ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том III, № 1 РАДИОФИЗИКА 1960

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

Л. В. Родыгин

Для системы уравнений первого порядка, содержащей малый параметр при части производных, указываются достаточные условия существования инвариантного многообразия типа тора. Доказательство проводится методом отображений в пространстве кривых. Результаты представляют интерес для теории колебаний и качественной теории дифференциальных уравнений.

В настоящей работе рассматривается система вида

$$\varepsilon\, dx_i/dt = f_i\,(x_i,\ y_j,\ \varepsilon);$$
$$dy_j/dt = g_j\,(x_i,\ y_j,\ \varepsilon)$$
$$(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, l),$$

где ε — малый положительный параметр, в случае, когда „быстрая" система $dx_i/d\tau = f_i\,(x_i,\ y_j,\ 0)$, рассматриваемая при постоянных y_j, имеет грубое периодическое решение. Этот случай представляет большой интерес для приложений, так как ряд задач теории колебаний может быть сведен к системам такого вида. Для описания некоторых из них использовался прием, аналогичный методу усреднения [1]; однако его законность и границы приложимости оставались невыясненными. Результаты статьи [8] и настоящей работы применительно к системам такого вида дают достаточные условия, при которых усредненные уравнения верно описывают ряд черт качественной структуры фазового пространства и дают главный член асимптотического разложения решения по степеням ε.

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Запишем рассматриваемую систему в векторном виде:

$$\varepsilon\, dx/dt = f\,(x,\ y,\ \varepsilon);\quad dy/dt = g\,(x,\ y,\ \varepsilon), \tag{1}$$

где x и f — k-мерные, y и g — l-мерные действительные векторы; $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Пусть в пространстве переменных y существует такая область Γ, что при любом фиксированном $y \in \Gamma$ система

$$dx/d\tau = f\,(x,\ y,\ 0) \tag{2}$$

имеет периодическое решение $x^*\,(\tau,\ y)$, являющееся грубым. Последнее означает, что период решения $T\,(y)$ ограничен некоторыми постоянными: $0 < T_1 \leqslant T\,(y) \leqslant T_2$, а система в вариациях

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\partial f\,[x^*\,(\tau,\ y),\ y,\ 0]}{\partial x}\cdot \xi \tag{3}$$

имеет характеристическое уравнение, k' корней которого $\mu_i\,(y)$ (i —

$=1, \ldots, k')$ по модулю меньше единицы и $k''=k-k'-1$ корней $\mu_i(y)$ $(i=k'+1, \ldots, k-1)$ по модулю больше единицы.

Из наглядных соображений [1,7] следует, что изменение переменной y в Γ при достаточно малых ε приближенно управляется системой

$$\frac{d\bar{y}}{dt}=\frac{1}{T(\bar{y})}\int\limits_0^{T(\bar{y})} g\,[x^*(\vartheta, \bar{y}), \bar{y}, 0]\; d\vartheta=\bar{g}(\bar{y}), \tag{4}$$

и, таким образом, у системы (1) должны существовать решения, траектории которых близки к поверхностям $x^*[\vartheta, \bar{y}(t)]\times\bar{y}(t)$. Для любой траектории системы (1) на конечном интервале времени и для невырожденных положений равновесия этот результат приведен в статье [8]. В настоящей работе рассматривается случай периодического решения $y^*(t)$ системы (4). В этом случае поверхность $x^*[\vartheta, y^*(t)]\times y^*(t)$ является тором.

Теорема. Пусть $y^*(t)$ — периодическое решение системы (1), обладающее по t периодом Θ, грубое, причем система в вариациях

$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{\partial\bar{g}}{\partial y}\,[y^*(t)]\,\eta \tag{5}$$

имеет характеристическое уравнение, l' корней которого ν_j $(j=1, \ldots, l')$ по модулю меньше единицы и $l''=l-l'-1$ корней ν_j $(i=l'+1, \ldots, l-1)$ по модулю больше единицы. Пусть в некоторой окрестности тора $T_0=x^*[\vartheta, y^*(t)]\times y^*(t)$ функции f и g обладают ограниченными третьими производными. Тогда при достаточно малых ε:

1. система (1) имеет инвариантное многообразие T_ε, гомеоморфное тору T_0 и стремящееся к нему при $\varepsilon\to 0$;

2. можно указать такие m_1, m_2 и σ, что в σ-окрестности тора T_ε определены пересекающиеся по T_ε многообразия S_ε^- и S_ε^+ размерностей $k'+l'+2$ и $k''+l''+2$ со следующими свойствами:

а) если $[x(0), y(0)]\in S_\varepsilon^-$ (соответственно S_ε^+), то при всех $t>0$ $(t<0)$ $\rho\{[x(t), y(t)], T_\varepsilon\}<m_1\rho\{[x(0), y(0)], T_\varepsilon\}\exp m_2|t|$;

б) если $[x(0), y(0)]$ не $\in S_\varepsilon^-$ (соответственно S_ε^+), то для некоторого $\bar{t}>0$ $(\bar{t}<0)$ $\rho\{[x(\bar{t}), y(\bar{t})], T_\varepsilon\}>\sigma$. Другими словами, по S_ε^- траектории приближаются к T_ε с увеличением t, по S_ε^+ — приближаются к T_ε с уменьшением t. Все остальные траектории выходят из σ-окрестности T_ε в обе стороны по t.

2. ВВЕДЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ КООРДИНАТ

В работах [2,5] применяется замена переменных $\xi=\dfrac{\partial x^*}{\partial\tau}u_0+A_1(\tau, y)\,u$, посредством которой система в вариациях (3) может быть приведена к виду: $du_0/d\tau=0$; $du/d\tau=P_1(\tau, y)\,u$ (фаза φ и „поперечные" координаты u разделяются). Мы будем пользоваться функциями $A(\varphi, y)=A_1[\varphi T(y), y]$, $P_2(\varphi, y)=P_1[\varphi T(y), y]$ и $X(\varphi, y)=x^*[\varphi T(y), y]$, обладающими по φ единичным периодом. Перейдя в (1) к быстрому времени $\tau=t/\varepsilon$:

$$dx/d\tau=f(x, y, \varepsilon);\quad dy/d\tau=\varepsilon\, g(x, y, \varepsilon), \tag{1a}$$

введем вместо x новые координаты φ и u $(u_1, \ldots, u_{k-1})$ посредством замены переменных $x=X(\varphi, y)+A(\varphi, y)\,u$. Первое из уравнений (1a) переходит при этом в уравнение

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}+\frac{\partial A}{\partial \varphi}\,u\right)\frac{d\varphi}{d\tau}+A\frac{du}{d\tau}=f\,[X+Au,\ y,\ \varepsilon]-\varepsilon\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial y}\,u\right)g,$$

которое с использованием тождественных соотношений

$$\frac{1}{T(y)}\,\frac{\partial X}{\partial \varphi}=f\,[X,\ y,\ 0];\quad \frac{1}{T(y)}\,\frac{\partial A}{\partial \varphi}+AP_2=\frac{\partial f}{\partial x}\,A \tag{6}$$

можно представить в виде:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}+\frac{\partial A}{\partial \varphi}\,u\right)\left[\frac{d\varphi}{d\tau}-\frac{1}{T(y)}\right]+A\left[\frac{du}{d\tau}-P_2(\varphi,\ y)\,u\right]=f\,[X+Au,y,\varepsilon]-$$

$$-f\,[X,y,\ 0]-\frac{\partial f}{\partial x}\,[X,\ y,\ 0]\ Au-\varepsilon\left[\frac{\partial X}{\partial y}\,(\varphi,\ y)+\frac{\partial A}{\partial y}\,(\varphi,\ y)\ u\right]\times \tag{7}$$

$$\times\, g\,[X+Au,\ y,\ \varepsilon].$$

Если рассматривать (7) как систему уравнений относительно $d\varphi/d\tau-1/T(y)$ и $du/d\tau-P_2(\varphi,\ y)\,u$, ее определитель при $u=0$ отличен от нуля. По непрерывности он отличен от нуля в некоторой окрестности $|u|<\bar{u}$, не зависящей от ε, и, таким образом, при $|u|<\bar{u}$ система (1а) может быть разрешена и записана в виде:

$$\begin{gathered}du/d\tau=P_2u+p_1\,(\varphi,\ u,\ y,\ \varepsilon);\quad d\varphi/d\tau=1/T(y)+r_1\,(\varphi,\ u,\ y,\ \varepsilon);\\ dy/d\tau=\varepsilon\, g\,[X+Au,\ y,\ \varepsilon].\end{gathered} \tag{8}$$

В полученной системе соотношением

$$y=y_1+\varepsilon\omega\,(\varphi,\ y_1)\,u+\varepsilon\,T(y_1)\int_0^{\varphi}\{g\,[X\,(\vartheta,\ y_1),\ y_1,\ 0]-\bar{g}(y_1)\}\,d\vartheta \tag{9}$$

вместо y введем новую переменную y_1. Через $\omega\,(\varphi,\ y)$ здесь обозначено периодическое решение матричного уравнения

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varphi}+\omega\,T(y)\,P_2\,(\varphi,\ y)=T(y)\,\frac{\partial g}{\partial y}\,[X\,(\varphi,\ y),\ y,\ 0]\,A\,(\varphi,\ y).$$

Соотношение (9) обобщает метод, примененный в [2], на случай наличия „быстрых“ переменных u.

После подстановки (9) в (8) и разрешения относительно $dy_1/d\tau$ получается система

$$\begin{gathered}du/d\tau=P_2\,(\varphi,\ y_1)\,u+p_2;\quad d\varphi/d\tau=1/T\,(y_1)+r_2;\\ dy_1/d\tau=\varepsilon\,\{\bar{g}\,(y_1)+q_2\},\end{gathered} \tag{10}$$

правые части которой явно не содержат τ. Кроме того, φ при достаточно малых ε и u является возрастающей функцией τ, и ее естественно принять в качестве новой независимой переменной:

$$\begin{gathered}du/d\varphi=T\,(y_1)\,P_2\,(\varphi,\ y_1)\,u+p_3\,(\varphi,\ u,\ y_1,\ \varepsilon);\\ dy_1/d\varphi=\varepsilon\,\{T\,(y_1)\,\bar{g}\,(y_1)+q_3\}.\end{gathered} \tag{11}$$

В переменных y_1 также нужно произвести разделение фазы и „поперечных“ координат. При этом в качестве исходной следует взять такую матрицу $B_1\,(t)$, что замена $\eta=(dy^*/dt)\,v_0+B_1v$ приведет систему (5) к виду: $dv_0/dt=0$; $dv/dt=Q_1\,(t)\,v$. В связи с тем, что в систе-

ме (11) независимой переменной является не t, а φ, матрица $B_1(t)$ должна быть видоизменена. Прежде всего введем новую независимую переменную χ согласно уравнению $d\chi/dt = 1/JT[y^*(t)]$, где $J = \int_0^\Theta dt/T[y^*(t)]$, и обозначим

$$Y(\chi) = y^*[t(\chi)], \quad B(\chi) = B_1[t(\chi)], \quad Q(\chi) = T[Y(\chi)]\, Q_1[t(\chi)],$$
$$P(\varphi, \chi) = T[Y(\chi)]\, P_2[\varphi, Y(\chi)].$$

Пусть далее $\Omega(\chi)$ — периодическое решение матричного уравнения

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \chi} + J\Omega Q = \frac{1}{T[Y(\chi)]} \frac{dT}{dy}[Y(\chi)]\, B(\chi).$$

Легко проверить, что Y, B, Q, P и Ω обладают по χ единичным периодом и удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{1}{J}\frac{dY}{d\chi} = T(Y)\,\bar{g}(Y); \quad \frac{1}{J}\frac{dB}{d\chi} + BQ = T\frac{d\bar{g}}{dy} B;$$
$$\frac{1}{J}\frac{d}{d\chi}\left[\frac{dY}{d\chi}\Omega\right] + \frac{dY}{d\chi}\Omega Q = \frac{d}{dy}\cdot[T\bar{g}]\frac{dY}{d\chi}\Omega + \bar{g}\frac{dT}{dy} B. \tag{12}$$

Введем теперь вместо y_1 переменные ψ и v $(v_1, \ldots, v_{l-1})$ согласно формуле $y_1 = Y(\psi) + \{B(\psi) + (dY/d\psi)\Omega\}\, v$. В результате дифференцирования и использования соотношений (12) из второго уравнения системы (11) получается система

$$\left[\frac{dY}{d\psi} + \frac{d}{d\psi}\left(B + \frac{dY}{d\psi}\Omega\right) v\right]\left(\frac{d\psi}{d\varphi} - \frac{\varepsilon}{J}\right) +$$
$$+ \left(B + \frac{dY}{d\psi}\Omega\right)\left(\frac{dv}{d\varphi} - \varepsilon Qv\right) = \varepsilon q_4(\varphi, u, \psi, v, \varepsilon), \tag{13}$$

где

$$q_4 = q_3(\varphi, u, y_1, \varepsilon) + T(y_1)\,\bar{g}(y_1) - T(Y)\,\bar{g}(Y) - \frac{\partial T\bar{g}}{\partial y}(y_1 - Y);$$
$$y_1 = Y + \left(B + \frac{dY}{d\psi}\Omega\right) v.$$

В некоторой окрестности $|v| < \bar{v}$ она имеет отличный от нуля определитель и может быть разрешена относительно переменных $d\psi/d\varphi - \varepsilon/J$ и $dv/d\varphi - \varepsilon Qv$. Таким образом, система (11) при $|v| < \bar{v}$ может быть приведена к виду:

$$du/d\varphi = P(\varphi, \psi)\, u + p_5; \quad dv/d\varphi = \varepsilon[Q(\psi) + q_5];$$
$$d\psi/d\varphi = \varepsilon[1/J + r_5]. \tag{14}$$

Перечислим свойства правых частей системы (14). Функция $p_5(\varphi, \psi, u, v, \varepsilon)$ периодична по φ и ψ с периодом 1 и удовлетворяет неравенствам

$$|p_5(\varphi, \psi, 0, 0, \varepsilon)| < \zeta(\varepsilon);$$
$$|p_5(\varphi, \psi', u', v', \varepsilon) - p_5(\varphi, \psi'', u'', v'', \varepsilon)| < \tag{15}$$
$$< \lambda(\varepsilon, \delta)\,(|\psi' - \psi''| + |u' - u''| + |v' - v''|).$$

Здесь и в дальнейшем ζ и λ — такие функции, что при $\varepsilon \to 0$ и $\delta = \max(|u'|, |u''|, |v'|, |v''|) \to 0$ $\zeta \to 0$ и $\lambda \to 0$. Свойства функций q_5 и r_5 те же, что и функции p_5. Матрицы $P(\varphi, \psi)$ и $Q(\psi)$ обладают по φ и ψ единичными периодами и удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} |P(\varphi, \psi') - P(\varphi, \psi'')| < \Lambda |\psi' - \psi''|; \\ |Q(\psi') - Q(\psi'')| < \Lambda |\psi' - \psi''|. \end{gathered} \tag{16}$$

Далее, если через $U(\varphi, \psi)$ и $V(\psi)$ обозначены фундаментальные нормированные матрицы решений систем $\partial U/\partial \varphi = P(\varphi, \psi)\, U$ и $dV/d\psi = JQ(\psi)\, V$, собственные значения матриц $U(1, \psi)$ и $V(1)$ равны соответственно $\mu_i\, [Y(\psi)]$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ и ν_j $(j = 1, \ldots, l-1)$. Наконец, для матрицы $U(1, \psi)$ можно найти такое натуральное число n, что линейное отображение с матрицей $U(n, \psi) = U^n(1, \psi)$ уменьшает (увеличивает) длину любого вектора из инвариантного подпространства, соответствующего собственным значениям, по модулю меньшим (большим) единицы. При отсутствии кратных собственных значений можно положить $n = 1$.

3. ПЕРЕХОД К ТОЧЕЧНОМУ ОТОБРАЖЕНИЮ

Неравенства $0 \leqslant \psi < 1$, $|u| < \bar{u}$ и $|v| < \bar{v}$ при каждом значении $\varphi = \varphi_0$ определяют некоторое сечение $\Sigma(\varphi_0)$ окрестности тора T_0. Каждая точка сечения $\Sigma(\varphi_0)$, двигаясь по траекториям системы (14), либо выходит из сечения $\Sigma(\varphi)$ при $\varphi < \varphi_0 + n$, либо при $\varphi = \varphi_0 + n$ вновь пересекает сечение $\Sigma(\varphi_0)$ $(\Sigma(\varphi_0 + n) = \Sigma(\varphi_0))$. Таким образом посредством траекторий системы (14) определено отображение сечения $\Sigma(\varphi_0)$ на себя, которое удобно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered} u_n = U(n, \psi_0)\, u_0 + p_6; \quad v_n = [E + \varepsilon n Q(\psi_0)]\, v_0 + \varepsilon q_6; \\ \psi_n = \psi_0 + \varepsilon n J + \varepsilon r_6. \end{gathered} \tag{17}$$

Для отображения (17) будет доказано существование и единственность следующих инвариантных многообразий: 1) замкнутой кривой l_ε, стремящейся при $\varepsilon \to 0$ к кривой $\varphi = \varphi_0$ на торе T_0; 2) пересекающихся по l_ε локальных подпространств s_ε^- и s_ε^+ размерностей $k' + l' + 1$ и $k'' + l'' + 1$, таких, что точки s_ε^- приближаются к l_ε при повторении отображения (17), а точки s_ε^+ приближаются к l_ε при повторении обратного к (17) отображения.

Так как в области единственности инварианты n-кратного отображения являются инвариантами однократного отображения (из $l_n = l_0$ следует, что $l_{n+1} = l_1$, т. е. l_1 — тоже инвариант n-кратного отображения; в силу единственности $l_1 = l_0$), то, проводя через l_ε, s_ε^- и s_ε^+ траектории системы (14) на интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant n$, получим инвариантные многообразия T_ε, S_ε^- и S_ε^+, удовлетворяющие условиям теоремы.

Прежде всего покажем, что система

$$dv/d\psi = JQ(\psi)\, v \tag{18}$$

может быть посредством действительного преобразования $v'(\psi) = L(\psi)\, v(\psi)$ приведена к виду $dv'/d\psi = Q_0 v'$. Здесь $L(\psi)$ — непрерывно дифференцируемая матрица, обладающая по ψ периодом 2, а

$$Q_0 = \begin{vmatrix} Q_- & \\ & Q_+ \end{vmatrix} = LJQL^{-1} + (dL/d\psi)\, L^{-1},$$

где Q_- и Q_+ — постоянные матрицы с собственными значениями

ν_j $(j = 1, \ldots, l')$ и ν_j $(j = l' + 1, \ldots, l - 1)$. Для этого построим сначала $L_1(\psi) = \exp[(\psi/2) \ln V(2)] V^{-1}(\psi)$. Кратность действительных отрицательных собственных значений матрицы $V(2)$ четна, поэтому $\ln V(2)$ и $L_1(\psi)$ действительны. Если теперь K — такая матрица, что $K \ln V(2) K^{-1} = 2Q_0$ квазидиагональна, искомое преобразование осуществляется матрицами $L(\psi) = KL_1(\psi)$ и $\overline{L}(\psi) = KL_1(\psi + 1)$.

Далее, в некотором базисе преобразование

$$u_n = U(n, \psi) u_0 \tag{19}$$

принимает вид $u_n' = U_0 u_0'$; здесь $U_0 = \begin{vmatrix} U_- & \\ & U_+ \end{vmatrix} = M(\psi) U(n, \psi) M^{-1}(\psi)$, где U_- и U_+ — матрицы с собственными значениями $\mu_i(\psi)$ $(i=1, \ldots, k')$ и $\mu_i(\psi)$ $(i = k' + 1, \ldots, k - 1)$. Матрица перехода к базису $M(\psi)$ удовлетворяет условию

$$|M(\psi') - M(\psi'')| \leqslant \Lambda |\psi' - \psi''|$$

и, вообще говоря, обладает по ψ периодом 2.

Теперь заметим, что отображение (17) допускает представление

$$\Delta v/\Delta\psi = JQ(\psi_0) v_0 + \ldots, \quad u_n = U(n, \psi_0) u_0 + \ldots,$$

и (по аналогии с (18) и (19)) в результате замены переменных

$$u_\alpha = M^{-1}(\psi_\alpha) \begin{vmatrix} u_\alpha^- \\ u_\alpha^+ \end{vmatrix}; \quad v_\alpha = L^{-1}(\psi_\alpha) \begin{vmatrix} v_\alpha^- \\ v_\alpha^+ \end{vmatrix} \quad (\alpha = 0, n) \tag{20}$$

должно происходить распадение главной (линейной) части отображения (17) на отображения по подпространствам с собственными значениями, большими и меньшими единицы по модулю. Действительно, подставляя (20) и разрешая получившуюся систему относительно u_n^-, u_n^+, v_n^-, v_n^+ и ψ_n, имеем:

$$\begin{aligned}
\psi_n &= \psi_0 + \varepsilon n/J + \varepsilon r(u_0^-, u_0^+, v_0^-, v_0^+, \psi_0, \varepsilon);\\
u_n^- &= U_-(\psi_0) u_0^- + p_-(u_0^-, u_0^+, v_0^-, v_0^+, \psi_0, \varepsilon);\\
u_n^+ &= U_+(\psi_0) u_0^+ + p_+(u_0^-, u_0^+, v_0^-, v_0^+, \psi_0, \varepsilon);\\
v_n^- &= [E + \varepsilon Q_-] v_0^- + \varepsilon q_-(u_0^-, u_0^+, v_0^-, v_0^+, \psi_0, \varepsilon);\\
v_n^+ &= [E + \varepsilon Q_+] v_0^+ + \varepsilon q_+(u_0^-, u_0^+, v_0^-, v_0^+, \psi_0, \varepsilon).
\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь свойства p_-, p_+, q_-, q_+ и r аналогичны свойствам функции p_5.

Правые части и инвариантные многообразия отображения (21) имеют по ψ период 2. Однако соответствующие инвариантные многообразия отображения (17) обладают по ψ единичным периодом. Для доказательства в отображении (17), сдвинутом на $\Delta\psi = 1$, произведем замену переменных

$$\begin{aligned}
u_\alpha(\psi_\alpha + 1) &= M^{-1}(\psi_\alpha) \begin{vmatrix} \tilde{u}_\alpha^-(\psi_\alpha + 1) \\ \tilde{u}_\alpha^+(\psi_\alpha + 1) \end{vmatrix};\\
v_\alpha(\psi_\alpha + 1) &= L^{-1}(\psi_\alpha) \begin{vmatrix} \tilde{v}_\alpha^-(\psi_\alpha + 1) \\ \tilde{v}_\alpha^+(\psi_\alpha + 1) \end{vmatrix}\\
&(\alpha = 0, n).
\end{aligned} \tag{20a}$$

В результате получим отображение, совпадающее с (21); в силу единственности совпадают и соответствующие инвариантные многообразия.

4. ОТОБРАЖЕНИЕ КРИВЫХ*

1. Применим к каждой точке некоторой кривой $l\{u^- = F_-(\psi), u^+ = F_+(\psi), v^- = G_-(\psi), v^+ = G_+(\psi)\}$ отображение (21). Она перейдет в кривую $\bar{l}\{\bar{u}^- = \bar{F}_-(\psi^*), \bar{u}^+ = \bar{F}_+(\psi^*), \bar{v}^- = \bar{G}_-(\psi^*), \bar{v}^+ = \bar{G}_+(\psi^*)\}$, где

$$\begin{gathered}
\bar{F}_-(\psi^*) = U_-(\psi)\,F_-(\psi) + p_-(F_-(\psi), F_+(\psi), G_-(\psi), G_+(\psi), \psi, \varepsilon);\\
\bar{F}_+(\psi^*) = U_+(\psi)\,F_+(\psi) + p_+(F_-(\psi), F_+(\psi), G_-(\psi), G_+(\psi), \psi, \varepsilon);\\
\bar{G}_-(\psi^*) = [E + \varepsilon Q_-]\,G_-(\psi) + \varepsilon q_-(F_-(\psi), F_+(\psi), G_-(\psi), G_+(\psi), \psi, \varepsilon);\\
\bar{G}_+(\psi^*) = [E + \varepsilon Q_+]\,G_+(\psi) + \varepsilon q_+(F_-(\psi), F_+(\psi), G_-(\psi), G_+(\psi)\ \psi, \varepsilon);\\
\psi^* = \psi + \varepsilon n/J + \varepsilon r\,(F_-(\psi), F_+(\psi), G_-(\psi), G_+(\psi), \psi, \varepsilon).
\end{gathered} \tag{22}$$

Отображение (22) не является сжатым. Однако можно указать вспомогательное отображение, имеющее те же инвариантные кривые и в некоторой метрике являющееся сжатым:

$$\begin{gathered}
F_-^*(\psi^*) = U_-(\psi)\,F_-(\psi) + p_-[F_-(\psi), F_+(\psi), G_-(\psi), G_+(\psi), \psi, \varepsilon];\\
F_+^*(\psi) = [U_+(\psi)]^{-1}\,F_+(\psi^*) + p'_+[F_-(\psi), F_+(\psi), G_-(\psi), G_+(\psi), \psi, \varepsilon);\\
G_-^*(\psi^*) = [E + \varepsilon Q_-]\,G_-(\psi) + \varepsilon q_-[F_-(\psi), F_+(\psi), G_-(\psi), G_+(\psi), \psi, \varepsilon];\\
G_+^*(\psi) = [E + \varepsilon Q_+]^{-1}\,G_+(\psi^*) + \varepsilon q'_+[F_-(\psi), F_+(\psi), G_-(\psi), G_+(\psi), \psi, \varepsilon]
\end{gathered} \tag{23}$$

(свойства p'_+ и q'_+ те же, что у p_-). В качестве метрики положим

$$\|l\| = \max\{\|F_-\|, \|F_+\|, \|G_-\|, \|G_+\|\},$$

где

$$\|F_\pm\| = \max_\psi |F_\pm(\psi)|; \quad \|G_\pm\| = \max_\psi \sqrt{W_\pm[G_\pm(\psi)]},$$

а $W_-(v^-)$ и $W_+(v^+)$ — квадратичные функции Ляпунова для систем $\dot{v}^- = Q_- v^-$ и $\dot{v}^+ = -Q_+ v^+$. Очевидно, существуют такие постоянные $\beta \geqslant 1$ и $0 < \gamma < 1$, что

$$|G| < \beta\|G\|, \quad \|G\| < \beta|G|; \quad |U_-(\psi)\,u^-| \leqslant (1-\gamma)|u^-|;$$
$$|U_+^{-1}(\psi)\,u^+| \leqslant (1-\gamma)|u^+|; \quad \|(E + \varepsilon Q_-)\,v^-\| \leqslant (1-\varepsilon\gamma)\|v^-\|;$$
$$\|(E + \varepsilon Q_+)^{-1}\,v^+\| \leqslant (1-\varepsilon\gamma)\|v^+\|.$$

Зафиксировав ε_0 и δ_0 так, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$, $|u^\pm|$, $|v^\pm| < \delta$ удовлетворяется неравенство

$$5\lambda(\beta + \beta^2)\,[1 + 2\gamma^{-1}(\lambda + 2\Lambda\zeta\gamma^{-1})] < \gamma,$$

обозначим $a = 2\beta\gamma^{-1}\zeta$, $b = 2\beta\gamma^{-1}(\lambda + 2\Lambda\zeta\gamma^{-1})$ и определим класс $L(a, b)$ кривых l, обладающих по ψ периодом 2 и удовлетворяющих неравенствам

---

*Метод доказательства имеет много общих черт с методом работы [5], обобщая его на случай наличия «быстрых» переменных u.

$$|F_\pm| < a; \ |F_\pm(\psi_1) - F_\pm(\psi_2)| < b\,|\psi_1 - \psi_2|;$$

$$\|G_\pm\| < a; \ \|G_\pm(\psi_1) - G_\pm(\psi_2)\| < b\,|\psi_1 - \psi_2|.$$

Отображение (23) переводит кривую $l \in L(a, b)$ в кривую l^*, причем $l^* \in L(a, b)$:

$$|\psi_1^* - \psi_2^*| \geqslant \{1 - \varepsilon\lambda\,[1 + 2b\,(1 + \beta)]\}\,|\psi_1 - \psi_2|;$$

$$|F_\pm^*(\psi^*)| < (1 - \gamma)\,a + \zeta + 2a\,(1 + \beta)\,\lambda < a; \ |F_\pm^*(\psi_1^*) - F_\pm^*(\psi_2^*)| <$$

$$< \{\Lambda a + (1 - \gamma)\,b + \lambda\,[1 + 2b\,(1 + \beta)]\}\,|\psi_1 - \psi_2| \leqslant \{1 - \varepsilon\lambda\,[1 +$$

$$+ 2b\,(1 + \beta)]\}\,b\,|\psi_1 - \psi_2| < b\,|\psi_1^* - \psi_2^*|;$$

$$\|G_\pm^*(\psi^*)\| < (1 - \varepsilon\gamma)\,a + \varepsilon\beta\,[\zeta + 2a\,(1 + \beta)\,\lambda] < a;$$

$$\|G_\pm^*(\psi_1^*) - G_\pm^*(\psi_2^*)\| < \{(1 - \varepsilon\gamma)\,b + \varepsilon\lambda\beta\,[1 + 2b\,(1 +$$

$$+ \beta)]\}\,|\psi_1 - \psi_2| \leqslant \{1 - \varepsilon\lambda\,[1 + 2b\,(1 + \beta)]\}\,b\,|\psi_1 - \psi_2| < b\,|\psi_1^* - \psi_2^*|$$

и обладает сжатостью:

$$|F_1^* - F_2^*| < (1 - \gamma + 2\lambda)\,|F_1 - F_2| + 2\lambda\beta\,\|G_1 - G_2\| <$$

$$< (1 - 3\gamma/5)\max\{|F_1 - F_2|, \ \|G_1 - G_2\|\};$$

$$\|G_1^* - G_2^*\| < 2\varepsilon\lambda\beta\,|F_1 - F_2| + (1 - \varepsilon\gamma + 2\varepsilon\lambda)\,\|G_1 - G_2\| <$$

$$< (1 - 3\varepsilon\gamma/5)\max\{|F_1 - F_2|, \ \|G_1 - G_2\|\}.$$

Отсюда следует, что в $L(a, b)$ существует единственная инвариантная кривая l_ε.

2. Выберем такое ε_1, что при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $|u^+|, |v^+| \leqslant \sigma_1 = \gamma/2\Lambda$ выполнены неравенства

$$2\lambda/\gamma < \min(1/12, 1/\beta), \ d = 4\beta\Lambda\gamma^{-2}\zeta + 2\gamma^{-1}[4 + \beta + \beta^2]\,\lambda < (1 + \beta + 2\varepsilon)^{-1}.$$

Обозначив $c = 2\beta\gamma^{-1}[\zeta + \lambda\sigma_1(1 + \beta)]$, введем класс $S(c, d)$ многообразий s^- $\{u^- = F(u^+, v^+, \psi), v^- = G(u^+, v^+, \psi)\}$ размерности $k''+l''+1$, определенных при $|u^+| < \sigma_1$, $|v^+| < \sigma_1$, обладающих по ψ периодом 2 и удовлетворяющих неравенствам

$$|F(u^+, v^+, \psi)| < c; \ |F(u_1^+, v_1^+, \psi_1) - F(u_2^+, v_2^+, \psi_2)| <$$

$$< d\,(|u_1^+ - u_2^+| + |v_1^+ - v_2^+| + |\psi_1 - \psi_2|);$$

$$\|G(u^+, v^+, \psi)\| < c; \ \|G(u_1^+, v_1^+, \psi_1) - G(u_2^+, v_2^+, \psi_2)\| <$$

$$< d\,(\varepsilon\,|u_1^+ - u_2^+| + |v_1^+ - v_2^+| + |\psi_1 - \psi_2|).$$

Отображение (22) переводит s^- в некоторое многообразие $\hat{s}^-(\bar{u}^+, \bar{v}^+, \psi^*)$, область определения которого шире, чем у s^-. Ограничим $\hat{s}^-$ областью $|\bar{u}^+| < \sigma_1$, $|\bar{v}^+| < \sigma_1$, и полученное многообразие обозначим через $\bar{s}^-$ $\{\bar{u}^- = \bar{F}(\bar{u}^+, \bar{v}^+, \psi^*), \bar{v}^- = G(\bar{u}^+, \bar{v}^+, \psi^*)\}$.

Из $s^- \in S(c, d)$ следует $\bar{s}^- \in S(c, d)$. Кроме того, отображение (22) в классе $S(c, d)$ сжато:

$$|\bar{F}_1 - \bar{F}_2| \leqslant (1 - \gamma + \lambda)\,|F_1 - F_2| + \beta\lambda\,\|G_1 - G_2\| <$$

$$< (1 - \gamma/2)\max\{|F_1 - F_2|, \ \|G_1 - G_2\|\};$$

$$\|\bar{G}_1 - \bar{G}_2\| \leqslant \varepsilon\beta\lambda\,|F_1 - F_2| + (1 - \varepsilon\gamma + \varepsilon\lambda)\,\|G_1 - G_2\| <$$

$$< (1 - \varepsilon\gamma/2)\max\{|F_1 - F_2|, \ \|G_1 - G_2\|\}.$$

Следовательно, в классе $S(c, d)$ существует единственное инвариантное многообразие s_ε^-.

Доказательство существования инвариантного многообразия s_ε^+ производится аналогично. Для сжатости нужно взять отображение, обратное к (22). Так как начальные многообразия можно выбрать проходящими через l_ε и это свойство сохраняется при применении отображения (22), s_ε^- и s_ε^+ пересекают l_ε.

5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

Прежде всего установим несколько вспомогательных предложений, касающихся вопросов гладкости по параметру.

1. Выделим у матрицы $U(\psi)$ при значении $\psi = \psi_0$ какое-либо множество ее собственных значений (каждое собственное значение учитывается с полной кратностью). Если при $\psi = \psi_0$ матрица $U(\psi)$ непрерывна, матрица проектирования на инвариантное подпространство, соответствующее выделенному множеству собственных значений, также непрерывна по ψ.

Пусть

$$M(\psi_0)\, U(\psi_0)\, M^{-1}(\psi_0) = \overline{U}(\psi_0) = \begin{Vmatrix} U_a & 0 \\ 0 & U_b \end{Vmatrix}$$

с блоком U_a, соответствующим выделенному множеству собственных значений. При ψ, достаточно близких к ψ_0, будем искать такую невырожденную матрицу $C(\psi)$, что $M(\psi_0)\, U(\psi)\, M^{-1}(\psi_0) = C(\psi)\, \overline{U}(\psi)\, C^{-1}(\psi)$ ($\overline{U}(\psi)$ — некоторая квазидиагональная матрица). Очевидно, $C(\psi)$ не определяется единственным образом, так как $\overline{U}(\psi)$ можно подвергнуть любому линейному преобразованию, сохраняющему квазидиагональный вид. Этот произвол можно устранить, наложив дополнительные ограничения. В частности, удобно искать $C(\psi)$ в виде $E + C'(\psi)$, где $C'(\psi)$ — матрица с нулевыми элементами в квазидиагональных блоках (дополнительная к квазидиагональной).

Обозначим $\overline{U}(\psi) = \overline{U}(\psi_0) + U_0$ и $M(\psi_0)\, U(\psi)\, M^{-1}(\psi_0) = \overline{U}(\psi_0) + U_1 + U'$, где U_0 и U_1 — квазидиагональные матрицы, U' — матрица, дополнительная к квазидиагональной. По определению

$$[\overline{U}(\psi_0) + U_1 + U'] - (E + C')\, [\overline{U}(\psi_0) + U_0]\, (E + C')^{-1} = 0. \qquad (24)$$

Умножая (24) справа на $E - C'^2$ и заметив, что произведение квазидиагональной и дополнительной матриц дополнительно, а произведение двух дополнительных матриц квазидиагонально, разделим квазидиагональную и дополнительную части:

$$\begin{gathered} \Psi_1(U_0, U_1, U', C') = [\overline{U}(\psi_0) + U_1]\,(E - C'^2) - \overline{U}(\psi_0) - \\ - U_0 + C'\,[\overline{U}(\psi_0) + U_0]\, C' = 0; \\ \Psi_2(U_0, U_1, U', C') = U'\,(E - C'^2) + [\overline{U}(\psi_0) + U_0]\, C' - \\ - C'\,[\overline{U}(\psi_0) + U_0] = 0. \end{gathered} \qquad (25)$$

Эта система при $U_1 = U' = 0$ имеет решение $U_0 = C' = 0$, а ее определитель $D(\Psi_1, \Psi_2)/D(U_0, C')$ при $U_1 = U_0 = U' = C' = 0$ сводится к $D(\Psi_2)/D(C')$. Последний отличен от нуля, так как является определителем матричного уравнения $\overline{U}(\psi_0)\, C' = C'\overline{U}(\psi_0)$, имеющего в классе дополнительных матриц лишь нулевое решение (см., например, [1]). Следовательно, в некоторой окрестности точки $U_1 = U' = 0$ система (25)

определяет функции $U_0(U_1, U')$ и $C'(U_1, U')$, непрерывно дифференцируемые по U_1 и U'.

Мы построили непрерывную при $\psi=\psi_0$ матрицу $M(\psi)=[E+C'(\psi)]\,M(\psi_0)$, такую, что $M(\psi)\,U(\psi)\,M^{-1}(\psi)=\bar{U}(\psi)$. Матрицей проектирования на инвариантное подпространство, соответствующее блоку U_a, является

$$M_a=M^{-1}(\psi)\left\|\begin{matrix}E_a & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|\cdot M(\psi).$$

Отметим некоторые ее свойства. Прежде всего, очевидна ее перестановочность с

$$U(\psi)=M^{-1}(\psi)\left\|\begin{matrix}U_a(\psi) & 0\\ 0 & U_b(\psi)\end{matrix}\right\|M(\psi).$$

Далее, если при изменении ψ в некоторой области $U(\psi)$ изменяется непрерывно и общее количество собственных значений в выделенном множестве (с учетом кратности) сохраняется, $M_a(\psi)$ непрерывно продолжима на такую область изменения ψ. Если ψ — скаляр и $U(\psi)$ периодична по ψ с некоторым периодом T, продолжение по ψ можно произвести так, что $M(\psi+T)$ будет совпадать с $M(\psi)$, быть может, с точностью до ориентации инвариантного подпространства. Отсюда следует, что $M(\psi+2T)=M(\psi)$. Наконец, если $U(\psi)$ обладает по ψ большей степенью гладкости, той же степенью гладкости обладает и $M(\psi)$.

2. Пусть уравнение $\partial z/\partial\tau=P(\tau, y)\,z$, где $P(\tau, y)$ — квадратная матрица периода $T(y)$ по τ, имеет единственное решение периода $T(y)$, а именно, $z=0$. Тогда матричное уравнение $\partial\omega/\partial\tau+\omega P=D(\tau, y)$, где ω и D — прямоугольные матрицы и D периодична по τ с периодом $T(y)$, имеет единственное решение периода $T(y)$ по τ:

$$\omega(\tau, y)=\left\{\int_0^{T(y)} D(\vartheta, y)\,Z(\vartheta, y)\,d\vartheta\,[Z(T(y), y)-E]^{-1}+\right.$$
$$\left.+\int_0^{\tau} D(\vartheta, y)\,Z(\vartheta, y)\,d\vartheta\right\}Z^{-1}(\tau, y).$$

Здесь $Z(\tau, y)$ — фундаментальная нормированная ($Z(0, y)=E$) матрица решений системы $\partial z/\partial\tau=Pz$. Единственность следует из того, что однородное уравнение $\partial\omega/\partial\tau+\omega P=0$ не имеет решений периода $T(y)$ (его фундаментальной матрицей решений является $Z^{-1}(\tau, y)$).

Если P и D допускают производные по y выше первой, те же производные допускают Z и ω. Утверждение может быть проверено путем последовательного дифференцирования уравнения для Z и ω.

3. Если при $y=y_0$ система (2) имеет периодическое решение $x^*(\tau, y_0)$, а ее правая часть непрерывно дифференцируема по обоим аргументам, то при y, близких к y_0, система (2) также имеет периодическое решение $x^*(\tau, y)$, период которого $T(y)$ непрерывно дифференцируем по y, а функция $X(\varphi, y)=x^*[\varphi T(y), y]$ обладает непрерывными производными по обоим аргументам.

Для доказательства проведем через $x^*(0, y_0)$ $(k-1)$-мерную достаточно гладкую площадку Π, не касающуюся вектора $f_0=f[x^*(0, y_0), y_0, 0]$, и обозначим через $x(\tau, x_н, y)$ траекторию системы (2) с начальной точкой $x_н\in\Pi$. Значения $x^*=x^*(0, y)$ и $T(y)$ должны удовлетворять условию периодичности

$$x(T, x^*, y)-x^*=\Phi[T, x^*, y]=0. \tag{26}$$

Очевидно, $\Phi\,[T(y_0),\ x^*(0,\ y_0),\ y_0]=0$. Кроме того, мы покажем, что при $T=T(y_0)$, $x^*=x^*(0,\ y_0)$ якобиан $D(\Phi)/D\,(T,\ x^*)\neq 0$, откуда будет следовать, что $T\,(y)$ и $x^*\,(0,\ y)$ существуют и непрерывно дифференцируемы по y. Для этого введем матрицу $\|\partial x\,(T,\ x^*,\ y)/\partial\,(T,\ x^*)\|$. При $x^*=x^*\,(0,\ y_0)$, $y=y_0$ она непрерывна по x^*, y и, являясь фундаментальной матрицей решений системы (3), определяет при $T=T\,(y_0)$ линейное пребразование, которое переводит в себя единственный вектор—f_0. Так как f_0 не $\in\Pi$, отсюда следует, что преобразование с матрицей $\partial\,(\Phi)/\partial\,(T,\ x^*)$ невырождено. Остается заметить, что в силу независимости периода функции $X\,(\varphi,\ y)$ по φ от y ее можно привести к интервалу $0\leqslant\varphi\leqslant 1$, и непрерывность ее производных тогда будет следовать из общих теорем.

Отметим, что если f дифференцируема по y несколько раз, столько же раз дифференцируемы и $T\,(y)$, $x^*\,(0,\ y)$, $X\,(\varphi,\ y)$.

4. Пусть $x^*\,(\tau,\ y)$ — невырожденное периодическое решение системы (2) с периодом $T\,(y)$ по τ, и $f\,(x,\ y,\ 0)$ обладает ограниченными третьими производными. Тогда система (3) посредством невырожденной линейной замены $\xi=(\partial x^*/\partial\tau)\,u_0+A_1\,(\tau,\ y)\ u$ приводится к виду $du_0/d\tau=0$; $du/d\tau=P_1\,(\tau,\ y)\,u$, где u — $(k-1)$-мерный вектор, $A_1\,(\tau,\ y)$ — $k\times(k-1)$ и $P_1\,(\tau,\ y)$ — $(k-1)\times(k-1)$ матрицы, обладающие по τ периодом $T\,(y)$. Между A_1, P_1 и $\partial f/\partial x$ имеет место связь

$$\partial A_1/\partial\tau+A_1P_1=(\partial f/\partial x)\ A_1, \tag{6a}$$

и корни характеристического уравнения для системы $\partial u/\partial\tau=P_1\,(\tau,\ y)\ u$ совпадают с $\mu_i\,(y)$ $(i=1,\ldots,\ k-1)$.

Принципиальная возможность такого преобразования рассмотрена в работе [5]. Укажем здесь один из способов отыскания матриц A_1 и P_1. Пусть $A_0\,(\tau,\ y)$ — $k\times(k-1)$ матрица, удовлетворяющая условию $\det\,\|\partial x^*/\partial\tau;\ A_0\|\neq 0$. Тогда из предварительного преобразования $\xi=(\partial x^*/\partial\tau)\ \bar{u}_0+A_0\,u$ следует, что

$$\frac{\partial x^*}{\partial\tau}\,\frac{d\bar{u}_0}{d\tau}+A_0\,\frac{du}{d\tau}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,A_0-\frac{\partial A_0}{\partial\tau}\right)u.$$

Обозначим

$$\left\|\frac{\partial x}{\partial\tau};\ A_0\right\|^{-1}\times\left\|0;\ \frac{\partial f}{\partial x}\,A_0-\frac{\partial A_0}{\partial\tau}\right\|=\left\|\begin{matrix}0 & \bar{Q}\\ 0 & P_1\end{matrix}\right\|$$

и, введя $Q\,(Q_1,\ldots,\ Q_{k-1})$ — периодическое решение векторного уравнения $\partial Q/\partial\tau+QP_1=\bar{Q}$, обозначим

$$A_1=A_0+\left\|\left\{\frac{\partial x_i}{\partial\tau};\ Q_j\right\}\right\|.$$

Тогда P_1 и A_1 являются искомыми матрицами.

Отметим, что согласно предложению 3 $X\,(\tau,\ y)$ и, следовательно, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\,[X,\ y,\ 0]$ обладают ограниченными вторыми производными. То же самое имеет место для P_1 и $\bar{Q}$, и в силу предложения 2—для Q и A_1.

Перейдем к формулам (8). Функции p_1 и r_1 составлены из компонент вектора

$$\left\|\frac{\partial X}{\partial\varphi}+\frac{\partial A}{\partial\varphi}\,u\right\|^{-1}\left\{f\,(x,\ y,\ \varepsilon)-f\,(X,\ y,\ 0)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial f}{\partial x}\,Au-\varepsilon\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial y}\,u\right)\,g\right\}.$$

Согласно изложенному выше, T и X, а также $\partial X/\partial\varphi = Tf$ обладают тремя, а P, A и $\frac{\partial A}{\partial\varphi} = T\left(\frac{\partial f}{\partial x}A - AP_1\right)$ — двумя ограниченными производными. Отсюда следует, что p_1 и r_1 обладают ограниченными производными по y.

Перейдем к соотношению (9). Определяющей в вопросе дифференцируемости y по y_1 является функция $\omega(\varphi, y_1)$, которая, как и $\partial g/\partial y$, обладает ограниченными вторыми производными по y_1. Следовательно, p_2 и r_2 также обладают ограниченными вторыми производными. Что касается функции

$$q_2 = -\bar{g} + \left\| E + \varepsilon\frac{d}{dy_1}\left[T(y_1)\int_0^{\varphi}(g-\bar{g})\,d\vartheta\right] + \right.$$

$$\left. + \varepsilon\frac{\partial\omega u}{\partial y_1}\right\|^{-1}\left\{g\,[X+Au,\ y,\ \varepsilon] - \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{d\tau}u - \omega\frac{du}{d\tau}\right\},$$

ее выражение содержит производную $\partial\omega/\partial y$ и, таким образом, дифференцируемо по y один раз.

Аналогичное рассмотрение показывает, что $dY/d\chi$, B, Q и Ω обладают третьими производными по χ. Наконец, функции p_5 и q_5 составлены из компонент вектора

$$\left\|\frac{dY}{d\psi} + \frac{d}{d\psi}\left(B + \frac{dY}{d\psi}\Omega\right)v;\ B + \frac{dY}{d\psi}\Omega\right\|^{-1}\left\{q_3 + \right.$$

$$\left. + T(y_1)\,\bar{g}(y_1) - T(Y)\,\bar{g}(Y) - \frac{\partial T\bar{g}}{\partial y}(y_1 - Y)\right\}$$

и потому обладают двумя ограниченными производными по ψ.

Обратимся теперь к матрице $U(1, \psi)$. В базисе, связанном с инвариантными подпространствами, она принимает вид

$$\begin{Vmatrix} U_1(1,\psi) & 0 \\ 0 & U_2(1,\psi) \end{Vmatrix},$$

где U_1 и U_2 — матрицы, собственные значения которых по модулю меньше и больше единицы. Запишем разложения $[E-U_1]^{-1} = E + U_1 + U_1^2 + U_1^3 + \ldots$ и $[E-U_2^{-1}]^{-1} = E + U_2^{-1} + U_2^{-2} + U_2^{-3} + \ldots$, которые, согласно [4], сходятся. Из них следует, что $U_1^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $U_2^n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, и можно найти n, удовлетворяющее поставленным условиям.

В разделе 3 указано, что функции p_-, p_+, q_-, q_+ и r обладают свойствами, сходными со свойствами функции p_5. Наметим путь доказательства этого утверждения. Прежде всего, при $|u| < \delta$, $|v| < \delta$ и достаточно малых ε и δ из системы (14) для интервала $\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 + n$ можно получить предварительные неравенства

$$|u(\varphi)| < h_1|u(0)| + h_2|\zeta + 2\lambda\delta|;\quad |v - v_0| < \varepsilon n\,[q_0|v_0| + \zeta + 2\lambda\delta];\quad |\psi - \psi_0| < 2\varepsilon n/J. \tag{27}$$

Введем вспомогательные функции

$$p_6 = u(\varphi) - U(\varphi, \psi_0)\,u_0;\quad q_6 = (1/\varepsilon)\,\{v(\varphi) - [E + \varepsilon\varphi\,Q(\psi_0)]\,v_0\};$$

$$r_6 = (1/\varepsilon)\,[\psi(\varphi) - \psi_0 - \varepsilon\varphi/J],$$

удовлетворяющие уравнениям:

$$dp_6/d\varphi - P(\varphi, \psi_0)\, p_6 = [P(\varphi, \psi) - P(\varphi, \psi_0)]\, u + p_5(\varphi, \psi, u, v, \varepsilon);$$
$$dq_6/d\varphi = Q(\psi)\, v - Q(\psi_0)\, v_0 + q_5(\varphi, \psi, u, v, \varepsilon); \qquad (28)$$
$$dr_6/d\varphi = r_5(\varphi, \psi, u, v, \varepsilon).$$

Используя неравенства (27), оценим правые части уравнений (28) и проинтегрируем получившиеся неравенства с использованием соотношений (15) и (16). Мы придем к оценкам

$$|p_6(n, 0, 0, \psi, \varepsilon)| < \zeta(\varepsilon), \quad |p_6(n, u', v', \psi', \varepsilon) - p_6(n, u'', v'', \psi'', \varepsilon)| < \lambda(\varepsilon, \delta)\,(|u' - u''| + |v' - v''| + |\psi' - \psi''|)$$

и аналогичным оценкам для q_6 и r_6.

Эти оценки качественно не изменяются при применении замены (20). Действительно, p_-, p_+, q_- и q_+ выражаются через p_6, q_6 и r_6 посредством соотношений вида

$$\begin{vmatrix} p_- \\ p_+ \end{vmatrix} = [M(\psi_n) - M(\psi_0)]\, U(n, \psi)\, u_0 + M(\psi_n)\, p_6;$$

$$\begin{vmatrix} q_- \\ q_+ \end{vmatrix} = \left[L(\psi_n) - L(\psi^0) - \frac{\varepsilon n}{J}\frac{dL}{d\psi}(\psi_0)\right] v_0 + \varepsilon n\,[L(\psi_n) - L(\psi_0)]\, Q(\psi_0)\, v_0 + \varepsilon L(\psi_n)\, q_6.$$

Приведем, наконец, основные выкладки из доказательства того факта, что отображение (22) не выводит из класса $S(c, d)$ (для краткости введено обозначение $\varkappa = \lambda(1 + d + \beta d)$):

$$|u_1^+ - \bar{u}_2^+| > [1 - \varkappa]\,|u_1^+ - u_2^+| - \varkappa\,(|v_1^+ - v_2^+| + |\psi_1 - \psi_2|) - \Lambda\sigma_1\,|\psi_1 - \psi_2|;$$

$$|\bar{v}_1^+ - \bar{v}_2^+| > [1 - \varepsilon\varkappa]\,|v_1^+ - v_2^+| - \varepsilon\varkappa\,(|u_1^+ - u_2^+| + |\psi_1 - \psi_2|);$$

$$|\psi_1^* - \psi_2^*| > [1 - \varepsilon\varkappa]\,|\psi_1 - \psi_2| - \varepsilon\varkappa\,(|u_1^+ - u_2^+| + |v_1^+ - v_2^+|);$$

$$|\bar{F}| < (1 - \gamma)\, c + \zeta + \lambda(1 + \beta)(\sigma_1 + c) < c;$$

$$\|\bar{G}\| < (1 - \varepsilon\gamma)\, c + \varepsilon\beta\,[\zeta + \lambda(1 + \beta)(\sigma_1 + c)] < c;$$

$$|\bar{F}(\bar{u}_1^+, \bar{v}_1^+, \psi_1^*) - \bar{F}(\bar{u}_2^+, \bar{v}_2^+, \psi_2^*)| < [(1 - \gamma)\, d + \varkappa]\,(|u_1^+ - u_2^+| + |v_1^+ - v_2^+| + |\psi_1 - \psi_2|) + \Lambda c\,|\psi_1 - \psi_2| \leqslant [1 - (1 + 2\varepsilon)\,\varkappa]\, d\,(|u_1^+ - u_2^+| + |v_1^+ - v_2^+| + |\psi_1 - \psi_2|) - \Lambda d\sigma_1\,|\psi_1 - \psi_2| \leqslant d\,(|\bar{u}_1^+ - \bar{u}_2^+| + |\bar{v}_1^+ - \bar{v}_2^+| + |\psi_1^* - \psi_2^*|);$$

$$\|\bar{G}(\bar{u}_1^+, \bar{v}_1^+, \psi_1^*) - \bar{G}(\bar{u}_2^+, \bar{v}_2^+, \psi_2^*)\| < [(1 - \varepsilon\gamma)\,\varepsilon d + \varepsilon\beta\varkappa]\,|u_1^+ - u_2^+| + [(1 - \varepsilon\gamma)\, d + \varepsilon\beta\varkappa]\,(|v_1^+ - v_2^+| + |\psi_1 - \psi_2|) \leqslant [\varepsilon d - 3\varepsilon d\varkappa]\,|u_1^+ - u_2^+| + [d - 3\varepsilon d\varkappa]\,(|v_1^+ - v_2^+| + |\psi_1 - \psi_2|) - \varepsilon\Lambda d\sigma_1\,|\psi_1 - \psi_2| \leqslant d\,(\varepsilon\,|\bar{u}_1^+ - \bar{u}_2^+| + |\bar{v}_1^+ - \bar{v}_2^+| + |\psi_1^* - \psi_2^*|).$$

В заключение следует отметить, что некоторые изучавшиеся ранее типы системы (1) могут быть сведены к частным случаям системы (14). Перенося на них рассмотрение, проведенное в настоящей работе, можно получить обобщения уже известных результатов:

1. Пусть система (4) имеет положение равновесия Y, и матрица $(\overline{dg}/dy)$ (Y) имеет l' собственных значений слева и $l - l'$ — справа от мнимой оси. Тогда в некоторой окрестности соответствующего периодического решения системы (1) существуют $k' + l' + 1$ и $k'' + l - l' + 1$-мерные многообразия притяжения и отталкивания.

2. Пусть система (2) имеет положение равновесия $X(y)$, и матрица $(\partial f/\partial x)$ $[X(y), y, 0]$ имеет k' собственных значений слева и $k - k'$ — справа от мнимой оси. Тогда грубым положениям равновесия Y и грубым периодическим решениям $Y(t)$ системы $d\bar{y}/dt = g\,[X(\bar{y}), \bar{y}, 0]$ соответствуют грубые положения равновесия и грубые периодические решения системы (1), расположенные от $X(Y) \times Y$ на расстояниях порядка ε.

3. В случае, когда решения системы (2) представляют собой семейство периодических решений от одного или нескольких параметров, взяв эти параметры за новые переменные в системе (1), ее можно записать в форме с „быстро вращающейся фазой". Для этого случая в работах [3,6] введены усредненные уравнения первого приближения, решения которых были рассмотрены только на конечных интервалах времени. Если уравнения первого приближения имеют грубое положение равновесия или грубое периодическое решение, система (1) имеет порожденное ими периодическое решение или инвариантное многообразие типа тора.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность Л. С. Понтрягину, под руководством которого была проведена настоящая работа

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959, стр. 758
2. Н. Н Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
3. В. М. Волосов, ДАН СССР, **123**, 587 (1958).
4. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, ГИТТЛ, М., 1954.
5. М. И. Зеликин, Научн. докл. высш. шк.—физ. мат. науки, 2, 28 (1958).
6. Г. С. Макаева, ДАН СССР, **121**, 973 (1958).
7. Л. С. Понтрягин, Труды третьего всесоюзного математического съезда, **3**, М., 1958, стр. 570.
8 Л. С. Понтрягин, Л. В. Родыгин, ДАН СССР, **131**, 255 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 июля 1959 г.
