ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том III, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1960*

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ СРЕДНЕГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕРОВНОСТЯМИ И С ФЛЮКТУАЦИЯМИ ИМПЕДАНСА

Ф. Г. Басс

Получены граничные условия для среднего поля, распространяющегося над поверхностью со случайными неровностями и флюктуациями импеданса.

1. Распространение электромагнитных волн в реальных условиях происходит, как правило, над неровными и электрически неоднородными поверхностями. В ряде практически важных случаев неровности и электрические неоднородности поверхности можно трактовать как случайные функции координат.

Задача о распространении электромагнитных волн над поверхностью со случайными неровностями рассматривалась Фейнбергом [1] для вертикального диполя, расположенного на некоторой плоской средней поверхности, относительно которой предполагаются случайные отклонения. В работе [1] было показано, что распространение усредненной электромагнитной волны над поверхностью со случайными неровностями эквивалентно распространению электромагнитной волны над плоской поверхностью с некоторой эффективной комплексной диэлектрической постоянной, зависящей от статистических характеристик случайных неровностей.

В настоящей заметке выводятся граничные условия для среднего электромагнитного поля на некоторой средней, вообще говоря, неплоской поверхности при распространении электромагнитных волн над поверхностью со случайными неровностями и электрическими неоднородностями. Мы ограничимся лишь хорошо проводящими поверхностями, на которых выполняются граничные условия Леонтовича.

2. Рассмотрим сначала более простую задачу о распространении звуковой волны над поверхностью со случайным импедансом.

Граничное условие для поля ψ на поверхности можно записать в виде:

$$\partial \psi / \partial z = - ik \eta \psi. \tag{1}$$

Здесь в каждой точке введена следующая ортогональная система координат: ось z направлена вдоль нормали к подстилающей поверхности, а орты осей x и y выбраны вдоль касательных к главным линиям кривизны. Положительным направлением оси z принимается направление внутренней нормали к поверхности раздела. В уравнении (1) через η обозначен импеданс поверхности раздела, $k = \omega / c$, зависимость от времени принимается в виде $e^{-i\omega t}$.

Случайный импеданс может быть представлен как сумма среднего импеданса и случайной составляющей: $\eta = \xi + \alpha$, где $\xi = \overline{\eta}$ (черта сверху обозначает статистическое среднее). Поле ψ имеет аналогичный вид:

$$\psi = \overline{\psi} + \psi'.$$

Результат статистического усреднения уравнения (1) можно записать следующим образом:

$$\partial \overline{\psi}/\partial z = -ik\,(\xi\overline{\psi} + \overline{\alpha\psi'}). \tag{2}$$

Вычитая (2) из (1) и пренебрегая членами порядка $\alpha\psi'$ и $\xi\psi'$, получим:

$$\partial \psi'/\partial z = -ik\,\alpha\overline{\psi}. \tag{3}$$

Выражая ψ' с помощью (3) через $\overline{\psi}$ и подставляя в (2), найдем граничное условие для $\overline{\psi}$.

Чтобы выразить ψ' через $\overline{\psi}$, воспользуемся формулой Кирхгофа, причем функцию Грина в ней выберем так, чтобы ее нормальная производная обращалась в нуль на средней поверхности. Тогда

$$\psi'(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,\frac{\partial\psi'(\boldsymbol{r}')}{\partial z'}\,dS' =$$

$$= \frac{ik}{4\pi}\int \alpha(\boldsymbol{r}')\,\overline{\psi}(\boldsymbol{r}')\,V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,dS'.$$

Отсюда

$$\overline{\alpha(\boldsymbol{r})\,\psi'(\boldsymbol{r})} = \frac{ik}{4\pi}\int \overline{\alpha^2}\,U(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,\overline{\psi}(\boldsymbol{r}')\,dS',$$

где $U(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \overline{\alpha(\boldsymbol{r})\,\alpha(\boldsymbol{r}')}/\overline{\alpha^2}$ и $V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ — функция Грина.

Подставляя последнее выражение в (2), для $\overline{\psi}$ получаем следующее граничное условие:

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z} = -ik\left(\xi\overline{\psi} + \frac{ik}{4\pi}\int \overline{\alpha^2}\,U(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,\overline{\psi}(\boldsymbol{r}')\,dS'\right). \tag{4}$$

Как видно из (4), граничное условие является нелокальным, т. е. значение $\partial\overline{\psi}/\partial z$ зависит от значения $\overline{\psi}$ на некоторой площади с центром в точке $\boldsymbol{r}$, эффективные линейные размеры которой порядка L—радиуса корреляции между $\alpha(\boldsymbol{r})$ и $\alpha(\boldsymbol{r}')$. Если радиус корреляции много меньше радиуса кривизны поверхности, то существенная область интегрирования является плоской и V есть функция Грина для плоскости.

Будем считать, что функция корреляции является однородной и изотропной, т. е. зависит только от расстояния между точками $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$. Тогда граничное условие (4) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z} = -ik\left(\xi\overline{\psi}(\boldsymbol{r}) + \frac{\overline{\alpha^2}\,ik}{2\pi}\int \frac{e^{ik\rho}}{\rho}\,U(\rho)\,\overline{\psi}(\boldsymbol{r}')\,dS\right), \tag{5}$$

где $\rho = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$.

Рассмотрим случаи, когда интегральное граничное условие переходит в локальное.

а) Так как $\overline{\psi}(\boldsymbol{r}')$ существенно меняется на расстояниях порядка λ, то в случае, когда радиус корреляции $L \ll \lambda$, $\overline{\psi}$ можно вынести за знак интеграла с относительной точностью L/λ. После несложного интегрирования (5) перепишется в следующем виде:

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z} = -ik\,\eta_{\text{эфф}}\,\overline{\psi}, \tag{6}$$

где

$$\eta_{эфф} = \xi + ik\,\overline{\alpha^2} \int\limits_0^\infty U(\rho)\, d\rho. \qquad (7)$$

б) В ряде важных случаев поле $\overline{\psi}$ на поверхности $z=0$ может быть представлено в виде $\overline{\psi}(\boldsymbol{r}) = \Psi(\boldsymbol{r})\, e^{i(k_x x + k_y y)}$, где $\Psi(\boldsymbol{r})$—функция, медленно меняющаяся на расстояниях порядка λ. Подставляя указанное выше выражение для $\overline{\psi}$ в (5) и вынося медленно меняющуюся функцию $\Psi(\boldsymbol{r})$ за знак интеграла, получаем граничное условие (6) с $\eta_{эфф}$, определяемым формулой

$$\eta_{эфф} = \xi + ik\,\overline{\alpha^2} \int\limits_0^\infty U(\rho)\, e^{ik\rho} J_0(k\rho)\, d\rho \qquad (8)$$

(J_0 — функция Бесселя нулевого порядка).

В обоих рассмотренных случаях мы получили локальные граничные условия того же вида, что и обычные условия с импедансом, но эффективный импеданс, входящий в эти условия, зависит от статистических характеристик электрических неоднородностей.

Заметим, что граничное условие (6) с импедансом из (7) и (8) существенно отличается от (5) тем, что при его выводе делались некоторые априорные предположения о характере поля, которые после решения задачи подлежат проверке.

3. Перейдем к исследованию граничных условий Леонтовича. На случайной поверхности $z=\zeta(x, y)$ эти условия имеют следующий вид:

$$[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{E}] = \eta\, [\boldsymbol{n}\, [\boldsymbol{n}, \boldsymbol{H}]]. \qquad (9)$$

Здесь $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — полные электрическое и магнитное поля; $\boldsymbol{E} = \overline{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{H} = \overline{\boldsymbol{H}} + \boldsymbol{h}$. Импеданс η связан с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ соотношением $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к случайной поверхности $z=\zeta(x, y)$. Этот вектор можно представить в виде $\boldsymbol{n} = \nu - \nabla\zeta$, где ν — единичный вектор нормали к средней поверхности $z=0$. В (9) отброшены члены порядка $|\eta|\,(\nabla\zeta)^2$ как бесконечно малые более высокого порядка, чем те члены, которые мы удерживали.

Для дальнейшего граничные условия (9) нужно перенести на поверхность $z=0$, разложив их в ряд по ζ у поверхности $z=0$, и усреднить, а затем усредненные граничные условия вычесть из неусредненных. Полученные таким образом граничные условия на поверхности $z=0$ для средних и флюктуационных составляющих электрического поля имеют вид:

$$\begin{gathered} \overline{E}_{x,\,y} = -\overline{\zeta'_{x,y} e_z} - \overline{\frac{\partial e_{x,\,y}}{\partial z}\,\zeta} \mp \overline{\alpha h_{y,\,x}} \mp \xi\, \overline{H}_{y,x}; \\ e_{x,\,y} = -\zeta'_{x,\,y}\overline{E}_z - \frac{\partial \overline{E}_{x,\,y}}{\partial z}\,\zeta \mp \alpha\, \overline{H}_{y,\,x} \\ (\zeta'_x = \partial\zeta/\partial x; \quad \zeta'_y = \partial\zeta/\partial y). \end{gathered} \qquad (10)$$

Чтобы получить граничные условия для среднего поля, необходимо выразить e_z и $\partial e_{x,\,y}/\partial z$ через e_x и e_y, т. е. через средние поля, величины ζ, α и их производные, а затем подставить в первое из уравнений (10).

В дальнейшем будем предполагать, что флюктуации импеданса не коррелированы со случайными неровностями поверхности.

Для нахождения e_z и $\partial e_{x,y}/\partial z$ мы используем формулы, выражающие поле в произвольной точке верхнего полупространства через тангенциальные составляющие электрического поля на поверхности [2]:

$$e_i = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S [e, \nu]\, G^{(i)} d\sigma, \tag{11}$$

где $G^{(i)}$ — магнитное поле диполя с моментом, направленным вдоль i-ой оси, и тангенциальными составляющими электрического поля, равными нулю на средней поверхности.

Если величины $\overline{\zeta(r)\,\zeta(r')}$ и $\overline{\alpha(r)\,\alpha(r')}$ существенно убывают на расстояниях, много меньших радиуса кривизны средней поверхности, то существенная область интегрирования является плоской. Предполагая это условие выполненным, получим для $\partial e_{x,y}/\partial z$ и e_z на поверхности следующие выражения:

$$\frac{\partial e_{x,y}(r)}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi} \int e_{x,y}(r)\, V_z''\, dS';$$

$$e_z(r) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \left[\frac{\partial e_x(r')}{\partial x'} + \frac{\partial e_y(r')}{\partial y'}\right] dS' \tag{12}$$

$$\left(V_z'' = \lim_{z\to 0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}};\ \rho = |r - r'|\right).$$

Подставляя $e_{x,y}$ из уравнения (10) в (12), а (12) — в первое из уравнений (10), найдем граничные условия для среднего поля.

В общем случае эти условия несколько громоздки. Поэтому мы приведем граничные условия для случая, когда флюктуациями импеданса можно пренебречь, а флюктуации формы поверхности однородны. В сделанных предположениях граничные условия примут следующий вид:

$$\begin{gathered}\overline{E}_{x,y} = \frac{\overline{\zeta}^2}{2\pi} \int dS' \left\{\frac{e^{ik\rho}}{\rho} \left[\Delta_\rho \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho_{x,y}} \overline{E}_z - \nabla_\rho \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho_{x,y}} \nabla_{r'} \overline{E}_z + \right.\right. \\ \left. + \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho_{x,y}} \nabla_{r'} \frac{\partial \overline{E}_\perp}{\partial z} - \frac{\partial \overline{E}_\perp}{\partial z} \nabla_\rho \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho_{x,y}}\right] + V_z'' \left[\frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho_{x,y}} \overline{E}_z - \right. \\ \left.\left. - \frac{\partial \overline{E}_{x,y}}{\partial z} W(\rho)\right]\right\} \mp \xi H_{y,x},\end{gathered} \tag{13}$$

где $W(\rho) = \overline{\zeta(r)\,\zeta(r')}/\overline{\zeta}^2$, $\overline{E}_\perp$ — вектор с компонентами E_x, E_y и $\rho = r - r'$.

Рассмотрим теперь случай распространения электромагнитных волн от точечного источника над сферической землей.

Решение будем искать в виде $\overline{E}_i(r, z) = \Psi_i(r, z, z_0)\, e^{ikr}$. Функция ослабления Ψ_i является медленно меняющейся функцией координат на поверхности сферы—высоты над сферой z и высоты источника z_0 (см. [9]). Мы ограничимся случаем, когда высота источника и точки наблюдения много меньше длины трассы. Несмотря на то, что при этом влияние отдельных неровностей и неоднородностей на среднее поле мало, однако за счет рассеяния вдоль всей трассы суммарный эффект может оказаться существенным. В этом предположении $\partial E_{x,y}/\partial z$ в (13) можно пренебречь*.

В результате выкладок, полностью аналогичных приведенным для скалярного случая, получаем следующее граничное условие:

$$[\nu,\ E] = \eta_{\text{эфф}}\ [\nu\,[\nu H]] \quad (\eta_{\text{эфф}} = \xi + \eta_{\zeta} + \eta_{\alpha}), \tag{14}$$

где η_{ζ} — часть эффективного импеданса, обусловленная флюктуациями поверхности, а η_{α} — флюктуациями диэлектрической и магнитной проницаемостей.

Граничное условие (14) по форме совпадает с граничным условием Леонтовича. Решение задачи о распространении электромагнитных волн над сферой, на которой выполняются граничные условия Леонтовича, хорошо известно: это поле с функцией ослабления Фока. Следовательно, решением нашей задачи также является поле с функцией ослабления Фока, в которой комплексное $\varepsilon^{-1/2}$ нужно заменить на $\eta_{\text{эфф}}$. Заметим, что медленность изменения функции ослабления подтверждает сделанное вначале предположение.

Если предположить, что функции корреляции зависят от модуля ρ, то η_{ζ} и η_{α} определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \eta_{\zeta} = i\overline{\zeta^2} \int_0^{\infty} d\rho\, e^{ik\rho} \Big[\frac{k}{2} \left(J_2(k\rho)\,\Delta_-\, W(\rho) - J_0(k\rho)\,\Delta_+\, W\right) - \\ - J_1(k\rho) \frac{d}{d\rho}\,\Delta_+\, W(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(J_1(k\rho)\,\frac{dW(\rho)}{d\rho}\right)\Big]; \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha} = \frac{i\overline{\alpha^2}}{k} \Big\{ ik + \int_0^{\infty} d\rho\, e^{ik\rho} \Big[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(J_0(k\rho)\,U(\rho)\right) - \frac{1}{2} J_0(k\rho)\,\Delta_+ U(\rho) + \\ + \frac{1}{2} J_2(k\rho)\,\Delta_-\, U(\rho) + k^2 U(\rho)\, J_0(k\rho) + 2kJ_1(k\rho)\,\frac{dU(\rho)}{d\rho}\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь

$$\Delta_{\pm} = \frac{d^2}{d\rho^2} \pm \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho};$$

J_n — функция Бесселя n-го порядка.

Выражение для η_{ζ} совпадает с соответствующим выражением, полученным Фейнбергом [1], но приведено к несколько иному виду, более удобному для исследования.

Рассмотрим предельные случаи для η_{ζ} и η_{α}, когда соответствующие радиусы корреляции много меньше и много больше длины волны. Если $kl \ll 1$ и $kL \ll 1$, то

$$\eta_{\zeta} = \frac{ik\overline{\zeta^2}}{2l} \int_0^{\infty} \frac{1}{x}\,\frac{dW(x)}{dx}\,dx; \quad \eta_{\alpha} = \frac{i\overline{\alpha^2}}{2kL} \int_0^{\infty} \frac{1}{x}\,\frac{dU(x)}{dx}\,dx.$$

* В другом предельном случае существенная область интегрирования мала и можно пользоваться теорией возмущений в ее обычном виде [4,5].

Если $kl \gg 1$ и $kL \gg 1$, то

$$\eta_{\zeta} = \frac{e^{3i\pi/4}\,\overline{\zeta^2}\sqrt{kl}}{2\sqrt{2\pi}\,l^2}\int\limits_0^\infty x^{-3/2}\frac{dW(x)}{dx}\,dx;$$

$$\eta_{\alpha} = \frac{e^{3i\pi/4}\,\overline{\alpha^2}\sqrt{kL}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty x^{-1/2}U(x)\,dx.$$

В приведенных выражениях l — радиус корреляции для случайных неровностей, L — радиус корреляции для случайных неоднородностей, $W(\rho) = W(\rho/e)$, $U(\rho) = U(\rho/L)$.

Определенный интерес представляет рассмотрение случайных неровностей, зависящих лишь от одной координаты, например, от x. В этом случае граничное условие имеет вид:

$$\overline{E}_x = -\eta_{\text{эфф}}^{(x)}\overline{H}_y;\quad \overline{E}_y = \eta_{\text{эфф}}^{(y)}\overline{H}_x$$
$$(\eta_{\text{эфф}}^{(x)} = \xi + \eta_{\zeta}^{(x)},\quad \eta_{\text{эфф}}^{(y)} = \xi), \tag{17}$$

где

$$\eta_{\zeta}^{(x)} = \overline{\zeta^2}\frac{k}{k_x}\int\limits_0^\infty d\rho_x\left[\sin(k_x\rho_x)H_0^{(1)}(k_x\rho_x)\frac{d^3W(\rho_x)}{d\rho_x^3} + \right.$$
$$\left. + k_x\cos(k_x\rho_x)H_0^{(1)}(k_x\rho_x)\frac{d^2W(\rho_x)}{d\rho_x^2} + \frac{\sin(k_x\rho_x)}{\rho_x}\frac{dH_0^{(1)}(k_x\rho_x)}{d\rho_x}\frac{dW(\rho_x)}{d\rho_x}\right], \tag{18}$$

$H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля нулевого порядка первого рода. В предельных случаях получаем:

$$\eta_{\zeta}^{(x)} = \frac{2ik\overline{\zeta^2}}{\pi l}\int\limits_0^\infty \frac{1}{x}\frac{dW(x)}{dx}\,dx\quad (k_xl \ll 1);$$
$$\eta_{\zeta}^{(x)} = \frac{e^{3i\pi/4}k\overline{\zeta^2}\sqrt{k_xl}}{2\sqrt{2\pi}\,l^2k_x}\int\limits_0^\infty x^{-3/2}\frac{dW(x)}{dx}\,dx\quad (k_xl \gg 1). \tag{18'}$$

Заметим, что если среднее поле найдено, то случайные составляющие определяются по формуле (11), пользуясь которой, можно найти вторые моменты поля. Так как из формулы (11) вытекает, что флюктуационные компоненты поля распределены по Гауссу, то нахождение первых и вторых моментов поля полностью решает задачу о распространении электромагнитного поля над случайно неровной и неоднородной средой.

Остановимся вкратце на пределах применимости теории. В настоящей работе задача решена в предположении о малости величин $\overline{\zeta^2}/l^2$, $\overline{\zeta^2}k/l$, ξ и $\overline{\alpha^2}$, причем при разложении по малому параметру всюду оставлялись лишь основные члены.

В заключение автор благодарит Е. Л. Фейнберга за обсуждение результатов работы и Э. А. Канера за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Л. Фейнберг, Исследования по распространению радиоволн, изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
2. М. П. Свешникова, ЖРФХО, часть физ, **59**, 453 (1927).
3. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, ГИТТЛ, М., 1953.
4. Ф. Г. Басс, В. Г. Бочаров, Радиотехника и электроника, **3**, 180 (1958).
5. В. Г. Бочаров, Ф. Г. Басс, Радиотехника и электроника, **3**, 577 (1958).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
23 июля 1959 г.

Примечание при корректуре. Как указал автору Е. Л. Фейнберг, при $kL \ll 1$ $|\eta_\alpha| \ll |\xi|$ и слагаемым η_α в $\eta_{эфф}$ в этом случае можно пренебречь.