ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том II, № 6 РАДИОФИЗИКА 1959

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Ю. И. Алимов

Для одного вида релейных систем автоматического регулирования предлагается эффективный прием построения критериев устойчивости при любых начальных возмущениях, основанный на строгом применении метода функций Ляпунова к этим системам.

1. Ниже рассматривается весьма распространенный класс релейных систем регулирования, возмущенное движение которых описывается уравнениями (относительно изображений)

$$Q(p)\Sigma(p) = R(p)\,Y(p);$$
$$Y(p) = -L\{k_p f(\sigma)\}; \tag{1}$$
$$f(\sigma) = \operatorname{sgn}\sigma; \quad k_p > 0,$$

при следующих допущениях:

а) передаточная функция линейной части системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{b_n p^{n-1} + \ldots + b_2 p + b_1}{a_{n+1} p^n + \ldots + a_2 p + a_1}, \tag{2}$$

где коэффициенты $a_1, \ldots, a_{n+1}$, $b_1, \ldots, b_n$ постоянные,

$$b_1 > 0, \quad a_{n+1} > 0; \tag{3}$$

б) вещественные части всех корней уравнения

$$a_{n+1}\lambda^n + \ldots + a_2\lambda + a_1 = 0 \tag{4}$$

отрицательны, так что $a_1, \ldots, a_n > 0$.

Кроме того, мы ограничимся случаем, когда

$$b_n = 0, \qquad b_{n-1} > 0. \tag{5}$$

Для системы (1) критерии устойчивости в малом найдены в [1] нестрогим, и в [2,3] — строгим путем. Достаточные условия устойчивости в целом можно искать для (1), например, следуя Лурье [4,5], если предварительно доказать применимость второго метода Ляпунова к системам (1) с разрывной правой частью.

В настоящей заметке предлагается (со строгим обоснованием) эффективный прием исследования релейных систем (1) на устойчивость в целом, сходный, в сущности, с видоизменением метода Малкина ([5], стр. 163—164), применявшимся в [6] для исследования абсолютной устойчивости. Ниже рассматривается случай (5), на который результаты работы [6], где существенно использовались допущения $a_1 = 0$, $b_n > 0$, прямо не переносятся. Несколько поступаясь общностью, мы отказываемся от инвариантной формы изложения, принятой в [6], и берем уравнения изучаемых релейных систем в виде (1), наиболее употребительном в теории регулирования. При этом критерии устойчивости будут выражаться непосредственно через коэффициенты передаточной функции (2). Характер корней уравнения (4) в рамках ограничения в) несуществен. Функции Ляпунова строятся методом, имеющим ясную геометрическую интерпретацию и не требующим приведения исходных уравнений движения к канонической [4,5] форме.

2. Обозначая через X и $F(x)$ столбцевые, а через X' и $F(x)'$ соответствующие строчные n-мерные векторы, запишем (1) в виде:

$$dX/dt = F(x);$$

$$F(x) = \begin{cases} F_+(x) & \text{при} \quad \sigma = \sum_{k=1}^{n-1} b_k x_k \geqslant 0 \\ F_-(x) & \text{при} \quad \sigma = \sum_{k=1}^{n-1} b_k x_k \leqslant 0 \end{cases}, \tag{6}$$

где

$$X = (x_1, \ldots, x_n)';$$

$$F_+(x) = \left(x_2, \ldots, x_n, -\sum_{r=1}^{n} \frac{a_r}{a_{n+1}} x_r - \frac{k_p}{a_{n+1}}\right)';$$

$$F_-(x) = \left(x_2, \ldots, x_n, -\sum_{r=1}^{n} \frac{a_r}{a_{n+1}} x_r + \frac{k_p}{a_{n+1}}\right)'. \tag{7}$$

В дальнейшем наряду с уравнениями

$$dX/dt = F_+(x); \tag{8}$$

$$dX/dt = F_-(x), \tag{9}$$

которые считаются заданными во всем фазовом пространстве x, рассматривается устойчивая линейная система

$$dX/dt = \left(x_2, \ldots, x_n, -\sum_{r=1}^{n} a_r a_{n+1}^{-1} x_r\right)', \tag{10}$$

получающаяся из (6) — (7) при $k_p \equiv 0$, а также функции $\dot\sigma_+(x_1, \ldots, x_n)$ и $\ddot\sigma_+(x_1, \ldots, x_n)$ (или $\dot\sigma_-$, $\ddot\sigma_-$), являющиеся полными производными по времени соответственно от функций $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ и $\dot\sigma_+(x_1, \ldots, x_n)$ (или σ_-, $\dot\sigma_-$) в силу системы (8) (системы (9)). Непосредственное вычисление дает:

$$\dot\sigma_+(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k x_{k+1} = \dot\sigma_-(x_1, \ldots, x_n) = \dot\sigma; \tag{11}$$

$$\ddot\sigma_+ = \sum_{k=1}^{n} (b_{k-2} - b_{n-1} a_{n+1}^{-1} a_k) x_k - b_{n-1} a_{n+1}^{-1} k_p;$$

$$\ddot\sigma_- = \sum_{k=1}^{n} (b_{k-2} - b_{n-1} a_{n+1}^{-1} a_k) x_k + b_{n-1} a_{n+1}^{-1} k_p \tag{12}$$

$$(b_{-1} = b_0 = 0),$$

так что

$$\ddot\sigma_-(x_1, \ldots, x_n) > \ddot\sigma_+(x_1, \ldots, x_n). \tag{13}$$

Кроме того, ниже используется система

$$dX/dt = F_0(x) = \left(x_2, \ldots, x_n, -b_{n-1}^{-1} \sum_{k=1}^{n} b_{k-2} x_k\right)', \tag{14}$$

эквивалентная уравнению

$$\sigma = b_{n-1}\, d^{n-2}\, x_1/dt^{n-2} + \ldots + b_2 dx_1/dt + b_1 \dot{x}_1 = 0.$$

Траектории этой системы расположены на множестве

$$\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \dot{\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Наконец, условимся обозначать через $X(P, t)$, $X_+(P, t)$, $X_-(P, t)$, $X_0(P, t)$ траектории соответственно систем (6) — (7), (8), (9), (12), проходящие при $t = 0$ через точку P фазового пространства. Под окрестностью фазовой точки будем подразумевать ее окрестность в пространстве x.

3. Следуя [3,7–9], дадим строгое определение траектории $X(P, t)$, пригодное для всего пространства x и удовлетворяющее физическим соображениям относительно динамики систем (6) — (7) при выполнении ограничений (3), (5).

В подпространстве $\sigma > 0$ считаем $X(P, t) = X_+(P, t)$; аналогично в подпространстве $\sigma < 0$ $X(P, t) = X_-(P, t)$.

Согласно (11), в любой точке P_s множества $\sigma = 0$, $\dot{\sigma} \neq 0$ траектории $X_+(P_s, t)$ и $X_-(P_s, t)$ пересекают поверхность переключения $\sigma = 0$ в одном направлении. Траекторию $X(P_s, t)$ определим, сшивая непрерывным образом в точке P_s полутраектории $X_+(P_s, t)$ и $X_-(P_s, t)$, лежащие (хотя бы вблизи P_s) соответственно в областях $\sigma > 0$ и $\sigma < 0$.

Траектория $X_+(P_+, t)$ (или $X_-(P_-, t)$), где P_+ (P_-) — точка множества $\sigma = \dot{\sigma} = 0$, $\dot{\sigma}_- > \ddot{\sigma}_+ > 0$ ($\sigma = \dot{\sigma} = 0$, $0 > \dot{\sigma}_- > \sigma_+$), расположена в силу соотношения $\sigma_+(P_+) > 0$ ($\sigma_-(P_-) < 0$) в подпространстве $\sigma > 0$ ($\sigma < 0$), по крайней мере, в некоторой окрестности точки P_+ (P_-). В этой окрестности $X(P_+, t)$ (или $X(P_-, t)$) считаем совпадающей с $X_+(P_+, t)$ ($X_-(P_-, t)$). Полагая окрестность достаточно малой, видим, что в ней $X_-(P_+, t)$ (соответственно $X_+(P_-, t)$) лежит, вследствие неравенства $\dot{\sigma}_-(P_-) > 0$ ($\dot{\sigma}_+(P_-) < 0$), в области $\sigma > 0$ ($\sigma < 0$), так что единственность $X(P, t)$ в точке P_+ (P_-) не нарушается.

В достаточно малой окрестности любой точки Q множества

$$\sigma = \dot{\sigma} = 0, \qquad \dot{\sigma}_- > 0 > \sigma_+ \tag{15}$$

траектория $X_+(Q, t)$ ($X_-(Q, t)$) находится в подпространстве $\sigma < 0$ ($\sigma > 0$). В этой окрестности полагаем [3], что $X(Q, t) = X_0(Q, t)$. Такое определение вектора фазовой скорости $F(Q) = F_0(Q)$ допускает ясную геометрическую интерпретацию: если считать векторы $F_+(Q)$, $F_-(Q)$, $F_0(Q)$ приложенными в точке $Q(x_1^*, \ldots, x_n^*)$, то конец вектора $F_0(Q) = F(Q)$ определяется точкой пересечения плоскости $\dot{\sigma} = 0$ и прямой, соединяющей концы векторов $F_+(Q)$ и $F_-(Q)$. Эта интерпретация делает очевидным соотношение

$$f_n^-(Q) > f_n^0(Q) > f_n^+(Q) \tag{16}$$

между проекциями

$$f_n^-(Q) = -\sum_{k=1}^{n} a_k a_{n+1}^{-1} x_k^* + k_p a_{n+1}^{-1};$$

$$f_n^0(Q) = -\sum_{k=1}^{n-2} b_k b_{n-1}^{-1} x_{k+2}^*; \tag{17}$$

$$f_n^+(Q) = -\sum_{k=1}^{n} a_k a_{n+1}^{-1} x_k^* - k_p a_{n+1}^{-1}$$

векторов $F_-(Q)$, $F_0(Q)$, $F_+(Q)$ на ось OX_n, поскольку проекции этих векторов на каждую из осей OX_k $(k=1,\ldots,n-1)$ совпадают (см. (7) и (14)). Единственность $X(P,t)$ в точках Q так же, как и в точках P_s, сохраняется.

Рассмотрим, наконец, множество $\sigma=\dot\sigma=0$, $\ddot\sigma_- > 0 = \ddot\sigma_+$ (случай $\sigma=\dot\sigma=0$, $0=\ddot\sigma_- > \ddot\sigma_+$ исчерпывается аналогично). В соответствии с (7), (14), (12) в любой точке R этого множества

$$F_+(R) = F_0(R), \tag{18}$$

так что

$$\frac{d^m}{dt^m}\left[\sigma_+(R)\right]_+ = \frac{d^m}{dt^m}\left[\sigma_+(R)\right]_0, \tag{19}$$

где $\dfrac{d^m}{dt^m}\left[\sigma_+(R)\right]_+$ и $\dfrac{d^m}{dt^m}\left[\sigma_+(R)\right]_0$ — полные производные по времени порядка m от функции $\sigma_+(x_1,\ldots,x_n)$, вычисленные в точке R в соответствии с системами (8) и (14). Из (19) видно, что в достаточно малой окрестности R положительные полутраектории $X_+(R,t)$ и $X_0(R,t)$ лежат одновременно либо в области $\sigma_+ \geqslant 0$, либо в области $\sigma_+ < 0$. В этой окрестности для $t \geqslant 0$ в первом случае полагаем $X(R,t) = X_+(R,t)$, во втором — $X(R,t) = X_0(R,t)$. Поскольку идентичная ситуация имеет место и для отрицательных полутраекторий $X_+(R,t)$ и $X_0(R,t)$, то единственность решения $X(R,t)$ в точках R не нарушена.

4. Продолжаемость определенного выше решения $X(P,t)$ для $t\to\infty$ очевидна; непрерывность по начальным данным легко усматривается с учетом (18). Поэтому отображение $X(P,t)$ удовлетворяет всем аксиомам [10] динамической системы. Траектория $X(P,t)$ недифференцируема лишь в точках входа на поверхность переключения, т. е. в счетное число моментов времени. На такие динамические системы сразу распространяются (с незначительными изменениями) многие результаты обычной теории устойчивости, в частности, теоремы Барбашина и Красовского [11] об устойчивости в целом (см. ниже).

5. Рассмотрим функции

$$V_1(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_ix_j \qquad (\alpha_{ij}=\alpha_{ji});$$

$$V'(x_1,\ldots,x_n) = V_1(x_+,x_2,\ldots,x_n) = V_1(x_1,\ldots,x_n) + \tag{20}$$
$$+ 2k_pa_1^{-1}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{1k}x_k + k_p^2a_1^{-2}\alpha_{11} \qquad (x_+ = x_1 + k_pa_1^{-1});$$

$$V''(x_1,x_2,\ldots,x_n) = V_1(x_-,x_2,\ldots,x_n) = V_1(x_1,\ldots,x_n) - \tag{21}$$
$$- 2k_pa_1^{-1}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{1k}x_k + k_p^2a_1^{-2}\alpha_{11} \qquad (x_- = x_1 - k_pa_1^{-1})$$

и их полные производные $\dot V_1$, $\dot V'_+$, $\dot V''_-$ по времени, определяемые из систем (10), (8), (9):

$$\dot{V}_1 = - W_1(x_1, \ldots, x_n) = - \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} x_i x_j;$$

$$\dot{V}'_+ = - W_1(x_+, x_2, \ldots, x_n); \qquad (22)$$

$$\dot{V}'_- = - W_1(x_-, x_2, \ldots, x_n),$$

где

$$\beta_{ij} = \beta_{ji} = (\alpha_{in} a_j + \alpha_{jn} a_i) a_{n+1}^{-1} - \alpha_{ji-1} - \alpha_{ij-1}; \quad b_0 = \alpha_{i0} = \alpha_{0i} = 0. \quad (23)$$

Функцию Ляпунова V для исходной системы (6) — (7) будем строить, сшивая функции (20) и (21) на поверхности переключения $\sigma = 0$:

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} V'(x_1, \ldots, x_n) - V'(0, \ldots, 0) & \text{при } \sigma \geqslant 0 \\ V''(x_1, \ldots, x_n) - V''(0, \ldots, 0) & \text{при } \sigma \leqslant 0 \end{cases}, \qquad (24)$$

для чего V' и V'' выберем так, чтобы имело место равенство

$$V'(x_1, \ldots, x_n) = V''(x_1, \ldots, x_n) \qquad (25)$$

при $\sigma(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Соотношение $V' = V''$ эквивалентно равенству $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k} x_k = 0$, так что условия сшивания (25) можно записать в форме соотношения $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k} x_k = A \sum_{k=1}^{n-1} b_k x_k$, т. е. соотношения

$$\alpha_{1k} = A b_k \quad (k = 1, \ldots, n, \ A = \mathrm{const} > 0). \qquad (26)$$

Конкретный выбор величины A несуществен для дальнейших рассуждений. Положим

$$\alpha_{1k} = a_1 b_k \qquad (A = a_1), \qquad (27)$$

что несколько упрощает ряд получаемых ниже выражений и облегчает переход к рассмотрению случая одного нулевого корня в уравнении (4). С учетом (20), (21), (27) запишем (24) в форме

$$V(x_1, \ldots, x_n) = V_1(x_1, \ldots, x_n) + 2k_p \sigma \operatorname{sgn} \sigma. \qquad (28)$$

Для любого решения $X(P, t)$ всюду, кроме, быть может, точек входа $X(P, t)$ на поверхность переключения, производная dV/dt по времени от функции (24) вдоль $X(P, t)$ существует и задается соотношениями

$$\frac{dV}{dt} = \begin{cases} \dot{V}'_+ & \text{при } \sigma > 0 \\ \dot{V}'_- & \text{при } \sigma < 0 \\ \dot{V}_0 & \text{при } \sigma = \dot{\sigma} = 0, \ \dot{\sigma}_- > 0 > \dot{\sigma}_+ \end{cases},$$

где $\dot{V}_0$ — полная производная функции $[V]|_{\sigma=0} = |V_1(x_1, \ldots, x_n)]|_{\sigma=0}$ по времени в силу системы (14).

Из (28) видно, что при положительной определенности формы $V_1(x_1, \ldots, x_n)$ области $V(x_1, \ldots, x_n) < c = \mathrm{const}$ $(c > 0)$ пространства x замкнуты, включают начало координат и вложены одна в другую в порядке убывания c. Опираясь на этот факт, можно свести изучение устойчивости системы (6) — (7) к исследованию функции Ляпунова $V_1(x_1, \ldots, x_n)$, для устойчивой линейной системы (10). Известно, что если форма $W_1(x_1, \ldots, x_n)$ положительно определенная, то таковой же является и форма $V_1(x_1, \ldots, x_n)$ (А. М. Ляпунов). Однако из (23), (26) и $b_n = 0$ следует, что $\beta_{11} = 0$ и форма W_1 не может быть знакоопределенной. Поэтому воспользуемся следующим видоизменением теоремы А. М. Ляпунова.

Теорема I. Если все корни характеристического уравнения системы

$$dx_i/dt = \sum_{s=1}^{n} p_{is} x_s \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{29}$$

имеют отрицательные вещественные части, то, какова бы ни была знакоположительная форма W_1 порядка m, обращающаяся в нуль лишь на множестве M, не содержащем положительных полутраекторий системы (29), кроме $O(0, \ldots, 0)$, существует одна и только одна форма V_1 того же порядка, удовлетворяющая уравнению

$$dV_1/dt = \sum_{s, r=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} p_{sr} x_r = -W_1, \tag{30}$$

и эта форма обязательно будет положительно определенной.

Действительно, единственная ([12], стр. 61) форма V_1, удовлетворяющая (30), не может принимать отрицательных значений в любой окрестности начала координат, так как для системы (29) оказались бы выполненными условия теоремы Красовского [13] о неустойчивости. Форма V_1 не может быть и знакоположительной, так как, выбирая в этом случае точку P_0, отличную от O (для которой $V_1(P_0) = 0$), и рассматривая положительную полутраекторию $f(P_0, t)$ $(f(P_0, 0) = P_0)$ системы (29), мы пришли бы к равенствам $V_1[f(P_0, t)] = 0$, $W_1[f(P_0, t)] = 0$ для $t > 0$, что несовместимо с отсутствием положительных полутраекторий $f(P, t)$ на M. Следовательно, форма V_1 может быть только определенно положительной.

Так как $\beta_{11} = 0$, то для знакоположительности формы $W_1(x_1, \ldots, x_n)$ необходимо, чтобы

$$\beta_{1k} = 0 \qquad (k = 2, \ldots, n). \tag{31}$$

Тогда

$$\begin{gathered} W_1(x_1, \ldots, x_n) = W_1(x_+, x_2, \ldots, x_n) = \\ = W_1(x_-, x_2, \ldots, x_n) = W_1^* = \sum_{i, j=2}^{n} \beta_{ij} x_i x_j, \end{gathered} \tag{32}$$

где коэффициенты β_{ij} удовлетворяют соотношениям (23) и (27).

Допустим, что $n(n-1)/2$ величин $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ $(i, j = 2, \ldots, n)$ удалось выбрать так, чтобы выполнялось (31), и функция W_1^* как форма переменных $x_2, \ldots, x_n$ оказалась положительно определенной. В этом случае W_1^* будет знакоположительной формой переменных $x_1, \ldots, x_n$, обращающейся в нуль лишь на M-множестве $x_2 = \ldots = x_n = 0$, бесконтактном для всех траекторий системы (10), кроме траектории $O(0, \ldots, 0)$. В силу теоремы I форма $V_1(x_1, \ldots, x_n)$ — положительно определенная.

Множества M и (15) имеют лишь одну общую точку O, так что, согласно (32), в любой точке $Q(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ множества (15), отличной от O,

$$\dot{V}_+'(Q) < 0; \qquad \dot{V}_-''(Q) < 0. \tag{33}$$

Покажем, что из (33) следует неравенство $\dot V_0(Q) < 0$. Непосредственное вычисление дает:

$$\dot V'_+(Q) = \sum_{r=1}^{n-1} (\partial V_1/\partial x_r)_Q\, x^*_{r+1} + (\partial V_1/\partial x_n)_Q\, f_n^+(Q);$$

$$\dot V''_-(Q) = \sum_{r=1}^{n-1} (\partial V_1/\partial x_r)_Q\, x^*_{r+1} + (\partial V_1/\partial x_n)_Q\, f_n^-(Q); \qquad (34)$$

$$\dot V_0(Q) = \sum_{r=1}^{n-1} (\partial V_1/\partial x_r)_Q\, x^*_{r+1} + (\partial V_1/\partial x_n)_Q\, f_n^0(Q),$$

где $(\partial V_1/\partial x_r)_Q$ — значение частной производной $\partial V_1/\partial x_r$ в точке Q, а $f_n^-(Q)$, $f_n^0(Q)$, $f_n^+(Q)$ задаются равенствами (17). Из (34) находим:

$$\dot V'_+(Q) - \dot V_0(Q) = (\partial V_1/\partial x_n)_Q\, [f_n^+(Q) - f_n^0(Q)];$$

$$\dot V''_-(Q) - \dot V_0(Q) = (\partial V_1/\partial x_n)_Q\, [f_n^-(Q) - f_n^0(Q)],$$

откуда, согласно (16), следует:

$$0 > \dot V'_+(Q) \geqslant \dot V_0(Q) \geqslant \dot V''_-(Q)$$

при $(\partial V_1/\partial x_n)_Q \leqslant 0$ и

$$0 > \dot V''_-(Q) > \dot V_0(Q) > \dot V'_+(Q)$$

при $(\partial V_1/\partial x_n)_Q > 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае функция $V[X(P, t)]$ не возрастает вдоль любой траектории $X(P, t)$, а множество M, на котором производная dV/dt существует и равна нулю, не содержит целых траекторий $X(P, t)$. Существенные условия теорем [11] об устойчивости в целом выполняются, поскольку бесконечно большая функция $V(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$ непрерывна и обращается в нуль лишь при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

При рассмотрении условий знакоопределенности формы $W_1^* = \sum_{i,j=2}^{n} \beta_{ij} x_i x_j$ в качестве варьируемых величин удобно брать не коэффициенты $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ $(i, j = 2, \ldots, n)$, а связанные с ними неособым линейным преобразованием (23) недиагональные элементы β_{ij} $(i \neq j)$ дискриминанта D_{n-1} формы W_1^*. Диагональные элементы β_{kk} выражаются через них в соответствии с (23), (27) и (31) соотношениями

$$\beta_{kk} = 2\left[B_{kn} + \sum_{r=0}^{k-3} (-1)^r \beta_{k+r+1,\, k-r-1}\right] \qquad (k = 2, \ldots, n), \qquad (35)$$

где

$$B_{kn} = b_{k-1} a_k - \sum_{r=0}^{k-2} (-1)^r (b_{k+r} a_{k-r-1} + b_{k-r-2} a_{k+r+1}); \qquad (36)$$

$$b_{n+l} = a_{n+l+1} = \alpha_{i,\, n+l} = \beta_{n+l,\, i} = 0 \qquad (37)$$

при $l \geqslant 1$ и любом i. Тогда, применяя теорему Сильвестра к форме $W_1^*(x_2, \ldots, x_n)$, сформулируем следующее предложение.

Теорема II. Если элементы $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ $(i \neq j)$ определителя D_{n-1}, диагональные элементы которого удовлетворяют соотношениям (35) — (37), можно выбрать так, чтобы все последовательные диагональные миноры этого определителя были положительными, то равновесное состояние релейной системы (6)—(7), удовлетворяющей допущениям а), б) и условиям (5), асимптотически устойчиво в целом.

Заметим, что для исследования релейных систем (6) — (7), удовлетворяющих условиям а) и (5), в случае нейтральной линейной части ($a_1 = 0$) можно воспользоваться функцией Ляпунова, получающейся из (28) и (27) при $a_1 \to 0$. Основываясь на теореме I, легко показать, что критерии устойчивости, построенные с помощью этой функции, совпадают с соответствующими критериями, получаемыми по теореме II, если положить в последних $a_1 = 0$. Это следует иметь в виду, применяя теорему II к конкретным релейным системам.

6. Теорема II удобна для построения упрощенных критериев устойчивости систем высокого порядка.

Пример 1. Весьма простой критерий

$$B_{kn} > 0 \qquad (k = 2, \ldots, n), \tag{38}$$

содержащий лишь простые рациональные функции параметров $a_1, \ldots, a_{n+1}$, $b_1, \ldots, b_{n-1}$, сразу находим из теоремы II, полагая $\beta_{ij} = 0$ $(i \neq j)$.

Для $n = 4{,}5$ в результате достаточно простых выкладок можно получить и наиболее точные из критериев устойчивости, доставляемых предложенным методом.

Пример 2. Рассмотрим удовлетворяющую ограничениям а), (3), (5) систему 1 ($n = 4$), линейная часть которой, характеризуемая передаточной функцией

$$W(p) = \frac{b_3 p^2 + b_2 p + b_1}{a_5 p^4 + a_4 p^3 + a_3 p^2 + a_2 p + a_1},$$

устойчива или нейтральна. В последнем случае данная система уравнений может служить, в частности, математической моделью релейной следящей системы с ускоряющими звеньями (см. [1], стр. 82 — 83, 216—221) при учете электромагнитной и электромеханической постоянных времени двигателя и постоянной времени усилителя. Последнее приходится, например, принимать во внимание, когда сигнал ошибки с выхода потенциометрического измерительного устройства подается на магнитный усилитель.

В принятых выше обозначениях

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2B_{2,4} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{32} & 2(B_{3,4} + \beta_{24}) & \beta_{34} \\ \beta_{42} & \beta_{43} & 2B_{4,4} \end{vmatrix}. \tag{39}$$

Одновременное выполнение неравенств

$$B_{2,4} > 0, \quad B_{3,4} + \beta_{24} > 0, \quad 4B_{4,4} B_{2,4} - \beta_{24}^2 > 0 \tag{40}$$

— необходимое условие положительной определенности формы $W_1^*(x_2, x_3, x_4)$. Полагая в неравенствах (39) $\beta_{23} = \beta_{34} = 0$, находим:

$$D_3 = 2(B_{3,4} + \beta_{24})(4B_{4,4} B_{2,4} - \beta_{24}^2);$$

так что условие (40) является также и достаточным. Переписав (40) в виде

$$-2\sqrt{B_{4,4} B_{2,4}} < \beta_{24} < 2\sqrt{B_{4,4} B_{2,4}}\,; \quad -B_{3,4} < \beta_{24},$$

сразу приходим к необходимым и достаточным условиям разрешимости неравенств (40) относительно β_{12}:

$$B_{2,4} = b_1 a_2 - b_2 a_1 > 0;$$
$$B_{3,4} = b_2 a_3 - b_3 a_2 - b_1 a_4 > -2\sqrt{B_{2,4}(b_3 a_4 - b_2 a_5)}. \tag{41}$$

Согласно теореме II, условия (41) достаточны для устойчивости в целом рассматриваемой релейной системы.

Пример 3. При $n = 5$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2B_{2,5} & \beta_{23} & \beta_{24} & \beta_{25} \\ \beta_{32} & 2(B_{3,5}+\beta_{24}) & \beta_{34} & \beta_{35} \\ \beta_{42} & \beta_{43} & 2(B_{4,5}+\beta_{53}) & \beta_{45} \\ \beta_{52} & \beta_{53} & \beta_{54} & 2B_{5,5} \end{vmatrix}, \tag{42}$$

где, согласно (36), (37),

$$B_{2,5} = b_1 a_2 - b_2 a_1; \quad B_{3,5} = b_2 a_3 - b_3 a_2 + b_4 a_1 - b_1 a_4;$$
$$B_{4,5} = b_3 a_4 - b_4 a_3 - b_2 a_5 + b_1 a_6; \quad B_{5,5} = b_4 a_5 - b_3 a_6.$$

Одновременное выполнение неравенств

$$B_{2,5} > 0, \qquad B_{5,5} > 0; \tag{43}$$
$$4B_{5,5}(B_{3,5} + \beta_{24}) - \beta_{53}^2 > 0, \qquad 4B_{2,5}(B_{4,5} + \beta_{53}) - \beta_{24}^2 > 0 \tag{44}$$

— необходимое условие положительной определенности формы $W_1^*(x_2, \ldots, x_5)$. Полагая в (42) $\beta_{23} = \beta_{25} = \beta_{34} = \beta_{45} = 0$, аналогично случаю $n = 4$ находим, что это условие является также и достаточным. Знак неравенства в соотношениях (44) можно заменить знаком равенства и искать далее условия существования хотя бы одного простого вещественного решения получившейся системы квадратных уравнений. Пользуясь соответствующими результатами [4] (стр. 95—97), приходим к следующим условиям устойчивости:

$$B_{2,5} > 0; \qquad B_{5,5} > 0;$$
$$M^3 + N^3 - M^2N^2 - 9/8MN + 27/956 > 0, \tag{45}$$

где

$$M = 0{,}25 B_{2,5}^{-1/3} B_{4,5} B_{5,5}^{-2/3}, \qquad N = 0{,}25 B_{2,5}^{-2/3} B_{3,5} B_{5,5}^{-1/3}.$$

7. Для $n > 5$ широкий класс достаточных условий устойчивости получается без чрезмерного усложнения выкладок, если, не считая тождественно равными нулю один или два из элементов β_{ij} $(i \neq j)$, исследовать неравенства, аналогичные неравенствам (40) или (44), и тем самым уточнять критерий (38).

Пример 4. Так, в случае $n = 6$, рассматривать который оказывается необходимым при тщательном описании линейной части даже достаточно простых релейных систем, приходим к системе неравенств

$$B_{5,6} + \beta_{46} > 0; \qquad B_{3,6} + \beta_{24} > 0;$$
$$4B_{2,6}B_{4,6} - \beta_{24}^2 > 0; \quad 4B_{4,6}B_{6,6} - \beta_{46}^2 > 0; \tag{46}$$
$$4B_{2,6}B_{4,6}B_{6,6} - B_{2,6}\beta_{46}^2 - B_{6,6}\beta_{24}^2 > 0,$$

оставляя в качестве варьируемых величин β_{24} и β_{46}. Из системы (46) рассуждениями, аналогичными выполненным в примере 2, находим критерий устойчивости в целом: $B_{2,6}, B_{4,6}, B_{6,6} > 0$, $B_{5,6}^2 B_{2,6} + B_{6,6} B_{3,6}^2 < 4B_{2,6}B_{4,6}B_{6,6}$.

Не считая заранее равными нулю элементы β_{24} и β_{35}, имеем:

$$D_5 = 4B_{6,6} \begin{vmatrix} 2B_{2,6} & 0 & \beta_{24} & 0 \\ 0 & 2(B_{3,6} + \beta_{24}) & 0 & \beta_{35} \\ \beta_{24} & 0 & 2(B_{4,6} + \beta_{53}) & 0 \\ 0 & \beta_{53} & 0 & 2B_{5,6} \end{vmatrix}.$$

Выкладки, подобные проделанным в примере 3, дают расширение области устойчивости (38), определяемое соотношениями $B_{2,6}, B_{5,6} B_{6,6} > 0$ и (45), где

$$M = 0{,}25 B_{2,6}^{-1/3} B_{3,6} B_{5,6}^{-2/3}; \qquad N = 0{,}25 B_{2,6}^{-2/3} B_{4,6} B_{5,6}^{-1/3}.$$

Случай $\beta_{46} \neq 0$, $\beta_{35} \neq 0$ рассматривается аналогично.

Простые неравенства

$$B_{4,6} + \beta_{35} + \beta_{26} > 0; \quad 4B_{3,6}B_{5,6} - \beta_{35}^2 > 0; \quad 4B_{2,6}B_{6,6} - \beta_{26}^2 > 0,$$

получающиеся для β_{26} и β_{35}, приводят к следующему расширению области (38):

$$B_{2,6}, B_{3,6}, B_{5,6} B_{6,6} > 0; \quad B_{4,6} > -2\left(\sqrt{B_{3,6}B_{5,6}} + \sqrt{B_{2,6}B_{6,6}}\right).$$

Автор благодарит Е. А. Барбашина за руководство при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, М. — Л., 1955.
2. В. Г. Болтянский, Л. С. Понтрягин, Труды III Всесоюзного математического съезда, **1**, изд. АН СССР, 217, 1956.
3. Д. В. Аносов, Автоматика и телемеханика, **20**, 135 (1956).
4. А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, М. — Л., 1951.
5. А М. Летов, Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Гостехиздат, М. — Л., 1956.
6. В. А. Якубович, ДАН СССР, **117**, 44 (1957).
7. А. А. Андронов, Н. Н. Баутин, Г. С. Горелик, Автоматика и телемеханика, **6**, 15 (1946).
8. Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, **18**, 27 (1957).
9. А. Ф. Филиппов, Успехи математических наук, **13**, 217 (1958).
10. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М. — Л., 1949.
11. Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский, ДАН СССР, **86**, 453 (1952).
12. И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, Гостехиздат, М.—Л., 1952.
13. Н. Н. Красовский, ДАН СССР, **101**, 17 (1955).

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию
8 июня 1959 г.