О ТОЧЕЧНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПРЯМОЙ В ПРЯМУЮ

Н. Н. Леонов

Проводится дальнейшее изучение точечного преобразования прямой в прямую в свете задач, возникающих при исследовании конкретных систем. Устанавливается ряд теорем об областях притяжения неподвижных точек, исследуются бифуркации многократных неподвижных точек достаточно гладкого преобразования и рассматриваются бифуркации неподвижных точек разрывного кусочно-линейного преобразования.

Как известно, изучение многих колебательных систем, встречающихся в радиофизике и автоматическом регулировании, сводится к исследованию точечного преобразования прямой в прямую [1–5].

Метод точечных преобразований был разработан и впервые применен к задачам теории регулирования А. А. Андроновым и его сотрудниками [1, 2, 6, 7]. Систематическое изложение некоторых общих вопросов метода точечных преобразований дано в работах [8–10]. Разработанный ранее итерационный метод [11] был применен для изучения колебательных систем в работах [12, 13]. Основные результаты этого метода использованы в методе точечных преобразований.

Пусть в некоторой области задано преобразование прямой в прямую

$$\bar{x} = f(x)\,. \tag{1}$$

Каждой точке $M_0(x_0)$ прямой из области определения преобразования (1), которое обозначим через T, соответствует последовательность итераций $M_1 = TM_0$, $M_2 = T^2M_0$, ... Точка M^* называется неподвижной точкой (н. т.) преобразования T, если $TM^* = M^*$. Н. т. M^* устойчива, если любая последовательность итераций, начинающаяся в достаточно малой окрестности точки M^*, сходится к M^*, т. е. если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого $x_0 \in (x^* - \delta,\ x^* + \delta)$ и любого k выполняется неравенство $|x_k - x_k^*| < \varepsilon$. Н. т. M^* неустойчива, если для каждого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется расходящаяся последовательность итераций, начинающаяся в δ-окрестности точки M^*. Необходимым и достаточным критерием устойчивости является условие [11] $|df(x^*)/dx| < 1$, а неустойчивости—$|df(x^*)/dx| > 1$.

Точка $M_1^*(x_1^*)$, такая, что $x_1^* = T^n x_1^*$, но $x_1^* \neq T^m x_1^*$ для всех $m < n$, называется n-кратной н. т. преобразования T. Она устойчива, если $|df^n(x_1^*)/dx| < 1$, где f^n — n-ая итерация функции $f(x)$. Величина $\lambda_i = df^n(x_i^*)/dx$ называется характеристическим корнем н. т. M_i^*. Вместе с точкой M_1^* n-кратными н. т. являются и точки $M_{i+1}^* = T^i M_1^* (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ [11]. Совокупность n-кратных н. т. $M_i^* (i=1, 2, \ldots, n)$ называется циклом, так как при применении к ним преобразования T они циклически переставляются и, следовательно, последовательность итераций n-кратной н. т. T—периодическая. Заметим, что n-членный цикл преобразования T устойчив, если устойчивы составляющие его н. т. преобразования T; n-кратные н. т. T, составляющие цикл, имеют равные характеристические корни [9] и, следовательно, они все или устойчивы, или неустойчивы.

Множество точек прямой, последовательности итераций которых сходятся к н. т. M^*, называется областью притяжения н. т. M^*. Область притяжения n-членного цикла распадается на области притяжения n-кратных н. т., входящих в него, по отношению к преобразованию T^n.

Из выше сказанного следует, что каждый цикл целиком определяется одной ему принадлежащей n-кратной н. т. Поэтому все, что можно сказать о существовании области определения и устойчивости н. т., автоматически переносится на соответствующий цикл.

В первой части работы устанавливаются теоремы о наибольшей возможной кратности н. т. преобразования (1) и обобщены известные теоремы об областях притяжения устойчивых н. т. [14] на случай кусочно-непрерывного преобразования.

Во второй части работы содержится детальное исследование (применительно к преобразованию прямой в прямую) бифуркаций кратных н. т. при переходах через поверхности N_{+1}, N_{-1} [9].

Как отмечено в [9], кроме бифуркаций, связанных с переходом через $N_{+1}, N_{-1}, N_{\varphi}$, возможны еще бифуркации, обусловленные нарушением непрерывности преобразования. В третьей части работы исследуется разрывное кусочно-линейное преобразование прямой в прямую, у которого простая н. т. отсутствует из-за его разрывности. При этом построено разбиение пространства параметров на области существования н. т. различных типов. Отметим, что разрывные точечные преобразования уже неоднократно изучались в связи с конкретными задачами теории колебаний и автоматического регулирования [2-5].

1. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ. СОСУЩЕСТВОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ ПРИТЯЖЕНИЯ

Пусть имеем точечное преобразование прямой в прямую $\bar{x}=f(x)$, где $x \in (a, b)$.

Теорема 1. Пусть $f(x)$—непрерывная, возрастающая на интервале (a, b) функция. Тогда преобразование T имеет лишь простые неподвижные точки чередующейся устойчивости.

Допустим, что T имеет n-кратную н. т. x_1^*. Тогда T имеет цикл $x_1^*, \ldots, x_n^*$, где $x_1^*=f(x_n^*)$, $x_{i+1}^*=f(x_i^*)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, и $x_i^* \neq x_j^*$ при $i \neq j$. Пусть для определенности $x_2^* > x_1^*$; тогда вследствие того, что f—возрастающая, $x_1^* < x_2^* < \ldots < x_n^* < x_1^* < \ldots$, откуда $x_1^* < x_1^*$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Так как f — непрерывная функция, то соседние н. т. T не могут иметь одинаковую устойчивость. Поэтому на основании теоремы 1 работы [14] можно утверждать, что интервал (a,b) разбивается неустойчивыми н. т. T на области притяжения устойчивых н. т. Границы областей притяжения каждой устойчивой н. т. совпадают с ближайшими к ней неустойчивыми н. т. T.

Теорема 2. Если $f(x)$ — непрерывная, убывающая на интервале (a,b) функция, то T может иметь неподвижные точки кратности не более 2 и не более одной простой неподвижной точки.

Действительно, двух различных простых н. т. x_1^* и x_2^* преобразования T быть не может, так как при $x_1^* > x_2^*$ (в силу того, что f—убывающая), приходим к противоречию, ибо из $f(x_1^*) < f(x_2^*)$ следует, что $x_1^* < x_2^*$. Функция $f[f(x)] = f^2(x)$, очевидно, непрерывная и возрастающая на (a,b). Поэтому на основании теоремы 1 преобразование T^2 имеет лишь простые неподвижные точки чередующейся устойчивости. Так как неподвижные точки T^2 являются неподвижными точками T^{2m} [11], и других н. т. T^{2m} (на основании метеоры 1) нет, то преобразование T неподвижных точек нечетной кратности, большей единицы, не имеет.

Теоремы 1 и 2 можно обобщить на более широкий класс функций $f(x)$, а именно — на класс почти всюду непрерывных в интервале (a, b) функций, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, которые будут поставлены ниже. Для доказательства теоремы 3 (см. ниже) нам потребуется следующее утверждение.

Пусть $f(x)$—почти всюду непрерывная в интервале (a, b) функция, имеющая точки разрыва двух типов: в точках a_i значения $f(a_i - 0)$ и $f(a_i + 0)$ одновременно или больше, или меньше a_i, а в точках разрыва b_i $f(b_i - 0) < b_i < f(b_i + 0)$. Пусть, кроме того, T имеет простые неподвижные точки α_j. Тогда между любыми двумя точками b_i найдется по крайней мере одна точка α_j.

Для доказательства этого утверждения предположим, что в интервале (b_{i-1}, b_i) точек α_j нет. Тогда в окрестности b_{i-1} функция $f(x)>x$, в окрестности b_i $f(x)<x$ и в интервале (b_{i-1}, b_i) разность $f(x)-x$ должна менять знак. Точек α_j в интервале (b_{i-1}, b_i) нет. Следовательно, должна существовать такая точка γ, что $f(\gamma-0)>\gamma>f(\gamma+0)$; однако по условию $f(x)$ таких разрывов не имеет. Поэтому в (b_{i-1}, b_i) должна существовать по крайней мере одна точка α_j.

Теорема 3. Пусть точки b_i, α_j делят интервал (a, b) на интервалы (σ_{k-1}, σ_k) (которые обозначим через δ_k), и $f(x)$ удовлетворяет указанным выше условиям и неравенствам $\sigma_{k-1}<f(x)<\sigma_k$ на интервале (σ_{k-1}, σ_k). Тогда преобразование T может иметь лишь простые неподвижные точки. Каждая устойчивая неподвижная точка α_j имеет свою область притяжения, ограниченную ближайшими b_i или неустойчивыми α_j.

Доказательство теоремы 3 аналогично приведенному для теоремы 1. В интервале δ_k нет ни α_j, ни b_i. Следовательно, в δ_k функция $f(x)$ только больше или только меньше, чем x, и T имеет лишь простые н. т.

Пусть σ_l является или точкой b_i, или неустойчивой точкой α_j. Тогда в окрестности σ_l $f(x)>x$, если $x>\sigma_l$ и $f(x)<x$ если $x<\sigma_l$. При удалении x от σ_l разность $f(x)-x$ может изменить знак только непрерывно, что следует из условий, наложенных на $f(x)$, а так как в (σ_{l-1}, σ_l) функция $f(x)<x$, а в (σ_l, σ_{l+1}) функция $f(x)>x$, то σ_{l-1}, σ_{l+1} есть устойчивые точки α_j.

Пусть σ_{l-1} и σ_l — устойчивые α_j. Тогда $f(x)<x$ в правой полуокрестности σ_{l-1} и $f(x)>x$ в левой полуокрестности σ_l. Так как в δ_l нет ни α_j, ни b_i, то $f(x)$ или только больше x, или только меньше x в δ_l. Таким образом, σ_{l-1}, σ_l одновременно не могут быть устойчивыми точками α_j.

Из выше сказанного следует, что 1) устойчивые неподвижные точки α_j, с одной стороны, и точки b_i с неустойчивыми точками α_j, с другой, чередуются, 2) если в δ_k функция $f(x)>x$ (или $f(x)<x$), то в δ_{k-1}, δ_{k+1} $f(x)<x$ ($f(x)>x$).

Пусть α_j — устойчивая н. т. преобразования T, являющаяся граничной точкой для интервалов δ_k, δ_{k+1}. Интервалы δ_k и δ_{k+1} служат областью притяжения точки α_j. В δ_k имеет место неравенство $\alpha_j>f(x)>x$, в δ_{k+1} — соотношение $\alpha_j<f(x)<x$. Следовательно, последовательность итераций $\{x_n\}$ любой точки интервалов δ_k, δ_{k+1}—сходящаяся и при $n\to\infty$ $x_n\to\alpha_j$.

Из теоремы 3 следует теорема 4.

Теорема 4. Если $f(x)$ такова, что $f[f(x)]$ удовлетворяет условиям теоремы 3, то преобразование T может иметь неподвижные точки кратности не выше 2.

В частности, если $f(x)$ — почти всюду непрерывная в (a, b) функция, невозрастающая на участках непрерывности, причем в точках разрыва $f(a_i-0)>f(a_i+0)$, то $f^2(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.

2 БИФУРКАЦИИ МНОГОКРАТНЫХ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЯМОЙ В ПРЯМУЮ ПРИ ПЕРЕХОДАХ ЧЕРЕЗ ГРАНИЧНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ N_{+1}, N_{-1}

Пусть преобразование T, зависящее от параметра μ и состоящее из последовательно применяемых преобразований

$$Y = T_1 X = f_1(X, \mu); \qquad (2.1)$$

$$Z = T_2 Y = f_2(Y, \mu), \qquad (2.2)$$

имеет при $\mu = 0$ двучленный цикл M_1^*, M_2^*, такой, что $M_2^* = T_1 M_1^*$, $M_1^* = T_2 M_2^*$. Здесь M_1^*—н. т. преобразования $T_2 T_1$, M_2^* — н. т. преобразования $T_1 T_2$. Характеристические корни точек M_1^* и M_2^* равны между собой [9].

Рассмотрим сначала бифуркации н. т. M_1^* и M_2^* в случае, когда их характеристические корни равны $+1$. Пусть X_1, $f_1(X_1, 0)$—координаты точки M_1^* и пусть в окрестности точки $M_1[X_1, f_1(X_1, \mu)]$ преобразование T_1 имеет вид:

$$y = \beta_1 x + \ldots + \beta_{k_1} x^{k_1} + \ldots, \qquad (2.3)$$

а преобразование T_2 в окрестности точки $M_2 = T_1 M_1$ —

$$z = \alpha_1 y + \ldots + \alpha_{k_2} y^{k_2} + \ldots, \qquad (2.4)$$

где при $\mu = 0$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{k_2 - 1} = \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_{k_1 - 1} = 0;$$

$$\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 \neq 0, \quad \beta_1 = \tilde{\beta}_1 \neq 0, \quad \alpha_{k_2} \neq 0, \quad \beta_{k_1} \neq 0.$$

Тогда преобразование $\Pi = T_2 T_1$ в окрестности M_1 можно записать в виде:

$$\bar{x} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots + \gamma_m x^m + \ldots, \qquad (2.5)$$

где при $\mu = 0$

$$\gamma_0 = \gamma_2 = \gamma_3 = \ldots = \gamma_{m-1} = 0; \quad \gamma_1 = 1; \quad \gamma_m \neq 0;$$

$$m = \min(k_1, k_2); \quad \gamma_0 = -X_1 + f_2[f_1(X_1, \mu), \mu];$$

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j_1 + \ldots + j_i = n} \beta_{j_1} \ldots \beta_{j_i} \right) \quad (n = 1, 2, \ldots, m). \qquad (2.6)$$

При $\bar{x} = x = x^*$ получаем уравнение для координат н. т.:

$$\delta_0 + \delta_1 x^* + \ldots + \delta_{m-1}(x^*)^{m-1} + (x^*)^m = 0, \qquad (2.7)$$

где

$$\delta_1 = (\gamma_1 - 1)[\gamma_m + x^* \gamma_{m+1} + \ldots]^{-1}, \quad \delta_i = \gamma_i [\gamma_m + x^* \gamma_{m+1} + \ldots]^{-1}$$
$$(i = 0, 2, 3, \ldots, m-1). \qquad (2.8)$$

При $\mu = 0$ $\delta_i = 0$ ($i = 0, 1, \ldots, m-1$) и (2.7) имеет m-кратный нулевой корень. Согласно теореме Вейерштрасса [15] при достаточно малых μ уравнение (2.7) имеет не более m корней, стремящихся к нулю при $\mu \to 0$. Матрица величин

$$a_{np} = \left.\frac{\partial \gamma_n}{\partial \alpha_p}\right|_{\mu=0} = \begin{cases} 0, & p \neq n \\ \tilde{\beta}_1^n, & p = n \end{cases}, \quad b_{np} = \left.\frac{\partial \gamma_n}{\partial \beta_p}\right|_{\mu=0} = \begin{cases} 0, & p \neq n \\ \tilde{\alpha}_1, & p = n \end{cases} \quad (n = 1, 2, \ldots, m)$$

имеет ранг m. Поэтому в окрестности точки $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m)_{\mu=0}$ система (2.6) разрешима хотя бы относительно $\alpha_i (i = 1, \ldots, m)$ через γ_j и β_q.

Окрестность точки $\Delta(\delta_0, \ldots, \delta_{m-1})_{\mu=0}$ можно разбить на области существования одинаковых количеств действительных корней уравнения (2.7), т. е. на области существования одинаковых количеств н. т. Π. Как известно, действительные корни (2.7) могут появляться и исчезать лишь парами. Если (2.7) имеет корни

$$x_{2j-1} = \eta_j + i\varsigma_j, \quad x_{2j} = \eta_j - i\varsigma_j \quad (j = 1, 2, \ldots, p, \; 2p \leqslant m);$$

$$x_{2p+l} = \xi_l \quad (l = 1, 2, \ldots, m - 2p),$$

то коэффициенты δ_q являются полиномами по ξ, η, ς:

$$\delta_q = P_q(\xi_l, \eta_j, \varsigma_j), \tag{2.9}$$

и в окрестности точки Δ область Q_p существования $2p$ комплексных корней отделяется от области Q_{p-1} существования $2p-2$ комплексных корней поверхностью Γ_p. Уравнение этой поверхности в параметрическом виде получается из (2.9), когда одна из величин ς_j равна нулю.

Нетрудно заметить, что все области $Q_p(p = 0, 1, \ldots, p_0)$, где p_0 — ближайшее целое число, меньшее или равное 0,5 m, примыкают к линии, на которой все корни уравнения (2.7) равны между собой. Поэтому при бифуркации сложная неподвижная точка может распадаться на $m - 2p$ простые н. т. $(p = 0, 1, \ldots, p_0)$.

Пусть теперь точка $H(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{m-1})$ при движении вдоль некоторой кривой в окрестности Δ проходит через все Q_p, начиная с $p = p_0$. В области Q_{p_0} при m четном н. т. нет, при нечетном m имеется одна н. т.. При движении точка H пересекает поверхность Γ_p, в результате чего каждый раз рождаются две н. т., одна устойчивая, другая неустойчивая [9]. Таким образом, при четном m число устойчивых н. т. равно числу неустойчивых, при нечетных m — на единицу больше точек устойчивости порождающей н. т. При достаточно малых μ $\gamma_1 = \alpha_1\beta_1$ и близко к единице; в достаточно малой окрестности точки M^* выражение (2.5) есть возрастающая функция x. Согласно теореме 1 неподвижные точки разной устойчивости чередуются.

Таким образом, справедлива

Теорема 5. Пусть преобразование T, состоящее из последовательно применяемых преобразований T_1 и T_2, описываемых выражениями (2.1) и (2.2), таково, что уравнение $x = T_2T_1x$ имеет при $\mu = 0$ m-кратный корень. Тогда T имеет при $\mu = 0$ сложный двучленный цикл, распадающийся при достаточно малых μ не более, чем на m двучленных циклов чередующейся устойчивости. При четном m число двучленных циклов — четное и число устойчивых циклов равно числу неустойчивых. При нечетном m число циклов нечетное и на единицу больше циклов устойчивости порождающего цикла.

Перейдем теперь к исследованию бифуркаций сложных неподвижных точек, характеристические корни которых равны -1. В этом случае преобразование T при всех достаточно малых μ имеет неподвижные точки M_1^*, M_2^*, в окрестностях которых преобразования T_1 и T_2 описываются выражениями (2.3) и (2.4). Преобразование $\Pi = T_2T_1$ в окрестности M_1^* имеет вид:

$$\bar{x} = \gamma_1 x + \ldots + \gamma_m x^m + \ldots, \tag{2.10}$$

где при $\mu = 0$

$$\gamma_1 = -1, \quad \gamma_2 = \ldots = \gamma_{m-1} = 0, \quad \gamma_m \neq 0, \quad m = \min(k_1, k_2),$$

а преобразование Π^2 —

$$\bar{\bar{x}} = \nu_1 x + \nu_2 x^2 + \ldots + \nu_n x^n + \ldots, \tag{2.11}$$

где при $\mu = 0$

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = \nu_3 = \ldots = \nu_{n-1} = 0, \quad \nu_n \neq 0.$$

В (2.11) $n = m$, если m — нечетное, и $n = m + 1$, если m—четное, так как при $\mu = 0$

$$\bar{\bar{x}} = x - \gamma_m [1 + (-1)^{m-1}] x^m - \gamma_{m+1} [1 + (-1)^m] x^{m+1} + \ldots;$$

$$\nu_s = \sum_{i=1}^{s} \gamma_i \Big(\sum_{j_1+\ldots+j_i=s} \gamma_{j_1} \ldots \gamma_{j_i} \Big) \quad (s = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.12}$$

Координаты н. т. Π^2, отличных от M_1^*, определяются из уравнения

$$(\nu_1 - 1) + \nu_2 x^* + \ldots + (\nu_n + \ldots)(x^*)^{n-1} = 0. \tag{2.13}$$

Уравнение (2.13) имеет при $\mu = 0$ нулевой корень кратности $(n-1)$. Следовательно, (2.13) будет иметь $n-1$ корней при достаточно малых μ, стремящихся к нулю при $\mu \to 0$ [15]. Якобиан системы (2.12) равен нулю, так как

$$\frac{\partial \nu_s}{\partial \gamma_r}\Big|_{\mu=0} = \begin{cases} 0, & r \neq s \\ -[1 + (-1)^{s-1}], & r = s \end{cases}$$

и система (2.12) относительно γ_i не разрешима. В доказательстве теоремы 5 существенным моментом было то, что мы могли произвольно менять корни уравнения (2.7), поскольку каждой совокупности корней уравнения (2.7) соответствовала определенная поверхность в пространстве коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. Корни уравнения (2.13) также можно менять произвольно, так как система (2.12) в действительности разрешима относительно γ_i (ее можно привести к виду, для которого якобиан при $\mu = 0$ отличен от нуля). Последнее можно сделать, разделив все уравнения с четными s на $(1 + \gamma_1)$, при условии, что $(1+\gamma_1)$ имеет порядок малости не выше μ.

Рассмотрим якобиан новой системы уравнений. Нечетные строки состоят из нулей, лишь на главной диагонали стоят—2. Четные строки справа от главной диагонали заполнены нулями, слева — конечными величинами или нулями, на главной диагонали величинами — 1. Действительно,

$$W = \frac{\partial}{\partial \gamma_r}\left(\frac{\nu_{2q}}{1+\gamma_1}\right)_{\mu=0} = \lim_{\mu\to 0}\Big[\Big(\sum_{j_1+\ldots+j_r=2q} \gamma_{j_1} \ldots \gamma_{j_r}\Big)(1 + \gamma_1)^{-1}\Big] + \frac{\gamma_1}{1+\gamma_1} \frac{\partial}{\partial \gamma_r}(\gamma_{2q})\Big|_{\mu=0}, \tag{2.14}$$

если $r \neq 1$. Второе слагаемое при $r \neq 2q$ равно нулю. Если $r > 2q$, то и первое слагаемое равно нулю. Если $r < 2q$, то под знаком суммы по крайней мере одно из j_i не равно 1 в каждом слагаемом; так как эти γ_{j_i} имеют порядок малости не менее μ, то предел в (2.14) есть величина конечная или нуль. Если $r = 2q$, то

$$W = \lim_{\mu\to 0}\left[(\gamma_1^{2q} + \gamma_1)(1 + \gamma_1)^{-1}\right] = \lim_{\mu\to 0}\left[\gamma_1(1 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_1^{2q-2})\right] = -1.$$

Пусть теперь $r=1$. Тогда

$$\nu_{2q}(1+\gamma_1)^{-1}=\gamma_1\gamma_{2q}(1+\gamma_1+\dots+\gamma_1^{2q-2})+(1+\gamma_1)^{-1}\sum_{i=2}^{2q-1}\gamma_i\Big(\sum_{j_1+\dots+j_i=2q}\gamma_{j_1}\cdots\gamma_{j_i}\Big). \tag{2.15}$$

Производная от первого слагаемого в правой части (2.15) при $\mu=0$ равна нулю или конечной величине. При дифференцировании второго слагаемого в знаменателе получается величина порядка μ^2. Под знаком суммы в каждом слагаемом имеется не менее двух коэффициентов γ со значками, отличными от 1, т. е. имеющих порядок μ. Следовательно, предел производной второго слагаемого в правой части (2.15) при $\mu\to 0$ есть конечная величина или нуль. Таким образом, якобиан новой системы при $\mu=0$ отличен от нуля, и система может быть разрешена относительно $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m+\dots$ при достаточно малых μ:

$$\gamma_1=-\sqrt{\nu_1},\ \gamma_i=\varphi_i(\sigma_2, \nu_3, \sigma_4, \nu_5, \dots, \nu_n+\dots)\ (i=2, 3, \dots, n-1);$$
$$\gamma_n+\dots=\varphi_n(\sigma_2, \nu_3, \dots, \nu_n+\dots), \tag{2.16}$$

где $\sigma_j=\nu_j\left(1-\sqrt{\nu_1}\right)^{-1}\quad (j=2, 4, \dots, n-1)$.

Теперь необходимо провести разбиение окрестности точки $N(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n+\dots)_{\mu=0}$ при достаточно малых μ на области существования одинаковых количеств н. т. Π^2. Если x_1^* — корень уравнения (2.13), то $x_2^*=\Pi x_1^*$ также является корнем (2.13), так как $\Pi^2 x_2^*=x_2^*$. Это справедливо как для действительного, так и для комплексного x_1^*. Из (2.10) следует:

$$x_2^*+x_1^*=(1+\gamma_1)x_1^*+\dots+\gamma_m(x_1^*)^m+\dots . \tag{2.17}$$

При достаточно малых x_1^* выражение (2.17) есть величина порядка μx_1^*, с точностью до которой $x_2^*=-x_1^*$. Пренебрегая величинами порядка μx_1^* и выше, получим из (2.13), что $\nu_{2q}=0$, так как $n-1$ число четное. Пусть теперь

$$\delta_i=\nu_{2i+1}(\nu_n+\dots)^{-1}\quad (i=1, 2, \dots, k-1);\quad \delta_0=(\nu_1-1)(\nu_n+\dots)^{-1}; \tag{2.18}$$
$$(x^*)^2=y^*;\quad m-1=2k.$$

Тогда (2.13) примет вид:

$$\delta_0+\delta_1 y^*+\dots+\delta_{k-1}(y^*)^{k-1}+(y^*)^k=0 . \tag{2.19}$$

Если (2.19) имеет действительные корни ξ_e и комплексные корни $\eta_j\pm i\zeta_j$ ($j=1, \dots, p$; $l=1, 2, \dots, k-2p$), то δ_q — полиномы (2.9). Положив в (2.9) одно из ξ_e равным нулю, t каких-либо из ξ_e положительными, а остальные отрицательными, получим уравнение поверхности R_t, разделяющей в окрестности точки $\Delta(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{k-1})_{\mu=0}$ области G_t и G_{t+1} (G_t — область существования t положительных действительных корней уравнения (2.19), т. е. область существования $2t$ неподвижных точек преобразования Π^2 или t двучленных циклов Π). Очевидно, все области G_t примыкают к точке $\Delta(\mu=0)$, и при достаточно малых μ исходная сложная неподвижная точка M_1^* распадается на простую неподвижную точку и t двучленных циклов, если при этом μ точка $H(\delta_0, \dots, \delta_{k-1})$ попадает в область G_t. Следует отметить, что когда точка H при изменении μ переходит из G_t в G_{t+1} через поверхность R_t, то при появлении нового двучленного цикла преобразования Π простая н. т. меняет устойчивость, передавая устойчивость, которой она обладала в G_t, новому циклу. Поэтому, если точка H находится в области G_t с четным t, то простая н. т. Π обладает устойчивостью порождающей точки; если же t — нечетное, то устойчивость простой н. т. противоположна устойчивости порождающей н. т. При достаточно малых μ величина γ_1 близка к -1, а ν_1 близка к $+1$, и, следовательно, преобразования Π и Π^2 представлены функциями монотонными в достаточно малой окрестности точки M_1^*. Поэтому при достаточно малых μ устойчивые и неустойчивые циклы чередуются, так как чередуются н. т. Π^2 разной устойчивости и $x_2^* = -x_1^*$ с точностью до величины высшего порядка малости (теорема 1). Из выше сказанного следует

Теорема 6. Пусть преобразование T, состоящее из последовательно применяемых преобразований T_1 и T_2, описываемых выражениями (2.1) и (2.2), таково, что уравнение $x = (T_2T_1)^2x$ имеет при $\mu = 0$ n-кратный корень. Тогда n—нечетное, и T имеет при $\mu = 0$ сложный двучленный цикл, распадающийся при достаточно малых μ не более, чем на один двучленный и $n-1$ четырехчленных циклов. Циклы разной устойчивости чередуются. Если число четырехчленных циклов четное, то двучленный цикл обладает устойчивостью порождающего двучленного цикла, а числа устойчивых и неустойчивых четырехчленных циклов равны. Если число четырехчленных циклов нечетное, то среди них на единицу больше циклов устойчивости порождающего цикла, а устойчивость двучленного цикла противоположна устойчивости порождающего цикла.

Результаты теорем 5 и 6 можно перенести на преобразование T, состоящее из последовательно применяемых преобразований $T_1, \ldots, T_p$, зависящих от параметра μ. При этом циклы будут не двучленные и четырехчленные, а p-членные и $2p$-членные соответственно. Доказательство совершенно аналогично.

Пусть преобразование T прямой в прямую имеет n-кратную неподвижную точку M_1^*. Точки $M_{i+1}^* = T^i M_1^*$ также n-кратные н. т. преобразования T. Если T в окрестности M_i^* обозначить через T_i, то задача исследования бифуркаций n-кратных н. т. преобразования T при переходе через поверхности N_{+1}, N_{-1} сводится к задаче исследования бифуркаций н. т. преобразования, состоящего из последовательно применяемых преобразований $T_1, \ldots, T_n$. В этом случае справедливы следующие теоремы.

Теорема 7. Пусть преобразование T, зависящее от параметра μ, имеет при $\mu = 0$ m-кратную неподвижную точку M^*, такую, что уравнение $M^* = T^m M^*$ имеет n-кратный корень. Тогда при достаточно малых μ точка M^* распадается не более, чем на n m-кратных неподвижных точек преобразования T чередующейся устойчивости. При четном n число неподвижных точек четное и число устойчивых точек равно числу неустойчивых. При нечетном n число неподвижных точек — нечетное и число н. т. устойчивости порождающей неподвижной точки на единицу больше числа н. т. противоположной устойчивости.

Теорема 8. Пусть преобразование T, зависящее от параметра μ, имеет при $\mu = 0$ m-кратную неподвижную точку M^*, такую, что характеристический корень ее равен -1, и уравнение $M^* = T^{2m} M^*$ имеет n-кратный корень. Тогда n—нечетное, и при достаточно малых μ точка M^* распадается не более, чем на одну m-кратную н. т. и $n-1$ $2m$-кратных н. т. Неподвижные точки различной устойчивости чередуются. На единицу больше неподвижных точек той устойчивости, которой обладала M^*.

3. РАЗРЫВНОЕ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРЯМОЙ В ПРЯМУЮ

Пусть преобразование T имеет вид:

$$\bar{x} = Tx = \begin{cases} T_1 x = a + \lambda_1 x, & x < 0 \\ T_2 x = -b + \lambda_2 x, & x > 0 \end{cases}, \tag{3.1}$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $x = 0$ — точка разрыва непрерывности T.

Преобразование T характеризуется тремя параметрами — λ_1, λ_2 и $\Delta_1 = ab^{-1}$.

Рассмотрим следующие случаи: 1) $0 < \lambda_1 < 1, 0 < \lambda_2 < 1$, 2) $\lambda_1 < 0$, $0 < \lambda_2 < 1$, 3) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, 4) $\lambda_2 < 0$, $0 < \lambda_1 < 1$. В каждом случае проведем исследование точечного преобразования и построим в пространстве параметров области существования неподвижных точек различных типов.

1) В первом случае преобразование T сжимающее. Нетрудно видеть, что каждая последовательность итераций приходит в интервал $(-b, a)$, из которого выйти уже не может. Все циклы преобразования T в силу того, что оно сжимающее, устойчивы.

Преобразования вида $T_2^m T_1^n$, где m и n больше 1, невозможны, так как в противном случае было бы $T(-b) < 0$, $Ta > 0$ одновременно, откуда $\lambda_1 \lambda_2 > 1$, что противоречит предположению $\lambda_1 \lambda_2 < 1$.

Разделим циклы преобразования T на классы сложности. Циклами первой сложности назовем циклы, содержащие н. т. преобразований вида $T_2^n T_1$, $T_1^n T_2$.

Преобразования вида $T_2^n T_1$ возможны, если $T(-b) > 0$, т. е. $\Delta_1 > \lambda_1$. Рассмотрим в этом случае преобразование Π_1 интервала $(-b, 0)$ в себя, такое, что каждая точка этого интервала в результате применения Π_1 возвращается опять в $(-b, 0)$. Здесь могут быть два случая. В первом случае Π_1, совпадающее с $T_2^n T_1$, непрерывно на $(-b, 0)$, переводит $(-b, 0)$ в себя и в силу того, что является сжимающим, имеет единственную неподвижную точку для каждого n. Во втором случае $T_2^n T_1$ переводит $(-b, 0)$ в интервал, содержащий точку $x=0$, и для части образа, где $x > 0$, необходимо применить еще T_2, чтобы перевести эту часть в $(-b, 0)$. Поскольку T_1 и T_2 — сжимающие, $(-b, 0)$ будет переведен в себя. В этом случае Π_1 — разрывное преобразование, распадающееся на $T_2^n T_1$ и $T_2^{n+1} T_1$ (см. рис. 1). Преобразование $T_2^n T_1$

$$\bar{x}_{2n} = \lambda_2^n a - b\left(1 - \lambda_2^n\right)(1 - \lambda_2)^{-1} + \lambda_1 \lambda_2^n x \tag{3.2}$$

имеет неподвижную точку

$$x_{2n}^* = \left[\lambda_2^n a - b\left(1 - \lambda_2^n\right)(1 - \lambda_2)^{-1}\right](1 - \lambda_1 \lambda_2)^{-1}. \tag{3.3}$$

Из условия $-b < x_{2n}^* < 0$ определяется разбиение области значений параметра $\Delta_1 = ab^{-1}$ на области существования неподвижных точек x_{2n}^* преобразования $T_2^n T_1$:

$$(1 - \lambda_2^{n-1})(1 - \lambda_2)^{-1} \lambda_2^{1-n} + \lambda_1 < \Delta_1 < \left(1 - \lambda_2^n\right) \lambda_2^{-n} (1 - \lambda_2)^{-1}. \tag{3.4}$$

Это разбиение — бесконечная последовательность непересекающихся уходящих при $n \to \infty$ в бесконечность интервалов длины $(1 - \lambda_1 \lambda_2) \lambda_2^{-n}$, с расстоянием λ_1 между интервалами.

Преобразования вида $T_1^n T_2$ возможны, если $Ta < 0$, т. е. $\Delta_1 < \lambda_1^{-1}$. При этом можно использовать предыдущие результаты, заменив x_{2n}^*

на $-x_{1n}^*$, где x_{1n}^* — координата н. т. преобразования $T_1^n T_2$, и взаимно переставив λ_1 и λ_2, a и b. Действительно, если в (3.1) ввести замену $x=-y$, $\bar{x}=-\bar{y}$, то полученное преобразование будет отличаться от (3.1) лишь местами a, b, λ_1, λ_2. Таким образом, область существования н. т.

$$x_{1n}^* = \left[a\left(1-\lambda_1^n\right)\left(1-\lambda_1\right)^{-1} - b\lambda_1^n\right]\left(1-\lambda_1\lambda_2\right)^{-1} \tag{3.5}$$

есть

$$\left(1-\lambda_1^{n-1}\right)\lambda_1^{1-n}\left(1-\lambda_1\right)^{-1} + \lambda_2 < \Delta_1^{-1} < \left(1-\lambda_1^n\right)\lambda_1^{-n}\left(1-\lambda_1\right)^{-1}. \tag{3.6}$$

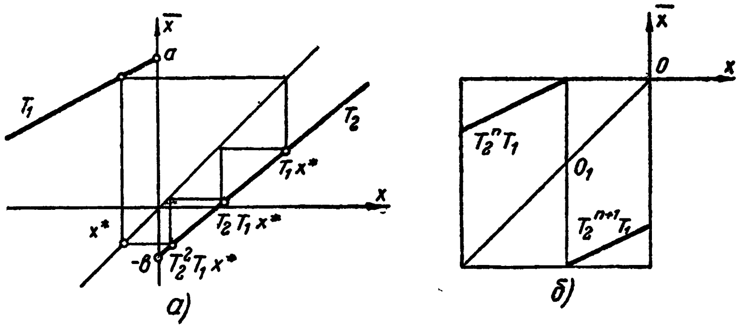

Рис. 1. Схемы преобразований T и Π_1.

Здесь область значений параметра Δ_1 разбивается на бесконечную последовательность непересекающихся интервалов, сходящихся при $n\to\infty$ к точке $\Delta_1=0$. После выделения областей существования циклов первой сложности на оси Δ_1 остаются „пустые" интервалы, в каждом из которых действуют или разрывные преобразования Π_1 или Π_2, распадающиеся на преобразования $T_2^n T_1$, $T_2^{n+1} T_1$ или $T_1^{n+1} T_2$, $T_1^n T_2$ соответственно. Первое имеет место в интервалах, граничащих с интервалами существования н. т. $T_2^n T_1$, второе — в интервалах, граничащих с интервалами существования н. т. $T_1^n T_2$.

Циклами второй сложности назовем циклы первой сложности по отношению к преобразованиям, имеющим место в каждом „пустом" интервале. Они содержат н. т. преобразований $\left(T_2^{n+1}T_1\right)^m\left(T_2^n T_1\right)$, $\left(T_2^n T_1\right)^m\left(T_2^{n+1}T_1\right)$, $\left(T_1^n T_2\right)^m\left(T_1^{n+1}T_2\right)$, $\left(T_1^{n+1}T_2\right)^m\left(T_1^n T_2\right)$. Рассмотрим преобразование Π_1 (рис. 1), которое после переноса начала координат в точку O_1, имеет вид:

$$\bar{y} = \Pi_1 y = \begin{cases} a_1 + \lambda_{12} y, & y<0 \\ -b_1 + \lambda_{22} y, & y>0 \end{cases}, \tag{3.7}$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[\lambda_2^n a - b\left(1-\lambda_2^n\right)\left(1-\lambda_2\right)^{-1}\right]\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-n};\\ b_1 &= b + \left[b\left(1-\lambda_2^n\right)\left(1-\lambda_2\right)^{-1} - \lambda_2^{-n} a\right]\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-n};\\ \lambda_{12} &= \lambda_1\lambda_2^n,\ \lambda_{22}=\lambda_1\lambda_2^{n+1},\ \lambda_{12}<1,\ \lambda_{22}<1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Область значений $\Delta_2 = a_1 b_1^{-1}$ разбивается на области существования н. т. преобразований $\left(T_2^{n+1}T_1\right)^m\left(T_2^n T_1\right)$, $\left(T_2^n T_1\right)^m\left(T_2^{n+1}T_1\right)$ так же, как и область значений Δ_1 на области существования н. т. $T_2^n T_1$ и $T_1^n T_2$.

Таким образом, на луче Δ_2 имеется бесконечная в обе стороны последовательность непересекающихся интервалов, слева сходящихся к $\Delta_2 = 0$, а справа уходящих в бесконечность. Из (3.8)

$$\Delta_1 = \left(1 - \lambda_2^n\right)(1 - \lambda_2)^{-1}\lambda_2^{-n} + \lambda_1 \Delta_2(1 + \Delta_2)^{-1} \tag{3.9}$$

и в каждый „пустой" интервал на луче Δ_1, в котором имеет место Π_1 (а Π_1 имеет место в „пустых" интервалах, для которых $\Delta_1 > 1$), оказывается вложенной бесконечная в обе стороны, сходящаяся к обоим концам соответствующего „пустого" интервала последовательность непересекающихся интервалов—областей существования циклов второй сложности.

Подобным же образом разбиваются и интервалы, в которых имеет место преобразование Π_2. В этом случае Δ_1 и Δ_2 связаны следующим соотношением:

$$\Delta_1^{-1} = \left(1 - \lambda_1^n\right)(1 - \lambda_1)^{-1}\lambda_1^{-n} + \lambda_2 (1 + \Delta_2)^{-1}. \tag{3.10}$$

Аналогично определяются циклы третьей сложности, четвертой сложности, . . ., сложности N. Пусть произведено разбиение оси Δ_1 на области существования циклов до N—1 сложности включительно. После этого на Δ_1 остается счетная последовательность „пустых" интервалов, каждый из которых граничит с интервалами существования циклов сложности 1, 2, ..., N—1. Рассмотрим один из „пустых" интервалов, который обозначим через Δ_{1i}. Соседний слева интервал — область существования н. т. некоторого преобразования T_i, справа—преобразования T_{i+1}. В Δ_{1i} имеет место разрывное преобразование Π_i, распадающееся на T_i и T_{i+1}. Циклами сложности N назовем циклы первой сложности преобразования Π_i. Один из элементов цикла сложности N — н. т. преобразования $T_{i+1}^n T_i$ или $T_i^n T_{i+1}$. Области существования этих н. т. образуют для каждого i бесконечную в обе стороны последовательность непересекающихся интервалов на оси Δ_N. На оси Δ_1 каждой такой последовательности отвечает бесконечная в обе стороны последовательность непересекающихся интервалов, вложенная в соответствующий интервал Δ_{1i} и сходящаяся слева и справа к его концам. При этом пересчет разбиения оси Δ_{k+1} на ось Δk производится по формулам

$$\Delta_k = \left(1 - \lambda_{2k}^{p_k}\right)(1 - \lambda_{2k})^{-1}\lambda_{2k}^{-p_k} + \lambda_{1k}\Delta_{k+1}(1 + \Delta_{k+1})^{-1} \tag{3.11}$$

или

$$\Delta_k^{-1} = \left(1 - \lambda_{1k}^{p_k}\right)(1 - \lambda_{1k})^{-1}\lambda_{1k}^{-p_k} + \lambda_{2k}(1 + \Delta_{k+1})^{-1}. \tag{3.12}$$

Если пересчет ведется в интервал на Δ_k, для которого $\Delta_k > 1$, то применяется (3.11), если в интервал, для которого $\Delta_k < 1$, то используется (3.12).

Таким образом, пространство параметров λ_2, Δ_1, λ_1 разбито на области существования циклов различной сложности (см. рис. 2). Циклам первой сложности соответствует счетная, бесконечная в обе стороны последовательность непересекающихся областей, сходящихся слева к $\Delta_1 = 0$, справа—уходящих в бесконечность. В каждую „пустую" область вложена подобная же последовательность областей существования циклов второй сложности, бесконечная в обе стороны, сходящаяся к граничным поверхностям соответствующей „пустой" области. В каждую новую „пустую" область вложены аналогичные последовательности областей существования циклов третьей сложности и т. д.

Рассмотрим на линии $\lambda_2 = \text{const}$, $\lambda_1 = \text{const}$, $\Delta_1 > 0$ множество M замкнутых интервалов, которые являются областями существования циклов всевозможных сложностей. Множество M счетно, так как состоит из счетного множества попарно непересекающихся счетных множеств. Если из множества значений параметра Δ_1 удалить множество M, то, как следует из (3.11) и (3.12), разность—непустое неограниченное нигде неплотное совершенное множество P. Поэтому множество P подобно канторову дисконтинууму, и каждая точка этого множества есть предельная для концевых точек интервалов, образующих множество M.

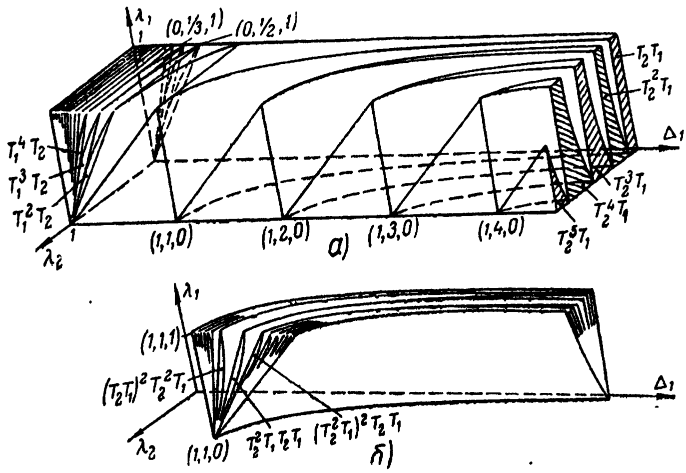

Рис. 2. Разбиение пространства параметров на области существования циклов: а) первой сложности, б) второй сложности в случае, когда $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$.

Движение точки M на плоскости $x, \bar{x}$ в процессе итераций устойчивое по Пуассону, если $\Delta_1 \in P$. Действительно, замкнутых траекторий не существует, так как в противном случае существовал бы цикл некоторой конечной сложности. Точка M при движении, как было показано выше, не выходит из интервала $(-b, a)$. Следовательно, существует, по крайней мере, одна точка сгущения, в любую сколь угодно малую окрестность которой точка M попадает неограниченное число раз. Движение это не является периодическим и происходит следующим образом. Пусть движение начинается из точки x_0. Следующие точки последовательности итераций получаются последовательным применением некоторого преобразования G — произведения конечного числа преобразований T_1 и T_2: Gx_0, G^2x_0 и т. д. до некоторой точки $G^nx_0 = y$. Затем точки получаются последовательным применением преобразования G_1 — произведения большего числа, чем в G, преобразований T_1 и T_2: G_1y, G_1^2y, ... до точки $G_1^my = z$ и т. д. При этом число преобразований T_1 и T_2, входящих в очередное G_i, больше, чем в G_{i-1}, и преобразование G_i через конечное число итераций заменяется более сложным преобразованием G_{i+1}, причем i растет неограниченно.

2) Во втором случае могут быть только неподвижные точки преобразований $T_2^n T_1$. Они устойчивы, если $|\lambda_1| \lambda_2^n < 1$ (см. (3.2)). Точка M в плоскости $x, \bar{x}$ через конечное число итераций приходит в интервал $(-b, T_1(-b))$, из которого выйти не может.

Неподвижная точка (3.3) преобразования (3.2) имеет свою область существования (3.4). Эти области для любой пары λ_1, λ_2 образуют бесконечную последовательность интервалов длины $\lambda_2^{-n} - \lambda_1$, каждый из которых перекрывает соседние на величину $|\lambda_1|$ (рис. 3).

Если λ_1 таково, что

$$\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_2^{-n-k} < |\lambda_1| < \sum_{k=1}^{m} \lambda_2^{-n-k}, \tag{3.13}$$

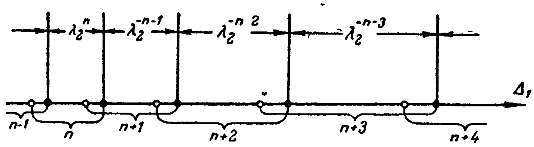

Рис. 3. Расположение областей существования различных циклов на оси Δ_1.

то при $\Delta_1 \in (\lambda_2^{-n})$ существуют $x_n^*, x_{n+1}^*, \ldots, x_{n+m-1}^*$, если $\Delta_1 \bar{\in} (n+m)$; кроме того, существует еще точка x_{n+m}^*, если $\Delta_1 \in (n+m)$. Здесь $(n+m)$ — интервал номера $n+m$, (λ_2^{-n}) — интервал между правыми концами (n) и $(n-1)$ (см. рис. 3), а x_{n+k}^* — неподвижная точка преобразования $T_2^{n+k} T_1$. Неравенства (3.13) означают, что (λ_2^{-n}) принадлежит каждому интервалу $(n+k)(k=1, 2, \ldots, m-1)$, что $(n+m)$ накрывает (λ_2^{-n}) целиком или частично и что (n) и $(n+m+1)$ общих точек не имеют. В силу левой части (3.13) $|\lambda_1| > \lambda_2^{-n-k}$ $(k=1, \ldots, m-1)$, а, следовательно, и $|\lambda_1| > \lambda_2^{-n}$, т. е. x_{n+k}^* $(k=0, \ldots, m-1)$ неустойчивы. Об устойчивости x_{n+m}^* можно сказать следующее.

Пусть $f_1 = \lambda_2^{-n-m}$; $f_2 = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_2^{-n-k}$; $f_3 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_2^{-n-k}$;

$$f_1 - f_3 = \lambda_2^{-n-m}(1 - 2\lambda_2 + \lambda_2^m)(1-\lambda_2)^{-1},$$

и пусть $\lambda_2(m)$—корень уравнения $f_1 = f_3$, принадлежащий интервалу $(0,1)$. Очевидно, что $\lambda_2(m) > 0{,}5$. $f_1 > f_3$, если $m=2$, а также если $m \geqslant 3$ и $0 < \lambda_2 < \lambda_2(m)$. $f_1 < f_3$, если $m \geqslant 3$ и $\lambda_2(m) < \lambda_2 < 1$. В первом случае точка x_{n+m}^* появляется при увеличении $|\lambda_1|$ как устойчивая точка в ряду $x_{n+k}^*(k=0, 1, \ldots, m-1)$, так как $(n+m)$ пересекается с (n) раньше, чем $|\lambda_1|$ станет больше λ_2^{-n-m}. Во втором случае x_{n+m}^* появляется в ряду x_{n+k}^* как неустойчивая точка, так как к моменту соприкосновения $(n+m)$ с (n) $|\lambda_1| > \lambda_2^{-n-m}$. $f_1 < f_3$ для любого $m > 0$. Следовательно, при увеличении $|\lambda_1|$ точка x_{n+m}^* становится неустойчивой еще до появления пересечения отрезков (n) и $(n+m+1)$, т. е. до появления возможности существования неподвижных точек x_{n+k}^* $(k=0, 1, \ldots, m+1)$ одновременно.

В результате имеет место следующее. Пусть $0 < \lambda_2 < 0{,}5$. Если $\Delta_1 \in (\lambda_2^{-n})$, то при $|\lambda_1| < \lambda_2^{-n}$, где λ_1 удовлетворяет условию

$$|\lambda_1| < (1 - \lambda_2^n)\lambda_2^{-n}(1-\lambda_2)^{-1} - \Delta_1 \tag{3.14}$$

для фиксированного Δ_1 такого, что $\Delta_1 \bar{\in} (n+1)$, существует единственная устойчивая н. т. x_n^*. Когда (3.14) с ростом $|\lambda_1|$ превратится в равенство, появится кроме x_n^* еще одна н. т. x_{n+1}^*, устойчивость которой следует из неравенства $|\lambda_1| < \lambda_2^{-n} < \lambda_2^{-n-1}$. Затем при $|\lambda_1| = \lambda_2^{-n}$ произойдет смена устойчивости x_n^*, а при $|\lambda_1| = \lambda_2^{-n-1}$ — смена устойчивости x_{n+1}^*. Когда $|\lambda_1| = \lambda_2^{-n-1} + \Delta_1$, появляется устойчивая н. т. x_{n+2}^*, которая сменит устойчивость при $|\lambda_1|=\lambda_2^{-n-2}, \ldots$. При $|\lambda_1|=\lambda_2^{-n-k}+\Delta_1$ появляется устойчивая н. т. x'_{n+k+1}, являющаяся единственной устойчивой точкой во всем ряду неподвижных точек $x^{*}_{n\ p}$ $(p=0, 1, \ldots, k+1)$, существующих одновременно при данном Δ_1. При $|\lambda_1|=\lambda_2^{-n-k-1}$ точка x_{n+k+1} становится также неустойчивой и т. д.

Пусть теперь $0{,}5<\lambda_2<1$. Тогда $\lambda_2(m)$ образуют бесконечную последовательность, сходящуюся к $\lambda_2=0{,}5$ при $m\to\infty$. С увеличением $|\lambda_1|$ увеличивается m, а $\lambda_2(m)$ уменьшается. Поэтому каково бы ни было $\lambda_2\in(0{,}5;\ 1)$, обязательно при увеличении $|\lambda_1|$ m достигает такой величины, что $\lambda_2(m)$ станет меньше λ_2. Пока $\lambda_2(m)>\lambda_2$, бифуркации неподвижных точек при увеличении $|\lambda_1|$ происходят так, как описано выше. Пусть при λ_{10} $\lambda_2(m)$ стало меньше λ_2. Тогда при любом $\lambda_1<\lambda_{10}$ будут существовать лишь неустойчивые н. т. Таким образом, если $\lambda_2^{-n-k}+\Delta_1<|\lambda_1|<\lambda_2^{-n-k-1}$, когда $\lambda_2<\lambda_2(m)$, среди всего ряда точек x_{n+p} $(p=0{,}1, \ldots, k+1)$, существующих одновременно, лишь x_{n+k+1} устойчива (за исключением случая $k=1$, когда могут существовать две устойчивые н. т. x^{*}_{n} и x_{n+1}), т. е. устойчив цикл $y_1, y_2, \ldots, y_{s+2}, \ldots, y_{n+k}$, где $y_1=x^{*}_{n+k+1}$ и $y_{s+2}=T_2^s T_1 y_1$. Если при $\lambda_2<\lambda_2(m)$ $\lambda_2^{-n-k}<|\lambda_1|<\lambda_2^{-n-k}+\Delta_1$, и для всех λ_1 в случае $\lambda_2>\lambda_2(m)$ устойчивых н. т. для данного Δ_1 не существует. Однако при этом есть ограниченная область $[-b,\ T_1(-b)]$, в которую приводят точку M все последовательности итераций и из которой точка M выйти не может. Движения здесь непериодические и устойчивые по Пуассону. Разбиение пространства параметров $\lambda_2\Delta_1\lambda_1$ на области существования неподвижных точек преобразования T изображено на рис. 4.

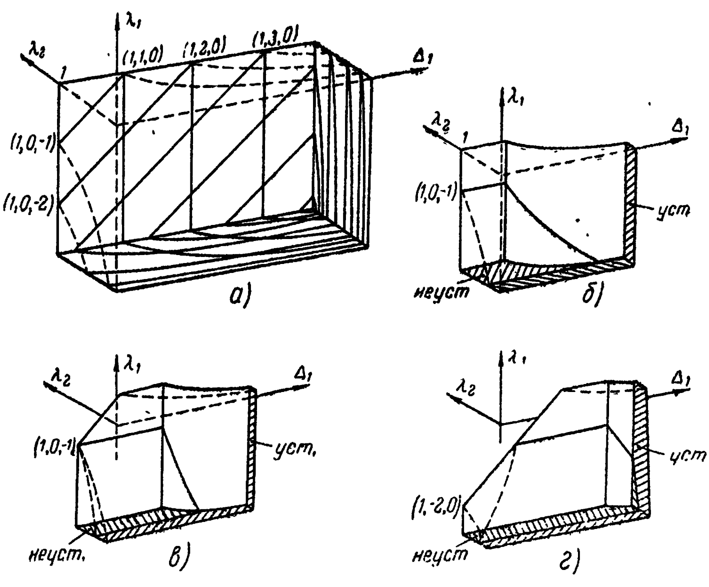

Рис. 4. Разбиение пространства параметров на области существования различных циклов (а) и области существования неподвижных точек преобразований б) T_2T_1, в) $T_2^2T_1$, г) $T_2^3T_1$ в случае, когда $\lambda_2<0$, $0<\lambda_2<1$.

3) В третьем случае преобразование T_2T_1

$$x_2=\lambda_1\lambda_2 x-b+\lambda_2 a$$

отображает полуось $x<0$ в себя. Если $\lambda_1\lambda_2<1$, существует единственная устойчивая н. т. $x^* = (\lambda_2 a - b)(1 - \lambda_1 \lambda_2)^{-1}$. В случае $\lambda_1\lambda_2 > 1$ все последовательности итераций расходящиеся. Разбиение пространства параметров приведено на рис. 5.

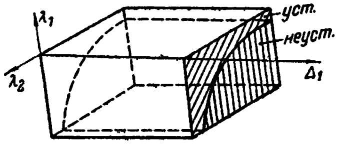

Рис. 5. Разбиение пространства параметров в случае, когда $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

4) Результаты случая 4 совпадают с результатами случая 2, если в последних переставить a и b, λ_1 и λ_2, как показано в случае 1. Разбиение пространства параметров изображено на рис. 6.

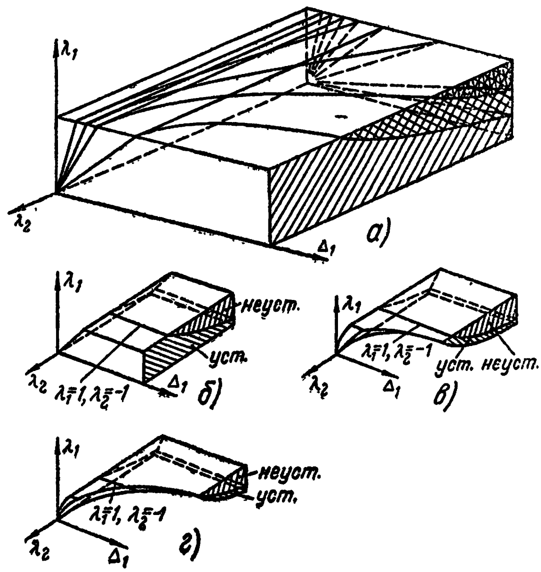

Рис. 6. Разбиение пространства параметров на области существования различных циклов (а) и области существования неподвижных точек преобразований б) T_1T_2, в) $T_1^2T_2$, г) $T_1^3T_2$ в случае, когда $\lambda_2 < 0$, $0 < \lambda_1 < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, Н. Н. Баутин, Г. А. Горелик, Автоматика и телемеханика, **7**, 15 (1946).
2. А. А. Андронов, Г. В. Аронович, Инженерный сборник Института механики АН СССР, **20**, 3 (1954).
3. А. С. Алексеев, Труды ГИФТИ и радиофака ГГУ, **35**, 105 (1956).
4. Н. А. Фуфаев, Сборник памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 334, 1955.
5. Л. В. Беспалова, Изв. АН СССР, сер техн., **5**, 3 (1957).
6. А. А Андронов, А. Г. Майер, ДАН СССР, **43**, 58 (1944).
7. А. А. Андронов, Н. Н. Баутин, ДАН СССР, **43**, 197 (1944).
8. Ю. И. Неймарк, Изв высш. уч зав.—Радиофизика, **1**, 1, 41 (1958).
9. Ю. И Неймарк, Изв. высш уч зав.—Радиофизика, **1**, 2, 95 (1958).
10. Ю. И Неймарк, Изв высш. уч зав—Радиофизика, **1**, 5—6, 146 (1958).
11. M. Koenigs, Bullet des Sciences mathem., 1883.
12. А. А. Витт, ЖТФ, **6**, 1459 (1936).
13. В М. Бовшеверов, ЖТФ, **6**, 1480 (1936).
14. В. М Дубровский, УМН, **9**, 3, 127 (1954).
15. K. Weierstrass, Abhandlungen aus der Functionenlehre, Berlin, 1860.

Научно-исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 30 июня 1959 г.