

О СИЛЕ РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

В. Я. Эйдман

Получено выражение для силы реакции излучения, действующей на заряд, который движется в магнитоактивной плазме. Показано, что возможность излучения сверхсветовых допплеровских частот уменьшает сопротивление, испытываемое частицей при ее колебаниях в плазме, а в некоторых случаях приводит даже к раскачке колебаний.

Как известно, изменение траектории движущейся в плазме частицы в результате излучения ею электромагнитных волн представляет значительный интерес для теории ускорителей, а также в некоторых других случаях (например, при движении электронов в солнечной короне). Присутствие среды может сильно сказаться на характере движения зарядов. Так, в магнитоактивной плазме, где показатель преломления $n_j(\omega, \theta)$ может принимать большие значения, появляется возможность испускания аномальных допплеровских частот даже при очень малых скоростях поступательного движения частицы v_0 . Это, в свою очередь, приводит к уменьшению силы сопротивления, действующей на перпендикулярные постоянному магнитному полю H_0 колебания частицы; при некоторых условиях может даже наступить раскачка таких колебаний.

В настоящей статье найдено выражение для силы радиационного трения в магнитоактивной плазме и рассмотрено ее влияние на характер движения заряженных частиц.

1. Согласно [1], сила реакции излучения в произвольной среде определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} f_r = -\frac{e^2}{2\pi^2} \sum_{j=1,2} \int_0^{t_{\max}} \left\{ \frac{\mathbf{a}_j(\mathbf{v}' \mathbf{a}_j^*)}{n_j^2} \cos [\omega_j(t-t')] - i[\mathbf{v}[\mathbf{k} \mathbf{a}_j]] \times \right. \\ \left. \times \frac{\mathbf{v}' \mathbf{a}_j^*}{n_j^2 \omega_j} \sin [\omega_j(t-t')] \right\} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')} dt' d\mathbf{k} + \text{к. с.} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{R}(t)$ —радиус-вектор центра тяжести частицы ($\mathbf{R} = \mathbf{v}(t)$; $\mathbf{R}' = \mathbf{R}(t')$; $\mathbf{v}' = \mathbf{v}(t')$); $k_{\max} \approx 2\pi/r_0$ (r_0 — радиус электрона); частота ω_j и волновой вектор \mathbf{k} связаны соотношением $\omega_j^2 n_j^2 / c^2 = k^2$; $\mathbf{k} \{k \sin \theta \cos \varphi; k \sin \theta \sin \varphi; k \cos \theta\}$, где θ, φ —полярные углы; \mathbf{a}_j —вектор, характеризующий поляризацию j -й нормальной волны.

Для плазмы \mathbf{a}_j определяется следующими компонентами по координатным осям (см. [2]):

$$\mathbf{a}_j = \zeta_j \{ \sin \varphi + i \alpha_j \cos \varphi; -\cos \varphi + i \alpha_j \sin \varphi; i \beta_j \},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_j &= K_j \cos \theta + \gamma_j \sin \theta; \quad \beta_j = \gamma_j \cos \theta - K_j \sin \theta; \\ K_j &= \frac{2\sqrt{u}(1-V)\cos\theta}{u\sin^2\theta \mp \sqrt{u^2\sin^4\theta + 4u(1-V)^2\cos^2\theta}}; \\ \gamma_j &= \frac{V\sqrt{u}\sin\theta + K_j u V \cos\theta \sin\theta}{1-u-V(1-u\cos^2\theta)}; \\ \zeta_j^2 &= \frac{n_j^2}{\left(1-\frac{V}{1-u}\right)(1+\alpha_j^2) + (1-V)\beta_j^2 - \frac{2V\sqrt{u}}{1-u}\alpha_j}; \\ u &= e^2 H_0^2 / m^2 c^2 \omega^2 = \omega_H^2 / \omega^2; \quad V = 4\pi e^2 N / m \omega^2 = \omega_0^2 / \omega^2 \end{aligned} \quad (2)$$

(N —концентрация электронов в плазме).

Показатель преломления магнитоактивной плазмы, как известно, дается выражением:

$$n_j^2 = 1 - \frac{2V(1-V)}{2(1-V) - u \sin^2\theta \pm \sqrt{u^2 \sin^4\theta + 4(1-V)^2 u \cos^2\theta}}. \quad (3)$$

В формулах для K_j и n_j^2 верхний знак отвечает обыкновенной волне, а нижний знак—необыкновенной.

Если электрон движется в однородном магнитном поле H_0 , то в первом приближении, т. е. без учета изменения траектории из-за действия силы реакции излучения, которая считается малой (см. подробнее [1]), можно принять, что

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\{ R_0 \cos \Omega t; \quad R_0 \sin \Omega t; \quad v_0 t \}; \\ \mathbf{v} &\{ -v_\sim \sin \Omega t; \quad v_\sim \cos \Omega t; \quad v_0 \}; \quad v_\sim = R_0 \Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

где R_0 —радиус вращения электрона в магнитном поле H_0 , v_0 —компоненты скорости, параллельная H_0 ($H_0 \{0, 0, H_0\}$).

Чтобы получить выражение для силы реакции излучения, следует подставить (4) в формулу (1) и выполнить интегрирование по t' и φ (способ вычисления силы реакции такой же, как и в случае движения частицы по винтовой линии в изотропной среде [1]). В результате получим:

$$\begin{aligned} f_{zj} &= -\frac{e^2}{2c^3} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int G_{sj} n_j \omega_j^2 \delta(y) \sin \theta |\zeta_{sj}|^2 \left\{ \left(\beta_j + \frac{v_\sim n_j K_j s}{ck R_0 \sin \theta} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times J_s(kR_0 \sin \theta) + \frac{v_\sim}{c} n_j \cos \theta J'_s(kR_0 \sin \theta) \right\} d\theta d\omega_j; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f_{\lambda j} &= -\frac{e^2 \sin(\Omega t)}{2c^3} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int \left\{ (K_j n_j \beta_0 - \sigma_j) \frac{s}{kR_0 \sin \theta} J_s(kR_0 \sin \theta) + \right. \\ &\quad \left. + (n_j \beta_0 \cos \theta - 1) J'_s(kR_0 \sin \theta) \right\} G_{sj} |\zeta_{sj}|^2 \delta(y) n_j \omega_j^2 \sin \theta d\theta d\omega_j, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$G_{sj} = v_\sim J'_s(kR_0 \sin \theta) + \left[\frac{\alpha_j s v_\sim}{kR_0 \sin \theta} + \beta_j v_0 \right] J_s(kR_0 \sin \theta); \quad \beta_0 = v_0/c;$$

J_s, J'_s —функция Бесселя и ее производная; $\delta(y)$ —дельта-функция аргумента $y = \omega - s\Omega - kv_0 \cos \theta$.

Для компоненты f_{yj} получается такое же, как и для f_{xj} , выражение, но с заменой— $\sin(\Omega t)$ на $\cos(\Omega t)$. Так как в подынтегральные выражения в (5), (6) входит δ -функция, частота излучаемых волн определяется допплеровскими соотношениями

$$\omega [1 - \beta_0 n_j(\omega, \theta) \cos \theta] = s\Omega \quad (s = 0; \pm 1; \pm 2; \dots). \quad (7)$$

Слагаемые в суммах (5), (6), отвечающие индексам $s > 0$, соответствуют нормальным (досветовым) допплеровским частотам, а слагаемые с $s < 0$ —аномальными (сверхсветовыми) допплеровским частотам.

Заметим, что член разложения, в (5), у которого $s=0$, дает силу торможения черенковским излучением.

2. Для дальнейшего необходимо указать области переменных ω и θ , где показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн $n_j(\omega, \theta) > 1$, т. е. возможен аномальный допплер-эффект.

Из формулы (3) следует, что n_j^2 обращается в бесконечность на кривой

$$F(\omega^2, \cos^2 \theta) \equiv u V \cos^2 \theta - u - V + 1 = 0. \quad (8)$$

Легко видеть (см. также [3]), что при $\omega_0 < \omega_H$ для обыкновенной волны спектр частот, где $n_2(\omega, \theta) > 1$, определяется неравенством

$$\omega^2 < \omega_0^2; \quad (9)$$

для необыкновенной волны $n_1(\omega, \theta) > 1$, если

$$\omega_0^2 \leq \omega^2 \leq \omega_0^2 + \omega_H^2 \equiv \omega_p^2. \quad (10)$$

Если $\omega_0 > \omega_H$, то области значений ω и θ , где $n_j(\omega, \theta) > 1$, определяются неравенствами:

$$\omega^2 < \omega_H^2 \quad (11)$$

для обыкновенной волны и

$$\omega_0^2 < \omega^2 < \omega_0^2 + \omega_H^2 \equiv \omega_p^2 \quad (12)$$

для необыкновенной волны*. На рис. 1 области переменных ω, θ , для которых $n_j > 1$, заштрихованы, причем наклон штриховки разный для обыкновенной и необыкновенной волн.

3. После сделанных замечаний остановимся несколько подробнее на анализе выражения силы реакции излучения (6). Ради простоты ограничимся рассмотрением осцилляторного движения, когда выполняется неравенство

$$kR_0 \ll 1. \quad (13)$$

При этом в суммах (5), (6) наибольший вклад дают слагаемые, отвечающие индексам $s=0, \pm 1$. Ниже будут обсуждаться только допплеровские члены ($s = \pm 1$). Индексу $s=1$, как уже отмечалось, соответствуют нормальные допплеровские частоты, а индексу $s=-1$ —аномальные. Черенковский член ($s=0$) в (5) нас интересовать не будет. В выражении (6) черенковская составляющая силы реакции обращается в нуль, что вполне естественно из соображений симметрии.

* Огметим, что в [1] неверно указан спектр возможных частот черенковского излучения для случая $\omega_0 > \omega_H$.

Выполняя в (6) интегрирование по полярному углу θ , для членов с $s = \pm 1$ получим:

$$f_{j,x}(s=1) \equiv f_{jx}^+ = \frac{e^2 R_0 \sin(\Omega t)}{8 c^3 \beta_0} \int_{\cos^2 \theta_{(+)} = g_{(+)}(\omega^2)} \frac{[\Omega/\omega + \alpha_j - K_j n_j \beta_0]^2 |\zeta_j|^2 \omega^2 d\omega}{|1 - (\operatorname{ctg} \theta/n_j) \partial n_j / \partial \theta|}; \quad (14)$$

$$f_{j,x}(s=-1) \equiv f_{jx}^- = -\frac{e^2 R_0 \sin(\Omega t)}{8 c^3 \beta_0} \int_{\cos^2 \theta_{(-)} = g_{(-)}(\omega^2)} \frac{[\Omega/\omega + \alpha_j - K_j n_j \beta_0]^2 |\zeta_j|^2 \omega^2 d\omega}{|1 - (\operatorname{ctg} \theta/n_j) \partial n_j / \partial \theta|}. \quad (15)$$

В этих криволинейных интегралах пути интегрирования $\cos^2 \theta_{(\pm)} = g_{(\pm)}(\omega^2)$ для нормальных допплеровских частот и $\cos^2 \theta_{(-)} = g_{(-)}(\omega^2)$ для аномальных допплеровских частот определяются соответственно следующими соотношениями Допплера (см. (7)):

$$\omega [1 - \beta_0 n(\omega^0) \cos \theta] = \Omega, \quad \omega [\beta_0 n(\omega^0) \cos \theta - 1] = \Omega. \quad (16)$$

Если подставить в (16) выражение для показателя преломления (3) и разрешить полученные уравнения относительно $\cos^2 \theta_{(\pm)}$, то будем иметь (см. также [3]):

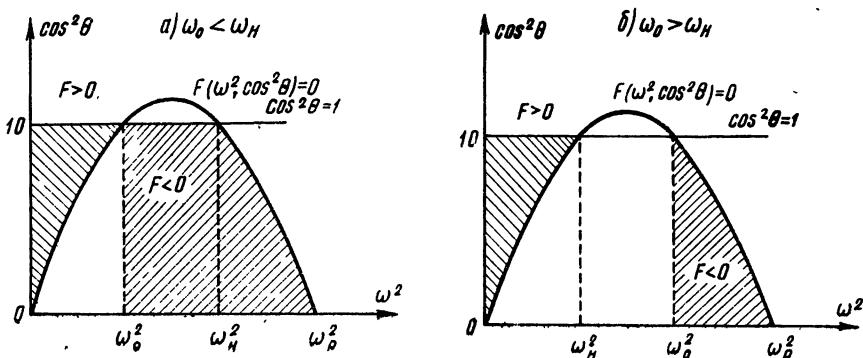


Рис. 1.

$$\cos^2 \theta_{(\pm)} = \frac{2(1-V)^2 \beta_{\pm}^2 - u [2\beta_{\pm}^2 + (1-\beta_{\pm})V]}{2\beta_{\pm}^2 \{(1-V)^3 \beta_{\pm}^2 - u [\beta_{\pm}^2 + (1-\beta_{\pm}^2)V]\}} \pm \sqrt{\frac{4(1-V)\beta_{\pm}^2 + u(1-\beta_{\pm}^2)^2}{2\beta_{\pm}^2 \{(1-V)^3 \beta_{\pm}^2 - u[\beta_{\pm}^2 + (1-\beta_{\pm}^2)V\]}}}, \quad (17)$$

где

$$\beta_{\pm}^2 = \beta_0^2 / (1 \mp \Omega/\omega)^2, \quad (18)$$

причем верхний знак соответствует нормальным допплеровским частотам, а нижний — аномальным.

Поскольку подынтегральные выражения в (14), (15) существенно положительны, f_{jx}^+ меняется в противофазе со скоростью $v_x = -v \sin(\Omega t)$ (см. (4)), а f_{jx}^- соответственно в фазе с v_x . Это означает, что излучение нормальных допплеровских частот вызывает уменьшение колебательной энергии частицы, в то время как излучение аномальных допплеровских частот вызывает увеличение колебательной энергии частицы.

Отметим, что такое разбиение, весьма удобное математически, несколько условно, и, конечно, физический смысл силы имеет только разность обоих интегралов (14), (15).

Чтобы выяснить, имеет ли место затухание или раскачка колебаний движущейся частицы, необходимо в каждом конкретном случае оценить значения f_{xj}^+ и f_{xj}^- . Для произвольных значений ω_H , ω_0 , β_0 это сделать довольно трудно ввиду сложности формул (2), (3), (17). Результаты численного интегрирования приведены ниже. Здесь мы несколько подробнее рассмотрим случай нерелятивистского движения ($\beta_0 \ll 1$, $\Omega = \omega_H$), для которого все расчеты могут быть существенно упрощены.

Положим для определенности, что

$$\omega_0^2/\omega_H^2 = \beta_0. \quad (19)$$

В этом случае можно получить приближенное выражение для $\cos^2 \theta_{(-)}$, пригодное для всего интервала излучаемых частот. Действительно, разлагая функцию $\cos^2 \theta_{(-)} = g_{(-)}(\omega^2)$, определяемую соотношением (17), в ряд по малому параметру β_0^2 , получим:

$$\cos^2 \theta_{(-)} = \frac{(u+V-1)}{uV} \left\{ 1 + \frac{(1-V)(1-2V-u)}{uV} \beta_0^2 \right\}; \quad (20)$$

что же касается функции $\cos^2 \theta_{(+)}$, то для нее подобное разложение можно осуществить только вне окрестности точки $u = 1$ (см. (18)). Учитывая, что согласно (19) $\omega_0^2/\omega_H^2 \ll 1$, для диапазона частот $0 < \omega < \omega_0$, т. е. для обычновенной волны (см. рис. 1б, 2), найдем кривые интегрирования для нормальных и аномальных допплеровских частот

$$\cos^2 \theta_{2(+)} = \frac{(u+V-1)}{uV} \left\{ 1 + \frac{(1-V)(1-2V-u)\beta_0^2}{Vu} \right\} \quad (0 < \omega < \omega_0). \quad (21)$$

Кроме того, обыкновенная волна излучается на частотах, близких к ω_H . В этом диапазоне частот также легко получить выражение для кривой интегрирования, если воспользоваться условием (19) (при $\omega \approx \omega_H$, $V \ll 1$). В результате получим:

$$\cos^2 \theta_{2(+)} = \frac{(\omega - \omega_H)^2}{\omega_H^2 \beta_0^2}, \quad \omega_H(1-\beta_0) \leq \omega \leq \omega_H(1+\beta_0). \quad (22)$$

Однако, как будет показано ниже, при соблюдении условия (19) вклад, вносимый в силу реакции излучения (14), (15) от излучения обыкновенной волны на частотах $\omega \approx \omega_H$ (т. е. на кривой интегрирования (22)), ничтожен по сравнению с другими возможными здесь типами излучений.

Легко видеть далее, что необыкновенная волна (см. (17), (19), (20)) излучается в диапазоне частот, близком к $\omega = \omega_H$ (см. рис. 2). Таким образом, для аномального допплеровского излучения на необыкновенной волне кривая интегрирования дается формулой (20). Что касается нормального допплеровского излучения, то поскольку $u \approx 1$, необходимо пользоваться точным выражением (17). На рис. 2 показаны все кривые интегрирования, причем индексы 1, 2 у $\cos^2 \theta_{(\pm)}$ отвечают соответственно необыкновенной или обыкновенной волне.

Анализ формулы (17) (см. также рис. 2) показывает, что кривая интегрирования $\cos^2 \theta_{1(+)}$ проходит (кроме точки $\cos \theta = 0$; $\omega \equiv \omega_p = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}$) в области переменных $\cos \theta$, ω , где показатель преломления

n_j , а также α_1 (см. (2)), имеют конечные значения, в то время как кривая интегрирования для аномального допплер-эффекта $\cos^2 \theta_{1(\pm)}$ проходит в области больших значений показателя преломления n_j и α_1 (см. (2), (21)). Это значит, что выражение (15) может стать больше, чем (14), т. е. может наступить раскачка колебаний частицы. Расчет показывает, что для необыкновенной волны действительно имеет место следующее отношение:

$$|f_{1v}^-| > f_{1x}^+.$$

Что касается обыкновенной волны, излучаемой в двух участках спектра ($0 < \omega < \omega_0$ и $\omega \approx \omega_H$; см. (21), (22)), то для нее также

$$|f_{2x}^-| > |f_{2x}^+|,$$

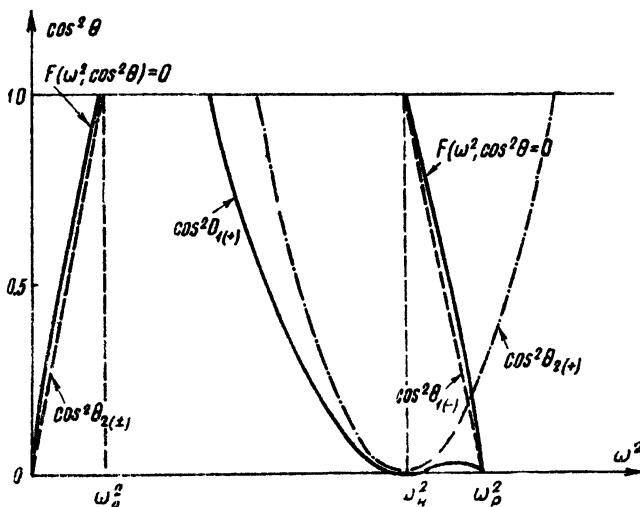


Рис. 2.

причем малость излучения на частотах $\omega \approx \omega_H$ в какой-то мере связана с тем отмеченным в работе [4] обстоятельством, что электрон, движущийся с нерелятивистской скоростью по окружности в магнитоактивной плазме ($\Omega = \omega_H$), вообще не излучает в дипольном приближении.

Таким образом, в рассматриваемом случае осуществляется раскачка поперечных к магнитному полю колебаний частицы.

Необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство. Обе кривые $\cos^2 \theta_{1(\pm)}$ проходят через точку $\theta = \pi/2$, $\omega = \omega_p$ (см. рис. 2), в которой показатель преломления обращается в бесконечность, а интегралы (14), (15) расходятся. Это связано с тем, что выражение (2) справедливо лишь в тех случаях, когда можно пренебречь поглощением электромагнитных волн в плазме. В некоторой же малой окрестности указанной точки этого делать нельзя. Поскольку, однако, в рассматриваемом случае должно выполняться условие (13), необходимо ограничить интегрирование некоторой частотой $\omega_m < \omega_p$, чтобы соблюдалось неравенство $k_m R_0 = k(\omega_m) R_0 \ll 1$. Конечно, минимальная длина волны $\lambda_{\min} = 2\pi/k_m$ должна быть такова, чтобы можно было еще применять макроскопическую электродинамику (см. подробнее об этом [3, 5]).

В заключение приведем результаты численного интегрирования

по формулам (14), (15), (17) для следующих значений параметров:

- а) $\beta_0 = 0,01$; $\omega_0^2 / \omega_H^2 = 0,01$; в) $\beta_0 = 0,99$; $\omega_0^2 / \omega_H^2 = 0,01$;
 б) $\beta_0 = 0,01$; $\omega_0^2 / \omega_H^2 = 10$; г) $\beta_0 = 0,99$; $\omega_0^2 / \omega_H^2 = 10$.

В случаях а), б), г) оказалось, что имеет место раскачка колебаний, в то время как в случае в) имеет место затухание колебаний частицы.

Автор признателен В. Л. Гинзбургу за предложение темы и дискуссии, а также М. Н. Оржеховской за выполнение численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, **36**, 1823 (1959).
2. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, **34**, 131 (1958); ЖЭТФ, **36**, 1335 (1959).
3. А. А. Коломенский, ДАН СССР, **106**, 982 (1956).
4. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, 2,59 (1958)
5. А. Г. Ситенков, А. А. Коломенский, ЖЭТФ, **30**, 511 (1956).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
16 июля 1959 г.,
после переработки
20 декабря 1959 г.