О НЕУСТОЙЧИВОСТИ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ. I

В. В. Железняков

Получено релятивистское дисперсионное уравнение для волн, распространяющихся в плазме вдоль магнитного поля H_0. Найдены условия неустойчивости плазмы относительно высокочастотных электромагнитных возмущений при отсутствии дисперсии электронов по поперечным $(p_\perp)$ и продольным $(p_\parallel)$ импульсам (в случае, когда $p_\perp \neq 0$).

Задача о неустойчивости безграничной однородной магнитоактивной плазмы с неравновесным распределением электронов по импульсам рассматривалась в ряде работ (см., например, [1,2]). Однако в статье [1] исследование ограничивалось случаем, когда число электронов в элементе фазового объема $d\boldsymbol{p}$ ($\boldsymbol{p}$ — импульс частицы) имеет максимум при $p_\perp = p^0_\perp = 0$ и монотонно убывает с ростом $p_\perp$ ($p_\perp$ — модуль проекции $\boldsymbol{p}$ на плоскость, перпендикулярную магнитному полю $\boldsymbol{H}_0$). В статье [2] рассмотрен, по существу, предельный случай такого распределения, когда дисперсия электронов по $p_\perp$ и $p_\parallel = (\boldsymbol{p}\boldsymbol{H}_0)$ равна нулю.

Согласно [1,2], при движении электронного потока вдоль магнитного поля со „сверхсветовой" скоростью электромагнитные возмущения в этой системе нарастают во времени. В то же время плазма остается устойчивой относительно возмущений, частота которых отвечает „досветовому" движению электронного потока *.

Вместе с тем, Гапонов [3] обратил внимание на то, что в линии передачи, возбуждаемой электронным потоком, движущимся по винтовой линии в магнитном поле, неустойчивость возникает и при „досветовой" скорости движения потока (т. е. в области нормального эффекта Допплера [1]). Это обстоятельство дает основание полагать, что неустойчивость в области „досветовых" скоростей при определенных условиях может быть реализована и в однородной безграничной среде. Нетрудно видеть, что в случае такой среды аналогом рассмотренной в [3] системы (в смысле распределения по импульсам) служит магнитоактивная плазма, распределение электронов в которой характеризуется δ-функцией вида $\delta(p_\perp - p^0_\perp)$, где $p^0_\perp \neq 0$.

В настоящей статье I рассмотрены условия неустойчивости магнитоактивной плазмы относительно электромагнитных возмущений при отсутствии дисперсии по поперечным и продольным импульсам $p_\perp$ и $p_\parallel$. Для простоты исследование ограничено случаем, когда возмущения распространяются вдоль постоянного магнитного поля H_0. Учет дисперсии электронов по импульсам $p_\perp$ и $p_\parallel$ будет проведен в следующей статье.

---

* Термины „сверхсветовая" и „досветовая" скорости указывают на движение потока со скоростью, соответственно большей или меньшей фазовой скорости электромагнитной волны в рассматриваемой системе.

1. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Из уравнений Максвелла следует, что для волны $e^{ikr-i\omega t}$, распространяющейся в среде с тензором диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ik}(\omega, \boldsymbol{k})$, дисперсионное уравнение, связывающее значения частоты ω с величиной волнового вектора $\boldsymbol{k}$, имеет вид ([4], стр. 399):

$$\Delta \equiv \det\left[n^2\delta_{ik} - n_i n_k - \varepsilon_{ik}(\omega, \boldsymbol{k})\right] = 0. \tag{1.1}$$

Здесь Δ — определитель третьего порядка, δ_{ik} — символ Кронекера, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}c/\omega$ (c — скорость света в вакууме).

Согласно Шафранову [5] (см. также [6]), тензор $\varepsilon_{ik}(\omega, \boldsymbol{k})$ в релятивистской плазме определяется следующим соотношением *:

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \boldsymbol{k}) = \delta_{ik} - \sum i\frac{4\pi e^2 N}{\omega}\int d\boldsymbol{p}\int\limits_0^\infty v_i(t)\, e^{i\omega t - i\int\limits_0^t \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}(t')dt'} \times$$
$$\times\left[\left(1 - \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}}{\omega}\right)\frac{\partial f_0}{\partial p_k} + \frac{\boldsymbol{k}v_k}{\omega}\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}}\right]dt. \tag{1.2}$$

Суммирование в (1.2) проводится по сортам частиц; e — заряд частиц, N — их концентрация, $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{v}$ — импульс и скорость частиц в момент $t = 0$, $v_i(t)$ — зависимость скорости невозмущенного движения частицы в магнитном поле H_0 от времени, $f_0(\boldsymbol{p})$ — нормированная на единицу невозмущенная функция распределения частиц по импульсам.

Заметим, что выражение для $\varepsilon_{ik}(\omega, \boldsymbol{k})$ (1.2) получено в [5] при условии, что связанная с волной часть функции распределения $f_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, t)$ стремится к нулю, когда $t \to -\infty$. Это, очевидно, означает, что волна нарастает во времени, т. е. в (12) $\operatorname{Im}\omega > 0$. Для затухающих волн $\varepsilon_{ik}(\omega, \boldsymbol{k})$ можно получить аналитическим продолжением выражения (1.2) в нижнюю полуплоскость ω.

В случае, когда $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{H}_0$,

$$\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}}{\omega} = \frac{kv_\parallel}{\omega};\quad \boldsymbol{k}\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} = k\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel};\quad \int\limits_0^t \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}(t')\,dt' = k\int\limits_0^t v_\parallel(t')\,dt';$$
$$\frac{\partial f_0}{\partial p_x} = \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp}\cos\psi;\quad \frac{\partial f_0}{\partial p_y} = \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp}\sin\psi, \tag{1.3}$$

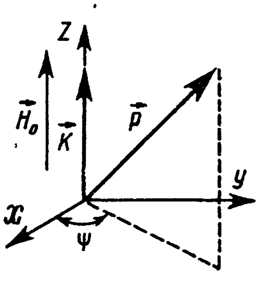

Рис. 1.

где знак $\parallel$ указывает на компоненту скорости или импульса вдоль H_0, знак $\perp$ — на модуль импульса в плоскости, перпендикулярной H_0. Смысл угла ψ ясен из рис. 1.

Поскольку невозмущенное движение электрона происходит по винтовой линии с осью вдоль поля H_0, в выражении (1.2)

$$v_x = v_\perp\cos(\Omega_H t + \psi);\quad v_y = v_\perp\sin(\Omega_H t + \psi);$$
$$v_z = v_\parallel = \text{const}, \tag{1.4}$$

* В статье [5] тензор $\varepsilon_{ik}(\omega, \boldsymbol{k})$ приведен не вполне точно: вместо слагаемого $(\boldsymbol{k}v_k/\omega)\,\partial f_0/\partial \boldsymbol{p}$ в подынтегральном выражении формулы (1.2) фигурирует другая величина $(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}/\omega)\,\partial f_0/\partial \boldsymbol{p}$.

где Ω_H — гирочастота, равная eH_0/mc $(m = \sqrt{m_0^2 + c^{-2} p_\parallel^2 + c^{-2} p_\perp^2}$; m_0 — масса покоя).

Подставляя в (1.2) соотношения (1.3) — (1.4) и интегрируя по времени t, получим:

$$\varepsilon_{xx} = 1 + \sum \frac{4\pi e^2 N}{\omega} \int \left[\left(1 - \frac{kv_\parallel}{\omega}\right)\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} + \frac{kv_\perp}{\omega}\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel}\right] \cos\psi \times$$
$$\times \left(\frac{\cos\psi + i\sin\psi}{\omega - kv_\parallel + \Omega_H} + \frac{\cos\psi - i\sin\psi}{\omega - kv_\parallel - \Omega_H}\right)\frac{v_\perp}{2}\,dp;$$
$$\varepsilon_{yy} = 1 + \sum \frac{4\pi e^2 N}{\omega} \int \left[\left(1 - \frac{kv_\parallel}{\omega}\right)\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} + \frac{kv_\perp}{\omega}\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel}\right] \sin\psi \times$$
$$\times \left(\frac{\sin\psi - i\cos\psi}{\omega - kv_\parallel + \Omega_H} + \frac{\sin\psi + i\cos\psi}{\omega - kv_\parallel - \Omega_H}\right)\frac{v_\perp}{2}\,dp;$$
$$\varepsilon_{zz} = 1 + \sum \frac{4\pi e^2 N}{\omega} \int \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel}\frac{1}{\omega - kv_\parallel} v_\parallel\,dp;$$
$$\varepsilon_{xy} = \sum \frac{4\pi e^2 N}{\omega} \int \left[\left(1 - \frac{kv_\parallel}{\omega}\right)\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} + \frac{kv_\perp}{\omega}\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel}\right] \sin\psi \times$$
$$\times \left(\frac{\cos\psi + i\sin\psi}{\omega - kv_\parallel + \Omega_H} + \frac{\cos\psi - i\sin\psi}{\omega - kv_\parallel - \Omega_H}\right)\frac{v_\perp}{2}\,dp; \tag{1.5}$$
$$\varepsilon_{yx} = \sum \frac{4\pi e^2 N}{\omega} \int \left[\left(1 - \frac{kv_\parallel}{\omega}\right)\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} + \frac{kv_\perp}{\omega}\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel}\right] \cos\psi \times$$
$$\times \left(\frac{\sin\psi - i\cos\psi}{\omega - kv_\parallel + \Omega_H} + \frac{\sin\psi + i\cos\psi}{\omega - kv_\parallel - \Omega_H}\right)\frac{v_\perp}{2}\,dp;$$
$$\varepsilon_{xz} = \sum \frac{4\pi e^2 N}{\omega} \int \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel}\left(\frac{\cos\psi + i\sin\psi}{\omega - kv_\parallel + \Omega_H} + \frac{\cos\psi - i\sin\psi}{\omega - kv_\parallel - \Omega_H}\right)\frac{v_\perp}{2}\,dp;$$
$$\varepsilon_{zx} = \sum \frac{4\pi e^2 N}{\omega} \int \left[\left(1 - \frac{kv_\parallel}{\omega}\right)\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} + \frac{kv_\perp}{\omega}\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel}\right] \cos\psi \frac{v_\parallel}{\omega - kv_\parallel}\,dp;$$
$$\varepsilon_{yz} = \sum \frac{4\pi e^2 N}{\omega} \int \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel}\left(\frac{\sin\psi - i\cos\psi}{\omega - kv_\parallel + \Omega_H} + \frac{\sin\psi + i\cos\psi}{\omega - kv_\parallel - \Omega_H}\right)\frac{v_\perp}{2}\,dp;$$
$$\varepsilon_{zy} = \sum \frac{4\pi e^2 N}{\omega} \int \left[\left(1 - \frac{kv_\parallel}{\omega}\right)\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} + \frac{kv_\perp}{\omega}\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel}\right] \sin\psi \frac{v_\parallel}{\omega - kv_\parallel}\,dp.$$

При интегрировании по t учитывалось, что $\operatorname{Im}\omega > 0$ и, следовательно, значение в (1.2) первообразной при верхнем пределе $t = \infty$ равно нулю. Рассматривая $\varepsilon_{ik}(\omega, \boldsymbol{k})$ при $\operatorname{Im}\omega < 0$ как аналитическое продолжение (1.5) в нижнюю полуплоскость, следует учитывать, что при переходе ω из верхней полуплоскости в нижнюю „поверхность“ интегрирования по dp должна деформироваться в области комплексных p таким образом, чтобы особенности подынтегральных выражений в (1.5) $\omega - kv_{\parallel} \pm \Omega_H = 0$, т. е.

$$\omega m - kp_{\parallel} \pm \Omega_H m = 0, \tag{1.6}$$

не пересекали эту поверхность. В цилиндрической системе координат $dp = p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel} d\psi$, и интегрирование можно, например, вести по действительным $p_{\perp}$ (в пределах от 0 до ∞) и ψ (от 0 до 2π), обходя соответствующим образом особенности (6) в комплексной плоскости $p_{\parallel}$ (пределы интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$).

Поскольку в нашей задаче предполагается, что невозмущенная функция распределения f_0 стационарна (не зависит от времени), нетрудно показать, что она не может зависеть и от угла ψ. Учитывая сказанное и интегрируя по ψ выражения (1.5) для ε_{ik}, получим окончательно:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 + \sum \frac{\pi}{2} \int \frac{\Omega_0^2}{\omega^2} \left[(\omega m - kp_{\parallel}) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} + kp_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \right] \times$$
$$\times \left(\frac{1}{\omega m - kp_{\parallel} + \Omega_H m} + \frac{1}{\omega m - kp_{\parallel} - \Omega_H m} \right) p_{\perp}^2 dp_{\perp} dp_{\parallel}; \tag{1.7}$$
$$\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = i \sum \frac{\pi}{2} \int \frac{\Omega_0^2}{\omega^2} \left[(\omega m - kp_{\parallel}) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} + kp_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \right] \times$$
$$\times \left(\frac{1}{\omega m - kp_{\parallel} + \Omega_H m} - \frac{1}{\omega m - kp_{\parallel} - \Omega_H m} \right) p_{\perp}^2 dp_{\perp} dp_{\parallel};$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 + \sum 2\pi \int \frac{\Omega_0^2}{\omega} \frac{mp_{\parallel} \partial f_0 / \partial p_{\parallel}}{\omega m - kp_{\parallel}} p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel}; \tag{1.8}$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0.$$

В соотношениях (6) $\Omega_0^2 = 4\pi e^2 N/m$.

Таким образом, в случае, когда $\boldsymbol{k} \parallel H_0$, дисперсионное уравнение (1.1) сводится к соотношению

$$\Delta = \begin{vmatrix} n^2 - \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & n^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0$$

и распадается на три уравнения

$$n^2 - \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy} = 0; \qquad \varepsilon_{zz} = 0 \qquad (n^2 \equiv c^2k^2/\omega^2). \tag{1.9}$$

С учетом (1.7) уравнения (1.9) можно записать в следующей форме*:

$$c^2k^2 - \omega^2 - \sum \pi \int \Omega_0^2 \frac{(\omega m - kp_{\parallel}) \partial f_0/\partial p_{\perp} + kp_{\perp} \partial f_0 / \partial p_{\parallel}}{\omega m - kp_{\parallel} \mp \Omega_H m} p_{\perp}^2 dp_{\perp} dp_{\parallel} = 0; \tag{1.10}$$

* Уравнение (1.10) в частном случае, когда $m = m_0 =$ const и распределение по скоростям — максвелловское в системе, движущейся вдоль магнитного поля со скоростью $v_{=}^{0}$ рассмотрено в статье [1].

$$1+\sum \frac{2\pi}{\omega}\int \Omega_0^2 \frac{mp_{\parallel}\, \partial f_0/\partial p_{\parallel}}{\omega m - kp_{\parallel}} p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel} = 0. \tag{1.11}$$

Уравнение (1.10) характеризует электромагнитные, а уравнение (1.11) — плазменные (продольные) волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только электромагнитных волн; условия неустойчивости относительно возмущений плазменного типа исследовались (в нерелятивистском приближении) в работах [7–9] и др.

Заметим, что уравнение (1.10) можно представить в несколько ином виде, проводя интегрирование по частям и, тем самым, избавляясь от производных от f_0 по $p_{\perp}$ и $p_{\parallel}$ *:

$$\begin{aligned} c^2k^2 - \omega^2 &+ \sum 2\pi \int \Omega_0^2 \frac{\omega m - kp_{\parallel}}{\omega m - kp_{\parallel} \mp \Omega_H m} f_0 p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel} + \\ &+ \sum \pi \int \Omega_0^2 \frac{k^2 - \omega^2 (m/p_{\parallel})\, \partial m/\partial p}{(\omega m - kp_{\parallel} \mp \Omega_H m)^2} f_0 p_{\perp}^3 dp_{\perp} dp_{\parallel} = 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь

$$k^2 - \omega^2 \frac{m}{p_{\parallel}} \frac{\partial m}{\partial p_{\parallel}} = \frac{1}{c^2}(c^2k^2 - \omega^2). \tag{1.13}$$

В случае, когда плазма находится в среде с показателем преломления $n_j(\omega)$, ее влияние на распространение электромагнитных волн можно учесть, вводя в уравнения (1.10) и (1.12) член $(1 - n_j^2)\,\omega^2$. (Этой средой, например, может быть плазма с равновесным (максвелловским) распределением по скоростям.)

2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В СЛУЧАЕ δ-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ПО ИМПУЛЬСАМ

Если дисперсия электронов по импульсам $p_{\perp}$ и $p_{\parallel}$ равна нулю, функция распределения имеет вид:

$$f_0(\mathbf{p})\, d\mathbf{p} = A\, \delta(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)\, \delta(p_{\perp} - p_{\perp}^0)\, d\mathbf{p}, \tag{2.1}$$

где множитель

$$A = 1/2\pi p_{\perp}^0$$

определяется условием нормировки

$$\int f_0(\mathbf{p})\, d\mathbf{p} = \int f_0(\mathbf{p})\, p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel} d\psi = 1.$$

Подставляя выражение (2.1) для f_0 в (1.12) и пренебрегая вкладом ионов в дисперсионное уравнение (что вполне допустимо для высокочастотных волн), получим **:

* При интегрировании по частям предполагается, что f_0 достаточно быстро стремится к нулю при стремлении $|p_{\parallel}|$ и $p_{\perp}$ к бесконечности вдоль действительной оси. При переходе от (1.10) к (1.12) следует также учитывать, что масса частиц $m = \sqrt{m_0^2 + c^{-2}p_{\parallel}^2 + c^{-2}p_{\perp}^2}$ зависит от $p_{\perp}$ и $p_{\parallel}$.

** Присутствие $n_j^2(\omega)$ в уравнении (2.2) указывает на то, что в (2.2) уже учтено влияние среды, в которой может находиться плазма.

$$c^2k^2-\omega^2 n_j^2+\Omega_0^2\,\frac{\omega-kv_\parallel^0}{\omega-kv_\parallel^0\mp\Omega_H}+\Omega^2\,\frac{\beta_\perp^2}{2}\,\frac{c^2k^2-\omega^2}{(\omega-kv_\parallel^0\mp\Omega_H)^2}=0, \tag{2.2}$$

где $\beta_\perp=v_\perp^0/c$, $v_\parallel^0$ и $v_\perp^0$ — составляющие скорости, соответствующие значениям импульсов $p_\parallel^0$ и $p_\perp^0$. Величины Ω_0 и Ω_H, входящие в (2.2), отвечают значениям массы электрона m при $p_\parallel=p_\parallel^0$ и $p_\perp=p_\perp^0$.

Уравнение (2.2) при $v^0=0$ переходит в дисперсионное соотношение, рассмотренное Гетманцевым и Рапопортом [2], а при $v_\perp^0=0$ и $n_j(\omega)=1$ — в уравнение, полученное Бейли (см., например, [10]).

Исследование неустойчивости плазмы сводится к отысканию корней уравнения (2.2), расположенных в верхней полуплоскости ω. Однако уравнение (2.2) четвертой степени относительно ω и общие выражения для частоты будут весьма громоздкими. Поэтому мы ограничимся отысканием условий неустойчивости при условии, что собственная частота плазмы Ω_0 достаточно мала.

Пусть

$$\omega=\Omega+\gamma, \tag{2.3}$$

где γ — поправка к частоте, стремящаяся к нулю вместе с Ω_0. Тогда при достаточно малых значениях γ уравнение (2.2) сведется к следующему:

$$c^2k^2-\Omega^2 n_j^2(\Omega)-\frac{d(\Omega^2 n_j^2)\,\gamma}{d\Omega}+$$
$$+\Omega_0^2\,\frac{\Omega-kv_\parallel^0+\gamma}{\Omega-kv_\parallel^0\mp\Omega_H+\gamma}+\Omega_0^2\,\frac{\beta_\perp^2}{2}\,\frac{c^2k^2-\Omega^2-2\Omega\gamma-\gamma^2}{(\Omega-kv_\parallel^0\mp\Omega_H+\gamma)^2}=0. \tag{2.4}$$

Действуя методом возмущений, примем за нулевое приближение для частоты ω (2.3) решение уравнения (2.4) при $\Omega_0^2=0$:

$$c^2k^2-\Omega^2 n_j^2(\Omega)=0. \tag{2.5}$$

При этом, очевидно, $\gamma\to 0$, если $\Omega_0^2\to 0$.

В области значений k, для которых

$$|\Omega-kv_\parallel^0\mp\Omega_H|\gg|\gamma|, \tag{2.6}$$

(2.4) переходит в уравнение, линейное по γ ($\gamma\ll\Omega$):

$$-\frac{d(\Omega^2 n_j^2)}{d\Omega}\gamma+\Omega_0^2\,\frac{\Omega-kv_\parallel^0+\gamma}{\Omega-kv_\parallel^0\mp\Omega_H}+\Omega_0^2\,\frac{\beta_\perp^2}{2}\,\frac{c^2k^2-\Omega^2-2\Omega\gamma}{(\Omega-kv_\parallel^0\mp\Omega_H)^2}=0. \tag{2.7}$$

Согласно (2.7), величина γ будет действительной при действительных k и система устойчивой относительно возмущений рассматриваемого типа.

В области значений k, для которых

$$|\Omega-kv_\parallel^0\mp\Omega_H|\ll|\gamma|, \tag{2.8}$$

уравнение (2.4) можно записать следующим образом:

$$-\frac{d(\Omega^2 n_j^2)}{d\Omega}\gamma+\Omega_0^2(1-\beta_\perp^2/2)+\Omega_0^2\,\frac{\Omega-kv_\parallel^0-\Omega\beta_\perp^2}{\gamma}+$$
$$+\Omega_0^2\,\frac{\beta_\perp^2}{2}\,\frac{c^2k^2-\Omega^2}{\gamma^2}=0. \tag{2.9}$$

Ниже предполагается, что в (2.9) $\Omega_0^2(1-\beta_\perp^2/2)$ можно пренебречь по сравнению с $\gamma\, d(\Omega^2 n_j^2)/d\Omega$.

Нетрудно видеть, что в случае (2.8) действительным k могут (при определенных условиях) соответствовать комплексные значения γ, со знаком мнимой части, отвечающим волнам, которые нарастают во времени. В самом деле, пусть

$$|2\gamma|\,|\Omega - kv_\parallel^0 - \Omega\beta_\perp^2| \gg \beta_\perp^2\,|c^2k^2-\Omega^2|. \qquad (2.10)$$

Тогда в (2.9) последним членом можно пренебречь, так что

$$\gamma^2 = \Omega_0^2\,\frac{\Omega - kv_\parallel^0 - \Omega\beta_\perp^2}{d(\Omega^2 n_j^2)/d\Omega} = \Omega_0^2\Omega\,\frac{1-\beta_\parallel n_j(\Omega)-\beta_\perp^2}{d(\Omega^2 n_j^2)/d\Omega}, \qquad (2.11)$$

где $\beta_\parallel = v_\parallel^0/c$. Однако в прозрачной среде (без учета пространственной дисперсии) $d(\Omega^2 n_j^2)/d\Omega > 0$ (см. [4], стр. 338), и γ^2 (2.11) становится отрицательным, а система — неустойчивой, если

$$\Omega - kv_\parallel^0 < \Omega\beta_\perp^2. \qquad (2.12)$$

Из (2.12) следует, что при $\beta_\perp^2=0$ неустойчивость возникает только при „сверхсветовом" движении (т. е. в области аномального эффекта Допплера для электронов системы: $kv_\parallel^0 > \Omega$ или $n_j(\Omega)\beta_\parallel > 1$, как это указывалось в статьях [1,2]). Однако в случае, когда $\beta_\perp^2 \neq 0$, область неустойчивости увеличивается и включает в себя (наряду с интервалом k, отвечающим аномальному эффекту Допплера) область нормального допплер-эффекта:

$$0 < \Omega - kv_\parallel^0 < \Omega\beta_\perp^2.$$

Заметим, что при $n_j(\Omega) = ck/\Omega = 1$ критерий неустойчивости (2.12) сводится к неравенству

$$\beta_\parallel > 1-\beta_\perp^2, \qquad (2.13)$$

которое возможно только при условии $v_\parallel^0 \neq 0$ и $v_\perp^0 \neq 0$.

В случае

$$|2\gamma|\,|\Omega - kv_\parallel^0 - \Omega\beta_\perp^2| \ll \beta_\perp^2\,|c^2k^2-\Omega^2|, \qquad (2.14)$$

когда предпоследний член в (2.9) несуществен,

$$\gamma^3 = \Omega_0^2\,\frac{\beta_\perp^2}{2}\,\frac{c^2k^2-\Omega^2}{d(\Omega^2 n_j^2)/d\Omega} = \Omega_0^2\,\frac{\beta_\perp^2}{2}\,\frac{\Omega^2[n_j^2(\Omega)-1]}{d(\Omega^2 n_j^2)/d\Omega} \qquad (2.15)$$

и неустойчивость имеет место как при „сверхсветовом", так и при „досветовом" движении электронов вдоль поля H_0. Для реализации этой неустойчивости необходимо, чтобы $\beta_\perp^2$ было отлично от нуля*.

Условия (2.10), (2.14), при которых применимы формулы (2.11), (2.15), можно представить в несколько ином виде, если учесть явные выражения (2.11) и (2.15) для поправки к частоте γ. Тогда оказывается, что (2.11) и (2.15) соответственно справедливы при условии, что

$$\frac{4\Omega_0^2\,|1-\beta_\parallel n_j(\Omega)-\beta_\perp^2|^3}{\Omega\, d(\Omega^2 n_j^2)/d\Omega} \gtrless \beta_\perp^4\,[n_j^2(\Omega)-1]^2, \qquad (2.16)$$

если, разумеется, при этом выполнено неравенство (2.8).

* Последнее обстоятельство и является тем существенно новым моментом, на который указал Гапонов [3] при рассмотрении неустойчивости в линии передачи, возбуждаемой непрямолинейным электронным потоком.

Вторая группа решений уравнения (2.4), стремящихся к нулю при $\Omega_0^2 \to 0$, может быть получена, если в качестве нулевого приближения для ω взять решение уравнения

$$\Omega - kv_{\parallel}^0 \mp \Omega_H = 0. \tag{2.17}$$

Тогда в случае

$$|c^2k^2 - \Omega^2 n_j^2(\Omega)| \ll |\gamma d(\Omega^2 n_j^2)/d\Omega| \tag{2.18}$$

(2.4) фактически сводится к уравнению (2.9), которое было рассмотрено выше. Однако при выполнении неравенства

$$|c^2k^2 - \Omega^2 n_j^2(\Omega)| \gg |\gamma\, d(\Omega^2 n_j^2)/d\Omega|, \tag{2.19}$$

обратного (2.18), уравнение (2.4) примет вид:

$$c^2k^2 - \Omega^2 n_j^2(\Omega) + \Omega_0^2(1 - \beta_\perp^2/2) + \Omega_0^2 \frac{\Omega - kv_{\parallel}^0 - \beta_\perp^2 \Omega}{\gamma} + \Omega_0^2 \frac{\beta_\perp^2}{2} \frac{c^2k^2 - \Omega^2}{\gamma^2} = 0. \tag{2.20}$$

Его решения существенно отличаются от изученных ранее. Так, при условии (2.10)

$$\gamma = -\frac{\Omega_0^2(\Omega - kv_{\parallel}^0 - \beta_\perp^2\Omega)}{c^2k^2 - \Omega^2 n_j^2(\Omega) + \Omega_0^2(1 - \beta_\perp^2/2)} \simeq -\frac{\Omega_0^2(\Omega - kv_{\parallel}^0 - \beta_\perp^2\Omega)}{c^2k^2 - \Omega^2 n_j^2(\Omega)} \tag{2.21}$$

и действительна при действительных значениях k. При выполнении обратного неравенства (2.14)

$$\gamma^2 = -\frac{\Omega_0^2\beta_\perp^2(c^2k^2 - \Omega^2)}{2[c^2k^2 - \Omega^2 n_j^2(\Omega) + \Omega_0^2(1 - \beta_\perp^2/2)]} \simeq -\frac{\Omega_0^2\beta_\perp^2(c^2k^2 - \Omega^2)}{2[c^2k^2 - \Omega^2 n_j^2(\Omega)]}. \tag{2.22}$$

Последнее равенство в (2.21), (2.22) справедливо, если

$$|c^2k^2 - \Omega^2 n_j^2(\Omega)| \gg \Omega_0^2(1 - \beta_\perp^2/2).$$

Из (2.22) следует, что $\gamma^2 < 0$ и система неустойчива, когда

$$\frac{c^2k^2/\Omega^2 - 1}{n_j^2(\Omega) - 1} > 1. \tag{2.23}$$

Заметим, что критерии (2.10) и (2.14) применимости соотношений (2.21) и (2.22) можно записать несколько иначе, подставив в (2.10) и (2.14) явные выражения для γ (2.21), (2.22). Тогда получим, что (2.21) и (2.22) справедливы соответственно при условии

$$\frac{2\Omega_0^2|\Omega - kv_{\parallel}^0 - \Omega\beta_\perp^2|^2}{|c^2k^2 - \Omega^2 n_j^2(\Omega)|} \begin{matrix}\gg \\ \ll\end{matrix} \beta_\perp^2 |c^2k^2 - \Omega^2|. \tag{2.24}$$

Дисперсионные соотношения (1.12), (2.2) получены на основе релятивистского кинетического уравнения (т. е. с учетом зависимости массы электронов от скорости). Ясно, что учет релятивистских эффектов необходим, если скорость электронов плазмы составляет заметную часть скорости света. Однако и при малых скоростях зависимость m от $|p|$ нельзя не учитывать, если последний член в уравнениях

(1.12) и (2.2) сравним по величине с остальными (или больше их) и если $c^2k^2/\omega^2 \lesssim 1$. Учет зависимости массы от скорости, в частности, приводит к тому, что при $n_j^2(\Omega) = 1$ поправка к частоте γ пропорциональна Ω_0, а не $\Omega_0^{2/3}$, как это имеет место при достаточно большой разности $n_j^2(\Omega) - 1$ и не слишком малом отношении $\beta_\perp = v_\perp^0/c$ (см. формулы (2.11) и (2.15))*.

Напротив, зависимость массы от скорости не скажется на величине γ в случае, когда $\beta_\perp^2$ в γ можно положить равным нулю (см. 2.11), (2.21)), или при условии, если $c^2k^2/\omega^2 \simeq c^2k^2/\Omega^2 \gg 1$ (см. (2.15), (2.22)). В последнем легко убедиться, принимая во внимание, что разность $c^2k^2 - \Omega^2$ в (2.15), (2.22) определяется соотношением (1.13).

В заключение этого раздела остановимся еще на одном вопросе, связанным с интерпретацией выражения (2.11) для поправки γ в отсутствие второй среды ($n_j(\Omega) = 1$). Согласно (2.13), при этом неустойчивость системы в интервале k, определяемом неравенством (2.8), возникает, если $\beta_\parallel > 1 - \beta_\perp^2$, т. е. если система отсчета достаточно быстро движется относительно среды (плазмы). С другой стороны, ясно, что состояние системы (ее устойчивость или неустойчивость) не может зависеть от ее движения относительно некоторой системы отсчета, если распространение волн определяется релятивистским дисперсионным уравнением.

Тот факт, что уравнение (2.2) и соответствующие выражения для γ являются релятивистскими, легко проверить, если учесть, что при переходе из системы отсчета K в систему K', движущуюся относительно первой со скоростью $v_\parallel^0$, показатель преломления $n = ck/\omega$ для волны, распространяющейся в плазме, должен преобразовываться в $n' = ck'/\omega'$ по формуле Лауэ ([12], стр. 290):

$$n = \frac{n' + v_\parallel^0/c}{1 + v_\parallel^0 n'/c}. \tag{2.25}$$

Объединяя (2.25) с формулой Допплера

$$\omega' = \frac{\omega\sqrt{1 - (v_\parallel^0/c)^2}}{1 + v_\parallel^0 n'/c}, \tag{2.26}$$

получим, что при переходе от системы K к системе K'

$$(n^2 - 1)\,\omega^2 = (n'^2 - 1)\,\omega'^2$$

или

$$c^2k^2 - \omega^2 = c^2k'^2 - \omega'^2. \tag{2.27}$$

Из (2.2) следует, что в системе K

$$c^2k^2 - \omega^2 = -\frac{2\Omega_0^2(\omega - kv_\parallel^0)(\omega - kv_\parallel^0 \mp \Omega_H)}{2(\omega - kv_\parallel^0 \mp \Omega_H)^2 + \Omega_0^2\beta_\perp^2}, \tag{2.28}$$

а в системе K'

$$c^2k'^2 - \omega'^2 = -\frac{2\Omega_0'^2\omega'(\omega' \mp \Omega_H')}{2(\omega' \mp \Omega_H')^2 + \Omega_0'^2\beta_\perp'^2}. \tag{2.29}$$

---

* Приведенные соображения послужили основанием для заключения о необходимости учета релятивистского характера движения электронов в теории усилителей и генераторов СВЧ с непрямолинейным электронным потоком (см. [11]).

Однако

$$\Omega_0' = \Omega_0, \quad \Omega_H' = \Omega_H / \sqrt{1 - \beta_\parallel^2}; \qquad \beta_\perp' = \beta_\perp / \sqrt{1 - \beta_\parallel^2},$$

$$\omega - k v_\parallel^0 = \omega' \sqrt{1 - \beta_\parallel^2},$$

и, следовательно, выражения (2.28), (2.29) удовлетворяют соотношению (2.27).

При совпадении волн с $\mathrm{Im}\, k = 0$ и $\mathrm{Im}\, \omega \neq 0$ из интервала

$$|\Omega - k v_\parallel^0 \mp \Omega_H| \ll |\gamma| \tag{2.30}$$

(в системе K) и волн с $\mathrm{Im}\, k' = 0$, $\mathrm{Im}\, \omega' = 0$ из интервала

$$|\Omega' \mp \Omega_H'| \ll |\gamma'| \tag{2.31}$$

(в системе K') имел бы место парадокс, который заключается в том, что пакет, составленный из одних и тех же волн с действительными значениями k и k', нарастает во времени с точки зрения системы K (при движении плазмы со скоростью $\beta_\parallel > 1 - \beta_\perp^2$ относительно K') и остается ограниченным во времени с точки зрения системы K' (которая неподвижна относительно плазмы). Однако в интервалах (2.30) и (2.31) волны — разные, так как, согласно (2.25) и (2.26), действительным k и комплексным ω в системе K соответствуют комплексные k' и ω' в системе K' (и, наоборот, действительным k' и ω' в системе K' отвечают действительные значения k и ω в системе K). В то же время волновой пакет, нарастающий в системе K, будет нарастать и в системе K', так как в этой системе в разложение поля в интеграл Фурье войдут компоненты k', отвечающие нарастающим волнам (2.22), (2.23).

Автор признателен А. В. Гапонову, Г. Г. Гетманцеву и В. О. Рапопорту за всестороннее обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1 В. В. Железняков, Изв высш. уч. зав —Радиофизика, 2, 14 (1959).
2 Г. Г. Гетманцев, В. О. Рапопорт, ЖЭТФ (в печати).
3 А. В. Гапонов, Изв. высш. уч зав —Радиофизика, 2, 443 (1959); 2, 450 (1959).
4. Л. Д Ландау, Е М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957.
5. В. Д. Шафранов, Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 4, изд. АН СССР, М, 1958, стр 416.
6 Р З. Сагдеев, В Д. Шафранов, Труды II Международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958), М., 1959, стр. 202.
7. D. Bohm, E. P Gross, Phys. Rev., 75, 1864 (1949).
8. А И Ахиезер, Я Б Файнберг, ЖЭТФ, 21, 1262 (1951).
9. В. Л. Гинзбург, В В. Железняков, Астроном. ж, 35, 694 (1958).
10. R. Q. Twiss, Phys. Rev, 84, 448 (1951).
11. А В. Гапонов, Изв высш. уч зав.—Радиофизика, 2, 836 (1959).
12 Р. Беккер, Электронная теория, ОНТИ, Л —М, 1936.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
12 ноября 1959 г.