

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Ю. И. Неймарк, Ю. И. Городецкий, Н. Н. Леонов

Дается обоснование сводимости исследования устойчивости распределенных систем к исследованию корней характеристического уравнения линеаризованной системы. Кроме того, на большом числе разнообразных примеров, представляющих и самостоятельный интерес, излагаются приемы построения и исследования областей устойчивости распределенных систем.

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

1. Будем понимать под динамической системой устройство любой физической природы, обладающее входом и выходом и однозначно определяющее выходные переменные $y(t)$ через входные $x(\tau)$ при $\tau \leq t$. Совокупность действий, которые необходимо проделать над функциями $x(t)$ (определенными при $\tau \leq t$) для получения $y(t)$, назовем оператором системы. Систему называют линейной, если линеен ее оператор.

Динамическую систему назовем устойчивой, если малые входные возмущения вызывают малые возмущения ее выхода. Для уточнения этого определения необходимо располагать некоторыми количественными характеристиками величин входного и выходного возмущений. Если эти численные характеристики обозначить соответственно для входа и выхода знаками r и ρ , то требование устойчивости состоит в том, чтобы при любом $\epsilon > 0$ имело место $\rho y < \epsilon$, если только $rx < \delta$, где $\delta > 0$ и зависит только от ϵ . Из этого определения, в частности, следует, что при $rx \rightarrow 0$ $\rho y \rightarrow 0$.

2. Допустим, что входная и выходная переменные $x(t)$ и $y(t)$ допускают изображения по Лапласу и что связь между ними, осуществляемая системой, в изображениях может быть записана в виде:

$$y(p) = K(p)x(p). \quad (1.1)$$

Как известно [1], из условия

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 e^{-2\sigma t} dt < +\infty \quad (1.2)$$

следует, что изображение $F(p)$ функции $f(t)$ является аналитической функцией p в полуплоскости $\text{Re } p > \sigma$ и что для любого $\sigma' > \sigma$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\sigma' + i\omega)|^2 d\omega = \int_0^\infty |f(t)|^2 e^{-2\sigma' t} dt < +\infty; \quad (1.3)$$

обратно, если $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\text{Re } p > \sigma$ и, кроме того,

$$\text{Sup}_{\sigma' > \sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\sigma' + i\omega)|^2 d\omega < +\infty, \quad (1.4)$$

то $F(p)$ имеет оригинал, удовлетворяющий условию (1.2).

Примем в качестве количественных характеристик r и ρ величины

$$rf = \int_0^\infty |f|^2 e^{-2\gamma t} dt, \quad \rho f = \int_0^\infty |f|^2 e^{-2\Gamma t} dt. \quad (1.5)$$

Тогда, согласно сформулированному выше утверждению, при $rf = \rho f$ справедлива

Теорема 1. Для того, чтобы линейная система была устойчива по отношению ко всем воздействиям $x(t)$, для которых $\rho x < +\infty$, необходимо, чтобы функция $K(p)$ была аналитической при $\operatorname{Re} p > \gamma$, и достаточно, чтобы она была аналитической в какой-либо полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma'$, где $\gamma' < \gamma$.

Действительно, с одной стороны, $K(p)x(p)$ должна быть аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$. С другой стороны, если $K(p)$ — аналитическая функция в большей полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma'$, то при $\operatorname{Re} p \geq \gamma$ модуль $K(p)$ ограничен и имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \rho y &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(\gamma + i\omega)|^2 |x(\gamma + i\omega)|^2 d\omega < \frac{M^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\gamma + i\omega)|^2 d\omega = \\ &= M^2 \int_0^\infty |x(t)|^2 e^{-2\gamma t} dt = M^2 \rho x. \end{aligned}$$

3. Из $\rho y \rightarrow 0$ не следует, что $y(t) e^{-\Gamma t} \rightarrow 0$. Поэтому устойчивость в смысле метрики (1.5) с $\Gamma = \gamma = 0$ является необходимым, но не достаточным условием устойчивости в смысле обычно применяемой метрики: $rf = \rho f = \operatorname{Sup}_{t>0} |f(t)|$.

Допустим, что $K(p)$ имеет оригинал $\psi(t)$. Тогда, как известно,

$$y(t) = \int_0^t \psi(t - \tau) x(\tau) d\tau,$$

и поэтому имеет место оценка:

$$|y(t)| e^{-\Gamma t} \leq e^{-\Gamma t} \left(\int_0^t |\psi(\tau)| e^{\Gamma \tau} d\tau \right) \operatorname{Sup}_{\tau \leq t} (|x(\tau)| e^{-\gamma \tau}), \quad (1.6)$$

в которой при $x(\tau) = \delta e^{\gamma \tau} \operatorname{sgn} \psi(t - \tau)$ имеет место знак равенства. Изображением функции $\psi^*(\tau) = \psi(\tau) e^{-(\gamma - \Gamma)\tau}$ является

$$K^*(p) = \frac{p}{p - \gamma + \Gamma} K(p);$$

поэтому, используя неравенство Буняковского—Шварца и замечая, что оригиналом $dK^*(p)/dp$ является $\tau \psi^*(\tau)$, имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\psi^*(\tau)| d\tau &= \int_0^\infty (1 + \tau^2)^{1/2} |\psi^*(\tau)| (1 + \tau^2)^{-1/2} d\tau \leq \\ &\leq \left[\int_0^\infty (1 + \tau^2) |\psi^*(\tau)|^2 d\tau \int_0^\infty (1 + \tau^2)^{-1} d\tau \right]^{1/2} = \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(|K^*(i\omega)|^2 + \left| \frac{dK^*}{dt} \right|^2 \Big|_{p=i\omega} \right) d\omega \int_0^\infty (1 + \tau^2)^{-1} d\tau \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда при $\gamma = \Gamma$ и $\gamma < \Gamma$ соответственно следуют теоремы 1а и 1б.

Теорема 1а. Для того, чтобы линейная система была устойчива в смысле метрики

$$rf = \text{Sup}_{t>0} e^{-\gamma t} |f(t)|, \quad \rho f = \text{Sup}_{t>0} e^{-\Gamma t} |f(t)| \quad (1.7)$$

при $\Gamma = \gamma$, необходимо, чтобы она была устойчива в смысле метрики (1.5) с $\Gamma = \gamma$, и достаточно, чтобы функция $K(p)$ была аналитической в какой-либо полуплоскости $\text{Re } p > \gamma'$ с $\gamma' < 0$ и чтобы сходился интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |dK / dp|_p^2 d\omega. \quad (1.8)$$

Теорема 1б. Для устойчивости в смысле метрики (1.7) достаточна аналитичность $K^*(p)$ в правой полуплоскости и сходимость для $K^*(p)$ интегралов (1.8) и (1.4) с $\sigma = 0$.

Последняя теорема при $\gamma = 0$ дает оценку (1.6) быстроты сходимости переходного процесса.

4. В качестве довольно общего примера рассмотрим систему, описываемую уравнениями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial x} - c_1 u = f_0(u); \quad (1.9)$$

$$\frac{d\xi_i}{dt} - \sum_{s=1}^n a_{is} \xi_s = f_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \quad (1.10)$$

в которой через $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ обозначены соответственно $u(0, t), u_x(0, t), u(1, t), u_x(1, t)$, через $f_0(u)$ и $f_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ — непрерывные функции своих аргументов, удовлетворяющие условию Липшица и обращающиеся в нуль при $u = \xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$; a, b, c_1, a_{is} — постоянные. Для исследования на устойчивость тривиального решения системы (1.9), (1.10) рассмотрим соответствующую ей линеаризованную систему, добавив произвольные ограниченные возмущения $\alpha(x, t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-2}(t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu + \alpha(x, t); \quad (1.11)$$

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{s=1}^n a_{is} \xi_s + \alpha_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n-2); \quad (1.12)$$

$$\xi_1 = u(0, t), \quad \xi_2 = u_x(0, t), \quad \xi_3 = u(1, t), \quad \xi_4 = u_x(1, t).$$

В изображениях при нулевых начальных условиях система (1.11), (1.12) имеет вид:

$$a \frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{du}{dx} + (c - p^2) u - \alpha(x, p) = 0; \quad (1.13)$$

$$\sum_{s=1}^n \bar{a}_{is}(p) \xi_s - \sigma_i(p) = 0; \quad (1.14)$$

$$u(0, p) = \xi_1(p), \quad u_x(0, p) = \xi_2(p), \quad u(1, p) = \xi_3(p), \quad u_x(1, p) = \xi_4(p), \quad (1.15)$$

где

$$\bar{a}_{is} = (p \delta_{is} - a_{is}), \quad \delta_{is} = \begin{cases} 0, & i \neq s \\ 1, & i = s \end{cases}.$$

Решение системы (1.13)–(1.15) в изображениях может быть записано в виде:

$$\mathbf{B} = K(p) \mathbf{A}, \quad (1.16)$$

где \mathbf{A} —вектор с компонентами $\alpha(x, p), \alpha_1(p), \alpha_2(p), \dots, \alpha_{n-2}(p)$; \mathbf{B} —вектор с компонентами $u(x, p), \xi_1(p), \xi_2(p), \dots, \xi_n(p)$, а под $K(p)$ понимается матрица

$$\frac{1}{\Delta(p)} \begin{vmatrix} \int_0^1 K_0(x, \xi, p) d\xi, & \int_0^1 K_1(\xi, p) d\xi, \dots, & \int_0^1 K_n(\xi, p) d\xi \\ K_{01}(x, p) & K_{11}(p) & \dots & K_{n1}(p) \\ K_{02}(x, p) & K_{12}(p) & \dots & K_{n2}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{0, n-2}(x, p) & K_{1, n-2}(p) & \dots & K_{n, n-2}(p) \end{vmatrix}, \quad (1.17)$$

причем

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ e^{\lambda_1} & e^{\lambda_2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1} & \lambda_2 e^{\lambda_2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & \bar{a}_{14} & \bar{a}_{15} & \bar{a}_{16} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{24} & \bar{a}_{25} & \bar{a}_{26} & \dots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \bar{a}_{n-2,1} & \bar{a}_{n-2,2} & \bar{a}_{n-2,3} & \ddots & \ddots & \ddots & & \bar{a}_{n-2,n} \end{vmatrix},$$

где

$$\lambda_{1,2} = -ba^{-1} \pm [b^2a^{-2} - (c - p^2)a^{-1}]^{1/2}.$$

При этом под произведениями $\left(\int_0^1 K_j d\xi \right) \alpha(x, p)$ следует понимать

$$\int_0^1 K_j(\xi, p) d\xi \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-2).$$

Вектор \mathbf{A} можно рассматривать как совокупность входных величин изучаемой нами системы, а вектор \mathbf{B} как совокупность выходных ее величин. Тогда естественно назвать матрицу $K(p)$ коэффициентом передачи этой системы от ее входа A к выходу B . Элемент $\frac{1}{\Delta} K_{ij}(p)$ матрицы $K(p)$ представляет собой коэффициент передачи от i -й компоненты входа к j -ой компоненте выхода. Если $\alpha(x, p) \neq 0, \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-2}(p) = 0$, то

$$\begin{aligned} u(x, p) &= \int_0^1 \frac{K_0(x, \xi, p)}{\Delta(p)} \alpha(\xi, p) d\xi; \\ \xi_j(p) &= \int_0^1 \frac{K_{0j}(\xi, p)}{\Delta(p)} \alpha(\xi, p) d\xi, \end{aligned}$$

а при $\alpha_i(p) \neq 0$ и

$$\begin{aligned}\sigma(x, p) &= \sigma_1(p) = \dots = \sigma_{i-1}(p) = \sigma_{i+1}(p) = \dots = \sigma_{n-2}(p) = 0 \\ u(x, p) &= K_{0i}(x, p) \Delta^{-1}(p) \alpha_i(p); \\ \xi_j(p) &= K_{ji}(p) \Delta^{-1}(p) \alpha_i(p).\end{aligned}$$

Найденное выше выражение коэффициента передачи может быть неоднозначной функцией p . В связи с этим возникает вопрос о выделении той его однозначной ветви, которая соответствует исходному оригиналу. Этот вопрос может быть легко решен на основании теоремы 5 работы [1] *.

Вопрос о существовании решения рассматриваемой линеаризованной системы по найденному выше изображению, согласно теореме 8 работы [1], сводится к проверке следующих достаточных условий: аналитичности вектора B в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma$ и выполнения для выражений

$$\begin{aligned}\|K(x, p)\|^2 &= |\Delta(p)|^{-2} \operatorname{Sup}_{x \in (0, 1)} \left\{ \sum_{l=0}^n \left| \int_0^1 K_l(x, \xi, p) d\xi \right|^2 + \sum_{i=1}^{n-2} |K_{0i}(x, p)|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} |K_{lj}(p)|^2 \right\}; \\ \|K_x(x, p)\|^2 &= |\Delta(p)|^{-2} \operatorname{Sup}_{x \in (0, 1)} \left\{ \sum_{l=0}^n \left| \int_0^1 K_{lx}(x, \xi, p) d\xi \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{n-2} |K_{0lx}(x, p)|^2 \right\}; \\ \|K_{xx}(x, p)\|^2 &= |\Delta(p)|^{-2} \operatorname{Sup}_{x \in (0, 1)} \left\{ \sum_{l=0}^n \left| \int_0^1 K_{lxx}(x, \xi, p) d\xi \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{n-2} |K_{0lxx}(x, p)|^2 \right\}\end{aligned}\tag{1.18}$$

при $\operatorname{Re} p > \sigma$ условия

$$\max \{ \|K(x, p)\|^2, \|K_x(x, p)\|^2, \|K_{xx}(x, p)\|^2 \} < c |p|^{+\alpha},$$

в котором $1 > \alpha > 0$ и $C > 0$.

По теореме 1 для устойчивости исходной линейной системы необходима аналитичность и достаточна аналитичность и ограниченность коэффициента передачи $K(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ (отсюда, в частности, следует, что σ можно положить равным нулю). Поэтому, если $\|K(p, x)\|^2 < C$ в окрестности точки $|p| = \infty$, где $C > 0$, и элементы матрицы $K(p, x) \Delta(p)$ — функции аналитические в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, то линеаризованная система устойчива, если $\Delta(p)$ не имеет корней с $\operatorname{Re} p > 0$, и неустойчива, если имеется хотя бы один корень с $\operatorname{Re} p > 0$. Таким образом, вопрос об устойчивости сводится к исследованию корней так называемого характеристического уравнения

$$\Delta(p) = 0.\tag{1.19}$$

* Именно, следует выбирать ту ветвь изображения, значение которой при $|p| \rightarrow \infty$ и $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg p < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) стремится к нулю.

Обозначим оригинал $K(p, x)$ через $G(t, x)$. Тогда $\bar{B}(x, t) = \int_0^t G(t - \tau, x) \bar{A}(x, \tau) d\tau$. Введем норму

$$\|G(t, x)\| = \text{Sup}_{x \in (0,1)} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n-1} |g_{ij}|,$$

где g_{ij} — элементы матрицы $G(t, x)$. Тогда, согласно теореме 3 [5,4], если линеаризованная система устойчива, то при любых функциях $f_0(u), f_1(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ($i=1, 2, \dots, n-2$), удовлетворяющих при $\max\{|u|, |\xi_1|, \dots, |\xi_n|\} < M$ условиям Липшица (с константами F_j ($j=0, \dots, n-2$), для

которых справедливы неравенства $F_j \text{Sup}_{0 \leq t \leq \infty} \int_0^\infty \|G(t - \tau)\| d\tau < 1$), устойчива и система (1.9), (1.10).

1. ЗАДАЧА И. Н. ВОЗНЕСЕНСКОГО ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРОВАНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ ТУРБИНЫ

1. Проблема Раута—Гурвица для квазиполиномов возникла в связи с поставленными И. Н. Вознесенским задачами о влиянии на регулирование турбин волновых явлений в напорном трубопроводе и штанге регулятора [9]. Подобная задача рассматривалась в работах [6, 7]. Первые результаты для квазиполиномов были получены Н. Г. Чеботаревым, после доклада которого этой задачей заинтересовались и ряд других математиков. Результаты, полученные Н. Г. Чеботаревым, Л. С. Понтрягиным [10], Н. Н. Мейманом, Б. Я. Левиным, В. Н. Цаприным и др., подробно изложены в известной монографии Н. Г. Чеботарева и Н. Н. Меймана [9]. Однако эти результаты оказались недостаточными для решения конкретных задач, поставленных И. Н. Вознесенским. В дальнейшем к решению круга задач, поставленных И. Н. Вознесенским, были привлечены частотные методы [8, 11]. Полное решение задачи о влиянии напорного трубопровода на регулирование было дано в работах [12, 13, 15].

Ниже будет рассмотрена задача И. Н. Вознесенского о влиянии волновых явлений в напорном трубопроводе и штанге регулятора на устойчивость процесса регулирования. Такое исследование позволяет обнаружить новую особенность, которая может встретиться при исследовании распределенных систем. Эта особенность связана с характером идеализации и ролью в устойчивости корней характеристического уравнения с очень большой мнимой частью.

2. Уравнения движения системы регулирования гидравлической турбины с учетом волновых явлений в напорном трубопроводе и штанге регулятора может быть записана в следующем виде (соответствующая ей структурная схема изображена на рис. 1):

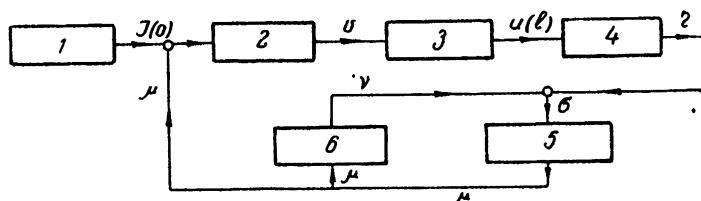


Рис. 1. Структурная схема регулирования гидротурбины:
1 — трубопровод, 2 — гидротурбина, 3 — штанга, 4 — регулятор, 5 — сервомотор, 6 — изодром.

волновое уравнение штанги регулятора в относительных смещениях угловых скоростей с учетом внутреннего трения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - m^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - n^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0; \quad (2.1)$$

условие равенства угловых скоростей вала гидротурбины и штанги в месте их соединения

$$u \Big|_{x=0} = v; \quad (2.1a)$$

равенство моментов на конце штанги

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = - GJ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} - \lambda G \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{x=l}; \quad (2.1b)$$

уравнение гидротурбины

$$T_a \frac{\partial v}{\partial t} + v - \mu - \frac{3}{2} \zeta \Big|_{z=0} = 0; \quad (2.1c)$$

уравнение регулятора

$$T_r^2 \frac{d^2 \eta}{dt^2} + T_k \frac{d \eta}{dt} + \delta \eta + u \Big|_{x=l} = 0; \quad (2.1d)$$

уравнение золотника

$$\sigma - \eta + \nu = 0; \quad (2.1e)$$

уравнение сервомотора

$$T_s \frac{d \mu}{dt} - \sigma = 0; \quad (2.1f)$$

уравнение изодрома

$$T_t \frac{dy}{dt} + y - \beta T_t \frac{d \mu}{dt} - \alpha \mu = 0; \quad (2.1g)$$

волновое уравнение трубопровода

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{gh_0}{v_0} \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{a_1 v_0}{gh_0} \frac{\partial y}{\partial t}; \quad (2.1h)$$

уравнение расхода на конце трубопровода, присоединенного к турбине,

$$\mu + (0,5 \zeta - y)_{z=0} = 0; \quad (2.1i)$$

условие полного отражения волны давления на конце трубопровода длины L , присоединенного к большому водному резервуару

$$\zeta|_{z=L} = 0. \quad (2.1j)$$

При этом использованы следующие обозначения: $m^2 = G^{1/2} \rho^{-1/2}$, $n^2 = \lambda^{1/2} \rho^{-1/2}$, G — модуль сдвига, ρ — плотность материала штанги, J — полярный момент поперечного сечения штанги, K — момент инерции присоединенной массы регулятора, λ — коэффициент внутреннего трения штанги, $\tau_2 = l m^{-1}$ — время пробега упругой волной штанги длины l . Смысл остальных параметров и обозначений ясен из работы [12].

Сначала рассмотрим частный случай, в котором не учитывается напорный трубопровод (короткий трубопровод) и затухание в штанге

регулятора. В этом случае изображение системы (2.1) при нулевых начальных условиях (с учетом возмущений $\alpha_1(t), \dots, \alpha_7(t)$, их правых частей в обозначениях $\gamma_i = \xi_5, v = \xi_7$) может быть записан в виде:

$$m^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - p^2 u = 0; \quad (2.2)$$

$$p\xi_1 - \xi_8 = \alpha_1(p);$$

$$p\xi_2 - \xi_4 = \alpha_2(p);$$

$$GJ\xi_3 - Kp\xi_4 = \alpha_3(p);$$

$$p\xi_5 - \xi_6 = \alpha_4(p);$$

$$\xi_8 + \delta\xi_5 + (pT_r^2 + T_k)\xi_6 = \alpha_5(p);$$

$$T_s\alpha\xi_1 - \beta T_t\xi_5 + [T_s T_a p + (T_s + \beta T_t)]\xi_7 - T_s T_a \alpha\xi_8 = \alpha_6(p);$$

$$T_s\xi_1 - \xi_5 + \xi_7 + T_s T_a p \xi_8 = \alpha_7(p);$$

$$u|_{x=0} = \xi_1(p), \quad u|_{x=1} = \xi_2(p), \quad u_x|_{x=1} = \xi_3(p). \quad (2.4)$$

Решая систему (2.2)–(2.4), находим $B(u, \xi_1, \dots, \xi_8)$ с компонентами

$$u(x, p) = \sum_{j=1}^7 \frac{\Delta_{1, j+3} e^{px/m} + \Delta_{2, j+3} e^{-px/m}}{\Delta} \alpha_j(p); \quad (2.5)$$

$$\xi_i(p) = \sum_{j=1}^7 \frac{\Delta_{i+2, j+3}}{\Delta} \alpha_j(p) \quad (i = 1, 2, \dots, 8); \quad (2.6)$$

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{px_2} & e^{-px_2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p}{m}e^{px_2} - \frac{p}{m}e^{-px_2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & GJ & -Kp & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \delta T_r^2 p + T_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta T_t & 0 & d - \alpha T_s T_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & p T_s T_a \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

Здесь $d = T_t T_s p + T_s + \beta T_t$. Из вида определителя (2.7) системы (2.3), (2.4) следует, что его наивысший порядок определяется главным членом $p^7 e^{px_2}$, а разложение его по элементам пятого столбца указывает на тот факт, что порядок его миноров $\Delta_{ij}(p)$ не может быть выше этого порядка. В силу этого при $\operatorname{Re} p > \gamma > 0$ имеет место оценка

$$\sup_{x \in (0, 1)} \{ |u(x, p)|, |\xi_1, \dots, \xi_8| \} < Cp^{-1}, \quad (2.8)$$

из которой согласно разделу 1 настоящей статьи следует, что исследо-

дование устойчивости системы (2.1) при $\tau_1 = 0$ (τ_1 — время пробега ударной волны напорного трубопровода) сводится к рассмотрению характеристического уравнения $\Delta(p)=0$, которое в нашем случае имеет вид:

$$P_5(p)(\sigma_2 p \operatorname{sh} p \tau_2 + \operatorname{ch} p \tau_2) + P_1(p) = 0, \quad (2.9)$$

где

$$P_1(p) = T_l p + 1, \quad P_5(p) = (T_a p + 1)(T_r^2 p^2 + T_k p + \delta) \times \\ \times [T_i T_s p^2 + (T_s + \beta T_i) p + \alpha], \quad \sigma_2 = K/J V \sqrt{G\rho}.$$

При построении D -разбиения плоскости параметров σ_2, τ_2 используем метод, изложенный в [13]. Для этого, разрешая (2.9) относительно параметра σ_2 и приравнивая (после подстановки $p=i\omega$, $-\infty < \omega < +\infty$) его минимую часть нулю, находим значения

$$\omega_j^* = \pm \left[-\frac{p}{2} \pm \left(\frac{p^2}{4} - q \right)^{1/2} \right]^{1/2},$$

где

$$p = \frac{\alpha(T_a T_r^2 - T_l T_r^2 - T_i T_k T_a) + \beta(T_r^2 + T_k T_a - T_l T_k) T_i -}{T_i^2 [T_s T_k T_a + T_r^2 (T_s + \beta T_a)]} \\ - \frac{\delta T_i^2 T_s - \delta \beta T_i^2 T_a + T_s (T_k T_a + T_r^2)}{T_i^2 [T_s T_k T_a + T_r^2 (T_s + \beta T_a)]};$$

$$q = \frac{-\delta (T_s + \beta T_i) - \alpha T_k - \alpha \delta (T_a - T_l)}{T_i^2 [T_s T_k T_a + T_r^2 (T_s + \beta T_a)]},$$

при которых

$$\sigma_2 = a \operatorname{ctg} \omega \tau_2 + b \operatorname{csc} \omega \tau_2 \quad (2.10)$$

принимает действительные значения ($a=\omega^{-1}$, $b=P_5^{-1}(i\omega)(1+T_l\omega i)\omega^{-1}$).

Для выяснения правила штриховки кривой D -разбиения плоскости параметров σ_2, τ_2 и определения $\operatorname{sgn} b(\omega_j^*)$ построим вспомогательную кривую $W = P_1(i\omega)/P_5(i\omega)$, вид которой для практически наиболее интересного случая $q < 0$ [14] дан на рис. 2а. Из рис. 2а за-

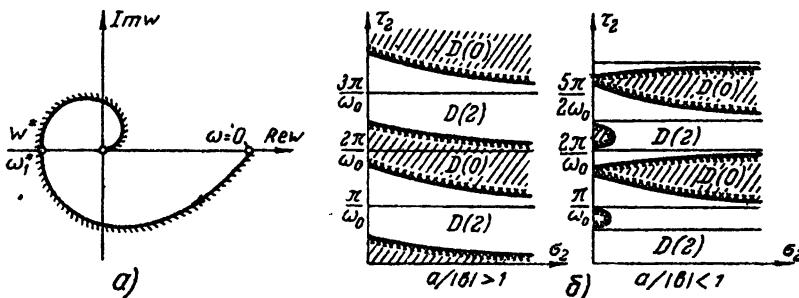


Рис. 2. D -разбиение плоскости параметров σ_2, τ_2 ($\tau_1 = \lambda = 0$).

мечаем, что $b(\omega_1^*) < 0$. Границная кривая D -разбиения плоскости параметров σ_2, τ_2 является, согласно (2.10), суммой кривых $\sigma_2 = \omega_1^{*-1} \operatorname{ctg} \omega_1^* \tau_2$ и $\sigma_2 = b(i\omega_1^*) \operatorname{csc} \omega_1^* \tau_2$ при одних и тех же значениях τ_2 ; ее вид (см. рис. 2б) существенным образом зависит от отношения $a|b|^{-1}$. Направление штриховки границной кривой определяется изменением знака $\operatorname{Im} \sigma_2 = (\omega^2 - \omega_1^{*2}) \sin^{-1} (\omega \tau_2)$ в окрестности ω_1^* . При переходе че-

рез граничную кривую в плоскости σ_2, τ_2 вдоль прямой $\tau = \tau_0$, $\tau_0 \in (s 2\pi \omega_1^{*-1}, (2s+1)\pi \omega_1^{*-1})$ слева направо у характеристического уравнения (2.9) в плоскости p теряются (а при $\tau_0 \in ((2s+1)\pi \omega_1^{*-1}, 2(s+1)\pi \omega_1^{*-1})$) приобретаются) два корня с $\operatorname{Re} p > 0$.

Покажем, что заштрихованные на рис. 2б претенденты на устойчивость действительно являются областями устойчивости. Для этого рассмотрим квазиполином $P_5(p) + P_1(p)$, соответствующий точке $\sigma_2 = \tau_2 = 0$. Из D -разбиения плоскости W квазиполиномов $WP_5(p) + P_1(p)$ (см. рис. 2а) следует, что при $|W^*| = a|b|^{-1} > 1$ полином $P_5 + P_1$ не имеет ни одного корня справа от мнимой оси (так как точке $W = \infty$ соответствует полином $P_5(p)$, не имеющий ни одного корня справа от мнимой оси), а при $a|b|^{-1} < 1$ полином $P_5 + P_1$ имеет два корня с $\operatorname{Re} p > 0$.

Поступая аналогичным образом, выделим области устойчивости в плоскости параметров δ, T_r^2 . После подстановки в выражение для δ , найденного из (1.9), $p = i\omega (-\infty < \omega < +\infty)$ имеем:

$$\delta = \omega^2 T_r^2 - T_k \omega i - P_1(i\omega) P_3^{-1}(i\omega) Q(i\omega), \quad (2.11)$$

где

$$P_3(i\omega) = P_1(i\omega)[\alpha - T_s T_i \omega^2 + (T_s + \beta T_i) \omega i], \quad Q(i\omega) = (-\omega \sigma_2 \sin \omega \tau_2 + \cos \omega \tau_2)^{-1}.$$

Значения ω_j^* , при которых δ становится действительным, находятся из условия пересечения кривой $z_1 = -\operatorname{Im}[P_1(i\omega) P_3^{-1}(i\omega) Q(i\omega)]$ с прямой $z_2 = T_k \omega$ (рис. 3а). В рассматриваемом случае границей D -разбиения являются прямые

$$\delta = \omega_j^* T_r^2 + \delta_{0j}, \quad (2.12)$$

где

$$\delta_{0j} = z_3(i\omega_j^*) = -\operatorname{Re} P_1(i\omega_j^*) P_3^{-1}(i\omega_j^*) Q(i\omega_j^*).$$

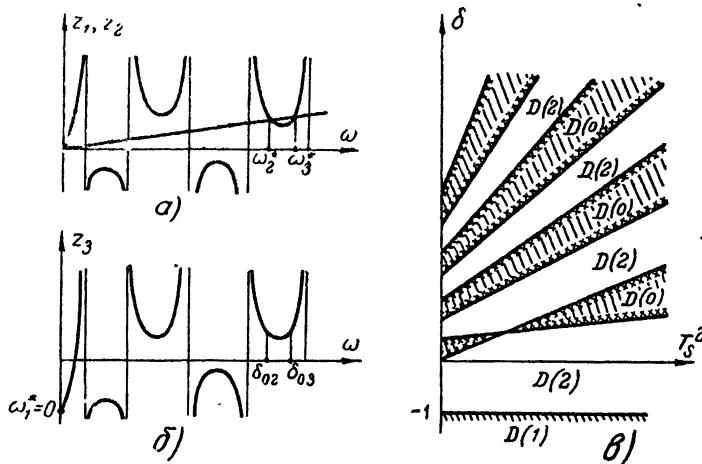


Рис. 3. D -разбиение плоскости параметров T_r^2, δ ($\tau_1 = \lambda = 0$).

Направление штриховки прямых (2.12) определяется знаком $\operatorname{Im} \delta$ в окрестности ω_j^* . D -разбиение плоскости параметров δ, T_r^2 для z_1, z_2, z_3 , изображенных на рис. 3а, б, приведено на рис. 3в. Из рис. 3а, б видно, что при $T_k \rightarrow 0$ $\omega_j^* \rightarrow \infty$, а $\delta_{0j} \rightarrow 0$, т. е. система становится всюду неустойчивой. С другой стороны, с ростом T_k области устойчивости расши-

ряются. Подробно останавливаться на выделении областей устойчивости в пространстве $T_i T_s$, $T_s + \beta T_i$, α не имеет смысла, так как оно производится аналогично.

Перейдем к рассмотрению общего случая. Согласно изложенному в разделе 1, исследование устойчивости системы (2.1) сводится к рассмотрению характеристического уравнения

$$\begin{aligned} P_5(p) (\sigma'_2 \gamma \operatorname{sh} \gamma l + \operatorname{ch} \gamma l) (2\sigma_1 \operatorname{ch} p \tau_1 + \operatorname{sh} p \tau_1) + \\ + 2(\sigma_1 \operatorname{ch} p \tau_1 - \operatorname{sh} p \tau_1) P_1(p) = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\sigma'_2 = KJ^{-1}, \quad \sigma_1 = gh_0 v_0^{-1} \beta^{-1}, \quad \gamma = \pm p \rho^{1/2} (G + \lambda p)^{-1/2}.$$

При составлении уравнения штанги и трубопровода в штанге регулятора учитывалось собственное затухание. С физической точки зрения естественно предполагать, что очень малое затухание в штанге регулятора не может оказывать существенного влияния на процесс регулирования. Однако более полное рассмотрение этой задачи показывает, что отбрасывание сколь угодно малого затухания приводит к невозможности выполнения условия устойчивости.

Попытаемся выделить области устойчивости в общем случае при $\lambda = 0$, например, в плоскости параметров σ_1, τ_1 . Поступая аналогично [13], приходим к уравнению граничных кривых D -разбиения

$$\sigma_1 = \xi_j^* \operatorname{ctg} \omega_j^* \tau_1$$

плоскости параметров σ_1, τ_1 . Значения ξ_j^* и ω_j^* соответствуют точкам пересечения окружности $f = -(2i + \xi)/(i - \xi)$ с кривой $g = P_5(i\omega)/P_1(i\omega) \times Q(i\omega)$ (см. рис. 4). Из рис. 4 непосредственно следует, что при $\omega \rightarrow \infty$ $\omega_j^* \rightarrow \infty$, а соответствующие им значения $\mu_j \rightarrow 0$. При этом кривая D -разбиения всюду плотно заполняет всю плоскость параметров σ_1, τ_1 . Последнее означает, что в принятой идеализации система без затухания в штанге регулятора всегда неустойчива, и эта неустойчивость имеет место на очень высоких частотах.

При учете сколь угодно малого затухания в штанге регулятора становится возможным выделить области устойчивости. Покажем это на примере выделения областей устойчивости в плоскости параметров $\delta_1 T_r^2$. Разрешая характеристическое уравнение (2.13) относительно параметра δ , имеем:

$$\delta = \omega^2 T_r^2 - T_k \omega i - f(i\omega), \quad (2.14)$$

где

$$f(i\omega) = -\frac{2\sigma_1 \cos \omega \tau_1 - 2i \sin \omega \tau_1 P_1(i\omega)}{2\sigma_1 \cos \omega \tau_1 + i \sin \omega \tau_1 P_5(i\omega)} Q(i\omega).$$

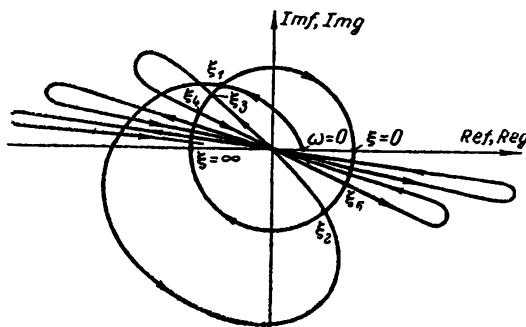


Рис. 4.

Вид кривой $f(i\omega)$ изображен на рис. 5а. После построения кривой $\delta'(i\omega) = -T_k \omega i + f(i\omega)$ (рис. 5б), которая одновременно является кривой D -разбиения плоскости комплексного параметра δ при $T_r^2 = 0$, легко перейти к искаемому D -разбиению. Для этого в плоскости $\delta_1 T_r^2$ строим серию прямых

$$\delta = \omega_j^* T_r^2 + \delta_{0j} \quad (\delta_{0j} = \operatorname{Re} \delta' (i \omega_j^*)) ,$$

число которых в рассматриваемом случае конечно. Окончательный вид D -разбиения плоскости параметров δ, T_r^2 дан на рис. 5в (штриховка на прямых наносится согласно рис. 5б).

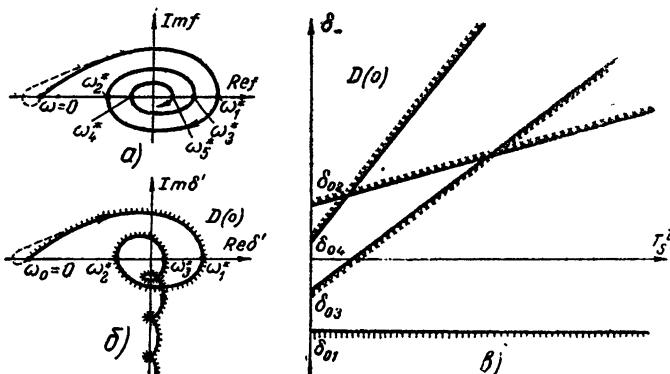


Рис. 5. D -разбиение плоскости параметров T_r^2, δ ($\tau_1 \neq 0, \lambda \neq 0$).

Проследим, как изменяется кривая, ограничивающая область устойчивости, с изменением T_k от 0 до ∞ . При $T_k=0$ кривая б) переходит в кривую а) рис. 5, из которого видно, что $\omega = \omega_j^*$ принимает счетное множество значений, стремящееся к бесконечности с ростом j . Одновременно δ_{0j} , принимая положительные и отрицательные значения, стремится к нулю. На плоскости $\delta; T_r^2$ область устойчивости при этом стягивается в полуотрезок устойчивости $\delta > \delta^*$, а вся остальная часть плоскости $\delta > 0, T_r^2 > 0$ становится неустойчивой. С ростом T_k прямые на плоскости δT_r^2 с большими наклонами исчезают, а область устойчивости при этом расширяется. При некотором значении $T_k = T_{k1}$ остается одна прямая с $\delta > 0$ с областью устойчивости выше этой прямой. С дальнейшим ростом T_k значение ω_0^* уменьшается, а $\delta_0 \rightarrow 0$; затем δ_0 становится меньше нуля и стремится к -1 при

$$T_k \rightarrow \frac{3\tau_1 + \alpha\delta T_a + \alpha T_k + \delta (T_s + \beta T_i) - \alpha\delta T_i}{\alpha\delta} .$$

Прямая D -разбиения $\delta = \omega_0^* T_r^2 + \delta_{01}$ сливаются с прямой $\delta = -1$, и система становится всюду устойчивой.

Интересно отметить влияние T_k на частоту возбуждения системы. При $T_k=0$ система возбуждается на всем спектре частот ω_j^* , представляющих собой счетное множество. При $T_k \neq 0$ бесконечный спектр частот выпадает, и с дальнейшим ростом T_k система возбуждается на все более низких частотах.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ САМОВОЗВУЖДЕНИЯ УСИЛИТЕЛЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ, ОБЛАДАЮЩЕЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Рассмотрим идеальный усилитель с запаздыванием в цепи обратной связи *. Если через $J(p)$ обозначить коэффициент передачи обратной связи, то характеристическое уравнение рассматриваемой системы имеет вид:

$$1 - kJ(p) = 0. \quad (3.1)$$

* Эта задача рассматривалась в работе [17].

Ниже будут рассмотрены случаи, когда обратная связь реализуется длинной линией и LC -цепочкой с учетом и без учета диссипации.

1. В первом случае характеристическое уравнение имеет вид:

$$k = \exp \left[\pm \sqrt{(LCp^2 + RG) + (LG + RC)p} \right],$$

где x —расстояние от начала линии; R , G , L , C —сопротивление, утечка, самоиндукция и емкость на единицу длины линии. В качестве параметра, по которому будем исследовать устойчивость, возьмем коэффициент усиления k , который в процессе исследования будем считать комплексным. Как обычно, положив $p = i\omega$, получим уравнение границы D -разбиения по параметру k . Можно заметить, что при $\omega \rightarrow \infty$ граничная кривая асимптотически наматывается на окружность. Выясним, как это происходит. Вводя обозначения

$$\sqrt{RG - LC\omega^2 + (LG + RC)\omega i} = \sqrt{x + iy} = \sqrt{0,5(x + \sqrt{x^2 + y^2}) + i\sqrt{0,5(x^2 + y^2) - x}} = m + in,$$

в результате несложных выкладок получаем, что при $\omega \rightarrow \infty$

$$m^2 = 0,5y^2 \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x \right)^{-1} \rightarrow (LG + RC)^2 (4LC)^{-1},$$

т. е.

$$m \rightarrow m_\infty = (LG + RC) 0,5 (LC)^{-1/2}$$

при $\omega \rightarrow \infty$. Кроме того, $dm/d\omega > 0$ при $\omega > 0$ и $\sqrt{RG} < (LG + RC) \times 0,5(LC)^{-1/2}$. В силу этого граничная кривая наматывается на окружность радиуса $e^{x_m \infty}$ (рис. 6а) изнутри, и поэтому система устойчива при значениях k , принадлежащих интервалу $[k(\omega_1), k(0)]$, где $|k(\omega_1)| > |k(0)|$.

2. Пусть теперь обратная связь реализуется согласованной полубесконечной LC -цепочкой (см. [18]), где $z_1 = Lp + R$, $z_2 = (Cp + G)^{-1}$ *. Обозначим ток в n -ой секции через i_n . Тогда из уравнения для n -ой секции

$$(z_1 + 2z_2)i_n - z_2(i_{n+1} + i_{n-1}) = 0 \quad (3.2)$$

найдем выражение для тока i_n . Это выражение будем искать в виде $i_n = Ae^{-\lambda n}$, так как цепочка согласованная и, следовательно, отраженной волны нет. Пусть $z_2i_0 = u$; тогда получим, что $i_n = uz_2^{-1}e^{-\lambda n}$ и коэффициент передачи обратной связи $J(p) = e^{-\lambda n}$. Кроме того, после подстановки $i_n = Ae^{-\lambda n}$ в (3.2) получаем, что

$$e^{-\lambda} + e^{\lambda} = 2 + z_1z_2^{-1}.$$

Отсюда, согласно правилу отбора ветви, сформулированному на стр. 971,

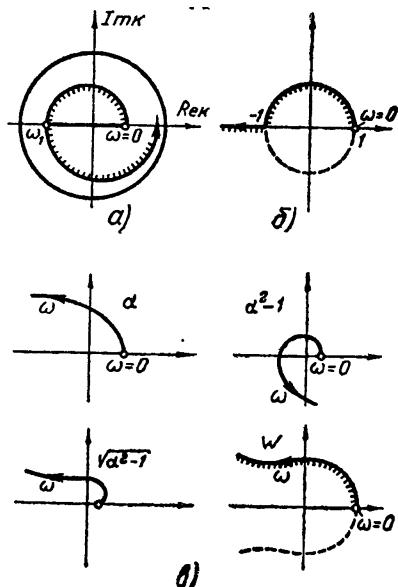


Рис. 6. D -разбиения по параметрам k и τ .

$$e^{-\lambda} = 1 + 0,5z_1z_2^{-1} - \sqrt{(1 + 0,5z_1z_2^{-1})^2 - 1},$$

* В работе [17] исследуется лишь случай $R = G = 0$.

и поэтому коэффициент передачи можно записать в виде:

$$J(p) = (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})^n; \quad \alpha = 1 + 0,5(Lp + R)(Cp + G).$$

Если обозначить $\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$ через γ , то характеристическое уравнение примет вид:

$$k = \gamma^n. \quad (3.3)$$

Очевидно, это уравнение имеет n комплексных корней γ_i ($i=1, 2, \dots, n$), лежащих на круге радиуса $\sqrt[2n]{|k|}$. За параметр, по которому будем исследовать устойчивость, примем величину $\sqrt[2n]{|k|}$.

Если не учитывать диссипативные параметры R и G , то годограф $\gamma_i(i\omega)$ имеет вид, изображенный на рис. бб. Если коэффициент усиления по модулю меньше единицы, то все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части, и система в этом случае будет устойчива. Если же $|k| > 1$, то некоторые из γ_i будут находиться вне годографа, и соответствующие им корни характеристического уравнения будут иметь положительные действительные части, т. е. система будет неустойчива.

В случае учета диссипативных параметров R и G годограф $\gamma_i(i\omega)$ изображен на рис. бв. Для всех ω $|\gamma_i| > 1$. Действительно, произведя ряд преобразований, получим, что

$$\begin{aligned} 4|\gamma_i| &= \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \\ &+ \sqrt{(x + \sqrt{x^2 + y^2})(x + 4 + \sqrt{(x+4)^2 + y^2})} + \\ &+ \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2} - x)(\sqrt{(x+4)^2 + y^2} - x - 4)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Нетрудно видеть, что $|\gamma_i|$ может быть равен единице лишь при $\omega = 0$, но $\gamma_i(0) = 1 + 0,5RG + \sqrt{0,25R^2G^2 + RG} > 1$. Пусть теперь $|\gamma_i| = a$. Тогда из (3.4) получим биквадратное уравнение относительно ω :

$$(a^2 - 1)^4 + 4a^4x^2 - 4a^2(a^2 - 1)^2x = a^2(a^2 + 1)(x^2 + y^2),$$

которое имеет не более двух положительных корней. Таким образом, годограф $\gamma_i(i\omega)$ при $\omega > 0$ имеет не более двух точек, которым соответствует одна и та же величина $|\gamma_i|$. Следовательно, критические величины коэффициента усиления k , при которых происходит изменение устойчивости системы, вообще говоря, будут различны для разных знаков k^* .

4. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРОВАНИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ КОМПРЕССОРНОЙ СТАНЦИИ ПОДАЧИ ГАЗА С УЧЕТОМ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ В ПОДВОДЯЩЕМ И ОТВОДЯЩЕМ ГАЗОПРОВОДАХ

1. Внедрение новой техники, обеспечивающей повышение производительности компрессорных станций, при транспортировке по длинным трубопроводам жидкостей и газов наталкивается на весьма неприятное явление, связанное с вибрациями магистральных трубопроводов. Борьба с вибрациями в настоящее время приобретает актуальное значение, однако ведется она в большинстве случаев вслепую и требует больших материальных затрат [21].

* Эти результаты не совпадают с результатами работы [17], где утверждается, что изменение устойчивости системы происходит при определенном значении $|k|$, т. е. от знака k критическая величина k не зависит.

На рис. 7 дана структурная схема работы автоматизированной компрессорной станции. С промысла, представляющего большой резервуар с газом, газ по длинному газопроводу поступает на автоматизированную компрессорную станцию; с которой отводится к газораспределительной станции по второму напорному газопроводу. На рис. 7 $i(x, t)$ и $j(x, t)$ означают относительные изменения расхода газа в подводящем и отводящем газопроводах, а $\Psi(x, t)$ и $\Phi(x, t)$ — относительные изменения давления.

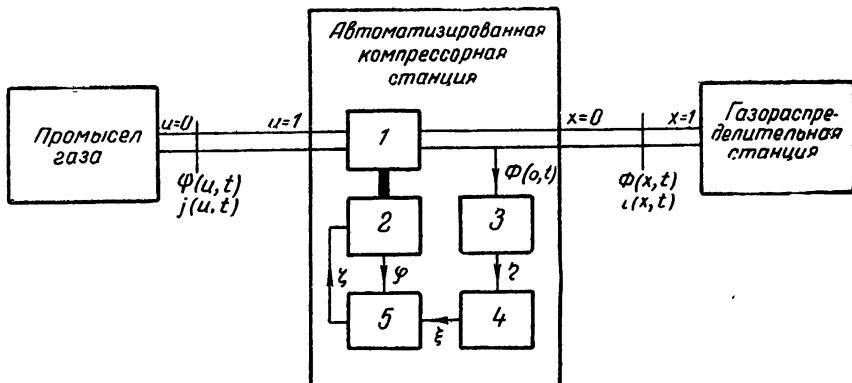


Рис. 7. Структурная схема автоматизированной компрессорной станции:
1—компрессор, 2—газовый мотор, 3—пневматический изодромный регулятор, 4—сервомотор,
5—центробежный регулятор скорости.

Работа автоматизированной компрессорной станции описывается следующей системой уравнений:

уравнение производительности компрессорной станции [19]

$$j = \alpha_1 \Psi - \alpha_2 \Phi + \alpha_3 \varphi; \quad (4.1)$$

уравнение газомоторкомпрессора

$$T_a \dot{\varphi} + \varphi = \alpha_4 \Psi + \alpha_5 \zeta - \alpha_6 \Phi; \quad (4.1a)$$

уравнение центробежного регулятора скорости с корректором

$$T_r^2 \ddot{\zeta} + T_k \dot{\zeta} + \delta_1 \zeta = \beta \xi - \varphi; \quad (4.1b)$$

уравнение мембранны-рычажного механизма

$$\xi = \gamma; \quad (4.1v)$$

уравнение изодромного пневматического регулятора (при $T_{v_1} = T_{v_2} = 0$ [21])

$$(\delta + B) \dot{\eta} + T_u^{-1} \Phi + B T_u^{-1} \eta + \dot{\Phi} = 0. \quad (4.1g)$$

Колебания газа в подводящем и отводящем газопроводах описываются уравнениями в частных производных:

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial u} = c_1 j; \quad -\frac{\partial \Psi}{\partial t} = c_2 \frac{\partial j}{\partial u} \quad (4.2)$$

(подводящий газопровод);

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} = c_1 i; \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = c_2 \frac{\partial i}{\partial x} \quad (4.3)$$

(отводящий газопровод).

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — коэффициенты, пропорциональные тангенсам углов наклона касательных к характеристикам, определяющим производительность компрессорной станции в зависимости от давления на входе и выходе и угловой скорости вращения вала газомоторкомпрессора; аналогично, $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ — коэффициенты, пропорциональные тангенсам углов наклона к характеристикам газомоторкомпрессоров в точках линеаризации. Параметр β_1 характеризует жесткость пружины регулятора скорости и мембранный-рычажное устройство;

$$B = a_1 r_1^{-1} i_y^{-1} [b_0 + \delta_s a_2 / (r_1 + r_2)], \quad (4.4)$$

где $a_1, a_2, b_0, b_s, r_1, i_y, r_2$ — параметры изодромного пневматического регулятора [21]. Смысл параметров $T_a, T_r^2, T_k, T_u, \delta, \delta_s, c_1, c_2$ хорошо известен и не нуждается в пояснении.

Целью задачи является выделение областей устойчивости системы в плоскости параметров δ, T_u^{-1} , характеризующих изодромный пневматический регулятор, при выполнении следующих краевых условий*:

1) условия постоянства давления на конце подводящего газопровода, присоединенного к большому резервуару газа

$$\Psi(0, t) = 0; \quad (4.5)$$

2) условия равенства расхода газа на входе и выходе компрессорной станции

$$j(1, t) = i(0, t); \quad (4.6)$$

3) условия работы компрессорной станции в предположении, что $T_r^2 = T_a = T_k = B = 0$,

$$\frac{\partial i}{\partial t} \Big|_{x=0} = A_1 \dot{\Psi}_t \Big|_{u=1} - \left[A_2 + A_3 \frac{1}{\delta} \right] \dot{\Phi}_t \Big|_{x=0} - A_3 T_u^{-1} \delta^{-1} \Phi(0, t); \quad (4.7)$$

4) условия постоянства расхода газа на конце отводящего газопровода

$$i(1, t) = 0. \quad (4.8)$$

В выражении (4.7)

$$A_1 = \frac{\delta(\sigma_1 \alpha_5 + \sigma_3 \alpha_4) + \alpha_1 \alpha_5}{\delta + \alpha_5}; \quad A_2 = \frac{\delta \alpha_2 + \sigma_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_6}{\delta + \alpha_5};$$

$$A_3 = \frac{\beta \sigma_3 \sigma_5}{\delta + \sigma_5}.$$

Применяя в системе уравнений (4.2) — (4.8) преобразование Лапласа, после обычных преобразований приходим к характеристическому уравнению вида:

$$p \operatorname{sh}^2 \gamma + \mu p \gamma \operatorname{ch} \gamma \operatorname{sh} \gamma + (\zeta p + \nu) \operatorname{ch}^2 \gamma = 0 \quad (4.9)$$

с параметрами

$$\zeta = \frac{A_2}{A_1} + \frac{A_3}{A_1 \delta}, \quad \nu = \frac{A_3}{\delta A_1 T_u}; \quad \mu = c_1^{-1} A_1^{-1}; \quad \gamma = c_1^{1/2} c_2^{-1/2} p^{1/2}.$$

2. Построим D -разбиение плоскости параметров (δ, T_u^{-1}) [14]. Непосредственное построение границы D -разбиения по интересующим нас

* В такой постановке при численно заданных значениях параметров $c_1/c_2, A_1, A_2=0, A_3$ задача была предложена нам в 1957 году сотрудникой Киевского института газа М. А. Жидковой. Частный случай этой задачи рассматривался в работе [20].

параметрам δT_u^{-1} приводит к затруднениям, связанным с ее поведением при $\omega \rightarrow \infty$, которое характеризуется главным членом

$$\delta p \sqrt{c_1 p / c_2} \operatorname{sh}(2 \sqrt{c_1 p / c_2}). \quad (4.10)$$

Для того, чтобы обойти эту трудность, построим предварительно вспомогательные D -разбиения по параметрам $\tau, v; \delta T^{-1}$.

Для построения D -разбиения плоскости параметров τ, v подставим в характеристическое уравнение (4.9) $p = i\omega$ ($-\infty < \omega < +\infty$). Так как левая часть (4.9) является четной функцией относительно $\sqrt{c_1 p / c_2}$, то при извлечении корня из i достаточно рассмотреть лишь его положительные значения. При построении кривой D -разбиения значения ω следует изменять от 0 до ∞ , так как при изменении $-\infty < \omega < 0$ кривая D -разбиения плоскости τ, v пробегается вторично, что приводит к двойной штриховке. После подстановки в (4.9) корня $\sqrt{c_1 \omega_i / c_2} = \Omega + i\Omega$ ($\Omega = \sqrt{r \omega c_1 / c_2 / 2}$) и разделения его левой части на вещественную и мнимую, приходим к системе линейных уравнений относительно параметров τ, v . Решая систему, находим:

$$\tau = -\frac{\operatorname{sh}^2 \Omega - \sin^2 \Omega + \mu \Omega (\cos \Omega + \operatorname{ch} \Omega) (\operatorname{sh} \Omega - \sin \Omega)}{(\cos \Omega + \operatorname{ch} \Omega)^2}; \quad (4.11)$$

$$v = \omega \frac{\mu \Omega (\operatorname{sh} \Omega + \sin \Omega) (\operatorname{ch} \Omega + \cos \Omega) + 2 \operatorname{sh} \Omega \sin \Omega}{(\cos \Omega + \operatorname{ch} \Omega)^2}; \quad (4.12)$$

$$\Delta = -\omega (\cos \Omega + \operatorname{ch} \Omega)^2. \quad (4.13)$$

При $\omega = 0$ имеем особую прямую $v = 0$. D -разбиение плоскости параметров τ, v приведено на рис. 8а. Для исследования поведения кривой D -разбиения на бесконечности рассмотрим отображение полуокрестности $\operatorname{Re} p > 0, |p| > R$ на плоскость τ, v . Подставляя $p = re^{i\varphi}$ в (4.9) и разделяя вещественную и мнимую части, для достаточно большого $R > 0$ имеем:

$$\tau_\infty = \mu \sqrt{\frac{c_1 r}{c_2}} \frac{(1 - 4 \cos^2 \varphi / 2) \operatorname{sgn}(\cos \varphi / 2)}{\cos \varphi / 2}; \quad (4.14)$$

$$v_\infty = \mu \sqrt{\frac{c_1 r}{c_2}} \frac{\operatorname{sgn}(\cos \varphi / 2)}{\cos \varphi / 2}.$$

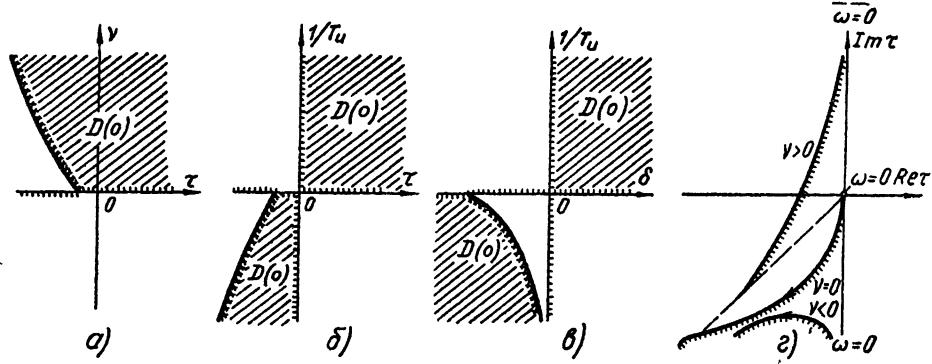


Рис. 8. К D -разбиению плоскости параметров δ, T_u^{-1} .

Обозначим через Δp правую полуокрестность $\operatorname{Re} p > 0, |p| > R$ точки $p = \infty$, а через ΔS_p отображение этой полуокрестности на плоскость

τ, ν . При изменении φ в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$ ν_∞ и τ_∞ не меняют знака ($\nu > 0, \tau < 0$); поэтому замыкание множества ΔS_p при $p \rightarrow \infty$ стягивается к точке S_∞ [16].

От D -разбиения плоскости параметров ν, τ легко перейти (см. рис. 8а, б, в) к D -разбиению плоскости параметров τ, T_u^{-1} , а от нее к плоскости δ, T_u^{-1} . Особая прямая $\nu = 0$ плоскости ν, τ распадается в плоскости τ, T_u^{-1} на две особые прямые: $\tau = 0, T_u^{-1} \neq 0$ и $T_u^{-1} = 0, \tau \neq 0$.

Качественную картину D -разбиения плоскости параметров τ, ν можно получить из D -разбиения плоскости комплексного параметра τ (рис. 8г):

$$\tau = -(\operatorname{th} \Omega + \mu \Omega) \operatorname{th} \Omega - \nu/p. \quad (4.15)$$

Из рис. 8г следует, что при $\nu < 0$ система неустойчива, при $\nu > 0$ появляется отрезок устойчивости, при $\nu > 0$ с ростом ν отрезок устойчивости увеличивается.

5. ОБ ОБЛАСТИХ УСТОЙЧИВОСТИ ИЗОДРОМНОГО РЕГУЛЯТОРА ТЕМПЕРАТУРЫ

Рассмотрим изодромное регулирование нагревательной печи с со- средоточенной теплоемкостью внутри и с теплопередачей через стенку. Система регулирования содержит распределенное звено (вследствие учета распространения тепла через толщу стенки). Исследование системы с реальной печью наталкивается на большие трудности, поэтому рассмотрим задачу для шаровой печи. Описание схемы изодромного регулятора (рис. 9) приведено в [22]. Измерительным элементом в системе является уравновешенный мостик с плечом, расположенным в толще стенки,

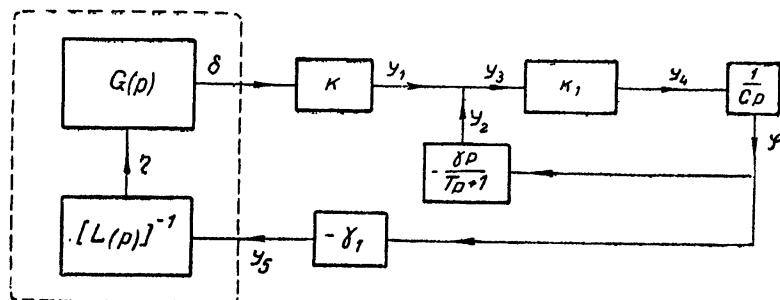


Рис. 9. Структурная схема регулирования температуры.

Для получения характеристического уравнения напишем сначала уравнения печи и теплопередачи в стенке печи.

a) *Уравнение печи.* Обозначим: ρ — теплоемкость нагреваемого тела, k_2 — коэффициент потерь мощности лучеиспусканием, λ — коэффициент теплопроводности материала стенки печи, r_0 — внутренний радиус стенки печи, r_1 — наружный радиус стенки печи, $\Theta(r, t)$ — температура стенки печи, Θ_2 — температура окружающей среды, Θ_1 — температура внутри печи.

Уравнение баланса энергии для электропечи имеет вид:

$$I^2 R dt = \rho d\Theta_1 + k_2 \Theta_1 dt - \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r_0} S_0 dt, \quad (5.1)$$

где $S_0 = 4\pi r_0^2$, R — сопротивление нагревателя, I — ток в нагревателе.

Пусть I изменяется на величину y_5 , ($I \rightarrow I + y_5$). Тогда $\Theta_1 \rightarrow \Theta_1 + \gamma_{l1}$, $\Theta \rightarrow \Theta + \gamma_l$ и из (5.1) получаем:

$$2IRy_5 = \rho \frac{d\eta_1}{dt} + k_2 \eta_1 - \lambda \left. \frac{\partial \eta_1}{\partial r} \right|_{r_0} S_0. \quad (5.2)$$

Пусть

$$\left. \frac{\partial \eta_1}{\partial r} \right|_{r_0} = H(p) \eta_1(p).$$

Тогда

$$y_5(p) = L(p) \eta_1(p),$$

где

$$L(p) = k_3 + \rho_1 p - \lambda_1 H(p), \quad (5.3)$$

(k_3 , ρ_1 , λ_1 — соответственно k_2 , ρ , λS_0 , деленные на $2IR$).

Для пламенной печи уравнение баланса энергии имеет вид:

$$W dt = \rho d\Theta_1 - \lambda \left. \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right|_{r_0} S_0 dt + k_2 \Theta_1 dt + W_1 dt, \quad (5.4)$$

где W — энергия, выделяемая при сгорании топлива, W_1 — энергия, уходящая с продуктами горения. Пусть $W \rightarrow W + \Delta W$, тогда $\Theta_1 \rightarrow \Theta_1 + \eta_1$, $\Theta \rightarrow \Theta + \eta$, $W_1 \rightarrow W_1 + \Delta W$. Можно принять [23], что $\Delta W_1 = n \Delta W$. Если, кроме того, $\Delta W = b y_5$, то из (5.4) получаем (5.3), где k_3 , ρ_1 , λ_1 — соответственно k_2 , ρ , λS_0 , деленные на $b(1-n)$.

б) Уравнение теплопередачи в стенке печи. Пусть s — коэффициент температуропроводности, α_1 — коэффициент теплоотдачи на наружной поверхности стенки печи, α_0 — коэффициент теплоотдачи на внутренней поверхности стенки печи.

Уравнение теплопередачи имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = s \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right] \quad (5.5)$$

или

$$\frac{\partial [r \Theta]}{\partial t} = s \frac{\partial^2 [r \Theta]}{\partial r^2},$$

где $r_0 < r < r_1$, $t > 0$.

Краевые условия:

$$\Theta(r, 0) = \Theta_0 = \Theta_2;$$

$$-\left. \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right|_{r_0} + L_0 [\Theta(r_0) - \Theta_1] = 0; \quad (5.6)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right|_{r_1} + L_1 [\Theta(r_1) - \Theta_2] = 0, \quad (5.7)$$

где $L_i = \alpha_i \lambda^{-1}$.

В изображениях уравнение (5.5) примет вид:

$$s [r \Theta]_{rr} - rp [\Theta - \Theta_0] = 0, \quad (5.8)$$

а (5.6) и (5.7) останутся без изменения, если изображения обозначить теми же буквами, что и оригиналы. Решение уравнения (5.8):

$$\Theta(r, p) = \Theta_0 + r^{-1} (A e^{qr} + B e^{-qr}),$$

где $q = V ps^{-1}$.

Определяя из (5.6) и (5.7) A и B , получим:

$$\Theta = \Theta_0 + \Pi [A_1 e^{q(r_1-r)} - B_1 e^{-q(r_1-r)}] (\Theta_1 - \Theta_2), \quad (5.9)$$

где

$$\Pi = L_0 r_0^2 r^{-1} [A_1 B_0 e^{q(r_1-r_0)} - A_0 B_1 e^{-q(r_1-r_0)}]^{-1};$$

$$\cdot \quad A_0 = 1 + L_0 r_0 - r_0 q; \quad B_0 = 1 + L_0 r_0 + r_0 q;$$

$$A_1 = -1 + L_1 r_1 + r_1 q; \quad B_1 = -1 + L_1 r_1 - r_1 q.$$

Пусть теперь $\Theta \rightarrow \Theta + \eta(p)$. Тогда $\Theta_1 \rightarrow \Theta_1 + \eta_1$ и из (5.9)

$$\eta(p) = G(p) \eta_1(p),$$

где

$$G(p) = \Pi [A_1 e^{q(r_1-r)} - B_1 e^{-q(r_1-r)}].$$

Из (5.6)

$$\frac{d\eta}{dr} \Big|_{r_0} = L_0 [G(r_0) - 1] \eta_1,$$

т. е.

$$H(p) = L_0 \left\{ -1 + L_0 r_0 \left[-1 + qr_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2qr_0 \left(\frac{1 - L_1 r_1 + r_1 q}{1 - L_1 r_1 - r_1 q} e^{-2q(r_1-r_0)} - 1 \right)^{-1} \right]^{-1} \right\}^{-1}.$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$\mu + (Tp + 1)^{-1} + v G(p) p^{-1} L^{-1}(p) = 0, \quad (5.10)$$

где $\mu = ck_1^{-1}\gamma^{-1}$, $v = k_1\gamma^{-1}$.

Рассмотрим случай бесконечно толстой стенки ($l_1 = \infty$):

$$G(p) = \frac{L_0 r_0^2}{r} \frac{e^{-q(r-r_0)}}{1 + L_0 r_0 + r_0 q}, \quad H(p) = L_0 \left(\frac{L_0 r_0}{1 + L_0 r_0 + r_0 q} - 1 \right).$$

В силу того, что при сопряженных аргументах функции, входящие в (5.10), также сопряжены, можно построить D -разбиение плоскости параметров μ , v , положив $p = i\omega$ и изменяя ω от 0 до ∞ . Запишем (5.10) в виде:

$$\mu + x + iy + v(u + iz) = 0. \quad (5.11)$$

Тогда

$$\mu = -x + yuz^{-1}; \quad v = -yz^{-1},$$

где

$$x = (1 + T^2 \omega^2)^{-1}; \quad y = -T \omega (1 + T^2 \omega^2)^{-1};$$

$$u = -\frac{L_0 r_0^2 e^{-\psi}}{r \omega (\xi^2 + \zeta^2)} (\xi \sin \psi + \zeta \cos \psi);$$

$$z = \frac{L_0 r_0^2 e^{-\psi}}{r \omega (\xi^2 + \zeta^2)} (\zeta \sin \psi - \xi \cos \psi);$$

$$\psi = (r - r_0) \sqrt{\omega/2s};$$

$$\xi = k_3 (1 + L_0 r_0 + r_0 \sqrt{\omega/2s}) - \rho_1 r_0 \omega \sqrt{\omega/2s} + \\ + i_1 L_0 (1 + r_0 \sqrt{\omega/2s}) 4\pi r_0^2;$$

$$\zeta = \rho_1 \omega (1 + L_0 r_0 + r_0 \sqrt{\omega/2s}) + k_3 r_0 \sqrt{\omega/2s} + \lambda_1 L_0 r_0 \sqrt{\omega/2s} 4\pi r_0^2.$$

При $\omega > 0$ $y < 0$ и поэтому $\operatorname{sgn} v = \operatorname{sgn} z$. Графики $\mu(\omega)$ и $v(\omega)$ изображены на рис. 10а, D -разбиение плоскости этих параметров — на рис. 10б.

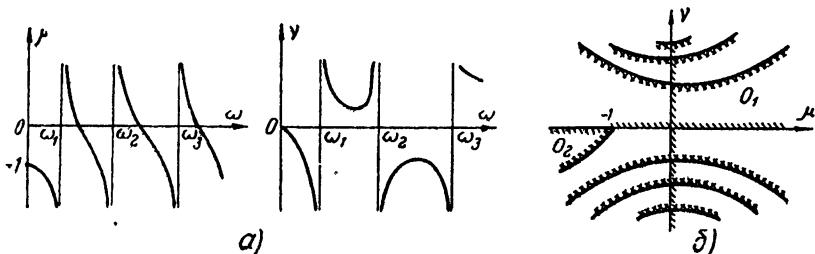


Рис. 10.

Правило штриховки определяется знаком выражения

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & z \end{vmatrix} = z.$$

Если $\Delta > 0$, то штриховка — слева при движении вдоль границы линии в сторону увеличения ω ; если $\Delta < 0$, то справа. Поскольку $\operatorname{sgn} \Delta = \operatorname{sgn} z = \operatorname{sgn} v$, то при $v < 0$ штриховка — справа, при $v > 0$ — слева. Прямые $\mu = 0$ и $v = 0$ — особые.

Необходимо показать, что O_1 и O_2 — области $D(0)$. Пусть $k_3 \rightarrow \infty$ или (что приводит к одному результату) $r_0, r \rightarrow \infty$. Это означает, что утечка поглощает всю энергию, т. е. система будет работать устойчиво.

Действительно, в этом случае характеристическое уравнение системы

$$\mu + (Tp + 1)^{-1} = 0$$

имеет единственный корень $p = -(1 + \mu)(Tp)^{-1} < 0$ при $\mu > 0$ и $\mu < -1$. При этом $|v| \rightarrow \infty$ и D -разбиение примет вид, изображенный на рис. 11а. При $(\mu, v) \in O_1, O_2$ характеристическое уравнение не имеет корней с $\operatorname{Re} p > 0$, т. е. O_1 и O_2 являются областями $D(0)$.

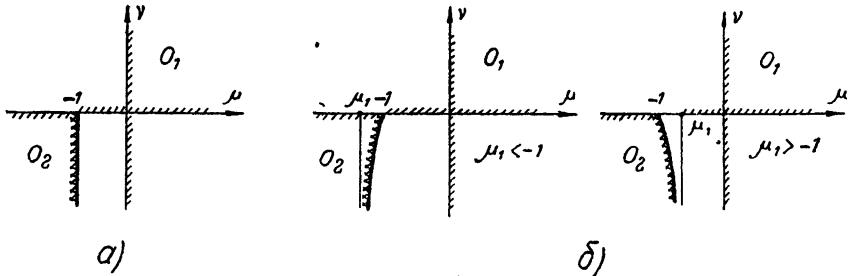


Рис. 11.

Заметим, что для модели, у которой термометр сопротивления измеряет непосредственно температуру нагреваемого тела, и в случае, когда теплопроводностью стенки можно пренебречь (т. е. распределенный элемент во внимание не принимается и $\gamma_l = \gamma_1$), характеристическое уравнение системы

$$\mu + v p^{-1} L^{-1}(p) + (Tp + 1)^{-1} = 0,$$

где $L(p) = \rho_1 p + k_3$, дает с помощью теоремы Раута—Гурвица следующие условия устойчивости:

$$\mu v > 0, \quad T(\alpha + \beta T\mu) v > -\beta(1 + \mu)(\alpha + \alpha\mu + \beta T\mu).$$

Эти условия выполняются в областях O_1 и O_2 (рис. 11б), где $\mu_1 = -\alpha\beta^{-1} T^{-1}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Диткин, А. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
2. Л. Э. Эльсгольц, Качественные методы в математическом анализе, изд. техническо-теоретической литературы, М., 1955.
3. Сборник, Теория следящих систем, ИЛ, М., 1953.
4. Ю. И. Неймарк, Труды III Всесоюзного матем. съезда, 1, изд. АН СССР, М., 1956.
5. Ю. И. Неймарк, О допустимости линеаризации при исследовании устойчивости, ДАН СССР, 127, 961 (1959).
6. А. А. Соколов, Инж. сб., 2, № 2, 3 (1946).
7. А. А. Соколов, И. П. Кабаков, Инж. сб., 2, 2, 27 (1946).
8. Н. Нуцист, BSTI, 11, 126 (1936).
9. Н. Г. Чеботарев, Н. Н. Мейман, Проблема Раута—Гурвица для полиномов и целых функций, изд. АН СССР, М.—Л., 1949.
10. Л. С. Понtryгин, Изв. АН СССР, сер. матем., 6, 3, 115 (1942).
11. В. В. Соловьев, Автоматика и телемеханика, 6, 1, 5 (1911).
12. Г. В. Аронович, Автоматика и телемеханика, 9, 3, 209 (1948).
13. Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, 9, 4, 299 (1948).
14. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, ЛКВВНИ, Л., 1949.
15. Ю. И. Неймарк, Уч. зап. ГГУ, 16, 191 (1950).
16. Ю. И. Неймарк, ПММ, 13, 349 (1949).
17. Ю. М. Азъян, В. В. Мигулин, Радиотехника и электроника, 1, 418 (1956).
18. А. М. Эфрос, А. М. Данилевский, Операционное исчисление и конгурные интегралы, Научно-техн. изд. Украины, Харьков, 1937.
19. Л. Г. Яковлев, Приборы автоматического регулирования и дистанционного управления на газопроводе Киев—Москва, Машгиз, К.—М., 1952.
20. А. З. Грищенко, Автоматика, 4, 27 (1958).
21. В. Л. Лоссиевский, Основы автоматического регулирования технологических процессов, Оборонгиз, М., 1950.
22. М. А. Айзerman, Лекции по теории автоматического регулирования, Гостехиздат, М., 1956.
23. В. П. Линчевский, Нагревательные печи, Металлургиздат, М., 1948.
24. П. А. Гладких, С. А. Чачатури, Вибрации в трубопроводах и методы их устранения, Машгиз, М., 1959.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
2 июля 1959 г.