ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том III, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1960*

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С ФЛЮКТУАЦИЯМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина

Исследуется распространение электромагнитных волн в среде со случайными флюктуациями диэлектрической проницаемости с учетом рефракции Изучаются эффекты деполяризации; рассматриваются некоторые общие свойства относительных флюктуаций амплитуды и фазы при произвольной зависимости среднего значения диэлектрической проницаемости от координат

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Флюктуациям электромагнитного поля в среде со случайными изменениями диэлектрической проницаемости посвящен ряд работ [1-4]. В цитируемых статьях среднее значение диэлектрической проницаемости предполагалось постоянным, т. е. не учитывалась рефракция. Это допущение, правомерное для тропосферы, не выполняется в ряде случаев, например, для ионосферы, солнечной короны и т. д.

Влияние зависимости средней диэлектрической проницаемости от координат на флюктуации электромагнитного поля рассматривались Шефлером [4] и Денисовым [5]. Однако первый автор ограничился лишь приближением геометрической оптики, а второй рассмотрел скалярное волновое уравнение. В работах [4,5] вычислялись средние квадраты флюктуаций и корреляции амплитуды и фазы. Диэлектрическая проницаемость считалась функцией одной координаты. При таком подходе, являющимся приближенным для электромагнитных волн, не учитывается деполяризация падающей волны, которая приводит к качественно новым физическим эффектам. Кроме того, ряд общих соотношений может быть установлен при произвольной зависимости диэлектрической проницаемости от координат.

Настоящая работа посвящена рассмотрению этих вопросов.

Электрическое поле $\boldsymbol{E}$ в среде со случайными неоднородностями удовлетворяет следующему уравнению:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - k^2\varepsilon\boldsymbol{E} = 0\,. \tag{1.1}$$

Здесь $k^2 = \omega^2/c^2$ (ω — частота волны, c — скорость света в вакууме), а $\varepsilon = \bar{\varepsilon}(\boldsymbol{r}) + \delta\varepsilon(\boldsymbol{r})$—диэлектрическая проницаемость, которая представлена в виде суммы двух слагаемых: средней диэлектрической проницаемости $\bar{\varepsilon}(\boldsymbol{r})$—заданной функции координат, и флюктуационной части $\delta\varepsilon(\boldsymbol{r})$—случайной функции координат. Зависимость всех величин от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$.

Задача решается в предположении, что

$$|\overline{\delta\varepsilon^2}|^{1/2}/|\bar{\varepsilon}| \ll 1; \quad \lambda \ll l \ll a \ll L,$$

где $\lambda = c/\omega$, l—радиус корреляции случайной составляющей диэлектрической проницаемости, a — расстояние, на котором существенно меняется $\bar{\varepsilon}(\boldsymbol{r})$, L—оптическая длина трассы.

Уравнение (1.1) решается методом последовательных приближений. Представляя поле E в виде

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + \dots \tag{1.2}$$

и ограничиваясь первым приближением, получим уравнения для нулевого и первого приближения:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} E_0 - k^2 \bar{\varepsilon}(r) E_0 = 0; \tag{1.3}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} E_1 - k^2 \bar{\varepsilon}(r) E_1 = k^2 \delta\varepsilon(r) E_0. \tag{1.4}$$

В силу сделанных предположений нулевым приближением является приближение геометрической оптики, а при решении уравнения (1.4) функция Грина находится в том же приближении. При этом предполагается отсутствие точек поворота лучей и других особых точек, в которых геометрическая оптика не применима.

2. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Для ряда физически важных приложений, например, распространения электромагнитных волн в ионосфере, $\bar{\varepsilon}$ можно считать функцией лишь одной координаты, которую обозначим через z. Представляет интерес рассмотреть два случая [6]:

1) электрическое поле первого приближения перпендикулярно оси z:

$$E_{0x} = E_{0z} = 0; \quad E_{0y} = \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon - \alpha}} \exp\left[ik \int_0^z \sqrt{\varepsilon - \alpha}\, d\tau + ik_x x \right], \tag{2.1}$$

$$\alpha = k_x^2 / k^2;$$

2) электрическое поле наклонено к оси z:

$$\begin{gathered} E_{0x} = \frac{\sqrt[4]{\varepsilon - \alpha}}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left[ik \int_0^z \sqrt{\varepsilon - \alpha}\, d\tau + ik_x x \right]; \\ E_{0y} = 0; \quad E_{0z} = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt[4]{\varepsilon - \alpha}} \exp\left[ik \int_0^z \sqrt{\varepsilon - \alpha}\, d\tau + ik_x x \right]. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Обратимся к первому случаю. Уравнение (1.4) в проекциях на оси x, y, z запишется следующим образом:

$$\begin{gathered} \Delta E_{1x} + k^2 \bar{\varepsilon} E_{1x} + \frac{d \ln \bar{\varepsilon}}{dz} \frac{\partial E_{1z}}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} \frac{\partial \delta\varepsilon}{\partial y}; \\ \Delta E_{1y} + k^2 \bar{\varepsilon} E_{1y} = -k^2 \delta\varepsilon E_{0y}; \\ \Delta E_{1z} + k^2 \bar{\varepsilon} E_{1z} + \frac{d \ln \bar{\varepsilon}}{dz} \frac{\partial E_{1z}}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial E_{0y}}{\partial z} \frac{\partial \delta\varepsilon}{\partial y}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Заметим, что правые части первого и третьего уравнений системы (2.3) появились благодаря учету поляризационных поправок порядка $\nabla\delta\varepsilon$, которые в $1/kl$ раз меньше правой части второго уравнения системы.

Рассмотрим решение второго уравнения системы (2.3)

$$E_{1y}(r) = e^{ik_x x} \iint_{-\infty}^{\infty} E_{1y}(\varkappa, z)\, e^{i(\varkappa_x x + \varkappa_y y)}\, d\varkappa_x\, d\varkappa_y \tag{2.4}$$

(остальные уравнения решаются аналогично). Поле $E_{1y}(\varkappa, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 E_{1y}}{dz^2} + \left[k^2\varepsilon - (\varkappa_x + k_x)^2 - \varkappa_y^2\right] E_{1y} = \frac{-k^2 g(\varkappa, z)}{\sqrt[4]{\varepsilon - \alpha}} \exp\left[ik \int_0^z \sqrt{\varepsilon - \alpha}\, d\tau\right];$$

$$g(\varkappa, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \delta\varepsilon e^{-i(\varkappa_x x + \varkappa_y y)} dx dy. \tag{2.5}$$

Компонента E_{1y} должна иметь вид волны, бегущей в положительном направлении при $z \to \infty$. При $z \to 0$ волна, распространяющаяся в положительном направлении, должна стремиться к нулю. Решение уравнения (2.5), удовлетворяющее указанным условиям, имеет вид:

$$E_{1y}(\varkappa, z) = e^{ik\int_0^z \sqrt{\varepsilon - \alpha'}\, d\tau} \int_0^z f_y(z, \zeta, \varkappa)\, g(\zeta, \varkappa) \times$$

$$\times e^{ik\left(\int_0^\zeta \sqrt{\varepsilon-\alpha}\, d\tau - \int_0^\zeta \sqrt{\varepsilon - \alpha'}\, d\tau\right)} d\zeta + e^{-ik\int_0^z \sqrt{\varepsilon-\alpha'}\, d\tau} \int_z^\infty f_y(z, \zeta, \varkappa)\, g(\zeta, \varkappa) \times$$

$$\times e^{ik\left(\int_0^\zeta \sqrt{\varepsilon - \alpha'}\, d\tau + \int_0^\zeta \sqrt{\varepsilon - \alpha}\, d\tau\right)} d\zeta; \tag{2.6}$$

$$f_y = \frac{-k}{2i\sqrt{\varepsilon(\zeta) - \alpha}\,\sqrt[4]{\varepsilon(z) - \alpha}}; \quad \alpha' = \frac{(\varkappa_x + k_x)^2 + \varkappa_y^2}{k^2}.$$

Все остальные компоненты поля в обоих случаях отличаются от (2.6) только видом функции f. Первый член в (2.6) представляет волну, бегущую в положительном направлении оси z, а второй — волну, рассеянную неоднородностями в направлении $-z$.

Нас будут интересовать следующие статистические характеристики случайных составляющих электрического поля:

1) коэффициенты отражения $V_{1,2}^{(i)}$ и коэффициенты деполяризации $D_{1,2}^{(i)}$, описывающие поворот плоскости поляризации:

$$V_{1,2}^{(i)} = \frac{\overline{|E_{1i}^{(-)}|^2}}{|E_{0i}|^2}; \qquad D_{1,2}^{(i)} = \frac{\overline{|E_{1i}^{(\mp)}|^2}}{|E_{0i}|^2}; \tag{2.7}$$

2) средние квадраты флюктуаций фаз β_i и относительных флюктуаций амплитуд α_i и их функции корреляции $R_\alpha^{(i)}$, $R_\beta^{(i)}$. Согласно [8,9], эти величины определяются формулами:

$$\overline{\alpha_i^2} = \overline{\left(\mathrm{Re}\,\frac{E_{1i}^{(+)}}{E_{0i}}\right)^2}; \qquad \overline{\beta_i^2} = \overline{\left(\mathrm{Im}\frac{E_{1i}^{(+)}}{E_{0i}}\right)^2};$$

$$R_\alpha^{(i)} = \overline{\mathrm{Re}\,\frac{E_{1i}(0)}{E_{0i}(0)}\,\mathrm{Re}\,\frac{E_{1i}(\boldsymbol{r})}{E_{0i}(\boldsymbol{r})}}; \quad R_\beta^{(i)} = \overline{\mathrm{Im}\,\frac{E_{1i}(0)}{E_{0i}(0)}\,\mathrm{Im}\,\frac{E_{1i}(\boldsymbol{r})}{E_{0i}(\boldsymbol{r})}}. \tag{2.8}$$

Вектор $\boldsymbol{r}$ берется в плоскости, перпендикулярной оси z. В формулах (2.7) и (2.8) знаком $\pm$ обозначены волны, бегущие соответственно в положительном и отрицательном направлениях, индекс указывает номер компоненты, а цифры 1, 2 относятся к первому и второму случаям.

Выражая $E^{(i)}_{1i}$ через их преобразования Фурье и проводя выкладки, аналогичные [7], получим следующие выражения для коэффициентов отражения и деполяризации:

$$V^{(y)}_1=\frac{k^2}{4}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{1}{\bar\varepsilon-\alpha}K(0,\ 0,\ \zeta;\ \rho_x,\ \rho_y,\ \rho_z)\,e^{2ik\sqrt{\bar\varepsilon-\alpha}\,\rho_z}\,d\zeta\,d\rho_z; \tag{2.9}$$

$$D^{(i)}_{1,2}=\int\limits_0^z\int\limits_{-\infty}^\infty F^{(i)}_{1,2}(\bar\varepsilon(z),\bar\varepsilon(\zeta))\,\frac{\partial^2K(0,\ 0,\ \zeta;\ \rho_x,\ \rho_y,\ \rho_z)}{\partial\rho_y^2}\,d\zeta\,d\rho_z;$$

$$\rho_x=\frac{\sqrt{\alpha}\,\rho_z}{\sqrt{\bar\varepsilon-\alpha}};\quad \rho_y=0.$$

В (2.9) K—функция корреляции между флюктуациями диэлектрической проницаемости *:

$$K(\boldsymbol r,\ \rho)=\overline{\delta\varepsilon(\boldsymbol r)\,\delta\varepsilon(\boldsymbol r')}\qquad(\rho=\boldsymbol r-\boldsymbol r'),$$

а функция $F^{(i)}_{1,2}$ определяется соотношениями:

$$F^{(x)}_1=-\frac{\alpha}{4}\left[\frac{\sqrt{\bar\varepsilon(z)-\alpha}}{\alpha\sqrt{\bar\varepsilon(z)\bar\varepsilon(\zeta)}}-\frac{\sqrt{\bar\varepsilon(\zeta)-\alpha}}{\alpha\,\bar\varepsilon(\zeta)}-\frac{1}{\bar\varepsilon(\zeta)\sqrt{\bar\varepsilon(\zeta)-\alpha}}\right]^2;$$

$$F^{(z)}_1=-\frac{1}{4\bar\varepsilon(z)\bar\varepsilon(\zeta)}; \tag{2.10}$$

$$F^{(y)}_2=-\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{\sqrt{\bar\varepsilon(\zeta)}\,[\bar\varepsilon(z)-\alpha]-\sqrt{\bar\varepsilon(z)}\,[\bar\varepsilon(\zeta)-\alpha]}{\sqrt{\bar\varepsilon(z)\bar\varepsilon(\zeta)}\,[\bar\varepsilon(\zeta)-\alpha]}\right]^2.$$

Выше выражение для коэффициента отражения приведено только в первом случае. Как будет показано, эта величина исчезающе мала и ею всегда можно пренебречь. Значение V_2 по порядку совпадает с V_1, но выражение для V_2 имеет более громоздкий вид.

При рассмотрении флюктуаций амплитуды и фазы следует различать два случая: флюктуации амплитуды и фазы компонент поля, среднее значение которых не равно нулю, и флюктуации этих величин для тех компонент поля, которые в среднем равны нулю.

Остановимся сначала на первом случае. В ближней зоне (по терминологии Обухова), для которой выполняется неравенство $L/kl^2\ll 1$, имеем:

$$R^{(i)}_\alpha(\boldsymbol r)=\frac{1}{16}\int\limits_0^z\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{1}{\bar\varepsilon-\alpha}\left(\int\limits_z^\zeta\frac{d\tau}{(\bar\varepsilon-\alpha)^{1/2}}\Delta_\rho+\alpha\int\limits_z^\zeta\frac{d\tau}{(\bar\varepsilon-\alpha)^{3/2}}\frac{\partial^2}{\partial\rho_x^2}\right)^2\times$$
$$\times K(0,\ 0,\ \zeta;\ \rho_x,\ \rho_y,\ \rho_z)\,d\zeta\,d\rho_z; \tag{2.11}$$

* Отметим, что функция K зависит не только от расстояния ρ между точками $\boldsymbol r$ и $\boldsymbol r'$, но и от самих точек $\boldsymbol r$, $\boldsymbol r'$, и при изменении ρ меняется на расстояниях порядка l, а при изменении $\boldsymbol r$—на расстояниях порядка a.

$$R_\beta^{(i)}(r)=\frac{k^2}{4}\int_0^z\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\bar{\varepsilon}-\alpha}K(0,0,\zeta;\rho_x,\rho_y,\rho_z)\,d\zeta\,d\rho_z;$$

$$\rho_x=\frac{\sqrt{\alpha}\,\rho_z}{\sqrt{\bar{\varepsilon}-\alpha}}+r_x;\ \rho_y=r_y; \tag{2.12}$$

$$\Delta_\rho=\frac{\partial^2}{\partial\rho_x^2}+\frac{\partial^2}{\partial\rho_y^2}.$$

В дальней зоне ($L/kl^2\gg1$) выражения для $R_\alpha^{(i)}$ и $R_\beta^{(i)}$ совпадают и отличаются от выражения (2.12) лишь коэффициентом 1/2.

Из формул (2.11) и (2.12) ясно, что $R_\alpha^{(i)}$ и $R_\beta^{(i)}$ существенно убывают на расстояниях порядка l. Если функция K является аналитической, то из асимптотики внутреннего интеграла в (2.9) следует, что коэффициент отражения, по крайней мере, экспоненциально мал по параметру $kl\gg1$. Таким образом, отражение от статистически неоднородного слоя в приближении геометрической оптики пренебрежимо мало.

Для получения явных зависимостей статистических характеристик поля нужно сделать дополнительные предположения о виде функции корреляции и зависимости $\bar{\varepsilon}(z)$. Так, если допустить, что функция корреляции может быть записана в виде:

$$K(r,\rho)=\overline{\delta\varepsilon^2(z)}\,W\left(\frac{|\rho|}{l(z)}\right),$$

то выражения $D_{1,2}^{(i)}$, $\overline{\alpha_i^2}$, $\overline{\beta_i^2}$ в предельном случае дальней зоны могут быть записаны следующим образом:

$$D_{1,2}^{(i)}=A\int_0^z F_{1,2}^{(i)}(\bar{\varepsilon}(z),\bar{\varepsilon}(\zeta))\,\frac{\overline{\delta\varepsilon^2}(\zeta)}{l(\zeta)}\sqrt{1-\frac{\alpha}{\bar{\varepsilon}(\zeta)}}\,d\zeta; \tag{2.13}$$

$$\overline{\alpha_i^2}=\overline{\beta_i^2}=B\frac{k^2}{8}\int_0^z\frac{\overline{\delta\varepsilon^2}(\zeta)\,l(\zeta)}{\sqrt{\bar{\varepsilon}(\zeta)}\,\sqrt{\bar{\varepsilon}(\zeta)-\alpha}}\,d\zeta. \tag{2.14}$$

Здесь

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\frac{dW(x)}{dx}\,dx,\qquad B=\int_{-\infty}^{\infty}W(x)\,dx.$$

Следовательно, явный вид функции W сказывается только на значениях констант A и B.

В предельных случаях $\bar{\varepsilon}=1$ и $\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}(z)$, $\alpha=0$ соответствующие формулы настоящей работы переходят в результаты [1–4].

Исследуем флюктуации амплитуды и фазы x- и y-компонент электрического поля в первом случае и y-компоненты во втором. (Эти компоненты имеют только флюктуационные составляющие.) Заметим, что аналогичный случай рассматривался в работах [ⁱ,9] при условиях в дальней зоне, которые здесь также выполняются и имеют вид:

$$\overline{(\mathrm{Re}\,U)^2}=\overline{(\mathrm{Im}\,U)^2},\quad \overline{\mathrm{Re}\,U\,\mathrm{Im}\,U}=0,$$

где U — произвольная компонента флюктуационного поля. Так как $\mathrm{Re}U$ и $\mathrm{Im}U$ распределены по нормальному закону, из [8,9] следует, что средняя фаза равна $\pi/2$, средний квадрат фазы равен $\pi^2/3$ и

$$\overline{(\ln|U| - \ln|\overline{U}|)^2} = \pi^2/24 .$$

Для ионосферы представляют интерес и одномерные флюктуации диэлектрической проницаемости при $\delta\varepsilon$, зависящем только от z. Решение для любой компоненты поля E, справедливое в ближней и дальней зонах, имеет вид:

$$E = f(\bar{\varepsilon}(z) + \delta\bar{\varepsilon}(z)) \exp\left[ik\int\limits_0^z \sqrt{\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon - \alpha}\, d\zeta\right].$$

Следовательно, относительная флюктуация амплитуды, равная $\frac{d\ln f(\varepsilon(z))}{d\bar{\varepsilon}}\delta\varepsilon$, пренебрежимо мала. Флюктуация β и средний квадрат флюктуации фазы $\overline{\beta^2}$ определяются формулами:

$$\beta = \frac{k}{2}\int\limits_0^z \frac{\delta\varepsilon(\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{\bar{\varepsilon}(\zeta) - \alpha}}; \qquad \overline{\beta^2} = \frac{k^2}{4}\int\limits_0^z\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{K(0, 0, \zeta; 0, 0, \rho_z)}{\bar{\varepsilon}(\zeta) - \alpha}\, d\zeta\, d\rho_z. \tag{2.15}$$

3. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ. КОЭФФИЦИЕНТ ЗАТУХАНИЯ

Выше было показано, что при $\bar{\varepsilon}$, зависящем от одной координаты, выражения для средних квадратов флюктуаций фазы и амплитуды в дальней зоне совпадают и отличаются множителем 1/2 от выражения для среднего квадрата флюктуации фазы в ближней зоне. Эти соотношения справедливы и для произвольной трехмерной зависимости среднего значения диэлектрической проницаемости от координат.

Как показал Рытов [10], решение уравнения (1.3) в приближении геометрической оптики имеет вид:

$$E_0(\boldsymbol{r}) = A(\boldsymbol{r})\, e^{iS(\boldsymbol{r})},$$

где $A(\boldsymbol{r})$ — медленно меняющаяся на длине волны функция координат, а фаза $S(\boldsymbol{r})$ определяется уравнением эйконала

$$(\nabla S)^2 = k^2\bar{\varepsilon},$$

откуда

$$S(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = k\int\limits_1^2 \sqrt{\bar{\varepsilon}}\, dl .$$

Интегрирование ведется вдоль луча, соединяющего точки 1, 2. Тензор Грина уравнения (1.4) равен

$$\tau_{ik}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = T_{ik}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, e^{iS(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')} .$$

Здесь $T_{ik}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ — медленно меняющаяся на длине волны функция $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$.

Используя приведенную функцию Грина, имеем:

$$E_{1i}(\boldsymbol{r}) = -k^2\int T_{ik}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\, A_k(\boldsymbol{r}')\, \delta\varepsilon(\boldsymbol{r}')\, e^{i[S(0, \boldsymbol{r}') + S(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})]} dv' . \tag{3.1}$$

Флюктуации фазы и относительные флюктуации амплитуды i-ой компоненты электрического поля в случае, когда применим метод возмущений, находим по формулам работ [8,9]:

$$\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Im}} - \frac{k^2}{A_i(0, \boldsymbol{r})} \int T_{ik}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) A_k(0, \boldsymbol{r}') \delta\varepsilon(\boldsymbol{r}') e^{i[S(0, \boldsymbol{r}') + S(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) - S(0, \boldsymbol{r})]} dv'. \quad (3.2)$$

Интеграл, входящий в формулу (3.2), можно приближенно вычислить, используя метод перевала, так как при достаточно длинных трассах $S(0, \boldsymbol{r}')+S(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$—большая величина. В силу принципа Ферма, экстремальное значение $S(0, \boldsymbol{r}')+S(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$ равно $S(0, \boldsymbol{r})$. При интегрировании существенной является область, примыкающая к лучу, соединяющему точки 0, $\boldsymbol{r}$. Введем ортогональную систему координат с осями, направленными по ортам естественного трехгранника, связанного с лучом 0, $\boldsymbol{r}$. Координаты, направленные вдоль осей, ортогональных касательной к лучу 0, $\boldsymbol{r}$, обозначим через x, y, а координату вдоль касательной—через z и разложим показатель экспоненты в (3.2) по x, y в окрестности луча 0, $\boldsymbol{r}$. Учитывая, что поперечные размеры области, существенной при интегрировании, много меньше длины луча, интегрирование по координатам x, y можно распространить от $-\infty$ до $+\infty$ и (3.2) переписать в виде:

$$\begin{gathered} \alpha_i = -\frac{k^2}{A_i(0,z)} \int_0^z \int_{-\infty}^{\infty} \int T_{ik}(z', z)\, A_k(0, z') \sin\left[\gamma_x(z', z)\, x^2 + \right. \\ \left. + \gamma_y(z', z)\, y^2\right] \delta\varepsilon(x, y, z')\, dz'\, dx\, dy; \\ \gamma_{x,y} = \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 [S(0, z') + S(z', z)]}{\partial x^2, \partial y^2}. \end{gathered} \quad (3.3)$$

Выражение для β_i получается заменой sin на cos. После простых, но громоздких выкладок получаем:

$$\begin{gathered} \frac{\overline{\alpha_i^2}}{\overline{\beta_i^2}} = \frac{k^4\pi}{2A_i^2(0, z)} \left\{ \pi \int_0^z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[T_{ik}(\zeta, z)\, A_k(0, \zeta)]^2\, K(0, 0, \zeta;\ 0, 0, \rho_z)}{\gamma_x \gamma_y}\, d\zeta\, d\rho_z \mp \right. \\ \mp \frac{1}{2} \int_0^z \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{1}{\sqrt{\gamma_x \gamma_y}} [T_{ik}(\zeta, z) A_k(0, \zeta)]^2 K(0, 0, \zeta;\ \rho_x, \rho_y, \rho_z) \times \\ \left. \times \sin\left[\frac{1}{2}(\gamma_x \rho_x^2 + \gamma_y \rho_y^2)\right] \right\} d\zeta\, d\rho_x\, d\rho_y\, d\rho_z. \end{gathered} \quad (3.4)$$

В дальней зоне, определяемой неравенством $\frac{1}{2}\gamma_{x,y} l^2 \ll 1$ $(\rho_x^2, \rho_y^2 \sim l^2)$, вторым членом в фигурной скобке можно пренебречь, так как он пропорционален малому параметру $\frac{1}{2}\gamma_{x,y} l^2$. Таким образом, в этом предельном случае

$$\begin{gathered} \overline{\alpha_i^2} = \overline{\beta_i^2} = \frac{\pi^2 k^4}{2A_i^2(0, z)} \int_0^z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[T_{ik}(\zeta, z)\, A(0, \zeta)]^2}{\gamma_x \gamma_y} \times \\ \times K(0, 0, \zeta;\ 0, 0, \rho_z)\, d\zeta\, d\rho_z. \end{gathered} \quad (3.5)$$

В ближней зоне ($\gamma_{x,y} l^2 \gg 1$) во втором члене $\sin\left[\frac{1}{2}(\gamma_x \rho_x^2 + \gamma_y \rho_y^2)\right]$ меняется значительно быстрее, чем K. Используя это обстоятельство при интегрировании по ρ_x и ρ_y, получим:

$$\overline{\alpha_i^2} = \frac{k^4\pi^2}{A_i^2(0, z)} \int_0^z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[T_{ik}(\zeta, z) A_k(0, \zeta)]^2}{\gamma_x \gamma_y} K(0, 0, \zeta; 0, 0, \rho_z)\, d\zeta\, d\rho_z;$$

$$\overline{\beta_i^2} = \frac{k^4\pi^2}{16A_i^2(0, z)} \int_0^z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[T_{ik}(\zeta, z) A_k(0, \zeta)]^2}{\gamma_x^3 \gamma_y} \frac{\partial^4 K(0, 0, \zeta; 0, 0, \rho_z)}{\partial \rho_x^4} d\zeta\, d\rho_z +$$

$$+ \frac{k^4\pi^2}{16A_i^2(0, z)} \int_0^z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[T_{ik}(\zeta, z) A_k(0, \zeta)]^2}{\gamma_x \gamma_y^3} \frac{\partial^4 K(0, 0, \zeta; 0, 0, \rho_z)}{\partial \rho_y^4} d\zeta\, d\rho_z + \tag{3.6}$$

$$+ \frac{k^4\pi^2}{8A_i^2(0, z)} \int_0^z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[T_{ik}(\zeta, z) A_k(0, \zeta)]^2}{\gamma_x^2 \gamma_y^2} \frac{\partial^4 K(0, 0, \zeta; 0, 0, \rho_z)}{\partial \rho_x^2 \partial \rho_y^2} d\zeta\, d\rho_z .$$

Заметим, что $\overline{\alpha_i^2} + \overline{\beta_i^2}$ описывается одной и той же формулой для всех трасс:

$$\overline{\alpha_i^2} + \overline{\beta_i^2} = \frac{k^4\pi^2}{A_i^2(0, z)} \int_0^z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[T_{ik}(\zeta, z) A_k(0, \zeta)]^2}{\gamma_x \gamma_y} K(0, 0, \zeta; 0, 0, \rho_z)\, d\zeta\, d\rho_z.$$

Сравнивая (3.5) и (3.6), убеждаемся в правильности сформулированных утверждений.

Заметим, что после решения задачи нулевого порядка вычисление статистических характеристик флюктуаций электрического поля сводится к квадратурам.

Определим затухание среднего поля, обусловленное рассеянием на флюктуациях. При расчете затухания в первом приближении можно считать $\operatorname{div} E = 0$ и ограничиться скалярным волновым уравнением. Аналогично тому, как это делалось, например, в [11], для $\bar{E}$ находим следующее уравнение:

$$\Delta \bar{E} + k^2[\bar{\varepsilon} \bar{E} + k^2 \int G(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) K(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \bar{E}(\boldsymbol{r}')\, dv'] = 0, \tag{3.7}$$

где $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$—функция Грина скалярного уравнения в приближении ВКБ. В (3.7) область интегрирования — порядка l^3; $G(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$ в таком малом объеме совпадает с функцией Грина для однородного пространства и равна

$$\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik\sqrt{\bar{\varepsilon}}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} .$$

Решение (3.7) ищем в виде:

$$\bar{E}(\boldsymbol{r}') = \bar{E}'(\boldsymbol{r}')\, e^{iS(0, \boldsymbol{r}')},$$

где $\bar{E}'(\boldsymbol{r}')$ — мало меняющаяся на расстояниях порядка l функция. Полученный результат подтверждает сделанные предположения.

Далее ограничимся случаем дальней зоны, ибо в ближних зонах учет затухания не имеет смысла [8,9].

В дальней зоне внутри области $\sim l^3$

$$e^{iS(0,\,r')} \simeq e^{iS(0,\,r)+i\nabla S(r)(r-r')} .$$

Подставляя это выражение в (3.7) и вынося медленно меняющуюся функцию $\bar{E}(r')$ за знак интеграла в точке r, для определения $\bar{E}$ окончательно получаем уравнение

$$\left\{ \Delta + k^2\left[\bar{\varepsilon}(r) + \frac{1}{2}\, ik \frac{1}{\bar{\varepsilon}^{1/2}(r)} \int\limits_0^\infty K(r,\ \rho)\, d\rho\right]\right\}\bar{E} = 0. \qquad (3.8)$$

Решая уравнение (3.8) методом ВКБ, получим:

$$\bar{E} \sim e^{iS - \int \mu dl}\,, \qquad (3.9)$$

где коэффициент затухания μ определяется формулой

$$\mu = \frac{1}{4}\,\frac{k^2}{\bar{\varepsilon}(r)} \int\limits_0^\infty K(r,\ \rho) d\rho. \qquad (3.10)$$

Здесь предполагалось, что K зависит лишь от $|\rho|$.

Таким образом, выражение для коэффициента затухания в приближении геометрической оптики совпадает с выражением для однородного пространства [12], в котором, однако, необходимо учитывать зависимость $\bar{\varepsilon}$ и K от r. Заметим, что с уменьшением $\bar{\varepsilon}$ затухание растет.

В области, где $\bar{\varepsilon}(r) = 0$, геометрическая оптика и, следовательно, наши формулы неприменимы. Однако тенденция к росту в области неприменимости геометрической оптики дает основание предположить, что в этих областях имеет место резкое затухание среднего электрического поля и увеличение флюктуационной составляющей поля.

В статье показано наличие деполяризации среднего поля, что приводит в дальней зоне к резким флюктуациям амплитуды и фазы компонент электрического поля, перпендикулярных к среднему полю. Средний квадрат флюктуационных компонент, перпендикулярных среднему полю, в $(kl)^{-2}$ раз меньше, чем средний квадрат флюктуационной компоненты поля, параллельной среднему полю. Тем не менее, ввиду того, что на эффект деполяризации не накладываются другие эффекты более низкого порядка малости, коэффициенты деполяризации могут быть измерены и использованы для определения статистических характеристик среды со случайными неоднородностями.

Отметим, что деполяризация—эффект того же порядка, что флюктуации угла прихода.

При $\bar{\varepsilon}$, зависящем от одной координаты z, квадраты относительных флюктуаций амплитуды и флюктуаций фазы одинаковы, а коэффициенты деполяризации для поля, перпендикулярного к оси $0z$, и для поля, наклоненного к оси $0z$, различны.

Равенство средних квадратов амплитуды и фазы в дальней зоне и связь их с квадратом флюктуаций фазы в ближней зоне имеет место при произвольной зависимости от трех координат.

В заключение авторы благодарят Э. А. Канера за обсуждение работы и Н. Г. Денисова за ознакомление с работой [5] до ее опубликования.

ЛИТЕРАТУРА

1 А М. Обухов, Изв АН СССР, сер геофиз., **2**, 155 (1953).
2. Л А Чернов, Распространение радиоволн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М, 1958.
3 R B Muchmore, A. D. Wheelon, Proc. IRE, **43**, 1437 (1955)
4. H. Sheffler, Z Z Astroph., **45**, 113 (1958).
5 Н Г Денисов, Изв. высш уч. зав.—Радиофизика, **2**, 316 (1959).
6 Я. Л. Альперт, В Л Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радио волн, ГИТТЛ, М, 1953
7 В. И Татарский, ДАН СССР, **107**, 245 (1956).
8 Э А. Канер, Ф. Г. Басс, ДАН СССР, **127**, 792 (1959)
9 Э. А Канер, Ф. Г. Басс, Изв высш. уч. зав —Радиофизика, **2**, 553 (1959).
10 С. М Рытов, ДАН СССР, **18**, 263 (1938).
11. И. М Лифшиц, М. И Каганов, В М. Цукерник, Труды физико-математического факультета ХГУ, **2**, 41 (1950).
12 Э А Канер, Изв высш уч зав —Радиофизика, **2**, 827 (1959)

Харьковский институт
радиофизики и электроники АН УССР

Поступила в редакцию
11 июля 1959 г.