

К ТЕОРИИ УДАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман

Рассматривается распространение плоских однородных электромагнитных волн в среде с нелинейной связью между магнитной индукцией B и напряженностью магнитного поля H . Исследуются вопросы образования и развития ударных электромагнитных волн. На примере стационарной волны в насыщенном феррите рассмотрена структура фронта ударных волн. Проведен учет влияния конечной проводимости среды.

Распространение электромагнитных волн в ферритах или сегнетоэлектриках рассматривается обычно в линейном приближении (о распространении в линейных анизотропных и гиротропных средах см., например, в [1]). Лишь в относительно небольшом числе более поздних работ (например, [2, 3]) исследуются вопросы взаимодействия двух волн, причем и здесь благодаря предположению о малости амплитуды одной из волн задача сводится к исследованию линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от координат и времени.

С другой стороны, при изучении существенно нелинейных систем рассматриваются, как правило, квазистационарные (с электродинамической точки зрения) задачи—формирование импульсов в нелинейных цепях с сосредоточенными параметрами, умножение частоты и т. д. Такое ограничение отнюдь не обусловлено отсутствием интересных—с физической и прикладной точек зрения—задач, где феррит или сегнетоэлектрик, находящийся в сильном поле электромагнитной волны, ведет себя как существенно нелинейная среда. Скорее это можно объяснить отсутствием достаточно больших (по размерам) образцов нелинейных диэлектриков и магнетиков, сохраняющих свои нелинейные свойства на высоких частотах. Постольку, поскольку в настоящее время это ограничение постепенно снимается, интерес к задачам электродинамики нелинейных сред оказывается оправданным. Одна из таких задач—задача об образовании ударных электромагнитных волн в ферритах—рассматривалась в [10]. В настоящей работе дается более подробное исследование распространения плоских однородных электромагнитных волн в нелинейных средах. Рассматриваются, в частности, условия возникновения и последующее развитие слабых разрывов, а также влияние конечной проводимости среды на форму стационарных ударных волн и структуру их фронта.

1. ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ. ВОЗНИКНОВЕНИЕ РАЗРЫВОВ

Основные особенности, связанные с распространением электромагнитных волн в нелинейных средах, можно выяснить на простейшем примере распространения плоской линейно поляризованной волны в однородной изотропной среде. Будем считать, что в волне, распространяющейся вдоль оси z , магнитное поле направлено по y , а электрическое—по x . При достаточно медленных изменениях полей связь

между магнитной индукцией B и напряженностью магнитного поля H , а также между электрической индукцией D и напряженностью электрического поля E не зависит явно от времени и определяется функциями

$$B_y = B(H_y), \quad D_x = D(E_x). \quad (1)$$

Если принять, что поля $E = E_x$ и $H = H_y$ не зависят от поперечных координат x, y , то уравнения Максвелла запишутся в виде*:

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t}; \quad \frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B(H)}{\partial t}; \quad (2)$$

$$D_z = \text{const}; \quad B_z = \text{const}.$$

Нетрудно найти частные решения системы нелинейных уравнений (1)–(2), аналогичные простым волнам при одномерном изэнтропическом движении сжимаемого газа [4, 5]. Пользуясь обычным методом, получаем:

$$z = \pm \frac{ct}{\sqrt{\epsilon \mu(H)}} + f(H)$$

или

$$H = f_1 \left(z \mp \frac{ct}{\sqrt{\epsilon \mu(H)}} \right); \quad E = \pm \int \sqrt{\frac{\mu(H)}{\epsilon}} dH, \quad (3)$$

где c —скорость света в вакууме, $\mu(H) = dB/dH$, $f(\xi)$ и $f_1(\xi)$ —произвольные функции, определяемые из граничных условий. Разные знаки соответствуют противоположным направлениям распространения.

Решение (3) описывает бегущие волны, каждая точка профиля которых перемещается со скоростью, зависящей от величины напряженности магнитного поля в этой точке ($u = c [\epsilon \mu(H)]^{-1/2}$). Если $\mu(H)$ —убывающая функция напряженности магнитного поля, то с большей скоростью будут, очевидно, распространяться те точки профиля, где напряженность магнитного поля по абсолютной величине больше. Следовательно, на том участке профиля волны, где магнитное поле возрастает по абсолютной величине в сторону, противоположную направлению распространения (передний фронт), крутизна фронта будет возрастать до тех пор, пока не образуется разрыв непрерывности векторов поля (рис. 1). Аналогичная ситуация имеет место при возрастающей функции $\mu(H)$ на участке, где $H(z)$ увеличивается по абсолютной величине в направлении распространения волны (задний фронт).

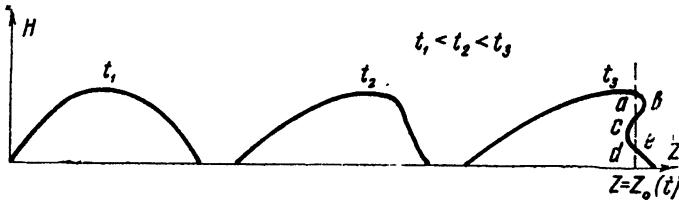


Рис. 1.

Если $\mu(H)$ не является монотонной функцией, картина распространения оказывается более сложной. Так, например, если $\mu(H)$ сначала (при малых значениях H) растет, а затем уменьшается, то при распространении одиночного импульса малой амплитуды разрыв воз-

* Связь между D и E считается линейной: $D = \epsilon E$.

никает только на его заднем фронте. Разрыв на переднем фронте может образоваться лишь при достаточно большой амплитуде $H > H_{kp}$, определяемой из условия*

$$B(H_{kp})/H_{kp} < (\partial B/\partial H)_{H < H_{kp}}. \quad (4)$$

В дальнейшем для определенности речь всюду будет идти о монотонно убывающей функцией $\mu(H)$.

Время t^* и место z^* образования разрыва определяются уравнениями [4]

$$(\partial z/\partial H)_{t^*} = 0, \quad (\partial^2 z/\partial H^2)_{t^*} = 0. \quad (5)$$

Следует отметить, что в реальных условиях разрыва непрерывности векторов поля не происходит, так как еще до того, как выполняется условие (5), изменение поля в волне становится настолько быстрым ($\partial H/\partial z \rightarrow \infty$, $\partial H/\partial t \rightarrow \infty$), что предположение о наличии не зависящей от времени связи между B и H , положенное в основу описанной выше картины образования разрывов, становится недопустимым. Однако если не интересоваться структурой полей в области быстрого изменения последних („структурой разрыва“), то все пространство можно разделить движущимися границами на области, в каждой из которых справедливы стационарные уравнения связи (1). На границах раздела между областями поле изменяется скачком; задача об исследовании распространения разрывных (ударных) волн сводится, таким образом, к решению уравнений типа (1)–(2) совместно с граничными условиями на движущихся поверхностях раздела.

2. УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗРЫВА

Граничные условия на движущейся поверхности разрыва (на фронте ударной волны) нетрудно получить, предположив, что ее скорость изменяется достаточно медленно. Тогда в системе координат, движущейся вместе с данным участком поверхности разрыва, справедливы обычные граничные условия, которые после перехода к неподвижной системе отсчета принимают вид:

$$[n, E_2 - E_1] = \frac{v_n}{c} (B_2 - B_1); \quad [n, H_2 - H_1] = -\frac{v_n}{c} (D_2 - D_1); \\ D_{n2} = D_{n1}; \quad B_{n2} = B_{n1}, \quad (6)$$

где n — единичный вектор нормали к границе разрыва в направлении распространения волны, v_n — нормальная компонента скорости перемещения разрыва, а индексы 1 и 2 соответствуют значениям поля перед разрывом и за ним.

В частном случае плоской волны, рассматривавшемся в предыдущем разделе, условия (6) дают:

$$H_2 - H_1 = \frac{v}{c} \epsilon (E_2 - E_1); \quad E_2 - E_1 = \frac{v}{c} \{ B(H_2) - B(H_1) \}, \quad (6a)$$

откуда видно, что скорость распространения разрыва определяется значениями магнитного поля по обе стороны от него:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\epsilon} \frac{H_2 - H_1}{B(H_2) - B(H_1)}. \quad (7)$$

* Нетрудно убедиться, что разрывная волна с меньшей амплитудой оказывается неустойчивой.

После образования разрыва бегущая волна перестает быть простой волной—выражения для поля (3) противоречат граничным условиям (6а)*. Однако до тех пор, пока скачок поля на разрыве $|H_2 - H_1|$ настолько мал, что в разложении

$$B = B(H_1) + \mu(H_1)(H - H_1) - \frac{1}{2}\mu'(H_1)(H - H_1)^2 + \dots, \quad (8)$$

где $|H - H_1| \leq |H_2 - H_1|$, третий член** (и все последующие) много меньше второго, т. е. при

$$\left| \frac{1}{2}\mu'(H_1)(H_2 - H_1) \right| \ll \mu(H_1) \quad (9)$$

поле по обе стороны от разрыва сохраняет с точностью до $|(\mu'/\mu)(H_2 - H_1)|^2$ ту же структуру, что и в простой волне. Действительно, поскольку условие (9) означает малость изменения проницаемости μ на границе раздела двух областей:

$$|\mu(H_2) - \mu(H_1)| \ll \mu(H_1),$$

отражением от такой границы, а следовательно, и обусловленным отраженными волнами изменением структуры поля, можно пренебречь. Прямой подстановкой (8) в выражение для электрического поля (3) нетрудно убедиться, что в случае малого скачка поле простой волны удовлетворяет граничным условиям (6а) на разрыве с точностью до $|(\mu'/\mu)(H_2 - H_1)|^2$. По аналогии с газодинамикой такие разрывы мы будем в дальнейшем называть *слабыми*.

Из сказанного выше следует, что если в бегущей волне возникают слабые разрывы, волна по своей структуре остается простой и за ее дальнейшим развитием можно проследить, используя частные решения (3) и граничные условия (6а). Задача сводится, таким образом, к определению местоположения разрыва в простой волне; это можно сделать методом, используемым в газодинамике [4] и допускающим простую геометрическую интерпретацию. Пусть профиль магнитного поля простой волны имеет вид, показанный на рис. 1 при $t \sim t_0$: Многозначность функции $H(z)$ в действительности не имеет места, так как в волне появляется разрыв в плоскости $z = z_0(t)$. Используя разложение (8), нетрудно показать, что в рассматриваемом приближении

$$\int_{H_e}^{H_a} (z - z_0) dH = 0; \quad (10)$$

это равенство сохраняется в процессе распространения до тех пор, пока выполнено неравенство (9). Условие (10), означающее равенство площадей abc и cde , определяет положение разрыва $z_0(t)$ в слабой ударной волне.

Слабые ударные волны могут существовать только ограниченное время, поскольку скорость перемещения разрыва всегда больше скорости точек профиля простой волны, распространяющейся перед ним, но меньше скорости точек профиля позади разрыва; величина скачка напряженности поля в результате непрерывно возрастает.

* Впереди разрыва волна остается простой, поскольку разрыв перемещается быстрее электромагнитных возмущений в этой области.

** В том случае, если $\mu'(H_1) = 0$, необходимо учитывать следующий член разложения в (8); общие выводы, относящиеся к простым волнам, при этом не меняются.

В дальнейшем возможны два пути развития ударной волны. Если амплитуда поля в волне достаточно велика, то рост скачка приведет к нарушению условия (9), и волна превратится в *сильную ударную волну* со скоростью распространения, определяемой по-прежнему формулой (7), но со структурой поля за разрывом, отличающейся от (3). Если амплитуда поля в волне настолько мала, что требование (9) выполнено при H_2 и H_1 , равных, соответственно, максимальному и минимальному значениям магнитного поля, то после того, как величина скачка достигнет значения $H_{\max} - H_{\min}$, амплитуда волны (и величина скачка) будет убывать за счет диссипации энергии на разрыве.

Остановимся более подробно на вопросе о диссипации энергии на разрыве, т. е. в области быстрого изменения электрического и магнитного полей. Применяя теорему Пойнтинга к замкнутому цилинду малой высоты Δz , у которого одно основание лежит позади скачка, а другое перед скачком, получим*:

$$\frac{c}{4\pi} (E_2 H_2 - E_1 H_1) = \frac{v}{4\pi} \left\{ \int_{B_1}^{B_2} E dD + \int_{B_1}^{B_2} H dB \right\} + Q, \quad (11)$$

где

$$Q = \int_{\Delta z} q dz, \quad q = \frac{1}{4\pi} \left(E \frac{\partial D}{\partial t} + H \frac{\partial B}{\partial t} \right).$$

Величина Q , выражающаяся в виде интеграла по области быстрого изменения полей, представляет собой, очевидно, искомые потери мощности на единицу площади фронта ударной волны. Учитывая граничные условия (6а) и уравнения связи (1), из равенства (11) получим для Q следующее выражение (связь $D(E)$ по-прежнему предполагается линейной):

$$Q = \frac{v}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} (B_2 - B_1) (H_2 - H_1) - \int_{B_1}^{B_2} H dB \right\}. \quad (12)$$

Отсюда видно, что диссипация мощности в ударной волне зависит только от значений магнитного поля по обе стороны от скачка и от нелинейных свойств среды при медленном изменении поля** (функции $B(H)$).

В случае слабой ударной волны выражение (12) для рассеиваемого на фронте тепла упрощается:

$$Q \simeq \frac{\mu' v}{48\pi} (H_2 - H_1)^3. \quad (13)$$

3. СТРУКТУРА ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Как уже было отмечено выше, для исследования структуры фронта ударной электромагнитной волны необходимо знать более точные (в общем случае интегро-дифференциальные) уравнения связи между B и H , D и E , справедливые при быстром изменении полей. Мы рассмотрим здесь простейший пример—плоскую однородную волну, распространяющуюся в феррите, намагниченном до насыщения продольным (по отношению к направлению распространения волны) однородным,

* Зависимость между B и H , D и E предполагается одинаковой по обе стороны фронта ударной волны; нагревание среды не учитывается.

** Отметим, что поскольку $Q = q \Delta z = \bar{q} v \tau$ (здесь \bar{q} — средняя мощность потеря в единице объема, τ — длительность фронта ударной волны во времени), длительность фронта ударной волны тем меньше, чем интенсивнее механизм диссипации.

магнитным полем H_0 . Если пренебречь различными внутренними полями, то связь между намагничением M ($B = H + 4\pi M$) и напряженностью магнитного поля H в насыщенном феррите дается уравнением [7]

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \gamma [M, H + H_0] - \lambda M^{-2} [M [M, H + H_0]] , \quad (14)$$

где γ — магнетомеханическое отношение для электронного спина, $\lambda = 1/\tau_0$ — частота релаксации, τ_0 — время релаксации насыщенного феррита, M — модуль вектора намагничения.

При медленном изменении магнитного поля производной можно пренебречь, и из (14) следует, что $[M, H + H_0] = 0$. В частности, для плоской линейно-поляризованной волны в однородной среде ($M = \text{const}$), отсюда вытекает связь между поперечными компонентами вектора намагничения и напряженности магнитного поля:

$$H = H_y = M_y \left(B_0 / \sqrt{M^2 - M_y^2} - 4\pi \right) . \quad (15)$$

С помощью этого уравнения нетрудно найти функции $B_y(H_y)$ и $\mu(H) = 1 + 4\pi dM_y/dH_y$, которые определяют распространение простых и разрывных электромагнитных волн (см. разделы 1, 2).

Исследование структуры фронта ударной волны, т. е. решение уравнений Максвелла с учетом связи (14) в общем виде, не представляется возможным. Поэтому мы ограничимся рассмотрением стационарной плоской ударной волны, поле в которой зависит только от разности $vt - z = \xi$, где $v = \text{const}$ — скорость распространения волны. Задача сводится в этом случае к решению системы уравнений в обычновенных производных, часть которых (уравнения Максвелла для E, D, H, B) линейна, а одно (уравнение связи (14)) — нелинейное. Интегрируя уравнения Максвелла и считая, что перед фронтом ударной волны ($\xi \rightarrow -\infty$) имеется только продольное постоянное магнитное поле, получим:

$$H_{\perp} = p M_{\perp} ; E_{\perp} = -\frac{c}{\epsilon v} [z_0 H_{\perp}] ; H_z = B_0 - 4\pi M_z , \quad (16)$$

где H_{\perp} и E_{\perp} — поперечные составляющие полей, z_0 — единичный вектор оси z , а постоянная p определяется соотношением

$$p = 4\pi \epsilon v^2 / c^2 (1 - \epsilon v^2 / c^2) . \quad (17)$$

Подстановка (16) в (14) дает нелинейное векторное уравнение первого порядка (или систему трех скалярных уравнений первого порядка), определяющее изменение вектора намагничения M в стационарной ударной волне. Поскольку один из интегралов этого уравнения очевиден ($|M| = M = \text{const}$), удобно произвести замену переменных, характеризуя направление вектора M полярным (Θ) и азимутальным (φ) углами (рис. 2):

$$M_x = M \sin \Theta \cos \varphi ; \quad M_y = M \sin \Theta \sin \varphi ; \quad M_z = M \cos \Theta .$$

Для углов Θ и φ получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \Theta &= v \frac{d\varphi}{d\xi} = \gamma \{ B_0 - (4\pi + p) M \cos \Theta \} ; \\ \frac{d}{d\xi} \cos \Theta &= -\frac{\lambda}{v} (4\pi + p) \left\{ \cos \Theta - \frac{B_0}{(4\pi + p) M} \right\} \sin^2 \Theta . \end{aligned} \quad (18)$$

Параметр p , а следовательно, и скорость ударной волны* определяется из условия, что при $\xi \rightarrow \infty$ (за фронтом ударной волны) $d\phi/d\xi \rightarrow 0$, $\Theta \rightarrow \Theta_2$:

$$p = (B_0/M \cos \Theta_2) - 4\pi, \quad H_2 = B_0 \operatorname{tg} \Theta_2 - 4\pi M \sin \Theta_2, \quad (19)$$

где H_2 — напряженность магнитного поля за фронтом волны.

Подставляя найденное значение p в уравнения для φ и Θ и интегрируя второе из них, будем иметь:

$$\omega = v \frac{d\varphi}{d\xi} = -\gamma B_0 \left(\frac{\cos \Theta}{\cos \Theta_2} - 1 \right); \quad (20)$$

$$\frac{(\cos \Theta - \cos \Theta_2)^2}{(1 + \cos \Theta)^{1-\cos \Theta_2} (1 - \cos \Theta)^{1+\cos \Theta_2}} = \exp \left\{ -2\lambda \frac{B_0}{M} \frac{\sin^2 \Theta_2}{\cos \Theta_2} \xi \right\}.$$

Согласно этим уравнениям, поперечные компоненты поля в области фронта ударной волны вращаются вокруг направления распространения с частотой, уменьшающейся от $|\omega| = \omega_{\max} = \gamma B_0 (1 - \cos \Theta_2)/\cos \Theta_2$ при $\xi \rightarrow -\infty$ (в передней части фронта) до $\omega \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ (за фронтом). Амплитуды поперечных составляющих поля при этом монотонно возрастают. Время, в течение которого происходит основное изменение величины всех составляющих поля (длительность фронта ударной волны), по порядку величины равно

$$\tau = \tau_0 M \cos \Theta_2 / 2 B_0 \sin^2 \Theta_2. \quad (21)$$

Для очень сильных ударных волн ($|H_2| \gg B_0$)

$$v \approx c/\sqrt{\epsilon}, \quad \omega_{\max} \approx \gamma H_2, \quad \tau = \tau_0 M / 2 H_2, \quad \tau_{\omega_{\max}} \approx \tau_0 \gamma M / 2.$$

Для слабых ударных волн ($|H_2| \ll B_0 - 4\pi M$) длительность фронта больше, а частота ω_{\max} меньше:

$$v^2/c^2 \approx (1 - 4\pi M/B_0)/\epsilon; \quad \omega_{\max} \approx \gamma B_0 H_2^2 / 2(B_0 - 4\pi M)^2;$$

$$\tau \approx \tau_0 M (B_0 - 4\pi M)^2 / 2 B_0 H_2^2; \quad \tau_{\omega_{\max}} \approx \tau_0 \gamma M / 4.$$

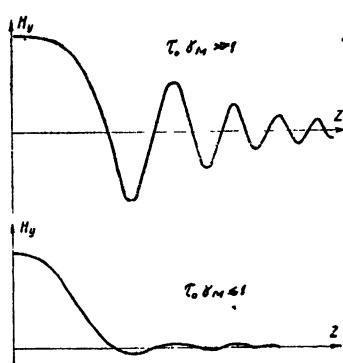


Рис. 3.

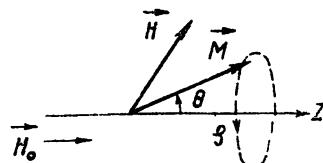


Рис. 2.

Из этих формул видно, что частота вращения поперечных компонент поля в области фронта ударной волны зависит, главным образом, от величины магнитного поля в волне; длительность фронта, будучи прямо пропорциональной времени релаксации феррита τ_0 , уменьшается с увеличением магнитного поля. Отметим, однако, что характер структуры фронта ударной волны определяется только свойствами среды. При $\tau_0 \gamma M \ll 1$ поперечные составляющие поля становятся заметно отличными от нуля только на последнем обороте (по φ), и изменение поля в пределах фронта волны, по существу, ап-

* Отметим, что найденное таким образом значение скорости ударной волны v совпадает с вычисленным по формуле (7) (с учетом (15)).

риодическое (рис. 3а). При $\gamma_0 M \gg 1$ в пределах фронта волны укладываются большое число колебаний поперечных компонент поля (рис. 3б). Фронт такой ударной волны представляет собой поляризованные по кругу колебания с переменной частотой и амплитудой.

Следует отметить, что на возникновение высокочастотных колебаний при быстром перемагничивании феррита или парамагнетика обращалось внимание в ряде работ [8, 9], однако вопрос о создании достаточно крутых перепадов магнитного поля в них не затрагивался. В рассмотренной выше системе достаточно мощный видеоимпульс приобретает необходимую крутизну вследствие образования ударной электромагнитной волны. Вопрос об излучении прецессирующего магнитного момента (в частности, об учете реакции излучения) при таком подходе к задаче не встает, так как с самого начала уравнение движения магнитного момента (14) и уравнения Максвелла для поля решаются совместно.

4. УЧЕТ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ СРЕДЫ

Обратимся опять к простейшему случаю и рассмотрим распространение линейно поляризованной плоской однородной волны (см. раздел 1). Учет конечной проводимости σ приводит к появлению в первом из уравнений (2) члена $(4\pi/c)\sigma E$. Нетрудно видеть, что такие уравнения уже не имеют решения в виде простых бегущих волн (типа (3)), которые были возможны при равной нулю проводимости. Пользуясь методом возмущений, можно, однако, показать, что при достаточно малой проводимости в течение не слишком большого интервала времени возможны решения, близкие по своим свойствам к простым волнам. Это означает, что при выполнении определенных условий в среде с конечной проводимостью могут возникать разрывы векторов поля. Мы не будем останавливаться здесь на анализе этих условий, а лишь убедимся в существовании стационарных разрывных решений.

Для стационарной волны уравнения (2) с учетом токов проводимости сводятся к дифференциальному уравнению первого порядка в обыкновенных производных*.

$$\frac{dH}{d\xi} - \frac{v^2}{c^2} \frac{dB(H)}{d\xi} = \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{v}{c} B(H); E = \frac{v}{c} B(H), \quad (22)$$

где $\xi = vt - z$, v — скорость перемещения разрыва, $B(H)$ — известная функция. Скорость разрыва v определяется из граничных условий (6а) через H_c и $B_c = B(H_c)$ — величины магнитного поля и магнитной индукции непосредственно за разрывом:

$$v^2/c^2 = H_c/B_c = 1/\mu. \quad (23)$$

Решение уравнения (22) легко находится в неявном виде

$$\int_{H_c}^H \frac{dH}{B(H)} + \frac{H_c}{B_c} \ln \frac{B_c}{B(H)} = \frac{4\pi\sigma}{c\sqrt{\mu}} \xi \quad \text{при } \xi > 0; \quad (24)$$

$$E = H = 0 \quad \text{при } \xi < 0.$$

Следует отметить, что при линейной связи между B и H такого решения не существует.

* Поле перед фронтом ударной волны принято равным нулю, а проницаемость ϵ — равной единице.

В окрестности скачка, где $B \approx B_c + \mu_c (H - H_c)$ ($\mu_c = (dB/dH)_{H=H_c}$), магнитное поле изменяется по линейному закону:

$$H - H_c = H_c \frac{\xi}{L}; \quad L = \frac{c}{4\pi\sigma \sqrt{\frac{\mu}{\mu_c}}} \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu} \right). \quad (25)$$

Таким образом, при отличной от нуля проводимости нелинейной среды поле в стационарной ударной волне возрастает по мере удаления от ее фронта (рис. 4). Поскольку μ_c/μ тем ближе к единице, чем сильнее разрыв, из (25) следует, что скорость нарастания поля за фронтом ударной волны увеличивается с ростом амплитуды волны.

Влияние конечной проводимости среды на структуру фронта ударной волны можно выяснить на примере задачи, рассмотренной в третьем разделе. При $\sigma \neq 0$ поперечные компоненты напряженности магнитного поля H_\perp и вектора намагничения M_\perp не параллельны друг другу ($H_\perp = \rho M_\perp$), а составляют некоторый угол β (ξ). Если допустить, что угол β мал и изменяется медленно по сравнению с углами φ и Θ , то приближенно

$$\beta \approx \frac{4\pi\sigma}{vd\varphi/d\xi} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1} \ll \pi. \quad (26)$$

Уравнения для азимутального и полярного углов φ и Θ при тех же допущениях записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\xi} &= -\frac{\gamma B_0}{v} \left(\frac{\cos\Theta}{\cos\Theta_2} - 1 \right); \\ \frac{d\Theta}{d\xi} &= -\sin\Theta \left[\frac{\lambda B_0}{vM} \left(\frac{\cos\Theta}{\cos\Theta_2} - 1 \right) + \frac{\sigma}{v} \frac{1}{\cos\Theta - \cos\Theta_2} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Нетрудно видеть, что условие применимости этих уравнений, а также формулы (26), имеет вид:

$$\cos\Theta - \cos\Theta_2 \gg \sigma/\gamma M \quad (28)$$

и, следовательно, они описывают структуру фронта ударной волны лишь при достаточно малой проводимости σ . При $\sigma \rightarrow 0$ уравнения (27) переходят в (18) (с учетом (19)).

Согласно (27), наличие малой проводимости не сказывается, в первом приближении, на скорости изменения полярного угла φ (частоте пресцессии). Скорость изменения полярного угла Θ возрастает, что, очевидно, приводит к уменьшению ширины фронта ударной волны.

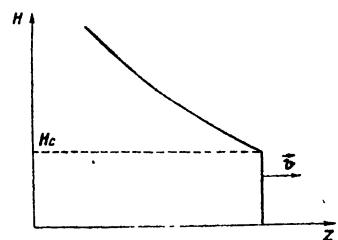


Рис. 4.

В настоящей работе рассмотрены только некоторые простейшие задачи, касающиеся возникновения и распространения ударных электромагнитных волн в нелинейных средах. Тем не менее, уже по этим простым примерам можно судить о наличии известной (а в ряде случаев весьма близкой) аналогии между задачами электродинамики нелинейных сред и газодинамики сверхзвуковых течений. Эта аналогия

позволяет использовать методы, развитые в газодинамике, для решения некоторых электродинамических задач (вопросы формирования сильных разрывов, отражение ударных волн и их взаимодействие, взаимодействие ударных волн с электромагнитными волнами малой амплитуды и т. д. [11, 12]).

С другой стороны, следует отметить и специфику электродинамических задач—возможность изменения функций $B(H)$ или $D(E)$ (характеризующих нелинейность среды), наличие гистерезиса, анизотропию и т. п. В специальном рассмотрении нуждаются также все задачи, не сводящиеся к скалярным, в частности, вопрос о структуре фронта ударных электромагнитных волн.

Отметим в заключение, что хотя в настоящей работе рассматривались лишь волны в безграничной среде, полученные выше результаты могут быть без труда распространены на некоторые линии передачи и, в частности, на искусственные линии задержки (LC -цепочки) с нелинейными индуктивными или ёмкостными элементами*.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Г. Сул, Л. Уокер, Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах, ИЛ, М., 1955.
- 2 Р. Тиен, Н. Суэл, Proc. IRE, **46**, 700 (1958).
- 3 С. И. Аверков, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 203 (1959).
- 4 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954.
- 5 Р. Курапт, К. Фридрихс, Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, М., 1950.
- 6 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТЛ, М., 1957.
- 7 L. Landau, E. Lifschiz, Phys. Zs. der Sov., **8**, 153 (1935)
- 8 В. М. Файн, УФН, **64**, 273 (1958).
- 9 F. Morgenthaler, Congres International sur la Physique de l'état solide et ses applications à l'électronique et aux telecommunications, Résumés des Comm., Bruxelles, 1958.
- 10 А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, **36**, 957 (1959).
- 11 А. В. Гапонов, Л. А. Островский, Г. И. Фрейдман, Доклад на юбилейной сессии, посвященной 100-летию со дня рождения А. С. Попова, М., 1959.
- 12 Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 833 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Проступила в редакцию
21 октября 1959 г.

* Ударные электромагнитные волны в искусственных линиях задержки впервые были получены И. Г. Катаевым.