approx \text{const}$. Законность первого предположения может быть обоснована тем, что член, содержащий ЭДС ЯМР в уравнении для ρ , содержит параметр более высокого порядка малости, чем член, содержащий нелинейность. Второе предположение означает, что мы ограничиваемся случаем малой амплитуды колебаний генератора. С учетом первого предположения второе не отличается от приближения Якобсона и Вангенеса [5]. В этом случае в уравнениях системы (3) (кроме первого) можно положить $\rho = 1$; и решение системы (3) по форме будет аналогично решению, полученному в [2]:

$$V = \left[1 - A \int_{-\infty}^t e^{\epsilon(\gamma_i - t)} v(\gamma_i) d\gamma_i \right] \sin \left[\omega t - A \int_{-\infty}^t u(\zeta) d\zeta \right], \quad (4)$$

причем функции u и v определяются системой уравнений:

$$\begin{aligned} du/dt &= (\gamma H_z - \omega + Au) v - \mu u; \\ dv/dt &= -(\gamma H_z - \omega + Au) u + B \omega M_z - \mu v. \end{aligned} \quad (5)$$

Система (5) отличается от уравнений Блоха в приближении Якобсона и Вангенеса наличием членов, пропорциональных uv и u^2 . Появление этих членов обусловлено тем, что частота генератора равна $\omega = d\phi/dt$, а величина $d\phi/dt$ пропорциональна u . Проводя для удобства замену

$$\begin{aligned} Au/\mu &= x, \quad Av/\mu = y, \quad \mu t = \tau, \\ (\gamma H_z - \omega)/\mu &= \Delta, \quad AB \omega M_z / \mu^2 = K, \end{aligned} \quad (6)$$

получим:

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= (\Delta + x)y - x; \\ dy/d\tau &= -(\Delta + x)x - y + K. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим стационарные решения системы (7). Положив $dx/d\tau = dy/d\tau = 0$, получим уравнения третьей степени относительно x и y , которые удобно представить в следующем виде:

$$\Delta = (y - 1) \sqrt{K/y - 1}; \quad (8)$$

$$\Delta = K/2x \pm \sqrt{(K/2x)^2 - 1} - x. \quad (8a)$$

Стационарные решения уравнений Блоха в приближении слабого поля (лоренцова форма кривых), записанные аналогично (8) и (8a), будут иметь вид:

$$\Delta = \sqrt{K/y - 1}; \quad (9)$$

$$\Delta = K/2x \pm \sqrt{(K/2x)^2 - 1}. \quad (9a)$$

Графики функций $y = y(\Delta)$ и $x = x(\Delta)$, построенные на основании уравнений (8), (9) и (8a), (9a), представлены на рис. 1 и 2 для значения

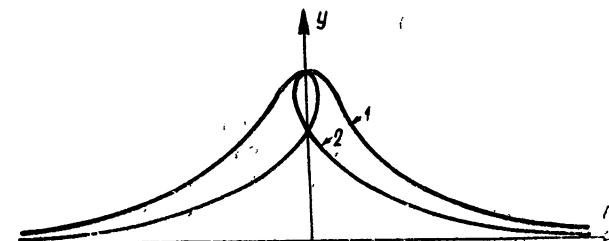


Рис. 1. Стационарные решения для кривой поглощения (функция $y(\Delta)$) при $K = 1,5$: 1—лоренцова форма кривой (уравнение (9)), 2—решение системы (7) (уравнение (8)).

$K = 1,5$. Как видно из (8), (8a), для значений $K > 1$ кривые $y(\Delta)$ и $x(\Delta)$ являются неоднозначными*. В этом случае даже при очень малой скорости изменения величины Δ стационарный режим после прохождения области резонанса неизбежно перейдет в нестационарный. Благодаря этому обстоятельству при решении задачи о форме сигна-

* На неоднозначность стационарных решений указывалось в [6].

лов нельзя ограничиваться рассмотрением только стационарного режима, как это, например, сделано в [6]. Рассмотрение устойчивости стационарного режима становится при этом бесполезным.

Таким образом, необходимо обратиться к рассмотрению динамического режима, который только и соответствует реальному поведению автоколебательной системы при наличии ЭДС ЯМР. В случае линейного изменения величины Δ со временем система уравнений (7) примет вид:

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= (\beta\tau + x)y - x; \\ dy/d\tau &= -(\beta\tau + x)x - y + K, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\beta = d\Delta/d\tau$.

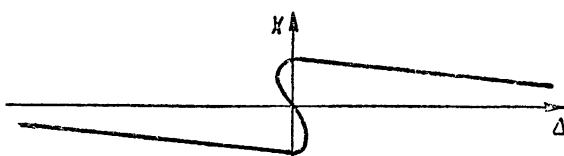
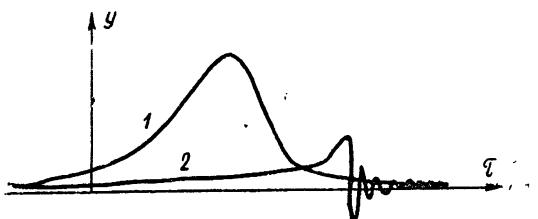


Рис. 2. Стационарное решение для кривой дисперсии (функция $x(\Delta)$) при $K=1,5$ (уравнение (8а)).

Решение систем, подобных (10), проводится обычно численным методом [7]. Система (10) решалась путем моделирования на электромодели ИПТ-5 в вычислительном центре МГУ (см. приложение). На рис. 3 и 4 представлены графики полученных решений, которые значительно отличаются от стационарных. Как видно из рис. 3, где вместе

Рис. 3 Решение системы (10) для функции $y(\tau)$: 1—решение уравнений без нелинейных членов, 2—решение уравнений с нелинейными членами.



с решением системы (10) представлено решение уравнений Блоха при тех же значениях параметров, наблюдается значительное запаздывание сигналов и возникновение колебательного процесса, отсутствующего в этом случае для решения уравнений Блоха. Из рис. 4 следует, что

частота автоколебательной системы изменяется вначале почти линейно в соответствии с изменением частоты ларморовой прецессии. Затем после прохождения резонансной области частота резко меняется и с колебаниями возвращается к стационарному значению. Таким образом, наблюдается как бы процесс



Рис. 4. Решение системы (10) для функции $x(\tau)$. Сравнение полученных решений с экспериментом описано ниже.

2. ЭКСПЕРИМЕНТ

Изучение работы автодинного датчика сигналов ЯМР при высоком разрешении производилось на установке, блок-схема которой представлена на рис. 5. Генератор построен по схеме Паунда—Найта—Ваткинса [8] с автоматической стабилизацией амплитуды. Сигнал с нагрузки детектора поступал непосредственно на вход усилителя постоянного напряжения осциллографа. Каскады усиления низкой частоты, имеющиеся в схеме [8], не использовались. Как показали эксперименты, наличие автоматической регулировки амплитуды при большой постоянной времени (3 сек) в цепи обратной связи практически не изменяло поведения автоколебательной системы по отношению к сигналам ЯМР.

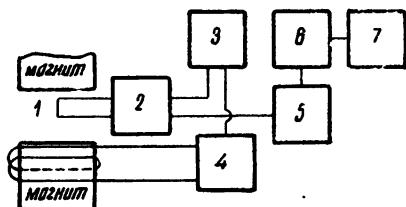


Рис. 5. Блок-схема экспериментальной установки: 1—катушка контура с образцом, 2 — генератор, 3 — осциллограф, 4 — катодный повторитель, 5 — гетеродинный волномер, 6 — измеритель частоты, 7 — шлейфовый осциллограф.

Наблюдение и регистрация изменения амплитуды колебаний производились с помощью осциллографа, пилообразная развертка луча которого использовалась для модуляции магнитного поля. Напряжение с пластины x осциллографа поступало на вход катодного повторителя, питавшего катушку, надетую на полюс магнита.

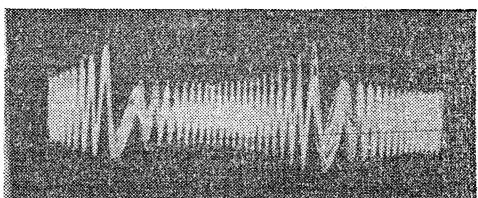
Наблюдение и регистрация изменения частоты генератора производились с помощью вспомогательных устройств, представленных на блок-схеме рис. 5. При помощи измерителя частоты регистрировалась разность частот измерительного генератора и гетеродинного волномера. Запись этой разности частот производилась на осциллографе, шлейф которого был включен последовательно с прибором измерителя частоты. Проникновение частоты гетеродинного волномера в измерительную схему устранилось применением буферных каскадов. Контур генератора с образцом помещался в поле постоянного магнита (3000 эрстед), конструкция которого разработана специально для целей высокого разрешения. Полюсные наконечники магнита (диаметр 300 мм) обработаны с оптической точностью.

Оценка однородности поля производилась по сигналам ЯМР в условиях, когда действительны решения, полученные в [2]. Как известно [1,5], сигналы ЯМР в однородном магнитном поле при достаточно большой частоте модуляции и слабом высокочастотном поле имеют вид осциллирующих функций с затуханием, которое определяется временем релаксации T_2 .

При периодической развертке, когда период модуляции сравним с временем релаксации, колебания не затухают полностью. Наличие неоднородности магнитного поля приводит к нарушению когерентности прецессии ядерных магнитных моментов, так что затухание колебаний увеличивается. Однако при подходе к резонансу в следующий период модуляции когерентность прецессии восстанавливается и колебания перед наступлением резонанса нарастают. Огибающая сигнала приобретает характерную форму [9], подобную представленной на осциллограмме рис. 6.

Для качественной оценки неоднородности магнитного поля можно принять, что затухание сигнала под влиянием неоднородности поля происходит по экспоненте [1], хотя в действительности закон затухания более сложен. Для сигналов от ядер водорода, входящего в состав воды (см. рис. 6), можно принять, что затухание целиком обусловлено неоднородностью поля. Из рис. 6 следует, что затухание происходит примерно по закону e^{-50t} , т. е. эффективное время релаксации $T_2^* = 1/50$ сек, а неоднородность поля в объеме образца $\Delta H = 1/\gamma T_2^* \approx 2 \cdot 10^{-3}$ эрстед. В относительных единицах величина неоднородности поля составит примерно $7 \cdot 10^{-7}$. Отметим, что приведенная выше оценка выполнена с некоторым завышением значения неоднородности.

Рис. 6. Осциллограмма сигнала ЯМР от ядер водорода в H_2O (3 м.м³) (частота модуляции 15 гц).



На рис. 7 представлена осциллограмма сигнала от ядер водорода, входящего в состав уксусной кислоты. Сигнал состоит из двух линий, соответствующих ядрам Н групп CH_3 и $COOH$. Форма сигнала находится в хорошем качественном согласии с теоретической, представленной на рис. 3. На рис. 8 представлен сигнал от ядер водорода в H_2O при быстрой развертке. Сигнал сопровождается значительным числом колебаний. Однако скорость развертки и здесь еще не достаточна для того, чтобы наблюдать колебания в „обычном“ случае.

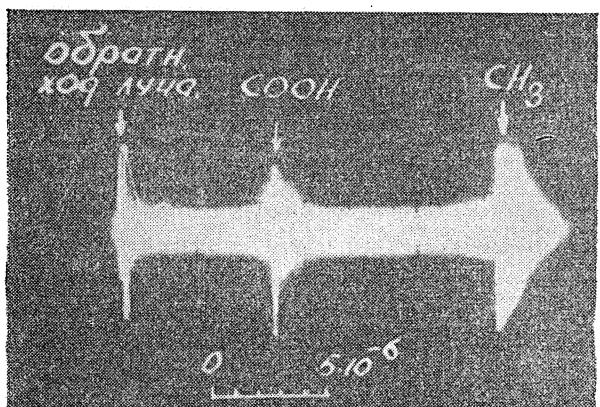
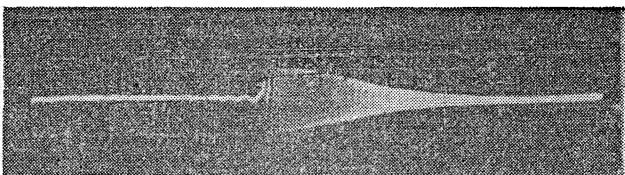


Рис. 7. Осциллограмма сигнала ЯМР от ядер водорода в составе уксусной кислоты (скорость развертки поля 0,004 эрстед · сек⁻¹).

Рис. 8. Осциллограмма сигнала ЯМР от ядер водорода в H_2O (скорость развертки поля 0,02 эрстед · сек⁻¹).



Изменение частоты генератора, записанное указанным выше методом, представлено на рис. 9. Максимальный уход частоты составляет 240 гц. Колебания при возвращении частоты к стационарному значению (см. рис. 4) не наблюдаются, так как измеритель частоты типа ИЧ-6 позволяет наблюдать только среднее за некоторый период времени значение частоты.

Одновременно с описанными выше измерениями разностная частота генератора и волномера прослушивалась с помощью телефонных трубок. Перед наступлением колебаний отмечался постепенный уход

частоты генератора в сторону, соответствующую изменению магнитного поля (при уменьшении поля частота уменьшается и наоборот). После скачков, обусловленных колебаниями, частота возвращалась к стационарному значению.

Теоретически и экспериментально установлено, что сигналы ЯМР, получаемые с помощью автодинных схем при линейной развертке магнитного поля, сопровождаются колебаниями независимо от скорости развертки. Колебания наступают после прохождения резонанса и запаздывают по сравнению с сигналами, определяемыми уравнениями Блоха. При резонансе наблюдается уход частоты генератора, соответствующий изменению частоты ларморовой прецессии ядерных магнитных моментов, т. е. имеет место увлечение частоты генератора прецессией ядерных магнитных моментов. После прохождения резонанса частота с колебаниями возвращается к стационарному значению. Наблюдавшееся явление может быть использовано для магнитной модуляции и управления частотой генератора.

Автор приносит благодарность Г. В. Манджгала за большую помочь при работе на электромодели ИПТ-5.

ПРИЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (10).

Для моделирования система (10) заменой переменных $\tilde{x} = 10x$, $\tilde{y} = 10 y$, $\tilde{\tau} = 10 \tau$ была приведена к виду:

$$\tilde{d}\tilde{x}/d\tilde{\tau} = (\beta\tilde{\tau} + \tilde{x})\tilde{y}/100 - \tilde{x}/10;$$

$$\tilde{d}\tilde{y}/d\tilde{\tau} = -(\beta\tilde{\tau} + \tilde{x})\tilde{y}/100 - \tilde{y}/10 + K.$$

Рис. 9. Усредненное изменение частоты генератора при скорости развертки поля 0,004 эрстед · сек⁻¹ (максимальное изменение поля 0,067 эрстед; задержка развертки 8 сек; длительность — 17 сек). Левая линия является базисной, правая показывает уход частоты. Маленькие выбросы вверх обусловлены обратным ходом развертки.

Интегрирование велось по блок-схеме, представленной на рис. 10.

Регистрация решений проводилась для значений $\tilde{\Delta} = \beta \tilde{\tau}$ в интервале от -40 в до $+60 \text{ в}$. Решение, представленное кривой 1 на рис. 3, соответствует решению уравнений Блоха. При этом функция

\tilde{x} не подавалась на блок 2, а на блоки 3 и 6 по-

ступала функция $\beta\tilde{\tau}$. Значения параметров β и K выбраны так, чтобы решения уравнений Блоха не имели колебаний, т. е. были близки к стационарным. Это имеет место при $K = 10 \text{ в}$ и $\beta = 0,5 \text{ в}$. Переход от решения уравнений Блоха к решению уравнений (10) осуществлялся подачей функции \tilde{x} на блок 2 без изменения параметров K и β .

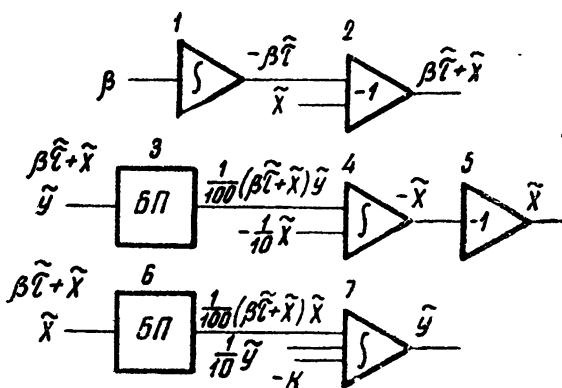


Рис. 10. Блок-схема моделирования уравнений (10)
на электромодели ИПТ-5

ЛИТЕРАТУРА

1. Э Эндрю, Ядерный магнитный резонанс, ИЛ, 1957
2. Н. М. Померанцев, Вестник МГУ, № 2, 47 (1955)
3. A Lösche, Kerninduktion, Leipzig, 1957
4. П. М. Бородин, Т. И. Скрипов, Изв высш уч. зав — Радиофизика, 1, № 3, 37 (1958).
5. B. A. Jacobson, R. K. Wangsness, Phys. Rev., 73, 942 (1948).
6. H Pfeifer, Ann. Phys., 15, 311 (1955).
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, ГИТТД, 1955
8. R. V. Pound, Progr. Nucl. Phys., 2, 21 (1952)
9. R. Gabillard, Comptes Rendus, 233, 307 (1951).

Поступила в редакцию
26 октября 1959 г.