ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том II, № 6 РАДИОФИЗИКА 1959

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОТЫСКАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Ю. И. Неймарк

Рассматривается численный метод отыскания периодических движений применительно к системе автоматического регулирования с одной нелинейной характеристикой.

Теоретический анализ динамики многих систем автоматического регулирования приводит к отысканию ее устойчивых периодических движений. Значительный успех в отыскании и исследовании периодических движений достигнут для систем, близких к линейным (метод малого параметра [1–3], метод усреднения [4–7]), для систем, удовлетворяющих гипотезе авторезонанса или фильтра (метод гармонического баланса [8–11]), для кусочно-линейных систем, изучение которых может быть сведено к точечному преобразованию прямой в прямую [12–15], и для простейшего режима релейной системы [16–18]. В случае произвольной кусочно-линейной системы методом сшивания или каким-либо другим способом можно составить уравнения периодического движения любого заданного типа [19–20]. Однако все эти способы сами по себе дают лишь различные более или менее простые пути составления уравнений периодических движений, а не пути фактического их отыскания.

В настоящей работе излагается численный метод отыскания периодических движений применительно к системе автоматического регулирования с одной нелинейной характеристикой.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Рассмотрим систему автоматического регулирования, состоящую из линейного звена с коэффициентом передачи $K(p)$ и нелинейного элемента, реализующего между своей входной переменной x и выходной переменной y связь

$$y = \Omega(x). \tag{1.1}$$

При наличии внешнего периодического воздействия частоты ω приведем его к входу нелинейного элемента и разложим в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_k [\alpha_k \sin k\omega(t-t_0) + \beta_k \cos k\omega(t-t_0)]. \tag{1.2}$$

Допустим, что в рассматриваемой системе возможен периодический режим частоты ω, и представим вход x нелинейного элемента в виде:

$$x = \sum_k [(A_k+\alpha_k)\sin k\omega(t-t_0) + (B_k+\beta_k)\cos k\omega(t-t_0)]. \tag{1.3}$$

При этом выход нелинейного элемента также будет периодической функцией времени частоты ω, и поэтому он может быть представлен в виде:

$$y = \sum_k [\overline{A}_k \sin k\omega(t-t_0) + \overline{B}_k \cos k\omega(t-t_0)], \tag{1.4}$$

причем, очевидно, коэффициенты Фурье $\bar{A}_k$ и $\bar{B}_k$ могут быть в силу (1.1) выражены через величины $A_1+\alpha_1$, $A_2+\alpha_2, \ldots$ и $B_0+\beta_0$, $B_1+\beta_1$, $B_2+\beta_2, \ldots$:

$$\bar{A}_k=\bar{A}_k\,(B_0+\beta_0,\ A_1+\alpha_1, \ldots);\quad \bar{B}_k=\bar{B}_k\,(B_0+\beta_0,\ A_1+\alpha_1, \ldots). \tag{1.5}$$

С другой стороны, поскольку y является входом линейного звена с коэффициентами передачи $K\,(p)$, а x — его выходом, то

$$A_s=K_1\,(s\,\omega)\,\bar{A}_s-K_2\,(s\,\omega)\,\bar{B}_s;\quad B_s=K_1\,(s\,\omega)\,\bar{B}_s+K_2\,(s\,\omega)\,\bar{A}_s, \tag{1.6}$$

где $K_1\,(s\,\omega)$ и $K_2\,(s\,\omega)$ — соответственно действительная и мнимая части $K\,(is\,\omega)$.

Бесконечная система уравнений (1.5) и (1.6) определяет все возможные периодические движения. Однако отыскание ее решений представляет очень большие трудности, не говоря уже о сложности фактического отыскания уравнений (1.5).

Широко известный метод гармонического баланса, по существу, является приближенным способом решения этой системы уравнений. Согласно этому методу, из всей бесконечной системы уравнений (1.4) и (1.6) берутся только первые два уравнения, а остальные заменяются уравнениями $A_2=\bar{A}_2=\ldots=0$, $B_2=\bar{B}_2=B_3=\ldots=0$. Учет дальнейших гармоник искомого периодического движения на этом пути приводит к очень сложным вычислениям и практически мало приемлем.

В настоящей работе предлагается другой способ аппроксимации бесконечной системы уравнений (1.5)—(1.6), основывающийся, с одной стороны, на возможности пренебрежения высокими гармониками (для чего достаточно было бы предположить, что при очень больших ω $K_1(\omega)$ и $K_2(\omega)$ равны нулю), а, с другой стороны, на некоторой аппроксимации нелинейных уравнений (1.5). Эта аппроксимация в случае, когда нелинейная характеристика (1.1) является кусочно-линейной, заменяет уравнения (1.5) кусочно-линейной системой. Тем самым вопрос об отыскании периодических движений в случаях вынужденных колебаний сводится к решению, вообще говоря, нескольких систем неоднородных линейных уравнений, а в случае свободных колебаний — к задаче отыскания частот ω, при которых некоторая переопределенная система линейных уравнений имеет решение, и к отысканию этого решения.

2. АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ (1.5)

Разделим период $T=2\pi/\omega$ на m равных частей; пусть

$$x_j=\sum_k\,[A_k\sin\,(kj\,2\pi/m)+B_k\cos\,(kj\,2\pi/m)+f_j] \tag{2.1}$$

— значения входа нелинейного звена в точках $t_j=t_0+jT/m$ ($j=0,1, \ldots$ $\ldots, m-1$). Значения выхода нелинейного звена в этих же точках будут соответственно $\Omega\,(x_0)$, $\Omega\,(x_1), \ldots, \Omega\,(x_{m-1})$. Известным образом с помощью метода наименьших квадратов по значениям y в m-точках могут быть приближенно найдены коэффициенты Фурье $\bar{A}_k$ и $\bar{B}_k$ [21]:

$$\begin{aligned}\bar{A}_k&=\frac{2}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\Omega\,(x_j)\sin\left(kj\,\frac{2\pi}{m}\right);\\ \bar{B}_k&=\frac{2}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\Omega\,(x_j)\cos\left(kj\,\frac{2\pi}{m}\right).\end{aligned} \tag{2.2}$$

После подстановки (2.1) в (2.2) приходим к искомой аппроксимации уравнений (1.5).

При отыскании периодического движения можно составить уравнения или относительно амплитуд гармоник A_k, B_k, или относительно величин x_0, x_1, $x_2, \ldots, x_{m-1}$. Имея в виду вторую возможность, найдем значение выхода нелинейного звена в моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}$:

$$y_j = \Omega(x_j) = \sum_{k=0}^{n} \left[\bar{A}_k \sin\left(kj\frac{2\pi}{m}\right) + \bar{B}_k \cos\left(kj\frac{2\pi}{m}\right)\right]. \tag{2.3}$$

Подстановка (2.2) в (2.3) приводит к аппроксимации уравнений (1.5) в случае, когда за основные неизвестные приняты величины x_0, $x_1, \ldots$ $\ldots, x_{m-1}$.

3. СОСТАВЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

При составлении приближенных уравнений периодических движений мы по своему усмотрению можем выбирать как число учитываемых гармоник n, так и число точек деления m, соблюдая, однако, при этом условие $m \geqslant 2n+1$. В силу этого условия число неизвестных x_j не меньше числа неизвестных A_k и B_k. Однако это обстоятельство само по себе не может служить решительным доводом в пользу составления уравнений относительно неизвестных A_k и B_k, поскольку проверка выполнимости дополнительных условий более просто производится по величинам x_j.

а) Уравнение периодических движений в переменных A_k, B_k. Выражая в уравнениях (2.2) неизвестные x_j согласно (2.1) и исключая затем согласно (1.6) величины $\bar{A}_k$ и $\bar{B}_k$, придем к системе $2n+1$ уравнений вида:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \Omega\left[\sum_{s=0}^{n} A_s \sin\left(sj\frac{2\pi}{m}\right) + B_s \cos\left(sj\frac{2\pi}{m}\right) + f_j\right] \times \\ &\times \left[K_1(k\omega)\sin\left(kj\frac{2\pi}{m}\right) - K_2(k\omega)\cos\left(kj\frac{2\pi}{m}\right)\right]; \\ B_k &= \frac{2}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \Omega\left[\sum_{s=0}^{n} A_s \sin\left(sj\frac{2\pi}{m}\right) + B_s \cos\left(sj\frac{2\pi}{m}\right) + f_j\right] \times \\ &\times \left[K_2(k\omega)\sin\left(kj\frac{2\pi}{m}\right) + K_1(k\omega)\cos\left(kj\frac{2\pi}{m}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Если рассматриваемая система неавтономна ($f_j \neq 0$), то ω известно, и уравнения (3.1) позволяют найти $2n+1$ неизвестных A_k, B_k. Если же система автономна ($f_j = 0$), то в силу произвольности выбора начала отсчета времени (или, что то же самое, величины t_0) любая из величин A_k, B_k ($k \neq 0$) может быть принята равной нулю. Если же известно, что переменная x при своем изменении обязательно принимает значение x^*, то можно дополнительно принять, что

$$x_j = \sum_{k=0}^{n} \left[A_k \sin\left(kj\frac{2\pi}{m}\right) + B_k \cos\left(kj\frac{2\pi}{m}\right)\right] = x^*. \tag{3.2}$$

Уравнения (3.1) вместе с (3.2) или любым другим уравнением, например, $B_1 = 0$, дают полную систему уравнений для отыскания искомых $2n+2$ неизвестных A_k, B_k и ω.

б) Уравнение периодических движений в переменных x_j. Выражая в соотношениях (2.1) неизвестные A_k, B_k согласно (1.6) и затем подставляя вместо $\overline{A}_k$, $\overline{B}_k$ их выражения (2.2), придем к следующей системе уравнений:

$$x_j = \frac{2}{m}\left\{\sum_{\sigma=0}^{m-1}\Omega(x_\sigma)\sum_{k=0}^{n}\left[K_1(k\omega)\cos\left(k(\sigma-j)\frac{2\pi}{m}\right)+ K_2(k\omega)\sin\left(k(\sigma-j)\frac{2\pi}{m}\right)\right]\right\}+f_j, \tag{3.3}$$

которая может быть записана в виде:

$$x_j = \frac{2}{m}\sum_{\sigma=0}^{m-1}\Omega(x_\sigma)\sum_{s=0}^{n}\operatorname{Re} K(is\omega)\, e^{is(j-\sigma)2\pi/m}+f_j. \tag{3.4}$$

Число этих уравнений равно числу неизвестных $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$; поэтому в случае вынужденных колебаний этой системы достаточно для отыскания периодического движения; в случае свободных колебаний, когда ω неизвестно, нужно к уравнениям (3.3) присоединить дополнительное требование вида $x_j = x^*$ либо вида $B_k = 0$, где B_k, естественно, предполагается выраженным через неизвестные $x_0, \ldots, x_{m-1}$.

4. КОНКРЕТНЫЙ ПРИМЕР

Пусть частотная характеристика $K(i\omega)$ линейного нейтрально устойчивого звена (один корень нулевой, остальные с отрицательной действительной частью) задана графиком рис. 1а, а нелинейное звено имеет симметричную характеристику, изображенную на рис. 1б, с угловым коэффициентом среднего участка $\varkappa$.

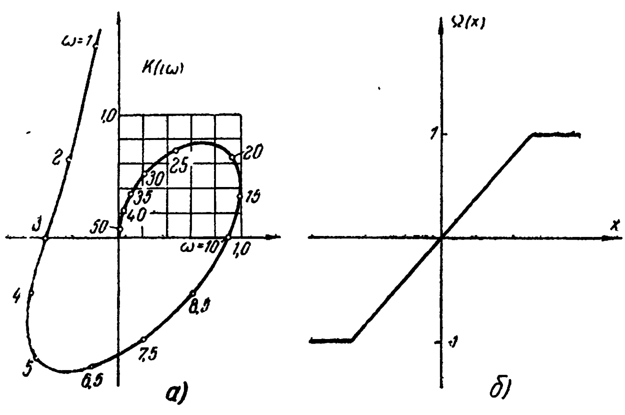

Рис. 1.

Состояние равновесия рассматриваемой системы при $0 < \varkappa < 0{,}9$ будет устойчивым. При $\varkappa = 0{,}9$ возбуждаются колебания с частотой $\omega = 10$. Из вида нелинейной характеристики следует, что при переходе через критическое значение 0,9 можно ожидать „мягкого“ возбуждения симметричных автоколебаний с амплитудой больше единицы.

Приведем численный расчет формы и частоты периодического движения при $\varkappa = 1{,}3$*. Будем исходить из уравнений (3.3), в которых положим $m = 12$, а число учитываемых гармоник $n = 5$. Поскольку отыскивается симметрическое периодическое движение, то можно принять $x_0 = x_6 = 0$ и $x_{i+6} = -x_i$ (для $i = 1, \ldots, 5$).

* Этот численный расчет был выполнен Н. С. Сукочевой.

Система уравнений (3.3) в нашем случае запишется в виде:

$$x_j = \frac{1}{6} \sum_{\sigma=1}^{5} \sum_{k=0}^{5} \Omega(x_\sigma) \left\{ K_1(k\omega) \left[\cos\left(k(\sigma - j)\frac{\pi}{6}\right) - \right.\right.$$

$$\left. - \cos\left(\left(k(\sigma - j)\right)\frac{\pi}{6} + k\pi\right)\right] + K_2(k\omega)\left[\sin\left(k(\sigma - j)\frac{\pi}{6}\right) - \right.$$

$$\left.\left. - \sin\left(k(\sigma - j)\frac{\pi}{6} + k\pi\right)\right]\right\} = \tag{4.1}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{\sigma=1}^{5} \Omega(x_\sigma) \sum_{k=1,3,5} \left[K_1(k\omega) \cos\left(\left(k(\sigma - j)\right)\frac{\pi}{6}\right) + \right.$$

$$\left. + K_2(k\omega) \sin\left(k(\sigma - j)\frac{\pi}{6}\right)\right] = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, 5).$$

Четные гармоники, как и следовало ожидать, выпали.

Допустим, что x_1 и x_5 меньше $1/\varkappa \simeq 0{,}77$ и что x_2, x_3, x_4 больше $1/\varkappa$; тогда $\Omega(x_1) = \varkappa x_1$, $\Omega(x_5) = \varkappa x_5$ и $\Omega(x_2) = \Omega(x_3) = \Omega(x_4) = 1$. В соответствии с этим составим систему уравнений (4.1) при $\omega = 10$ и $\omega = 9{,}5$:

$$\left.\begin{array}{llll}
3{,}4659\, x_1 & & -\ 0{,}6319\, x_5 & -\ 1{,}1224 = 0 \\
-3{,}036\, x_1 & & -\ 0{,}8206\, x_5 & +\ 2{,}1748 = 0 \\
0{,}6319\, x_1 & -\ 6\, x_2 & -\ 1{,}144\, x_5 & +\ 5{,}3348 = 0 \\
0{,}8206\, x_1 & -\ 6\, x_3 & +\ 0{,}5053\, x_5 & +\ 5{,}4322 = 0 \\
1{,}144\, x_1 & -\ 6\, x_4 & +\ 3{,}4659\, x_5 & +\ 3{,}3973 = 0 \\
0{,}5053\, x_1 & & -\ 3{,}036\, x_5 & +\ 1{,}1224 = 0
\end{array}\right\} ; \tag{4.2}$$

$$\left.\begin{array}{llll}
3{,}3923\, x_1 & & -1{,}2603\, x_5 & -\ 1{,}8220 = 0 \\
-3{,}01\, x_1 & & -1{,}0153\, x_5 & +\ 1{,}5684 = 0 \\
1{,}2603\, x_1 & -\ 6\, x_2 & -1{,}387\, x_5 & +\ 4{,}9284 = 0 \\
1{,}0153\, x_1 & -\ 6\, x_3 & -0{,}0246\, x_5 & +\ 5{,}8790 = 0 \\
1{,}387\, x_1 & -\ 6\, x_4 & +\ 3{,}3923\, x_5 & +\ 4{,}0505 = 0 \\
-0{,}0246\, x_1 & & -3{,}01\, x_5 & +\ 1{,}8220 = 0
\end{array}\right\} . \tag{4.3}$$

Каждая из систем уравнений (4.1) и (4.3), вообще говоря, несовместна. Наша задача состоит в отыскании значения ω, при котором она становится совместной. Из первых пяти уравнений этих систем найдем соответственно, что

$$x_1 = 0{,}482,\ x_2 = 0{,}775,\ x_3 = 1{,}044,\ x_4 = 1{,}160,\ x_5 = 0{,}867$$

и что

$$x_1 = 0{,}529,\ x_2 = 0{,}938,\ x_3 = 1{,}069,\ x_4 = 0{,}784,\ x_5 = -0{,}023.$$

Последнее уравнение этой системы при найденных значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_5$ принимает соответственно значения $\Delta = -0{,}879$ и $\Delta = 2{,}729$. Производя аналогичный расчет для $\omega = 9{,}9$, найдем: $\Delta = -0{,}224$. Поэтому искомое значение ω близко к 9,9. При $\omega = 9{,}9$ $x_1 = 0{,}485$, $x_2 = 0{,}787$, $x_3 = 1{,}013$, $x_4 = 1{,}053$, $x_5 = 0{,}680$ и сделанное предположение относительно величин $x_1, x_2, \ldots, x_5$ можно считать выполненным*.

---

* Отметим, что расчет этого примера методом гармонического баланса дает для амплитуды значение, равное примерно 1,3.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, Собр. соч. А. А. Андронова, изд. АН СССР, 1956, стр. 161—183.
2. Б. В. Булгаков, Колебания, Гостехиздат, М., 1954.
3. И. Г. Малкин, Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, Л.—М., 1919.
4. А. А. Андронов, А. А. Витт, Собр. соч. А. А. Андронова, изд. АН СССР, 1956, стр. 51—65.
5. Н. В. Бутенин, Труды ЛКВВИА, 39, 3 (1951).
6. Н. В. Бутенин, Труды ЛКВВИА, 3, 191 (1943).
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
8. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, изд. АН УССР, 1937.
9. Л. С. Гольдфарб, Автоматика и телемеханика, 8, 349 (1947).
10. Г. К. Круг, Труды второго всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, изд. АН СССР, М.—Л., 1955, стр. 251—265.
11. М. А. Айзерман, И. М. Смирнова, Сб. памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 1955, стр. 77—93.
12. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний Физматгиз, М., 1959, стр. 504—650.
13. Н. А. Фуфаев, Сб. памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 1955, стр. 334—383.
14. А. С. Алексеев, Сб. памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 1955, стр. 45—77.
15. Ю. И. Неймарк, Ю. К. Маклаков, Л. П. Елкина, Радиотехника и электроника, 3, 1347 (1958).
16. А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, М., 1951.
17. Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, М., 1955.
18. Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, 14, 556 (1953).
19. Ю. И. Неймарк. Уч. зап. радиофиз. фак-та ГГУ, 30, 159 (1956).
20. М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, Прикладная математика и механика, 5, 639 (1956).
21. А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, Собрание трудов, 3, ч. 1, изд. АН СССР, М.—Л., 1949.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
2 июля 1959 г.