ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том III, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1960*

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ. II

В. В. Железняков

На основе релятивистского дисперсионного уравнения, полученного в статье [1], рассмотрена задача о неустойчивости магнитоактивной плазмы с дисперсией частиц по поперечным и продольным (относительно магнитного поля H_0) импульсам $p_\perp$ и $p_\parallel$ в случае, когда электромагнитные возмущения распространяются вдоль поля H_0. Исследованы свойства дисперсионного уравнения при наличии дисперсии частиц по импульсам $p_\perp$ и $p_\parallel$ и в случае, когда величина дисперсии стремится к нулю.

В статье [1], цитируемой ниже как I, получено дисперсионное уравнение, с помощью которого исследовалась задача о неустойчивости плазмы относительно высокочастотных электромагнитных возмущений, распространяющихся вдоль магнитного поля H_0. Рассмотрение было ограничено случаем, когда распределение электронов в плазме характеризуется δ-функцией вида $\delta(p_\perp - p_\perp^0)\,\delta(p_\parallel - p_\parallel^0)$, где $p_\perp^0 \neq 0$, $p_\parallel^0 \neq 0$ ($p_\perp$ — модуль составляющей импульса $\boldsymbol{p}$, ортогональной полю H_0; $p_\parallel$ — проекция $\boldsymbol{p}$ на H_0). Оказалось, что при этом неустойчивость имеет место как при „сверхсветовом“, так и „досветовом“ движении потока частиц (в частности, при равной нулю средней скорости частиц). Последнее весьма важно для теории спорадического радиоизлучения Солнца, так как в случае генерации излучения при $n < 1$ (n — показатель преломления) появляется возможность выхода радиоизлучения за пределы солнечной короны без предварительной трансформации в другие типы нормальных волн (см. в этой связи [2,3]). Вместе с тем, возможность генерации электромагнитных волн в потоке электронов, движущемся с „досветовой“ скоростью, позволяет обойтись без замедляющих структур в генераторах и усилителях диапазона СВЧ [4].

Наряду с рассмотренным в статье I вариантом распределения частиц представляет интерес и более общее распределение, в котором дисперсия частиц по импульсам $p_\perp$ и $p_\parallel$ отлична от нуля. В статье [5] исследовалась (в нерелятивистском приближении) задача о неустойчивости, возникающей при движении в диэлектрике или в плазме электронов с максвелловским распределением по скоростям (в сопровождающей системе отсчета). В отличие от [1] и [5], в настоящей статье мы рассмотрим условия неустойчивости электромагнитных волн при учете дисперсии плазменных частиц по импульсам, предполагая, что, вообще говоря, число частиц в элементе объема $d\boldsymbol{p}$ достигает максимума при $p_\perp = p_\perp^0 \neq 0$ и монотонно уменьшается с ростом $(p_\perp - p_\perp^0)^2$.

В подобной постановке задача о неустойчивости плазмы более адэкватна физическим условиям в корональной плазме, нежели задача, рассмотренная в статье I. Вместе с тем, учет дисперсии частиц позволит судить о влиянии последней на коэффициент усиления устройств, работающих в диапазоне СВЧ.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть в однородной безграничной плазме, помещенной в магнитное поле $\boldsymbol{H}_0$, распределение частиц по импульсам $\boldsymbol{p}$, для определенности, имеет вид*:

$$f_0(\boldsymbol{p})\,d\boldsymbol{p} = A\exp\left[-(p_\parallel - p_\parallel^0)^2/a_\parallel^2 - (p_\perp - p_\perp^0)^2/a_\perp^2\right] d\boldsymbol{p}, \tag{1.1}$$

где элемент объема $d\boldsymbol{p}$ равен $p_\perp dp_\perp dp_\parallel d\psi$ (ψ — угол в цилиндрической системе координат $p_\perp$, $p_\parallel$, ψ в пространстве импульсов $\boldsymbol{p}$). Множитель A в (1.1) определяется из условия нормировки $\int f_0(\boldsymbol{p})\,d\boldsymbol{p} = 1$:

$$A = 1/2\pi^{3/2} a_\perp^2 a_\parallel G_0; \quad G_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_0^\infty d\zeta\, \zeta\, e^{-\xi^2 - (\zeta-\zeta_0)^2} = \int\limits_0^\infty \zeta e^{-(\zeta-\zeta_0)^2} d\zeta, \tag{1.2}$$

$$\xi = (p_\parallel - p_\parallel^0)/a_\parallel; \quad \zeta = p_\perp/a_\perp; \quad \zeta_0 = p_\perp^0/a_\perp.$$

Функция (1.1) достаточно проста и в то же время отражает многие наиболее характерные особенности реальных распределений частиц: наличие дисперсии ($a_\parallel \neq 0$, $a_\perp \neq 0$) и „анизотропии“ температур ($a_\parallel \neq a_\perp$) **, конечную среднюю скорость частиц ($p_\parallel^0 \neq 0$), т. е. существование потока и т. д.

Согласно I, для волны $e^{ikr - i\omega t}$ частота связана с волновым числом k ($k = |\boldsymbol{k}|$; $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{H}_0$) дисперсионным соотношением

$$c^2k^2 - \omega^2 n_j^2(\omega) - \sum \pi \int \Omega_0^2 p_\perp^2 \frac{(\omega m - kp_\parallel)\,\partial f_0/\partial p_\perp + kp_\perp \partial f_0/\partial p_\parallel}{\omega m - kp_\parallel \mp \Omega_H m} \times$$
$$\times\, dp_\perp dp_\parallel = 0 \tag{1.3}$$

или в несколько иной записи (после интегрирования (1.3) по частям)

$$c^2k^2 - \omega^2 n_j^2(\omega) + \sum 2\pi \int \Omega_0^2 p_\perp \frac{(\omega m - kp_\parallel) f_0}{\omega m - kp_\parallel \mp \Omega_H m}\, dp_\perp dp_\parallel +$$
$$+ (c^2k^2 - \omega^2) \sum \pi \int \Omega_0^2 p_\perp^3 \frac{f_0}{\omega m - kp_\parallel \mp \Omega_H m}\, dp_\perp dp_\parallel = 0. \tag{1.4}$$

Здесь c — скорость света, $n_j(\omega)$ — показатель преломления среды, в которой может находиться плазма, Ω_0 и Ω_H — собственная частота плазмы и гирочастота $\left(\text{в } \Omega_0 \text{ и } \Omega_H \text{ входит масса частицы } m = \sqrt{m_0^2 + c^{-2}p_\parallel^2 + c^{-2}p_\perp^2}\right)$. Контур интегрирования в (1.3) и (1.4) по $p_\perp$ проходит по действительной оси от 0 до ∞, а по $p_\parallel$ — по действительной оси от $-\infty$ до $+\infty$, обходя сверху или снизу особенности подынтегральных выражений (контур C)***; суммирование проводится по всем сортам частиц, входящих в состав плазмы.

---

* В нерелятивистском приближении при $p_\perp^0 = 0$, $p_\parallel^0 = m_0 v_\parallel^0$ и $a_\parallel^2 = a_\perp^2 = 2\varkappa m_0 T$ (m_0 — масса покоя электрона, $\varkappa$ — постоянная Больцмана, T — температура) (1.1) переходит в распределение, рассмотренное в статье [5].

** Различие в величине дисперсии вдоль и поперек поля H_0 может в некоторых случаях привести к появлению неустойчивости, даже если $p_\parallel^0 = p_\perp^0 = 0$ (см. [6]).

*** См. в этой связи замечания, сделанные в статье 4.

Учитывая (1.1), (1.2) и вводя обозначения *

$$\beta_j = \frac{\omega\tilde{m} - kp^0_{\parallel} \mp \tilde{\Omega}_H \tilde{m}}{ka_{\parallel}};$$
$$\delta(p_{\parallel}, p_{\perp}) = \delta(\xi, \zeta) = -\frac{\omega m - \omega\tilde{m} - k(p_{\parallel} - p^0_{\parallel})}{ka_{\parallel}}; \tag{1.5}$$

$$I_1 = \int\limits_C \frac{\tilde{\Omega}_0^2 e^{-\xi^2}}{\beta_j - \delta(\xi, \zeta)}\, d\xi; \quad I_2 = \int\limits_C \frac{\Omega_0^2 e^{-\xi^2}}{\beta_j - \delta(\xi, \zeta)}\, d\xi;$$
$$I_3 = \int\limits_C \frac{\Omega_0^2 \xi e^{-\xi^2}}{\beta_j - \delta(\xi, \zeta)}\, d\xi \tag{1.6}$$

(где знак $\sim$ означает, что соответствующая величина берется в точке $p_{\parallel} = p^0_{\parallel}$, $p_{\perp} = p^0_{\perp}$, т. е. в точке $\xi = 0$, $\zeta = \zeta_0$), представим уравнения (1.3) и (1.4) в виде:

$$c^2k^2 - \omega^2 n_j^2(\omega) + \sum \frac{1}{G_0\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \zeta^2 e^{-(\zeta-\zeta_0)^2} \left\{ \frac{(\zeta - \zeta_0)}{ka_{\parallel}} (\omega\tilde{m} I_1 - kp^0_{\parallel} I_2) + \right.$$
$$\left. + \left[\zeta \left(\frac{a_{\perp}^2}{a_{\parallel}^2} - 1\right) + \zeta_0\right] I_3 \right\} d\zeta = 0; \tag{1.3a}$$

$$c^2k^2 - \omega^2 n_j^2(\omega) + \sum \frac{1}{G_0\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \zeta e^{-(\zeta-\zeta_0)^2} \left\{ \frac{\omega\tilde{m} I_1 - kp^0_{\parallel} I_2}{ka_{\parallel}} - I_3 - \right.$$
$$\left. - \frac{c^2k^2 - \omega^2}{2c^2} \frac{a_{\perp}^2 \zeta^2}{k^2 a_{\parallel}^2} \frac{dI_2}{d\beta_j} \right\} d\zeta = 0. \tag{1.4a}$$

В (1.3a) и (1.4a) учтено, что $\Omega_0^2 m = \tilde{\Omega}_0^2 \tilde{m}$.

Величины I_1, I_2, I_3 (1.6) представляют собой интегралы типа

$$I(\zeta, \beta_j) = \int\limits_C \frac{g(\xi, \zeta)\, e^{-\xi^2}}{\beta_j - \delta(\xi, \zeta)}\, d\xi, \tag{1.7}$$

подынтегральные функции в которых имеют особенности (полюса) в точках $\xi_{1,2}(\zeta)$, определенных уравнением

$$\beta_j - \delta(\xi_{1,2}, \zeta) = 0, \tag{1.8}$$

т. е. уравнением

$$\omega \sqrt{m_0^2 + c^{-2}p_{\parallel}^2 + c^{-2}p_{\perp}^2} - kp_{\parallel} \mp \Omega_H m = 0. \tag{1.8a}$$

Нетрудно убедиться, что при данном значении ζ (т. е. $p_{\perp}$) существует не более двух значений $p_{\parallel} = p_{\parallel\, 1,2}(p_{\perp})$ (соответственно, не более двух

* Параметр β_j не зависит от $p_{\parallel}$ и $p_{\perp}$, так как $\Omega_H m = (eH_0/mc)\, m = \mathrm{const}$ (e — заряд частицы).

значений $\xi = \xi_{1,2}(\zeta)$), являющихся решениями уравнений (1.8), (1.8a).

Интеграл (1.7) тождественно равен выражению

$$\int\limits_C \{g(\xi)\,(\xi-\xi_1)\,(\xi-\xi_2)\,(\partial\delta/\partial\xi)_1\,(\partial\delta/\partial\xi)_2 + g(\xi_1)\,[\beta_j - \delta(\xi)] \times$$
$$\times (\xi-\xi_2)\,(\partial\delta/\partial\xi)_2 + g(\xi_2)\,[\beta_j - \delta(\xi)]\,(\xi-\xi_1)\,(\partial\delta/\partial\xi)_1\} \times$$
$$\times \{[\beta_j - \delta(\xi)]\,(\xi-\xi_1)\,(\xi-\xi_2)\,(\partial\delta/\partial\xi)_1\,(\partial\delta/\partial\xi)_2\}^{-1}\, e^{-\xi^2}\,d\xi -$$
$$- \frac{g(\xi_1)}{(\partial\delta/\partial\xi)_1}\int\limits_C \frac{e^{-\xi^2}}{\xi-\xi_1}\,d\xi - \frac{g(\xi_2)}{(\partial\delta/\partial\xi)_2}\int\limits_C \frac{e^{-\xi^2}}{\xi-\xi_2}\,d\xi.$$

Обозначая первый интеграл в этом выражении через $F^{(1)}(\zeta, \beta_j)$, запишем $I(\zeta, \beta_j)$ следующим образом:

$$I(\zeta, \beta_j) = F^{(1)}(\zeta, \beta_j) - \sum_l \frac{g(\xi_l, \zeta)}{(\partial\delta/\partial\xi)_l}\int\limits_C \frac{e^{-\xi^2}}{\xi-\xi_l}\,d\xi. \tag{1.9}$$

Согласно [7],

$$\int\limits_C \frac{e^{-\xi^2}}{\xi-\xi_l}\,d\xi = -2\sqrt{\pi}\,e^{-\xi_l^2}\int\limits_0^{\xi_l} e^{\eta^2}\,d\eta + i\pi\delta_l\,e^{-\xi_l^2}, \tag{1.10}$$

где $\delta_l = +1$, если контур C обходит особенность ξ_l снизу, и $\delta_l = -1$, если контур C обходит особенность ξ_l сверху. Тогда, обозначая

$$\begin{aligned} F^{(2)}(\zeta, \beta_j) &= \frac{2\sqrt{\pi}\,g(\xi_1, \zeta)\,e^{-\xi_1^2}}{(\partial\delta/\partial\xi)_1}\int\limits_0^{\xi_1} e^{\eta^2}\,d\eta; \\ F^{(3)}(\zeta, \beta_j) &= \frac{2\sqrt{\pi}\,g(\xi_2, \zeta)\,e^{-\xi_2^2}}{(\partial\delta/\partial\xi)_2}\int\limits_0^{\xi_2} e^{\eta^2}\,d\eta, \end{aligned} \tag{1.11}$$

получим:

$$\begin{aligned} I(\zeta, \beta_j) &= F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} - \sum_l \delta_l\,\frac{i\pi\,g(\xi_l, \zeta)}{(\partial\delta/\partial\xi)_l}\,e^{-\xi_l^2} = \\ &= F - \sum_l \delta_l\,\frac{i\pi\,g(\xi_l, \zeta)}{(\partial\delta/\partial\xi)_l}\,e^{-\xi_l^2}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

где

$$F = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)}. \tag{1.13}$$

Заметим, что в выражении (1.12) функция F — действительная при действительных значениях ω и k. В самом деле, разлагая числитель и знаменатель подынтегрального выражения функции $F^{(1)}$ в ряд по степеням $\xi-\xi_1$ и $\xi-\xi_2$ (в окрестности точек ξ_1 и ξ_2), убеждаемся, что подынтегральная функция не имеет особенностей типа полюса, и, следовательно, контур C всегда можно деформировать так, чтобы он совпадал с действительной осью ξ. Учитывая сказанное, из вида функции F заключаем, что для действительных значений ξ_1 и ξ_2 при $\mathrm{Im}\,\omega = \mathrm{Im}\,k = 0$ функция F также будет действительной.

Отмеченное свойство функции F сохраняется и в том случае, когда действительным ω и k отвечают комплексные значения ξ_1 и ξ_2 (которые при этом будут комплексно сопряженными: $\xi_2 = \xi_1^*$; см. (1.8), (1.8а)). В самом деле, нетрудно видеть, что $F(\xi_1, \xi_2)$ не изменяется при перестановке ξ_1 и ξ_2:

$$F(\xi_1, \xi_2) = F(\xi_2, \xi_1),$$

т. е.

$$F(\xi_1, \xi_1^*) = F(\xi_1^*, \xi_1).$$

Поскольку в F явно не входит мнимая единица,

$$F^*(\xi_1, \xi_1^*) = F(\xi_1^*, \xi_1)$$

и, следовательно,

$$F(\xi_1, \xi_1^*) = F^*(\xi_1, \xi_1^*),$$

что и требовалось показать.

2. ПЕРЕХОД К СЛУЧАЮ МАЛОЙ ДИСПЕРСИИ ИМПУЛЬСОВ

Дисперсионные уравнения (1.3а), (1.4а) в развернутом виде (после подстановки в них выражений для интегралов $I(\zeta, \beta_j)$ (1.9), (1.12)) становятся весьма сложными. Однако в предельном случае, когда для $|\xi| \lesssim 1$ и $|\zeta - \zeta_0| \lesssim 1$

$$|\beta_j| \gg |\delta(\xi, \zeta)|; \quad |\xi_{1,2}| \gg |\xi|, \tag{2.1}$$

эти уравнения значительно упрощаются*. Действительно, при выполнении неравенств (2.1)

$$\begin{aligned} F^{(1)} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{g(\xi)}{\beta_j} + \frac{g(\xi)\,\delta(\xi)}{\beta_j^2} + \ldots + \frac{g(\xi_1)}{(\partial\delta/\partial\xi)_1} \left(\frac{1}{\xi_1} + \ldots\right) + \right. \\ \left. + \frac{g(\xi_2)}{(\partial\delta/\partial\xi)_2} \left(\frac{1}{\xi_2} + \ldots\right)\right] e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{\beta_j} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, e^{-\xi^2} d\xi + \\ + \frac{1}{\beta_j^2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\,\delta(\xi)\, e^{-\xi^2} d\xi + \ldots + \frac{\sqrt{\pi}\, g(\xi_1)}{(\partial\delta/\partial\xi)_1} \left(\frac{1}{\xi_1} + \ldots\right) + \\ + \frac{\sqrt{\pi}\, g(\xi_2)}{(\partial\delta/\partial\xi)_2} \left(\frac{1}{\xi_2} + \ldots\right); \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$F^{(2)} \simeq -\frac{\sqrt{\pi}\, g(\xi_1)}{(\partial\delta/\partial\xi_1)} \left(\frac{1}{\xi_1} + \ldots\right); \quad F^{(3)} \simeq \frac{\sqrt{\pi}\, g(\xi_2)}{(\partial\delta/\partial\xi)_2} \left(\frac{1}{\xi_2} + \ldots\right),$$

---

* Уравнение (1.8а), которое можно представить в виде $\omega = kv_\parallel \pm \Omega_H$ или $\omega = \pm \Omega_H/(1 - v_\parallel n/c)$ (где $n \equiv kc/\omega$), определяет связь между значениями продольных и поперечных импульсов $p_{\parallel\, 1,2}\,(p_\perp)$ или $\xi_{1,2}\,(\zeta)$ для тех частиц плазмы, которые генерируют магнитотормозное излучение на частоте ω в направлении H_0 Поэтому условие $|\xi_{1,2}| \gg 1$ при $|\zeta_1 - \zeta_0| \lesssim 1$, к которому, по существу, сводится второе неравенство (2.1), означает, что мы рассматриваем неустойчивость плазмы на частотах, которые генерируются на „хвосте" функции распределения (1.1) $f_0(p) \sim e^{-\xi^2 - (\zeta - \zeta_0)^2}$. Заметим, что в нерелятивистском приближении, когда $m = m_0 = \text{const}$, первое из неравенств (2.1) сводится ко второму.

так что с точностью до членов порядка $1/\beta_j^2$

$$I(\zeta, \beta_j) \approx \frac{1}{\beta_j} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, e^{-\xi^2} d\xi + \frac{1}{\beta_j^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, \delta(\xi)\, e^{-\xi^2} d\xi - \\ - i\pi \sum_l \delta_l \frac{g(\xi_l)}{(\partial\delta/\partial\xi)_l} e^{-\xi_l^2}. \tag{2.3}$$

Принимая во внимание, что для интегралов I_1, I_2, I_3 функции $g(\xi)$ соответственно равны $\tilde{\Omega}_0^2$, Ω_0^2, $\xi\Omega_0^2$ (см. (1.6), (1.7)), а $\delta(\xi) = (\omega\tilde{m} - \omega m + + ka_\parallel \xi)/ka_\parallel$ (см. (1.5)), и подставляя (2.3) в (1.4а), получим:

$$c^2k^2 - \omega^2 n_j^2(\omega) + \sum \frac{1}{G_0\sqrt{\pi}\,\beta_j\, ka_\parallel} \int\limits_0^\infty d\zeta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\,\zeta\, e^{-\xi^2-(\zeta-\zeta_0)^2} [\omega\tilde{m}\,\hat{\Omega}_0^2 - \\ - kp_\parallel^0\, \Omega_0^2 - ka_\parallel\, \xi\Omega_0^2] + \sum \frac{1}{G_0\sqrt{\pi}\,\beta_j\, ka_\parallel} \int\limits_0^\infty d\zeta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\,\zeta e^{-\xi^2-(\zeta-\zeta_0)^2} [\omega\tilde{m}\tilde{\Omega}_0^2 - \\ - kp_\parallel^0\, \Omega_0^2 - ka_\parallel\, \xi\Omega_0^2] \left[-\frac{\omega}{ka_\parallel}(m - \tilde{m}) + \xi\right] \beta_j^{-1} + \\ + \frac{c^2k^2-\omega^2}{2c^2} \sum \frac{a_\perp^2}{G_0\sqrt{\pi}\,(\beta_j\, ka_\parallel)^2} \int\limits_0^\infty d\zeta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \Omega_0^2\zeta^3\, e^{-\xi^2-(\zeta-\zeta_0)^2} + \\ + i\left[\text{члены, содержащие } e^{-\xi_l^2}\right] = 0. \tag{2.4}$$

Предположим далее, что масса частиц плазмы

$$m(\xi, \zeta) = \tilde{m}\sqrt{1 + \frac{2a_\parallel p_\parallel^0}{\tilde{m}^2c^2}\xi + \frac{a_\parallel^2}{\tilde{m}^2c^2}\xi^2 + \frac{2a_\perp^2\zeta_0}{\tilde{m}^2c^2}(\zeta-\zeta_0) + \frac{a_\perp^2}{\tilde{m}^2c^2}(\zeta-\zeta_0)^2}$$

мало меняется в интервале $|\xi| \leqslant 1$, $|\zeta - \zeta_0| \leqslant 1$, т. е. в области, где существен вклад подынтегральных функций в дисперсионное уравнение (2.4). Тогда, ограничиваясь первыми членами разложения, будем считать, что

$$m(\xi, \zeta) \simeq \tilde{m}\left[1 + \frac{a_\parallel p_\parallel^0}{\tilde{m}^2c^2}\xi + \frac{a_\parallel^2}{2\tilde{m}^2c^2}\xi^2 + \frac{a_\perp^2\zeta_0}{\tilde{m}^2c^2}(\zeta-\zeta_0) + \\ + \frac{a_\perp^2}{2\tilde{m}^2c^2}(\zeta-\zeta_0)^2\right]; \\ \Omega_0^2(\xi, \zeta) \simeq \tilde{\Omega}_0^2\left[1 - \frac{a_\parallel p_\parallel^0}{\tilde{m}^2c^2}\xi - \frac{a_\parallel^2}{2\tilde{m}^2c^2}\xi^2 - \frac{a_\perp^2\zeta_0}{\tilde{m}^2c^2}(\zeta-\zeta_0) - \\ - \frac{a_\perp^2}{2\tilde{m}^2c^2}(\zeta-\zeta_0)^2\right]. \tag{2.5}$$

Для представления $m(\xi, \zeta)$ и $\Omega_0^2(\xi, \zeta)$ в виде (2.5) необходимо, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\left|\frac{a_\parallel p_\parallel^0}{\tilde{m}^2c^2}\right| \ll 1; \quad \frac{a_\parallel^2}{\tilde{m}^2c^2} \ll 1; \quad \frac{a_\perp^2\zeta_0}{\tilde{m}^2c^2} \ll 1; \quad \frac{a_\perp^2}{\tilde{m}^2c^2} \ll 1. \tag{2.6}$$

Подставляя (2.5) в уравнение (2.4) и интегрируя по ξ, ζ, получим:

$$\begin{gathered} c^2k^2 - \omega^2 n_j^2(\omega) + \sum \tilde{\Omega}_0^2 \frac{\omega\tilde{m} - kp_\parallel^0 + kp_\parallel^0\psi_1}{\omega\tilde{m} - kp_\parallel^0 \mp \tilde{\Omega}_H\tilde{m}} + \\ + \sum \tilde{\Omega}_0^2 \frac{\psi_2 - (k^2c^2 - \omega^2)\, a_\parallel^2/2c^2ka_\parallel}{\beta_j(\omega\tilde{m} - kp_\parallel^0 \mp \tilde{\Omega}_H\tilde{m})} + \\ + \sum \tilde{\Omega}_0^2 \frac{(c^2k^2 - \omega^2)\, a_\perp^2 G_3/G_0 + k^2c^2a_\perp^2\psi_3}{2c^2(\omega\tilde{m} - kp_\parallel^0 \mp \tilde{\Omega}_H\tilde{m})^2} + \\ + i\left[\text{члены, содержащие } e^{-\xi_l^2}\right] = 0. \end{gathered} \tag{2.7}$$

В дисперсионном уравнении (2.7) параметры ψ_1, ψ_2, ψ_3 можно представить, ограничиваясь членами первой степени относительно

$$a_\parallel p_\parallel^0/\tilde{m}^2c^2, \quad a_\parallel^2/\tilde{m}^2c^2, \quad a_\perp^2\zeta_0/\tilde{m}^2c^2, \quad a_\perp^2/\tilde{m}^2c^2,$$

в виде:

$$\begin{gathered} \psi_1 = \frac{3a_\parallel^2}{4\tilde{m}^2c^2} + \frac{a_\perp^2\zeta_0}{\tilde{m}^2c^2}\frac{G_1}{G_0} + \frac{a_\perp^2}{2\tilde{m}^2c^2}\frac{G_2}{G_0}; \\ \psi_2 = (\omega\tilde{m} - kp_\parallel^0)\,\Phi_1 + kp_\parallel^0\,\Phi_2 + ka_\parallel\,\Phi_3; \\ \psi_3 = -\frac{a_\parallel^2}{4\tilde{m}^2c^2}\frac{G_3}{G_0} - \frac{a_\perp^2\zeta_0}{\tilde{m}^2c^2}\frac{G_4}{G_0} - \frac{a_\perp^2}{2\tilde{m}^2c^2}\frac{G_5}{G_0}. \end{gathered} \tag{2.8}$$

В соотношениях (2.7), (2.8)

$$\begin{gathered} \Phi_1 = -\frac{\omega\tilde{m}}{ka_\parallel}\left(\frac{3a_\parallel^2}{4\tilde{m}^2c^2} + \frac{a_\perp^2\zeta_0}{\tilde{m}^2c^2}\frac{G_1}{G_0} + \frac{a_\perp^2}{2\tilde{m}^2c^2}\frac{G_2}{G_0}\right); \\ \Phi_2 = a_\parallel p_\parallel^0/2\tilde{m}^2c^2; \\ \Phi_3 = \frac{3a_\parallel^2}{8\tilde{m}^2c^2} + \frac{a_\perp^2\zeta_0}{2\tilde{m}^2c^2}\frac{G_1}{G_0} + \frac{a_\perp^2}{4\tilde{m}^2c^2}\frac{G_2}{G_0}; \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered} G_0 = \int_0^\infty \zeta\, e^{-(\zeta-\zeta_0)^2}\, d\zeta; \quad G_1 = \int_0^\infty \zeta(\zeta - \zeta_0)\, e^{-(\zeta-\zeta_0)^2}\, d\zeta; \\ G_2 = \int_0^\infty \zeta(\zeta - \zeta_0)^2\, e^{-(\zeta-\zeta_0)^2}\, d\zeta; \quad G_3 = \int_0^\infty \zeta^3\, e^{-(\zeta-\zeta_0)^2}\, d\zeta; \\ G_4 = \int_0^\infty \zeta^3(\zeta - \zeta_0)\, e^{-(\zeta-\zeta_0)^2}\, d\zeta; \quad G_5 = \int_0^\infty \zeta^3(\zeta - \zeta_0)^2\, e^{-(\zeta-\zeta_0)^2}\, d\zeta. \end{gathered} \tag{2.10}$$

С учетом (2.8) уравнение (2.7) запишется следующим образом:

$$c^2k^2 - \omega^2 n_j^2(\omega) + \sum \tilde{\Omega}_0^2 \frac{(\omega\tilde{m} - kp_\parallel^0)(1+\Phi_1\beta_j^{-1}) + kp_\parallel^0(\psi_1 + \Phi_2\beta_j^{-1})}{\omega\tilde{m} - kp_\parallel^0 \mp \tilde{\Omega}_H\tilde{m}} +$$

$$+\sum \tilde{\Omega}_0^2 \frac{(c^2k^2-\omega^2)(a_\perp^2 G_3/G_0 - a_\parallel^2) + k^2c^2(a_\perp^2\psi_3 + 2a_\parallel^2\Phi_3)}{2c^2(\omega\tilde{m} - kp_\parallel^0 \mp \tilde{\Omega}_H\tilde{m})^2} + \tag{2.11}$$

$$+ i\left[\text{члены, содержащие } e^{-\xi_l^2}\right] = 0.$$

Однако из неравенств (2.1), (2.6) следует (см. также (2.5)), что $|\Phi_1\beta_j^{-1}| \ll 1$, $|\Phi_2\beta_j^{-1}| \ll |\psi_1|$ и слагаемые $\Phi_1\beta_j^{-1}$ и $\Phi_2\beta_j^{-1}$ в (2.11) можно опустить*. В то же время, согласно (2.6), (2.8), $0 < \psi_1 \ll 1$ и влияние члена $kp_\parallel^0\psi_1$ в дисперсионном уравнении (2.11) сводится лишь к некоторому сдвигу нуля функции $\omega\tilde{m} - kp_\parallel^0 + kp_\parallel^0\psi_1$ в сторону больших значений k или $p_\parallel^0$. Поэтому, пренебрегая слагаемым $kp_\parallel^0\psi_1$, окончательно получаем, что в случае, когда выполнены неравенства (2.1), (2.6), дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в магнитоактивной плазме имеет вид ($\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{H}_0$):

$$c^2k^2 - \omega^2 n_j^2(\omega) + \sum \tilde{\Omega}_0^2 \frac{\omega\tilde{m} - kp_\parallel^0}{\omega\tilde{m} - kp_\parallel^0 \mp \tilde{\Omega}_H\tilde{m}} +$$

$$+\sum \tilde{\Omega}_0^2 \frac{(c^2k^2-\omega^2)M}{(\omega\tilde{m} - kp_\parallel^0 \mp \tilde{\Omega}_H\tilde{m})^2} + \tag{2.12}$$

$$+ i\left[\text{члены, содержащие } e^{-\xi_l^2}\right] = 0,$$

где

$$M = (a_\perp^2 G_3/G_0 - a_\parallel^2)/2c^2. \tag{2.13}$$

Отметим, что при переходе от (2.11) к (2.12), (2.13) опущены слагаемые $k^2c^2a_\perp^2\psi_3$ и $2k^2c^2a_\parallel^2\Phi_3$, которые по абсолютной величине соответственно много меньше $c^2k^2a_\perp^2 G_3/G_0$ и $c^2k^2a_\parallel^2$ (при этом следует принять во внимание, что $G_4/G_3 \leqslant 1$, $G_5/G_3 \sim 1$). Учет этих членов становится необходим, когда M близко к нулю (см. ниже).

Сопоставляя полученное уравнение (2.12) с дисперсионным соотношением, рассмотренным в статье I и справедливым в случае δ-распределения частиц по импульсам $p_\perp$ и $p_\parallel$, убеждаемся, что с точностью до членов, содержащих $e^{-\xi_l^2}$, уравнение (2.12) переходит в указанное соотношение (с заменой параметра M на $\beta_\perp^2/2$, где $\beta_\perp = p_\perp^0/\tilde{m}c$). Отсюда следует, что проведенное в I исследование неустойчивости плазмы переносится на случай, когда распространение электромагнитных волн определяется уравнением (2.12) (в условиях, когда можно пренебречь членами с $e^{-\xi_l^2}$; см. ниже). Более того, поскольку при $\zeta_0 = p_\perp^0/a_\perp \gg 1$

* Здесь использовано также то обстоятельство, что при любых значениях ζ_0 отношения $G_1/G_0 \leqslant 1$, $G_2/G_0 \sim 1$ (см. (2.10)).

$$M \simeq (a_\perp^2 \zeta_0^2 + 3a_\perp^2/2 - a_\parallel^2)/2c^2 \simeq [(p_\perp^0)^2 - a_\parallel^2]/2c^2, \tag{2.14}$$

дисперсионное уравнение (2.12) в случае $\zeta_0 \gg 1$ и $(p_\perp^0)^2/a_\parallel^2 \gg 1$ совпадает с дисперсионным соотношением (2.2) статьи I для δ-распределения (с точностью до членов, в которые входит $e^{-\xi_l^2}$).

В этой связи заметим, что условие $|\beta_j| \gg |\delta(\xi, \zeta)|$ ($|\xi| \lesssim 1$, $|\zeta - \zeta_0| \lesssim 1$), при котором справедливо дисперсионное уравнение (2.12), налагает определенные ограничения на величину $\tilde{\Omega}_0^2$ при отыскании коэффициентов нарастания электромагнитных волн. Как следует из I, при достаточно малых значениях $\tilde{\Omega}_0^2$ коэффициент нарастания $\operatorname{Im}\gamma$ — порядка γ и пропорционален некоторой степени $\tilde{\Omega}^*$. Отсюда следует, что уравнение (2.12) применимо при условии

$$|\beta_j| \sim |\tilde{m} \operatorname{Im}\gamma/ka_\parallel| \gg |\delta(\zeta, \xi)|$$

(где в нерелятивистском приближении $|\delta(\zeta, \xi)| = |\xi| \lesssim 1$), т. е. при условии, что $\operatorname{Im}\gamma$, а вместе с ней и собственная частота плазмы $\tilde{\Omega}_0$ не слишком малы ($\tilde{m}\,|\operatorname{Im}\gamma| \gg ka_\parallel$).

Как и следовало ожидать, при наличии дисперсии продольных импульсов величина M в области $p_\perp^0/a_\perp \gg 1$, $p_\perp^0/a_\parallel \gg 1$, уменьшается (см. (2.14)). В то же время появление дисперсии поперечных импульсов $a_\perp$ приводит (при фиксированных значениях $p_\perp^0$) к увеличению M, что связано с увеличением среднего квадрата поперечного импульса

$$\overline{p_\perp^2} \equiv a_\perp^2 G_3/G_0. \tag{2.15}$$

При постоянном значении $\overline{p_\perp^2}$ параметр M вообще не зависит от величины $a_\perp$.

Если $\zeta_0 = p_\perp^0/a_\perp \ll 1$, то величина

$$M \cong (a_\perp^2 - a_\parallel^2)/2c^2 \tag{2.16}$$

и отлична от нуля при $a_\perp \neq a_\parallel$. Если „анизотропия" температур отсутствует ($a_\perp = a_\parallel$), то $M = 0$ и в уравнении (2.12) член с $(\omega\tilde{m} - kp_\parallel^0 \mp \tilde{\Omega}_H \tilde{m})^{-2}$ исчезает.

Заметим, однако, что последнее утверждение не вполне точно, так как при переходе от (2.11) к (2.12), (2.13) были опущены слагаемые $k^2c^2a_\perp^2\,\psi_3$ и $2k^2c^2a_\parallel^2\,\Phi_3$, учет которых при $a_\perp = a_\parallel$ приводит к появлению в (2.12) членов, содержащих $(\omega\tilde{m} - kp_\parallel^0 \mp \tilde{\Omega}_H \tilde{m})^{-2}$. Как показано в статье I, присутствие членов такого типа в дисперсионном уравнении обуславливает нестабильность плазмы (при соответственном выборе параметров). С другой стороны, ясно, что в условиях, когда „анизотропия" температур отсутствует и распределение частиц по скоростям — равновесное, система должна быть устойчива.

В сказанном нет никакого противоречия, потому что появление не равных нулю величин ψ_3 и Φ_3 в уравнении (2.11) связано с выбо-

---

* Здесь γ — поправка к частоте Ω ($\omega = \Omega + \gamma$), удовлетворяющей условию $|\Omega\tilde{m} - kp_\parallel^0 \mp \tilde{\Omega}_H\tilde{m}| \ll |\gamma|$.

ром распределения частиц в форме (1.1). Это распределение в рассматриваемом приближении не является равновесным даже если $p^0_\perp = p^0_\parallel = 0$, а $a_\perp = a_\parallel$ и удовлетворяют неравенствам (2.6). В самом деле, при условии $p^0_\parallel = 0$ равновесным распределением является функция

$$f_0(\boldsymbol{p}) = Ae^{\left(\tilde{m}c^2 - \sqrt{\tilde{m}^2c^4 + p_\perp^2c^2 + p_\parallel^2c^2}\right)/\varkappa T},$$

которая с точностью до членов порядка $a^2/\tilde{m}^2c^2$ $(a^2 = a^2_\parallel = a^2_\perp = 2\tilde{m}\varkappa T)$ может быть записана в виде:

$$f_0(\boldsymbol{p}) = Ae^{-\xi^2-\zeta^2}\left[1 + \frac{a^2}{4\tilde{m}^2c^2}(\xi^2+\zeta^2)\right]. \qquad (2.17)$$

Легко показать, что после подстановки в (2.4) вместо функции $Ae^{-\xi^2-(\zeta-\zeta_0)^2}$ (1.1) распределения (2.17) мы получим (в частном случае $p^0_\parallel = 0$, $p^0_\perp = 0$) дисперсионное уравнение вида (2.11), в котором, однако, $a^2_\perp \psi_3 + 2a^2_\parallel \Phi_3 = 0$.

Впрочем, слагаемое с M в уравнении (2.12) может (по крайней мере, при малых значениях $\tilde{\Omega}^2_0$) существенно изменить критерий устойчивости плазмы в широкой области значений k только в том случае, когда $\overline{p^2_\perp} \gg a^2_\parallel$. В самом деле, вторая сумма в (2.12) может быть больше первой или сравнима с ней только при условии

$$2\,|\omega\tilde{m} - kp^0_\parallel| \leqslant ka_\parallel\,\beta_j^{-1}\,|1-\omega^2/k^2c^2|\,|\overline{p^2_\perp}/a^2_\parallel - 1|.$$

Согласно статье I, при малых $\tilde{\Omega}^2_0$ система может быть неустойчива, если $|\Omega\tilde{m} - kp^0_\parallel \mp \tilde{\Omega}_H\tilde{m}| \ll |\gamma|$, где $\Omega + \gamma = \omega$, $|\gamma| \ll |\omega|$ и $\operatorname{Im}\gamma \sim \gamma$. Отсюда следует, что $|\beta_j| \sim \tilde{m}\,|\operatorname{Im}\gamma|/ka_\parallel$ и минимальное значение $|\omega\tilde{m} - kp^0_\parallel|$ — порядка $\tilde{m}\operatorname{Im}\gamma$. Поэтому указанное выше условие сводится к следующему:

$$2\beta_j^2 \sim 2\left(\frac{\tilde{m}\operatorname{Im}\gamma}{ka_\parallel}\right)^2 \leqslant |1-\omega^2/k^2c^2|\,|\overline{p^2_\perp}/a^2_\parallel - 1|.$$

Учитывая, что $|\beta_j| \gg 1$, получаем:

$$|1-\omega^2/k^2c^2|\,|\overline{p^2_\perp}/a^2_\parallel - 1| \gg 1.$$

Это необходимое неравенство при $\overline{p^2_\perp} \sim a^2_\parallel$ может реализоваться только в малом интервале волновых чисел k, где $k^2c^2/\omega^2 \ll 1$. Если же значения k^2c^2/ω^2 занимают широкий интервал от $k^2c^2/\omega^2 \ll 1$ до $k^2c^2/\omega^2 \gg 1$, то вторая сумма в уравнении (2.12) может играть существенную роль только при условии $\overline{p^2_\perp}/a^2_\parallel \gg 1$.

Как указывалось выше, исследование уравнения типа (2.12) было выполнено в статье I $\left(\text{в пренебрежении членами, содержащими } e^{-\xi_l^2}\right)$ для достаточно малых значений концентрации частиц N (т. е. $\tilde{\Omega}^2_0$), допускающих применение метода возмущений. Однако легко показать, что уравнение (2.12) определяет нарастающие решения (в некотором интервале значений k) для любых значений параметра $\tilde{\Omega}_0^2$. В самом деле, ограничиваясь случаем, когда $M > 0$, $n_j^2(\omega) = 1$, $p_\parallel^0 = 0$, рассмотрим зависимость k^2 от ω, определяемую уравнением (2.12) без учета мнимых членов:

$$c^2 k^2 = \frac{\omega\left[\omega - \Sigma\tilde{\Omega}_0^2/(\omega \mp \tilde{\Omega}_H) + \Sigma\tilde{\Omega}_0^2\omega\, M/\tilde{m}^2\,(\omega \mp \tilde{\Omega}_H)^2\right]}{1 + \Sigma\tilde{\Omega}_0^2\, M/(\omega \mp \tilde{\Omega}_H)^2\,\tilde{m}^2}. \tag{2.18}$$

Согласно (2.18), функция $k^2(\omega)$ — однозначная и конечная для конечных значений ω; она стремится в бесконечность при $\omega \to \pm\infty$ по закону $k^2 \simeq \omega^2/c^2$. Отсюда следует, что достаточно большим значениям $k^2 > k^2_{\text{крит}}$ отвечают только два действительных значения частоты ω. Поскольку уравнение (2.18)—четвертого порядка относительно ω, это означает, что при данных значениях $k^2 > k^2_{\text{крит}}$ два корня ω будут комплексно сопряженными, а рассматриваемая система станет неустойчивой.

Проведенное в этом разделе обсуждение условий нестабильности плазмы ограничивалось исследованием той части дисперсионного соотношения (2.12), которая имеет особенность на частоте, удовлетворяющей уравнению

$$\omega\,\tilde{m} - kp_\parallel^0 \mp \tilde{\Omega}_H\,\tilde{m} = 0. \tag{2.19}$$

При этом игнорировалась другая часть уравнения (2.12), в которую явно входит мнимая единица. В связи с этим следует отметить, что поскольку в последнюю часть входят множители типа $e^{-\xi_l^2}$, где в области применимости (2.12) $|\xi_l^2| \gg 1$ (см. (2.1)), эта часть мала по сравнению с остальными членами уравнения (2.12). Поэтому в большинстве случаев члены, содержащие $e^{-\xi_l^2}$ и дающие свой вклад в коэффициент нарастания (затухания) электромагнитных волн (в величину $\operatorname{Im}\omega$), можно отбросить, если $\operatorname{Im}\omega \neq 0$ за счет членов уравнения (2.12), имеющих особенность на частоте, определяемой соотношением (2.19). Однако содержащие мнимую единицу члены дисперсионного уравнения будут существенны в случае, если решение уравнения (1.28) без этих членов является действительным ($\operatorname{Im}\omega = 0$). В частности, согласно статье I, последнее всегда имеет место для дисперсионного уравнения (2.12) на частотах, удовлетворяющих неравенству

$$|\Omega\,\tilde{m} - kp_\parallel^0 \mp \tilde{\Omega}_H\,\tilde{m}| \gg |\gamma|,$$

если Ω_0 достаточно мала. Здесь $\Omega + \gamma = \omega$, Ω — нулевое приближение для частоты ($\operatorname{Im}\Omega = 0$), γ — поправка к частоте за счет членов, содержащих особенность. Исследование условий неустойчивости плазмы, обусловленной влиянием мнимых членов дисперсионного уравнения, будет проведено для дисперсионного уравнения (1.3а) — (1.4а) в другой статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 57 (1960).
2. В. В Железняков, Усп. физ. наук, 64, 113 (1958).
3. В Л Гинзбург и В В Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 5—6, 9 (1958); Paris Symposium on Radio Astronomy, Stanford, 1959.

4. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 443, 450, 836 (1959).
5. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 14 (1959).
6. Р. З. Сагдеев, Б. Б. Кадомцев, Л. И. Рудаков, А. А. Веденов, Труды II Международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958), М., 1959, стр. 152.
7. В. А. Фок, Диффракция радиоволн вокруг земной поверхности, изд. АН СССР, М.—Л., 1946.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
11 декабря 1959 г.