

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ БЕНДИКСОНА  
ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ РАСПОЛОЖЕНИЯ  
ТРАЕКТОРИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ  
ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

Н. А. Губарь

В работе при помощи метода Бендиксона устанавливаются все возможные топологические структуры особых точек динамической системы, содержащей линейные члены в правых частях.

Рассматривается динамическая система

$$dx/dt = P(x, y); \quad dy/dt = Q(x, y), \quad (1)$$

правые части которой — функции аналитические в некоторой окрестности начала координат. Предполагается, что начало координат  $O(0, 0)$  является изолированной особой точкой системы (1), для которой выполняются следующие условия:

$$\Delta(0, 0) = 0;$$

$$\delta(0, 0) = 0;$$

$$|P'_x(0, 0)| + |P'_y(0, 0)| + |Q'_x(0, 0)| + |Q'_y(0, 0)| \neq 0.$$

Здесь

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} P'_x(x, y) & P'_y(x, y) \\ Q'_x(x, y) & Q'_y(x, y) \end{vmatrix};$$

$$\delta(x, y) = P'_x(x, y) + Q'_y(x, y).$$

Из результатов Бендиксона [1] следует, что топологическая структура расположения траекторий в достаточно малой окрестности особой точки системы (1), не являющейся центром, полностью определяется числом замкнутых узловых, открытых узловых и седловых областей, примыкающих к данной особой точке, и взаимным расположением этих областей. (Эти числа обозначим соответственно буквами  $N_f$ ,  $N$  и  $C$ . При этом в число  $N$  не входят открытые узловые области, сопровождающие замкнутые узловые области.) Уточним эти понятия. Пусть траектория  $L$  стремится к особой точке  $O$  и при  $t \rightarrow +\infty$ , и при  $t \rightarrow -\infty$ , и пусть внутри простой замкнутой кривой  $C_L$ , состоящей из траектории  $L$  и точки  $O$ , нет ни одной особой точки системы (1). Обозначим область, ограниченную кривой  $C_L$ , через  $\sigma_f$ . Тогда любая траектория, проходящая внутри области  $\sigma_f$ , также стремится к точке  $O$  при  $t \rightarrow +\infty$  и при  $t \rightarrow -\infty$  (см. [1]), образуя вместе с точкой  $O$  простую замкнутую кривую. Если из каждой двух областей, ограниченных такими кривыми, одна область лежит внутри другой, то назовем область  $\sigma_f$  замкнутой узловой областью особой точки  $O$ . Две замкнутые узловые области точки  $O$  различны, если они расположены одна вне другой.

Рассмотрим далее окружность  $C$ , радиуса  $r$  с центром в особой точке  $O$ . Предположим, что 1) внутри  $C$ , не имеется других особых точек системы (1), кроме точки  $O$ , 2) вне  $C$ , заведомо лежат точки хотя бы одной полураектории, стремящейся к точке  $O$ , 3) вне  $C$ , заведомо лежат точки каждой из замкнутых областей точки  $O$ . Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — две стремящиеся к особой точке  $O$  полураектории, имеющие общие точки с окружностью  $C$ . Пусть  $M_1$  и  $M_2$  соответственно последние общие точки этих полураекторий с окружностью  $C$ . Обозначим через  $\sigma$  область, граница которой состоит из части  $M_1O$  полураектории  $L_1$ , части  $M_2O$  полураектории  $L_2$ , точки  $O$  и той из дуг окружности  $C$ , с концами  $M_1, M_2$ , на которой движение в направлении от точки  $M_1$  к точке  $M_2$  положительно (против часовой стрелки).

Если существует окружность  $C_\rho$  с центром в точке  $O$  радиуса  $\rho \ll r$  такая, что все траектории, проходящие через лежащие внутри окружности  $C_\rho$  точки области  $\sigma$  при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ), не выходя из  $\sigma$  стремятся к  $O$ , а при убывании (возрастании)  $t$  выходят из  $\sigma$ , то область между полураекториями  $L_1$  и  $L_2$  называется *открытой узловой областью* точки  $O$ . Если при этом нет другой узловой области, содержащей рассматриваемую, и в границу которой не входит, по крайней мере, одна из полураекторий  $L_1$  и  $L_2$ , то область между полураекториями  $L_1$  и  $L_2$  назовем целой открытой узловой областью. Выше под числом  $N$  подразумевалось число целых открытых узловых областей. Далее, говоря о целых открытых узловых областях, мы будем опускать слово „целые“.

Если все проходящие внутри области  $\sigma$  траектории как при возрастании, так и при убывании  $t$ , выходят из  $\sigma$ , то область между полураекториями  $L_1$  и  $L_2$  называется *седловой областью* точки  $O$ .

Для рассматриваемых нами особых точек числа  $N_f, N$  и  $C$  таковы, что топологическая структура особой точки определяется ими однозначно. При этом кроме известных особых точек (узел, фокус, седло и седло-узел) встречаются еще следующие два типа точек.

1. Особая точка, к которой примыкают только две седловые области; для этой точки  $N_f = 0, N = 0, C = 2$ . Такую точку мы назовем вырожденной особой точкой.

2. Особая точка, к которой примыкают одна замкнутая узловая область и одна седловая область; для этой точки  $N_f = 1, N = 0, C = 1$ . Такую особую точку мы назовем точкой с замкнутой узловой областью.

Будем говорить, что полураектория  $x = x(t), y = y(t)$  входит в особую точку  $O(0, 0)$  при  $t \rightarrow +\infty$  в направлении  $y = kx$  (в направлении  $x = 0$ ), если  $x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = k$

$\left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = 0 \right)$ . Аналогично будем говорить о полураектории, входя-

щей в точку  $O(0, 0)$  при  $t \rightarrow -\infty$ , или просто о полураектории, входящей в точку  $O(0, 0)$ , если нам безразлично, стремится ли  $t$  к  $+\infty$  или к  $-\infty$ .

Пусть для системы (1)  $O(0, 0)$  — особая точка и

$$P(x, y) = P_m(x, y) + P_{m+1}(x, y) + \dots,$$

$$Q(x, y) = Q_m(x, y) + Q_{m+1}(x, y) + \dots$$

— разложения функций  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  по степеням  $x$  и  $y$ , причем  $P_k$  и  $Q_k$  — однородные многочлены  $k$ -ой степени, а  $m$  — наименьшее число, для которого  $P_m$  и  $Q_m$  одновременно не равны тождественно нулю.

**Теорема Бендиксона** ([1], стр. 34). Пусть система (1) имеет изолированную особую точку в начале координат  $O(0, 0)$ . Тогда полутраектория системы (1), стремящаяся к  $O$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ , или будет спиралью, или входит в точку  $O$  в направлении, удовлетворяющем уравнению  $xQ_m - yP_m = O^*$ .

Заметим, что если одна какая-либо полутраектория входит в особую точку  $O$ , то все траектории, стремящиеся к точке  $O$ , входят в нее. Если же траекторий, входящих в  $O$ , нет, то особая точка  $O$  есть фокус или центр.

Бендиксон при исследовании системы (1) применяет билинейные преобразования координат, в частности, преобразование вида:

$$x = x, \quad y = (\eta + k)x. \quad (2)$$

При  $k = 0$  получим преобразование

$$x = x, \quad y = \eta x, \quad (3)$$

свойства которого приводятся ниже.

а) Преобразование (3) взаимно-однозначно и взаимно-непрерывно (топологически) отображает друг на друга области плоскостей  $(x, y)$  и  $(x, \eta)$ , которые получаются, если удалить из обеих плоскостей точки прямых  $x = 0$ . При этом точки 1, 2, 3 и 4 квадрантов одной плоскости переходят в точки соответственно 1, 3, 2 и 4 квадрантов другой плоскости. Все точки оси  $x = 0$  плоскости  $(x, \eta)$  переходят в точку  $O(0, 0)$  плоскости  $(x, y)$ . В точках оси  $x = 0$  плоскости  $(x, y)$  преобразование не определено.

б) Рассмотрим  $\delta$ -окрестность  $U_\delta$  точки  $O(0, 0)$  плоскости  $(x, y)$ . Осью  $x = 0$  эта окрестность разбивается на две области. При преобразовании (3) каждая из этих областей переходит в область плоскости  $(x, \eta)$ , представляющую из себя полосу, расположенную по одну сторону от оси  $x = 0$  и ограниченную этой осью и асимптотически приближающейся к ней линией. Таким образом, вся окрестность  $U_\delta$ , исключая отрезок оси  $x = 0$ , отображается в область плоскости  $(x, \eta)$ , расположенную между двумя асимптотически приближающимися к оси  $x = 0$  линиями, исключая саму ось  $x = 0$ . Обозначим эту область буквой  $\Gamma$  (рис. 1).

Сформулируем следующее очевидное утверждение, которое лежит в основе метода Бендиксона и систематически используется при доказательстве основных предложений.

Пусть система (1) имеет в начале координат особую точку. Применяя преобразование (2), приведем систему (1) к виду:

$$\frac{dx}{dt} = \bar{P}(x, \eta); \quad \frac{d\eta}{dt} = \bar{Q}(x, \eta). \quad (4)$$

Пусть далее  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  — полутраектория системы (1), входящая в точку  $O(0, 0)$  в направлении  $y = kx$ . Тогда соответствующая полутраектория системы (4) стремится к точке  $\bar{O}(0, 0)$ , т. е. либо входит в точку  $\bar{O}(0, 0)$ , либо является спиралью. Обратно, всякой полутраектории системы (4), стремящейся к точке  $\bar{O}(0, 0)$ ; (исключая

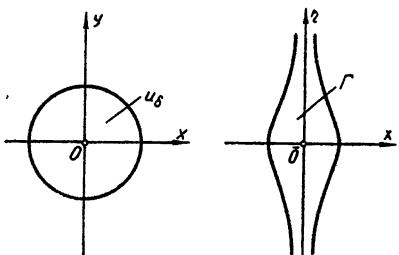


Рис. 1.

\* Направление  $y = kx$  или  $x = 0$  удовлетворяет уравнению  $xQ_m - yP_m = 0$ , если выражение  $y = kx$  или  $x$  является одним из линейных множителей однородного многочлена  $xQ_m - yP_m$ .

полутраектории, являющиеся частями оси  $\eta$ , если таковые имеются), соответствует полутраектория системы (1), входящая в точку  $O(0, 0)$  в направлении  $y = kx$ .

Рассмотрим систему

$$dx/dt = P^*(x, \eta); \quad d\eta/dt = Q^*(x, \eta), \quad (5)$$

получающуюся из системы (1) преобразованием (3). Пусть система (1) не имеет в окрестности  $U_\delta$  (см. рис. 1) других особых точек, кроме точки  $O(0, 0)$ . На основании свойств а) и б) преобразования (3) заключаем, что особыми точками системы (5), расположеными в области  $\Gamma$  (рис. 1), могут быть только точки оси  $x = 0$ . Очевидно, что всякой полутраектории системы (5), стремящейся к особой точке  $O_1(0, k)$  (исключая полутраектории, являющиеся частями оси  $\eta$ ), соответствует полутраектория системы (1), входящая в точку  $O(0, 0)$  в направлении  $y = kx$ .

Система (1), рассматриваемая в настоящей работе, линейным неособенным преобразованием \* приводится к виду:

$$d\bar{x}/dt = \bar{y} + \bar{P}_2(\bar{x}, \bar{y}); \quad d\bar{y}/dt = \bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y}), \quad (6)$$

где  $\bar{P}_2(\bar{x}, \bar{y})$  и  $\bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y})$  — аналитические в окрестности начала координат функции, разложения которых по степеням  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  начинаются с членов не менее, чем второго порядка. Далее преобразованием

$$\bar{x} = \bar{x}; \quad \bar{y} = y_1 + \varphi(\bar{x}),$$

где  $\varphi(\bar{x})$  — решение уравнения  $\bar{y} + \bar{P}_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ , система (6) приводится к виду

$$d\bar{x}/dt = y_1; \quad dy_1/dt = \bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y}_1).$$

Легко видеть, что топологическая структура расположения траекторий в окрестности особой точки  $O(0, 0)$  системы (1) при сделанных преобразованиях не меняется (узел при этом остается узлом, а фокус фокусом в силу аналитичности сделанных преобразований). Таким образом, мы имеем возможность вместо системы (1) рассматривать систему вида

$$dx/dt = y; \quad dy/dt = Q_2(x, y), \quad (7)$$

где  $Q_2(x, y)$  — функция, удовлетворяющая тем же условиям, что и функция  $\bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y})$ . Из предположения об изолированности особой точки системы (1) следует, что  $Q_2(x, 0) \neq 0$ .

Рассмотрим теперь ряд предложений, которые используются при доказательстве основных теорем. Преобразованием (3)  $x = \bar{x}$ ,  $y = \eta$ ,  $x$  система (7) приводится к виду:

$$dx/dt = \eta x; \quad d\eta/dt = Q_2(x, \eta). \quad (8)$$

Так как единственным направлением, в котором полутраектории системы (7) могут входить в точку  $O(0, 0)$ , является направление  $y = 0$ ,

\* При условии  $P'_y(0, 0) \neq 0$  таким преобразованием является, например, преобразование

$$x = k\bar{x} + \bar{y},$$

$$P'_y(0, 0) y = kQ'_y(0, 0) \bar{x} + \sqrt{|P'_y(0, 0)|} \bar{y},$$

где

$$k = \sqrt{|P'_y(0, 0)|} - Q'_y(0, 0).$$

то каждая из полуосей  $x=0$ ,  $\eta>0$  и  $x=0$ ,  $\eta<0$  является целой траекторией системы (8) (см. стр. 933, 934). Пусть  $U_\delta$  — окрестность точки  $O(0, 0)$ , а  $\Gamma$  — соответствующая этой окрестности область плоскости  $(x, \eta)$  (см. рис. 1). Предположим, что существуют полутраектории  $L$  и  $L'$  системы (8), входящие в точку  $\bar{O}(0, 0)$  соответственно при  $x>0$  и  $x<0$ . Пусть  $\bar{N}$  и  $\bar{N}'$  — последние общие точки полутраекторий  $L$  и  $L'$  с границей области  $\Gamma$  (рис. 2), а  $L$  и  $L'$  — полутраектории системы (7), соответствующие полутраекториям  $\bar{L}$  и  $\bar{L}'$  системы (8). В силу свойства а) преобразования (2) и утверждения, сформулированного на стр. 933, полутраектории  $L$  и  $L'$  входят в точку  $O(0, 0)$  соответственно при  $x>0$  и  $x<0$  и точки  $N$  и  $N'$ , соответствующие точкам  $\bar{N}$  и  $\bar{N}'$ , являются их последними общими точками с границей окрестности  $U_\delta$  (см. рис. 2).

I. Рассмотрим примыкающие к точке  $\bar{O}(0, 0)$  плоскости  $(x, \eta)$  области между полутраекторией  $L$

и полутраекторией  $x=0$ ,  $\eta>0$  и между полутраекторией  $\bar{L}'$  и полутраекторией  $x=0$ ,  $\eta<0$ . Обозначим их буквами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  (рис. 2).

1) Если указанные области являются открытыми узловыми областями точки  $\bar{O}$  системы (8), то область между полутраекториями  $L$  и  $L'$  системы (7) является замкнутой узловой областью точки  $O(0, 0)$ .

2) Если указанные области являются седловыми областями точки  $\bar{O}$ , то область между полутраекториями  $L$  и  $L'$  — также седловая область точки  $O(0, 0)$ .

3) Если одна из двух указанных областей является седловой областью точки  $\bar{O}$ , а другая открытой узловой, то область между полутраекториями  $L$  и  $L'$  — открытая узловая область точки  $O$ . Заметим, что вместо областей  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  можно было бы совершенно аналогично рассмотреть области  $\Gamma_1^*$  и  $\Gamma_2^*$  (см. рис. 2).

Рассмотрим теперь систему

$$dx/dt = xX(x, y); \quad dy/dt = Y(x, y), \quad (9)$$

где  $X(x, y)$  и  $Y(x, y)$  — функции аналитические в некоторой окрестности начала координат и  $Y(0, 0)=0$ . Мы будем предполагать, что полуоси  $x=0$ ,  $y>0$  и  $x=0$ ,  $y<0$  являются единственными полутраекториями, входящими в точку  $O(0, 0)$  в направлении  $x=0$ , а также, что существуют еще два направления  $y=k_1x$  и  $y=k_2x$ , в которых полутраектории системы (9) могут входить в особую точку  $O(0, 0)$ . Тогда, применяя преобразование  $x=x$ ,  $y=\eta x$  и сокращая согласно методу Бендиексона правые части на общий множитель  $x^k$  ( $k \geq 1$ ), если таковой появится, получим систему

$$dx/dt = xX^*(x, \eta); \quad d\eta/dt = Y^*(x, \eta), \quad (10)$$

для которой ось  $\eta$  составлена из полутраекторий, и точки  $O_1(0, k_1)$  и  $O_2(0, k_2)$  являются ее особыми точками (см. [1], стр. 62).

II. Предположим, что особая точка  $O_1(0, k_1)$  является седлом системы (10) и что  $\delta \neq 0$  в точке  $O_2(0, k_2)$ . Тогда в соответствии с тем, является ли особая точка  $O_2(0, k_2)$  системы (10) узлом, седлом или седло-узлом\*, топологическая структура особой точки  $O$  систе-

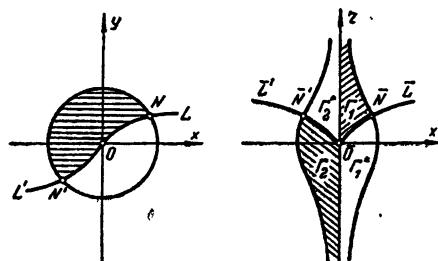


Рис. 2.

\* Других случаев в силу того, что  $\delta \neq 0$ , быть не может.

мы (9) полностью характеризуется следующими значениями чисел  $C$ ,  $N$  и  $N_f$  (см. стр. 931):

- 1) если  $O_2(0, k_2)$  — узел, то  $C = 2$ ,  $N = 2$ ,  $N_f = 0$ ;
- 2) если  $O_2(0, k_2)$  — седло, то  $C = 6$ ,  $N = 0$ ,  $N_f = 0$ ;
- 3) если  $O_2(0, k_2)$  — седло-узел, то  $C = 4$ ,  $N = 1$ ,  $N_f = 0$ .

Предложения I и II доказываются непосредственным рассмотрением расположения полураекторий в области  $\Gamma$  и образов этих полураекторий в области  $U_i$ , получающихся при преобразовании (3). При доказательстве используются свойства а) и б) преобразования (3), а также теорема Бендиксона и утверждение, сформулированное на стр. 933. При этом получаем для особой точки  $O(0, 0)$  системы (9) определенное расположение сепаратрис в зависимости от чисел  $k_1$  и  $k_2$ .

### III. Система

$$dx/dt = xy; \quad dy/dt = -ky^2 + x^2f(x, y) + xyf_1(x, y), \quad (11)$$

где  $f(x, y)$  и  $f_1(x, y)$  — аналитические в окрестности точки  $O(0, 0)$  функции и  $k > 0$ , имеет две и только две полураектории, входящие в точку  $O$  в направлении  $x = 0$ , а именно положительную и отрицательную полуоси  $y$ .

Это предложение доказывается применением преобразования  $x = \xi y$ ,  $y = u$  к системе (11). Для системы, полученной после преобразования и сокращения правых частей на общий множитель  $u$ , начало координат является седлом, сепаратрисами которого служат положительные и отрицательные полуоси  $\xi = 0$  и  $u = 0$ . При переходе к системе координат  $x, y$  полураектории  $u = 0$ ,  $\xi > 0$  и  $u = 0$ ,  $\xi < 0$  отображаются в одну точку  $O(0, 0)$ . Полураектории же  $\xi = 0$ ,  $u > 0$  и  $\xi = 0$ ,  $u < 0$  переходят в полураектории  $x = 0$ ,  $y > 0$  и  $x = 0$ ,  $y < 0$  системы (11).

### IV. Даны система

$$dx/dt = xy; \quad dy/dt = ax[1 + \varphi(x)] + by^2 + xyf(x, y), \quad (12)$$

где  $f(x, y)$  и  $\varphi(x)$  — аналитические в окрестности точки  $O(0, 0)$  функции,  $a \neq 0$ ,  $b < 0$  и  $\varphi(0) = 0$ . Особая точка  $O(0, 0)$  этой системы является седлом, сепаратрисами которого служат полураектории  $x = 0$ ,  $y > 0$  и  $x = 0$ ,  $y < 0$  и две полураектории, входящие в точку  $O$  в направлении  $x = 0$  и расположенные в первом и четвертом квадрантах (если  $a > 0$ ) и во втором и третьем квадрантах (если  $a < 0$ ).

Доказательство этого предложения изложим более подробно. Из теоремы Бендиксона следует, что существует единственное направление, в котором могут входить траектории системы (12) в точку  $O(0, 0)$  (направление  $x = 0$ ). Применяя преобразование  $x = \xi y$ ,  $y = u$ , получим:

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= (1 - b)\xi y - a\xi^2 - \xi^2 a\varphi(\xi y) - \xi^2 yf(\xi y, y); \\ dy/dt &= a\xi y + by^2 + a\xi y\varphi(\xi y) + \xi y^2 f(\xi y, y). \end{aligned} \quad (13)$$

Направления траекторий системы (13), входящих в особую точку  $O(0, 0)$ , определяется в силу той же теоремы Бендиксона из уравнения  $\xi y[(1 - 2b)y - 2a\xi] = 0$ . В направлении  $\xi = 0$  в точку  $O(0, 0)$  входят две и только две полураектории системы (13):  $\xi = 0$ ,  $y > 0$  и  $\xi = 0$ ,  $y < 0$ . (В этом можно убедиться таким же образом, как это сделано выше.) Для исследования двух других направлений  $y = 0$  и  $y = 2a\xi/(1 - 2b)$  применяется преобразование  $y = \eta\xi$ ,  $\xi = \xi$ . После преобразования и сокращения правых частей (13) на общий множитель  $\xi$  получим:

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= -a\xi + (1 - b)\eta\xi - a\xi\varphi(\eta\xi^2) - \eta\xi^2 f(\eta\xi^2, \eta\xi); \\ d\eta/dt &= 2a\eta - (1 - 2b)\eta^2 + 2a\eta\varphi(\eta\xi^2) + 2\eta^2\xi f(\eta\xi^2, \eta\xi). \end{aligned} \quad (14)$$

Легко видеть, что для системы (14) ось  $\gamma$ , составлена из полу-траекторий и точки  $O_1(0, 0)$ ,  $O_2\left(0, -\frac{2a}{1-2b}\right)$  являются особыми. Таким образом, к системе (13) можно применить предложение II. Непосредственным вычислением получаем:

$$\Delta(0, 0) = -2a^2 < 0; \quad \Delta\left(0, -\frac{2a}{1-2b}\right) = -\frac{2a^2}{1-2b} < 0.$$

Поэтому обе особые точки  $O_1$  и  $O_2$  являются седлами системы (14), и в силу предложения II (случай 2) для особой точки  $\bar{O}(0, 0)$  системы (13)  $C = 6$ ,  $N_f = 0$ ,  $N = 0$ , т. е. в точку  $\bar{O}(0, 0)$  входит 6 полу-траекторий. Следовательно, кроме полу-траекторий, являющихся полусосями  $\xi = 0$  и  $y = 0$ , существуют еще две полу-траектории, входящие в точку  $\bar{O}(0, 0)$ . Обозначим их  $\bar{L}_1$  и  $\bar{L}_2$ . Нетрудно показать, что полу-траектории  $\bar{L}_1$  и  $\bar{L}_2$  входят в точку  $\bar{O}$  соответственно в первом и третьем квадранте, если  $a > 0$ , и во втором и четвертом квадранте, если  $a < 0$ . Переходя теперь к системе (12), заключаем, что кроме полу-траекторий  $x = 0$ ,  $y > 0$  и  $x = 0$ ,  $y < 0$  существуют еще две и только две входящие в точку  $O(0, 0)$  полу-траектории. Обозначим их через  $L_1$  и  $L_2$ . Они являются образами полу-траекторий  $\bar{L}_1$  и  $\bar{L}_2$ , получающими при преобразовании  $x = \xi y$ ,  $y = u$ . Из свойств этого преобразования, аналогичных свойствам а) и б) преобразования (3), и из указанного выше расположения полу-траекторий  $\bar{L}_1$  и  $\bar{L}_2$  следует, что полу-траектории  $L_1$  и  $L_2$  входят в точку  $O$  соответственно в первом и четвертом квадранте, если  $a > 0$ , и во втором и третьем квадранте, если  $a < 0$ . Таким образом, точка  $O(0, 0)$  системы (12) является седлом с указанным расположением сепаратрис.

Перейдем теперь к рассмотрению системы (7), которую запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} dx/dt &= y; \\ dy/dt &= a_k x^k [1 + h(x)] + b_n x^n y [1 + g(x)] + y^2 f(x, y) \end{aligned} \tag{15}$$

( $h(x)$ ,  $g(x)$  и  $f(x, y)$  — аналитические в окрестности начала координат функции,  $h(0) = g(0) = 0$ ,  $k \geq 2$ ,  $n \geq 1$  и  $a_k \neq 0$  в силу свойств функций  $Q_s(x, y)$ ). В теоремах 1 и 2 устанавливаются все возможные топологические структуры, которые может иметь особая точка  $O(0, 0)$  системы (7) \*.

*Теорема 1.* Пусть в системе (15)  $k = 2m$ . Тогда особая точка  $O(0, 0)$  системы (15) является вырожденной особой точкой (см. стр. 932), если  $b_n = 0$  или  $b_n \neq 0$  и  $n \geq m$  (рис. 4а), и особая точка  $O(0, 0)$  является седло-узлом, если  $b_n \neq 0$  и  $n < m$  (рис. 3).

Отметим, что рис. 3а выполнен при условиях  $b_n > 0$ ,  $a_{2m} < 0$ . Рис. 3б соответствует условиям  $b_n < 0$ ,  $a_{2m} > 0$  и  $n$  — нечетное число или  $b_n > 0$ ,  $a_{2m} > 0$ ,  $n$  — четное число, рис. 3в — условиям  $b_n < 0$ ,  $a_{2m} > 0$ ,  $n$  — четное число или  $b_n > 0$ ,  $a_{2m} > 0$ ,  $n$  — нечетное число. Рис. 3г выполнен при условиях  $b_n < 0$ ,  $a_{2m} < 0$ ; рис. 4а — при условии  $a_{2m} > 0$ ; в случае  $a_{2m} < 0$  расположение интегральных кривых получается симметричным отображением относительно оси  $y$ .

*Доказательство.* Для системы (15) единственным направлением, в котором траектории могут входить в точку  $O(0, 0)$ , является на-

\* По существу, те же результаты получены независимо, применением метода Фроммера, в работах [2] и [3].

правление  $y = 0$ . Применяя преобразование  $x = x$ ,  $y = \eta_1 x$ , приводим систему (15) при условиях теоремы 1 к виду:

$$\frac{dx}{dt} = x \eta_1; \quad (16)$$

$$\frac{d\eta_1}{dt} = -\eta_1^2 + a_{2m}x^{2m-1}[1+h(x)] + b_n x^n \eta_1 [1+g(x)] + \eta_1^2 x f_1(x, \eta_1).$$

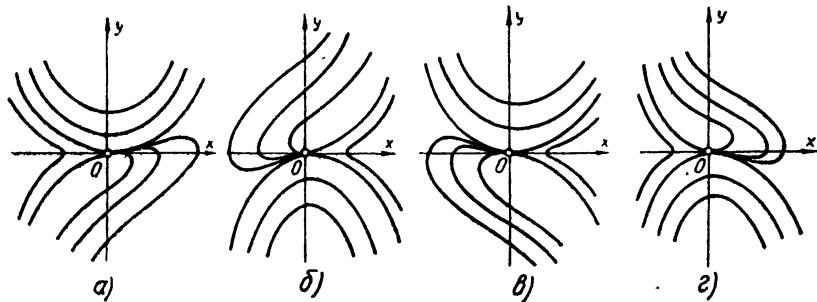


Рис. 3

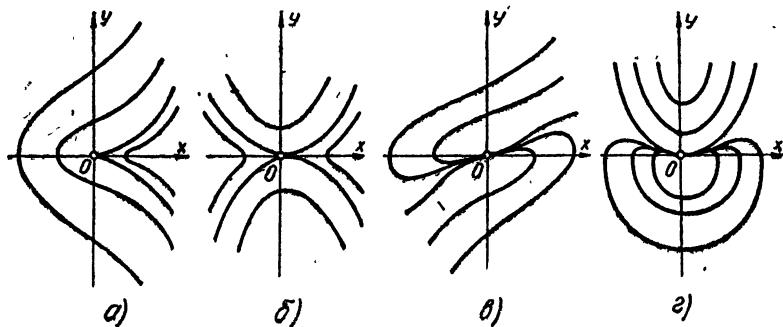


Рис. 4.

При  $m = 1$ ,  $n \geq 1$  из предложения IV следует, что особая точка  $O_1(0, 0)$  системы (16) является седлом, сепаратрисами которого служат полутраектории  $x = 0$ ,  $\eta_1 > 0$  и  $x = 0$ ,  $\eta_1 < 0$ . Расположение двух других сепаратрис определяется знаком  $a_{2m}$ . При переходе к системе координат  $x$ ,  $y$  полутраектории, являющиеся полуосами оси  $x = 0$ , отображаются в одну точку  $O(0, 0)$ . Таким образом, существуют только две полутраектории системы (15), входящие в точку  $O(0, 0)$ , и, следовательно, точка  $O(0, 0)$  является вырожденной особой точкой. В случае  $a_{2m} > 0$  расположение траекторий указано на рис. 4а.

При  $m \geq 1$  произведем последовательно ряд преобразований:

$$x = x, \eta_1 = \eta_2 x; \quad x = x, \eta_2 = \eta_3 x; \dots; \quad x = x, \eta_{i-1} = \eta_i x,$$

в результате которых система (16) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \eta_i x; \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -i \eta_i^2 + a_{2m} x^{2m-2i+1} [1+h(x)] + \\ &+ b_n x^{n-i+1} \eta_i [1+g(x)] + \eta_i^2 x f_i(x, \eta_i). \end{aligned} \quad (17)$$

(В этом легко убедиться методом индукции).

Рассмотрим отдельно два случая.

1. Пусть  $b_n = 0$ , или  $b_n \neq 0$ , но  $n > m > 1$ . Напишем систему (17) при  $i = m$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} dx/dt &= \eta_m x; \\ d\eta_m/dt &= -m\eta_m^2 + a_{2m}x[1+h(x)] + \eta_m xf_m(x, \eta_m). \end{aligned} \quad (18)$$

Для этой системы в силу предложения IV точка  $\bar{O}_m(0, 0)$  является седлом. Рассмотрим систему (17), считая, что  $1 \leq i \leq m-1$ . В этом случае  $2m-2i+1 \geq 3$  и  $n-i+1 \geq 2$ , и, следовательно, для каждого числа  $i$  направления, в которых траектории системы (17) могут входить в точку  $\bar{O}_i(0, 0)$  плоскости  $(x, \eta_i)$ , определяются уравнением  $x\eta_i^2 = 0$ . При этом в силу предложения III две и только две полураектории (именно, две полуоси  $x=0$ ) входят в точку  $\bar{O}_i$  в направлении  $x=0$ . Остальные полураектории системы (17) ( $i=1, 2, \dots, m-1$ ), входящие в точку  $\bar{O}_i$  (если таковые имеются), входят в эту точку в направлении  $\eta_i=0$ . Каждой такой полураектории в силу свойств преобразования  $\eta_i = \eta_{i+1}x$ ,  $x=x$  соответствует полураектория, входящая в точку  $\bar{O}_{i+1}$  и принадлежащая системе (17), отвечающей значению  $i=i+1$ . Это соответствие является взаимно однозначным, если не рассматривать полураектории  $x=0$ ,  $\eta_i>0$  и  $x=0$ ,  $\eta_i<0$ . Для системы (18), как показано в предложении IV, кроме полураекторий  $x=0$ ,  $\eta_m>0$  и  $x=0$ ,  $\eta_m<0$  существуют две и только две полураектории, входящие в точку  $\bar{O}_m(0, 0)$ . Тогда для каждой из систем (17) (при любом  $i < m$ ), в том числе и для системы (16), существуют две и только две полураектории, входящие в точку  $\bar{O}_i$  (кроме полураекторий  $x=0$ ,  $\eta_i>0$  и  $x=0$ ,  $\eta_i<0$ ). Следовательно, для системы (16) точка  $\bar{O}_1(0, 0)$  является седлом, причем в силу свойств преобразования  $\eta_i = \eta_{i+1}x$ ,  $x=x$  ( $i=1, 2, \dots, m-1$ ) расположение сепаратрис будет таким же, как у седла  $\bar{O}_m(0, 0)$ , и определится знаком числа  $a_{2m}$ . Отсюда из тех же соображений, что и в случае  $m=1$ , следует, что точка  $O(0, 0)$  системы (15) является вырожденной особой точкой.

2. Пусть теперь  $b_n \neq 0$  и  $m > n \geq 1$ . При  $i=n$  система (17) имеет вид:

$$\begin{aligned} dx/dt &= \eta_n x; \\ d\eta_n/dt &= a_{2m}x^{2m-2n+1}[1+h(x)] - n\eta_n^2 + \\ &+ b_n x \eta_n [1+g(x)] + \eta_n^2 x f_n(x, \eta_n). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $2m-2n+1 \geq 3$ , так что направления, в которых траектории могут входить в точку  $\bar{O}_n(0, 0)$ , определяются уравнением

$$x\eta_n[(n+1)\eta_n - b_n x] = 0. \quad (20)$$

В рассматриваемом случае также две и только две полураектории ( $x=0$ ,  $\eta_n>0$  и  $x=0$ ,  $\eta_n<0$ ) входят в точку  $\bar{O}_n$  в направлении  $x=0$  (предложение III). Из уравнения (20) следует, что существуют еще два направления  $\eta_n=0$  и  $\eta_n=b_n(n+1)^{-1}x$ , в которых траектории системы (19) могут входить в точку  $\bar{O}_n$ . Применяя преобразование  $x=x$ ,  $\eta_n=\eta_{n+1}x$ , исследуем указанные направления. Система (19) при этом примет вид:

$$\begin{aligned} dx/dt &= \eta_{n+1}x; \\ d\eta_{n+1}/dt &= -(n+1)\eta_{n+1}^2 + a_{2m}x^{2m-2n-1}[1+h(x)] + \\ &+ b_n \eta_{n+1} [1+g(x)] + \eta_{n+1}^2 x f_{n+1}(x, \eta_{n+1}). \end{aligned} \quad (21)$$

Легко видеть, что для системы (21) ось  $\gamma_{n+1}$  составлена из полу-траекторий и точки  $O_1 \left(0, \frac{b_n}{n+1}\right)$ ,  $O_2 (0, 0)$  являются особыми. Таким образом, к системе (19) можно применить предложение III. Непосредственным вычислением получаем:

$$\Delta \left(0, \frac{b_n}{n+1}\right) = -\frac{b_n^2}{n+1} < 0,$$

т. е. точка  $O_1 \left(0, \frac{b_n}{n+1}\right)$  является седлом системы (21). Далее, для точки  $O_2 (0, 0)$  имеем:  $\Delta (0, 0) = 0$  и  $\delta (0, 0) = b_n \neq 0$ .

Такие особые точки рассмотрены в работе [1]. Они могут быть одного из следующих трех видов: узел, седло или седло-узел. Определить, какой именно вид имеет место в данном случае, можно так; как это делается в работе [1] (стр. 37—39). Действительно, в данном случае функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  имеют вид:

$$\varphi(x) = -\frac{a_{2m}}{b_n} x^{2m-2n-1} + \dots \text{ и } \psi(x) = -\frac{a_{2m}}{b_n^2} x^{2m-2n} + \dots$$

Таким образом, исследуемая точка четно-кратная и в силу леммы 3 и теоремы 2 § 2 статьи [4] она является седло-узлом, открытая узловая область которого расположена справа от оси  $\gamma_{n+1}$ , если  $a_{2m} < 0$ , и слева от этой оси, если  $a_{2m} > 0$ . Тогда в соответствии с предложением II (случай 3) для особой точки  $\bar{O}_n$  системы (19):  $C = 4$ ,  $N = 1$ ,  $N_f = 0$ .

Заметим, что знак числа  $b_n$  указывает на то, расположено ли грубое седло  $O_1$  системы (21) выше седла-узла  $O_2$  или ниже, а знак числа  $a_{2m}$ , как сказано выше, определяет расположение открытой узловой области седла-узла  $O_2$  справа или слева от оси  $\gamma_{n+1}$ . Принимая это во внимание, получаем определенное расположение траекторий системы (19) в окрестности точки  $\bar{O}_n$  при различных знаках чисел  $a_{2m}$  и  $b_n$ .

Переход от системы (19) к системе (16) осуществляется так же, как в случае  $n \geq m$ . Однако, из-за особенностей расположения траекторий системы (19) и свойств преобразования  $\gamma_i = \gamma_{i+1} x$ ,  $x = x$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) здесь случай, когда  $n$  — нечетное число, отличается от случая, когда  $n$  — четное. Легко видеть, что при  $n$ -нечетном расположение траекторий в окрестности особой точки  $\bar{O}_1$  системы (16) такое же, как и для точки  $\bar{O}_n$  системы (19). При  $n$ -четном расположение траекторий в окрестности точки  $\bar{O}_1$  получится, если сделать симметричное отображение полуплоскости  $(x, \gamma_1)$  ( $x < 0$ ) относительно оси  $x$  для случая, соответствующего нечетному  $n$ , и соответствующим знакам чисел  $a_{2m}$  и  $b_n$ . На основании предложения I заключаем теперь, что точка  $O(0, 0)$  системы (15) является седло-узлом, так как для этой точки  $C = 2$ ,  $N = 1$ ,  $N_f = 0$ . Нетрудно видеть, что при соответствующих знаках чисел  $a_{2m}$  и  $b_n$  траектории в окрестности точки  $O$  расположены так, как это показано на рис. 3. Таким образом, теорема 1 доказана полностью.

**Теорема 2.** Пусть в системе (15)  $k = 2m + 1$  и  $b_n^2 + 4(m+1)a_{2m+1} = \lambda$ . Тогда, если  $a_{2m+1} > 0$ , особая точка  $O(0, 0)$  системы (15) является седлом (рис. 4б). Если  $a_{2m+1} < 0$ , особая точка  $O(0, 0)$  является 1) фокусом или центром при  $b_n = 0$ , а также при  $b_n \neq 0$  и  $n > m$  или при  $b_n \neq 0$ ,  $n = m$  и  $\lambda < 0$ ; 2) узлом, если  $n$  — четное число и при этом  $n < m$  или  $n = m$  и  $\lambda \geq 0$  (рис. 4в); 3) точкой с замкнутой узловой об-

ластью (см. стр. 932), если  $n$  — нечетное число и при этом  $n < m$  или  $n = m$  и  $\lambda \geq 0$  (рис. 4г).

Отметим, что рис. 4в и 4г выполнены при условии  $b_n > 0$ ; в случае  $b_n < 0$  расположение интегральных кривых получится симметричным отображением относительно оси  $x$ .

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1, и мы его опускаем.

Для определения типа особой точки системы (6) нет необходимости переходить от системы (6) к системе (15). Числа  $k$ ,  $n$ ,  $a_k$  и  $b_n$ , характеризующие тип особой точки, определяются младшими членами разложений в ряд по степеням  $x$  функций

$$\psi(\bar{x}) = \bar{Q}_2(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = a_k \bar{x}^k + \dots;$$

$$\delta(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = \bar{P}'_{2x}(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) + \bar{Q}'_{2y}(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = b_n \bar{x}^n + \dots,$$

где  $\varphi(\bar{x})$  — решение уравнения  $\bar{y} + \bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  (см. [4], стр. 55).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. J. Bendixson, Acta Math., **24**, 1 (1901).
2. Н. Б. Х а и м о в, Уч. зап. физ.-мат. ф-та Сталинабадского педагогического и учи-тельского ин-та, **2**, 3 (1952).
3. А. Ф. А и дреев, Вестник ЛГУ, **8**, 42 (1955).
4. Н. А. Губарь, Математический сборник, **40** (36), 23 (1955).

Горьковский институт инженеров водного транспорта

Поступила в редакцию  
5 июня 1959 г.