ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том II, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1959*

ОПТИМАЛЬНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИЕ ВЫДЕЛЕНИЕ СИГНАЛА С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ИЗ ШУМА

Р. Л. Стратонович

При помощи аппарата процессов Маркова отыскивается апостериорное распределение параметров полезного сигнала, имеющее место после принятия сигнала, искаженного негауссовыми помехами. Выводятся дифференциальные уравнения оптимальной фильтрации, которые моделируются оптимальными системами.

ВВЕДЕНИЕ

В практических случаях на вход радиоприемного устройства, предназначенного для приема полезного сигнала $s(t)$, поступает, помимо полезного сигнала, помеха $n(t)$. Приняв сигнал $r(t) = s(t) + n(t)$, мы не располагаем точными сведениями о виде полезного сигнала и о значениях его параметров, так как $n(t)$ является неизвестной функцией. Однако, накопив статистические данные о помехе $n(t)$ как случайной функции, мы можем использовать эти данные в целях более точного определения формы полезного сигнала.

Статистические сведения о помехе и о полезном сигнале, имеющиеся до получения поступившего сигнала $r(t)$, носят название *априорных* сведений. Прием сигнала $r(t)$ существенно увеличивает нашу информацию о полезном сигнале. Последний теперь уже описывается *апостериорным* распределением, имеющим меньший статистический разброс. Для отыскания апостериорных статистических сведений целесообразно использовать формулу „обратной вероятности“ [1,2].

После приема поступившего сигнала $r(t)$ полезный сигнал остается случайным, т. е. мы не можем указать с достоверностью реализацию $s(t)$. Однако, если выбрать критерий оптимальности, то на основе апостериорных сведений можно указать единственную самую предпочтительную реализацию $s_0(t)$ полезного сигнала из всех возможных. Так, в качестве наиболее предпочтительной функции $s_0(t)$ можно выбрать функцию, которой соответствует наибольшая апостериорная вероятность. Выбрав другой критерий, а именно, критерий минимальной среднеквадратичной ошибки, мы будем иметь в качестве $s_0(t)$ среднюю апостериорную функцию.

Таким образом, на базе априорных статистических сведений можно указать преобразование, которому следует подвергнуть принятый сигнал $r(t)$, чтобы получить предпочтительную реализацию полезного сигнала. Желательно, чтобы указанное преобразование $r(t)$ в $s_0(t)$ осуществлялось автоматически при помощи системы, которую мы называем оптимальной фильтрующей системой. Конструирование таких оптимальных фильтрующих систем является чрезвычайно важной проблемой для радиосвязи, автоматики и других областей радиотехники.

Как известно, в случае шумов и сигналов, характеризующихся распределением Гаусса, оптимальное преобразование является линейным и может быть рассчитано по теории Колмогорова—Винера [3,4]. Однако многие из реально встречающихся сигналов являются сугубо негауссовыми, как, например, всякого рода импульсные сигналы и синусоидальные сигналы с дискретными возможными значениями амплитуды. При негауссовом сигнале или шуме оптимальное преобразование существенно нелинейно. Если искать оптимальное преобразование лишь в классе линейных преобразований, то это оптимальное преобразование может оказаться весьма далеким от истинного оптимального преобразования. То же самое можно сказать о попытках найти оптимальное преобразование среди нелинейных преобразований более или менее широкого класса [5,6].

Мы займемся отысканием абсолютного оптимального преобразования, не ограничивая себя каким-либо классом преобразований. При негауссовом сигнале или шуме отыскание такого преобразования должно проводиться на принципиально новой основе. Как показывают исследования, в некоторых случаях поставленная проблема может быть решена с большей или меньшей общностью. Так, при фильтрации импульсных сигналов, сложенных с гауссовым шумом, оптимальное преобразование может быть найдено путем использования теории коррелированных случайных точек. В других случаях для его отыскания полезно использовать аппарат процессов Маркова.

Когда сигнал или шум представляет собой процесс Маркова или является компонентой многомерного марковского процесса, решение задачи делается возможным благодаря тому, что не представляет труда записать аналитическое выражение для функционала вероятности процесса Маркова. В настоящей работе мы рассмотрим случай, когда шум $n(t)$ является процессом Маркова, в общем случае негауссовым, а сигнал $s = s(x_1, \ldots, x_m, t)$ характеризуется постоянными значениями параметров $x_1, \ldots, x_m$, которые как раз и требуется определить. При фиксированных значениях $x_1, \ldots, x_m$ сигнал является известной функцией времени. Зная реализацию принятого сигнала $r(t) = s(x_1, \ldots, x_m, t) + n(t)$ на интервале времени от 0 до T, мы подвергаем $r(t)$ обработке, чтобы извлечь из нее предпочтительные значения неизвестных параметров сигнала. Такая обработка (оптимальное преобразование) находится путем анализа апостериорного распределения параметров сигнала.

1. ФУНКЦИОНАЛ ВЕРОЯТНОСТИ ПРОЦЕССОВ МАРКОВА И ФОРМУЛА ОБРАТНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Функционалом вероятности $W[\xi(t)]$ случайного процесса $\xi(t)$ мы называем выражение, зависящее от $\xi(t)$, которое с точностью до постоянного множителя (общего для всех $\xi(t)$) характеризует вероятность данной реализации $\xi(t)$ этого процесса. Функционал вероятности можно получить путем рассмотрения совместного распределения случайных значений $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_N)$ $(t_1 < \ldots < t_N)$ и уплотнения выбранных точек $t_1, \ldots, t_N$, так что $|t_{j+1} - t_j| \to 0$.

Рассмотрим примеры функционалов вероятности. Пусть $\xi(t)$ — дельта-коррелированный („белый“) нормальный шум с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$\overline{\xi(t)\,\xi(t')} = K\,\delta(t - t'). \tag{1}$$

Выполнив разбиение оси времени точками $t_1, \ldots, t_N$ $(t_{j+1} - t_j = \Delta)$, рассмотрим средние по интервалу значения

$$\xi_j = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_j - \Delta}^{t_j} \xi(t)\,dt. \tag{2}$$

Вследствие (1) эти значения независимы друг от друга и имеют дисперсию

$$\overline{\xi_j^2} = K/\Delta. \tag{3}$$

Поскольку (2) суть гауссовы случайные величины, они описываются плотностью распределения

$$w(\xi_j) = \left(2\pi \frac{K}{\Delta}\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{\xi_j^2}{2K}\Delta\right\}.$$

Используя условие независимости, получаем совместное распределение в форме произведения

$$w(\xi_1, \ldots, \xi_N) = w(\xi_1)\ldots w(\xi_N) = \left(2\pi \frac{K}{\Delta}\right)^{-N/2} \exp\left\{-\frac{1}{2K}\sum_j \xi_j^2 \Delta\right\}. \tag{4}$$

Нормировочный постоянный множитель не несет в себе дополнительной информации, поэтому его можно отбросить. После этого функционал вероятности запишется в виде:

$$W[\xi(t)] = \exp\left\{-\frac{1}{2K}\int_0^T \xi^2(t)\,dt\right\}, \tag{5}$$

где T — длина выбранного интервала времени. Интеграл здесь следует понимать в смысле суммы, стоящей в (4).

Рассмотрим шум $n(t)$, представляющий собой процесс Маркова. Пусть он удовлетворяет уравнению

$$\dot{n} - f(n) = \xi(t), \tag{6}$$

где $\xi(t)$ — описанный выше дельта-коррелированный процесс, а $f(n)$ — известная функция. В общем случае при нелинейной функции $f(n)$ такой процесс является негауссовым. Плотность распределения вероятностей $w(n)$ удовлетворяет уравнению Фоккера—Планка

$$\dot{w}(n) = -\frac{\partial}{\partial n}[f(n)\,w(n)] + \frac{K}{2}\frac{\partial^2 w(n)}{\partial n^2}. \tag{7}$$

Из последнего следует, что при малых интервалах Δ вероятность перехода $w(n_j|n_{j-1})$, соответствующая начальному условию $n(t_{j-1}) = n_{j-1}$, т. е. условию $w(n) = \delta(n - n_{j-1})$ при $t = t_{j-1}$, определяется выражением

$$w(n_j|n_{j-1}) = \left(2\pi \frac{K}{\Delta}\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{[n_j - n_{j-1} - f(n_{j-1})\Delta]^2}{2K}\Delta\right\}. \tag{8}$$

Из определения процессов Маркова следует, что плотность вероятности многомерного распределения можно записать в виде произведения вероятностей перехода:

$$w(n_0, n_1, \ldots, n_N) = w(n_N|n_{N-1})\ldots w(n_1|n_0)\,w(n_0). \tag{9}$$

Подставляя сюда (8), получаем

$$w(n_0, n_1, \ldots, n_N) = \text{const}\exp\left\{-\frac{1}{2K}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{n_j - n_{j-1}}{\Delta} - f(n_{j-1})\right]^2\Delta\right\} w(n_0). \tag{10}$$

Возводя в квадрат $(n_j - n_{j-1})\Delta^{-1} - f(n_{j-1})$, преобразуем член, $f(n_{j-1})(n_j - n_{j-1})$ к другому виду. Для этого используем формулы, первая из которых очевидна:

$$f(n_{j-1})(n_j - n_{j-1}) = f\left(\frac{n_j + n_{j-1}}{2}\right)(n_j - n_{j-1}) - \\ - \frac{1}{2} f'\left(\frac{n_j + n_{j-1}}{2}\right)(n_j - n_{j-1})^2 + O\left[(n_j - n_{j-1})^3\right]. \tag{11}$$

При выводе второй формулы учтем, что сумма $\sum (n_j - n_{j-1})^2$, содержащая $\tau\Delta^{-1}$ членов, имеет среднее значение

$$\tau\Delta^{-1}\,\overline{(n_j - n_{j-1})^2} = K\tau$$

и дисперсию

$$D\sum (n_j - n_{j-1})^2 = \tau\Delta^{-1} D(n_j - n_{j-1})^2 = \tau\Delta^{-1}\,2\,(K\Delta)^2 = 2K^2\tau\Delta.$$

Отсюда следует равенство

$$\sum_{j=q+1}^{q+\tau/\Delta} (n_j - n_{j-1})^2 = K\tau + O(\Delta^{1/2}). \tag{12}$$

Разбивая интервал $[O, T]$ на подынтервалы длительностью τ:

$$\frac{1}{f'} \gg \tau \gg \Delta$$

и применяя (12), получаем формулу

$$\sum_j f'\left(\frac{n_j + n_{j-1}}{2}\right)(n_j - n_{j-1})^2 = \sum_l f'(n_l)\,K\tau + O(\Delta^{1/2}) + O(\tau) \\ (n_l = n(l\tau)). \tag{13}$$

Выражение (10) вследствие (11), (13) можно преобразовать к виду:

$$w(n_0, n_1, \ldots, n_N) = \text{const}\exp\left\{-\frac{1}{2K}\sum_{j=1}^{N}\left[\left(\frac{n_j - n_{j-1}}{\Delta}\right)^2 + \right.\right. \\ \left. + f^2(n_{j-1}) - 2f\left(\frac{n_j + n_{j-1}}{2}\right)\left(\frac{n_j - n_{j-1}}{\Delta}\right)\right]\Delta - \\ \left. - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{T/\tau} f'(n_l)\,\tau + O(\Delta^{1/2}) + O(\tau)\right\}. \tag{14}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция f от времени явно не зависит. Введем потенциальную функцию

$$U(n) = \int f(n)\,dn. \tag{15}$$

Вычитая очевидные равенства

$$\begin{aligned} U(n_j) &= U\left(\frac{n_j+n_{j-1}}{2}\right)+\frac{1}{2}U'\left(\frac{n_j+n_{j-1}}{2}\right)(n_j-n_{j-1})+\\ &\quad+\frac{1}{8}U''\left(\frac{n_j+n_{j-1}}{2}\right)(n_j-n_{j-1})^2+O\left((n_j-n_{j-1})^3\right);\\ U(n_{j-1}) &= U\left(\frac{n_j+n_{j-1}}{2}\right)-\frac{1}{2}U'\left(\frac{n_j+n_{j-1}}{2}\right)(n_j-n_{j-1})+\\ &\quad+\frac{1}{8}U''\left(\frac{n_j+n_{j-1}}{2}\right)(n_j-n_{j-1})^2+O\left((n_j-n_{j-1})^3\right) \end{aligned} \tag{16}$$

друг из друга, получаем:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n_j+n_{j-1}}{2}\right)(n_j-n_{j-1}) &= U(n_j)-U(n_{j-1})+O\left((n_j-n_{j-1})^3\right)=\\ &= U(n_j)-U(n_{j-1})+O(\Delta^{3/2}). \end{aligned} \tag{17}$$

Вследствие этого часть членов в (14) сокращается:

$$\sum_{j=1}^{N} f\left(\frac{n_j+n_{j-1}}{2}\right)(n_j-n_{j-1}) = U(n_T)-U(n_0)+O(\Delta^{1/2}) \tag{18}$$

$$(n_T=n(T);\quad n_0=n(0)).$$

Если в качестве начального распределения w_0 взять стационарное распределение

$$w_0(n_0)=\text{const}\ \exp\left\{-\frac{2}{K}U(n_0)\right\}, \tag{19}$$

то из (14) будем иметь:

$$\begin{aligned} w(n_0, n_1, \ldots, n_T) &= \text{const}\ \exp\left\{-\frac{1}{K}\left[U(n_T)+U(n_0)\right]-\right.\\ &\quad-\frac{1}{2K}\sum_{j=1}^{N}\left[\left(\frac{n_j-n_{j-1}}{\Delta}\right)^2+f^2(n_j)\right]\Delta-\\ &\quad\left.-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{T/\tau}f'(n_l)\,\tau+O(\Delta^{1/2})+O(\tau)\right\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Отбрасывая постоянный множитель и уменьшая Δ и τ, получим функционал вероятности

$$\begin{aligned} W[n(t)] &= \exp\left\{-\frac{1}{K}\left[U(n_T)+U(n_0)\right]-\right.\\ &\quad\left.-\frac{1}{2K}\int_0^T\left[\dot{n}^2+f^2(n)\right]dt-\frac{1}{2}\int_0^T f'(n)\,dt\right\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь $\int \dot{n}^2 dt$ понимается в смысле суммы $\sum_j\left(\frac{n_j-n_{j-1}}{\Delta}\right)^2\Delta$, прочие же интегралы имеют обычный смысл.

Зная форму принятого сигнала и вид функционала вероятности, мы можем вычислить апостериорное распределение параметров полезного сигнала, пользуясь принципом обратной вероятности.

Пусть параметры $x_1, \ldots, x_m$ описываются априорным распределением $w_{pr}(x_1, \ldots, x_m)$. При фиксированных значениях параметров $x_1, \ldots, x_m$ поступивший сигнал $r(t) = s(x_1, \ldots, x_m, t) + n(t)$ имел бы априорное распределение

$$W[r \mid x_1, \ldots, x_m] = W[n]_{n=r-s} \equiv W_n[r - s]. \tag{22}$$

Поэтому совместное распределение для $x_1, \ldots, x_m$ и $r(t)$ имеет вид

$$W[x_1, \ldots, x_m, r] = w_{pr}(x_1, \ldots, x_m)\, W_n[r - s]. \tag{23}$$

По определению условных вероятностей его можно также записать в форме

$$W[x_1, \ldots, x_m, r] = W[r]\, w(x_1, \ldots, x_m \mid r), \tag{24}$$

где $w(x_1, \ldots, x_m|r) = w_{ps}(x_1, \ldots, x_m)$—условное или апостериорное распределение параметров. Сопоставляя (23) и (24), находим:

$$\begin{aligned} w_{ps}(x_1, \ldots, x_m) = C w_{pr}(x_1, \ldots, x_m)\, W_n[r(t) - \\ - s(x_1, \ldots, x_m, t)], \end{aligned} \tag{25}$$

где постоянная C не зависит от $x_1, \ldots, x_m$.

При помощи полученной апостериорной плотности распределения можно определить предпочтительные значения параметров. Если в качестве последних взять апостериорные средние, то будем иметь:

$$(x_k)_0 = \frac{\int \ldots \int x_k\, w_{pr}(x_1, \ldots, x_m)\, W_n[r(t) - s(x_1, \ldots, x_m, t)]\, dx_1 \ldots dx_m}{\int \ldots \int w_{kr}(x_1, \ldots, x_m)\, W_n[r(t) - s(x_1, \ldots, x_m, t)]\, dx_1 \ldots dx_m} \tag{26}$$

$$(k = 1, \ldots, m).$$

Тем самым мы нашли оптимальное преобразование, в общем случае нелинейное, которое наилучшим образом приспособлено для отыскания неизвестных параметров. В аналогичной форме в [7] получено решение для гауссовых шумов.

Приведенное решение задачи, однако, имеет два недостатка. Во-первых, полученное оптимальное преобразование содержит интегральные операции, которые могут оказаться сложными для практического их осуществления оптимальными системами. Проще осуществлять операции, соответствующие дифференциальным уравнениям. Во-вторых, указанный способ решения не допускает обобщения на случай параметров, меняющихся во времени. Поэтому рассмотрим другое решение задачи.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Чтобы получить уравнения оптимальной фильтрации в дифференциальной форме, исследуем изменение апостериорного распределения при увеличении времени наблюдения. Пусть длина отрезка наблюдения T увеличилась на dT. Изменение апостериорной плотности при этом можно найти, пользуясь равенством (25). Взяв логарифм от обеих частей равенства и дифференцируя по T, получим:

$$\frac{d \ln w_{ps}}{dT} = \frac{d}{dT} \ln W_n[r - s] + \frac{d \ln C}{dT}. \tag{27}$$

Здесь учтено, что w_{pr} не зависит от T, поскольку мы рассматриваем лишь постоянные параметры сигнала. Обобщению развиваемой теории на случай переменных параметров сигнала, когда w_{pr} меняется со временем, будет посвящена другая статья.

Если ввести обозначение

$$F(r-s) = \frac{d}{dT} \ln W_n[r-s], \tag{28}$$

то (27) можно записать в виде:

$$\dot{w}_{ps} = [F(r-s) - \lambda]\, w_{ps} \tag{29}$$

(производную по T, как и по t, мы обозначаем точкой). Стоящая здесь постоянная $\lambda = -d \ln C/dT$ связана с нормировочной постоянной Ее можно определить, пользуясь тем, что в силу условия нормировки интеграл $\int \ldots \int \dot{w}_{ps}\, dx_1, \ldots, dx_m$ исчезает. Поэтому интегрирование (29) по $x_1, \ldots, x_m$ дает:

$$\lambda = \int \ldots \int F(r-s)\, w_{ps}\, dx_1, \ldots, dx_m = \overline{F(r-s)}.$$

Полученное дифференциальное уравнение $\dot{w}_{ps} = (F - \overline{F})\, w_{ps}$ является, таким образом, нелинейным дифференциальным уравнением. Систему, моделирующую это уравнение, удобно было бы использовать в целях выделения параметров сигнала. Однако непосредственное моделирование уравнения (29) затруднительно по той причине, что оно при непрерывных возможных значениях параметров $x_1, \ldots, x_m$ соответствует неограниченному числу степеней свободы. Удобнее рассматривать эволюцию не самой апостериорной плотности, а некоторых ее числовых характеристик, и моделировать уравнения, описывающие их изменение во времени.

Остановимся на том случае, когда имеется один неизвестный параметр x сигнала, принимающий непрерывные значения. Вместо плотности распределения $w_{ps}(x)$ можно рассматривать заменяющие ее числовые характеристики $a_1, a_2, a_3, \ldots$, представляющие собой коэффициенты разложения ее логарифма в ряд Тейлора. Соответствующая формула связи имеет вид:

$$w_{ps}(x) = \exp\left[c_0 + \frac{a_2}{2}(x-a_1)^2 + \frac{a_3}{3!}(x-a_1)^3 + \ldots\right] \tag{30}$$
$$(a_2 \equiv -a < 0).$$

Величина a_1 есть наиболее вероятное значение параметра. Его удобно выбрать в качестве наиболее предпочтительного значения x_0. Введенные коэффициенты меняются в процессе наблюдения (зависят от T). Подставляя (30) в (29), получим:

$$\dot{a}_2 \frac{(x-a_1)^2}{2} + \dot{a}_3 \frac{(x-a_1)^3}{3!} + \ldots - a_2\dot{a}_1(x-a_1) -$$
$$- a_3\dot{a}_1 \frac{(x-a_1)^2}{2} + \ldots = F(r-s) - \lambda - \dot{c}_0.$$

Взяв производные по x от обеих частей равенства в точке $x = a_1$, будем иметь систему уравнений, определяющую эволюцию коэффициентов $a_1, a_2, a_3, \ldots$ в процессе наблюдения:

$$\begin{aligned} -a_2\dot{a}_1 &= [\partial F/\partial x]_{x=a_1}; \\ \dot{a}_2 - a_3\dot{a}_1 &= [\partial^2 F/\partial x^2]_{x=a_1}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{a}_n - a_{n+1}\dot{a}_1 &= [\partial^n F/\partial x^n]_{x=a_1}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{31}$$

В качестве начальных значений $a_1\ a_2\ a_3\ \ldots$ при $T=0$ следует взять те значения, которые соответствуют априорной плотности распределения $w_{pr}(x)$. В том случае, когда априорные сведения о параметрах полезного сигнала отсутствуют, $w_{pr}(x)$ равна постоянной. При этом следует брать нулевые начальные значения:

$$a_2(0)=0; \quad a_3(0)=0. \tag{32}$$

Значение же $a_1(0)=x$ определяется из условия максимума функции $F(r-s)$ в значительный момент:

$$\partial F\,[r(0)-s(x,0)]/\partial x=0. \tag{33}$$

При условиях (32) для моментов времени, не слишком далеких от начального момента, член $a_{n+1}\,\dot{a}_1$ в (31) много меньше члена $\partial^n F/\partial x^n$. Этим можно воспользоваться, чтобы оборвать цепочку уравнений (31), оставив лишь n уравнений относительно переменных a_1, $a_2, \ldots, a_n$ и полагая $a_{n+1}=0$ Чем больше n, тем меньшую погрешность мы при этом совершим. Если оставить два уравнения, то будем иметь;

$$\begin{gathered} \partial\dot{x}_0=[\partial F/\partial x]_{x=x_0}; \qquad \dot{a}=-[\partial^2F/\partial x^2]_{x=x_0} \\ (x_0=a_1; \qquad a=-a_2) \end{gathered} \tag{34}$$

при начальных условиях $a(0)=0$, $\partial F/\partial x=0$ при $x=x_0(0)$.

Система, моделирующая эти уравнения, будет давать на выходе $x_0(T)$ — значение параметра, соответствующее максимальной апостериорной вероятности, и величину a, через которую по формуле $\Delta x=$ $=1/\sqrt{a}$ выражается погрешность указанного значения (Δx — порядка отличия x_0 от истинного значения x). Как видно из (34), $x_0(T)$ сначала сильно зависит от T, затем эта зависимость ослабевает, соответственно тому, что новая информация, получаемая из $r(t)$, составляет уже малую долю всей полученной информации. Погрешность Δx с течением времени наблюдения неограниченно уменьшается.

Формулы (34) относятся к случаю, когда имеется единственный неизвестный параметр сигнала. В случае многих параметров $x_1, \ldots, x_m$ аналогичным способом в том же приближении выводятся формулы:

$$\sum_{\beta=1}^{m} a_{\alpha\beta}\,\dot{x}_\beta=\partial F/\partial x_\alpha; \tag{35}$$

$$\dot{a}_{\alpha\beta}=-\partial^2F/\partial x_\alpha\partial x_\beta \qquad (\alpha,\beta=1,,\ldots,m),$$

где $x_1, \ldots, x_m$ — предпочтительные значения параметров.

3. ПРИМЕР. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СМЕЩЕНИЯ В НЕГАУССОВОМ ШУМЕ

Конкретизируем приведенные выше дифференциальные уравнения оптимальной фильтрации для случая, когда полезный сигнал представляет собой неизвестную постоянную величину. В течение времени от 0 до T принимается суммарный сигнал $r(t)=s+n(t)$, где $n(t)$ — марковский, в общем случае не гауссов случайный процесс Пусть он удовлетворяет уравнению (6) и, следовательно, описывается функционалом вероятности (21).

Используя формулы (38) и (21), в данном случае имеем:

$$F(r-s)=-\frac{1}{2K}\,[\dot{r}-f(r-s)]^2-\frac{1}{2}f'(r-s). \tag{36}$$

Дифференцируя полученное выражение, находим соответствующие уравнения оптимальной фильтрации (34), принимающие вид:

$$Ka\dot{s}_0 = -[\dot{r} - f(r - s_0)]f'(r - s_0) + \frac{K}{2}f''(r - s_0);$$
$$K\dot{a} = -[\dot{r} - f(r - s_0)]f''(r - s_0) + f'^2(r - s_0) - \frac{K}{2}f'''(r - s_0) \quad (37)$$
$$[f'(n) = \partial f(n)/\partial n].$$

При отсутствии априорных сведений о сигнале начальное значение a (0) равно нулю, а s_0 (0) определяется из условия минимума функции $F(r - s_0)$. Дифференцируя ее, получаем, что она принимает экстремальное значение при

$$[\dot{r}(0) - f(r(0) - s_0(0))]f'(r(0) - s_0(0)) + + \frac{K}{2}f''(r(0) - s_0(0)) = 0. \quad (38)$$

Дальнейшие выкладки будут конкретизированы для того случая, когда членом $-\frac{1}{2}f'(r - s)$ в (36) можно пренебречь по сравнению с первым членом. При этом условие для начального значения s_0 (0), при котором функция (36) принимает максимальное значение, имеет вид:

$$f[r(0) - s_0(0)] = \dot{r}(0). \quad (39)$$

Уравнения (37) с указанными начальными условиями вполне однозначно определяют эволюцию предпочтительного значения сигнала (s_0 T) в процессе наблюдения. Правда, из первого уравнения не вполне ясна величина производной в начальный момент. Для того, чтобы ее найти, следует разрешить неопределенность. Как видно из второго уравнения (37), при малых T имеем:

$$Ka \simeq f'^2[r(0) - s_0(0)]\,T.$$

В то же время при малых T

$$\dot{r}(T) - f[r(T) - s_0(T)] \simeq \ddot{r}(0)\,T - f'[r(0) - - s_0(0)][\dot{r}(0) - \dot{s}_0(0)]\,T.$$

Подставляя эти соотношения в первое уравнение (37) и деля на T, получаем:

$$f'^2(r - s_0)\dot{s}_0 = -[\ddot{r} - f'(r - s_0)(\dot{r} - \dot{s}_0)]f'(r - s_0).$$

Отсюда определяем значение производной $\dot{s}_0$ в начальный момент:

$$\dot{s}_0(0) = \frac{1}{2}\left[\dot{r} - \frac{\ddot{r}}{f'(r - s_0)}\right]_{t=0}. \quad (40)$$

С увеличением T величина a возрастает. Поэтому, как видно из первого уравнения (37), в дальнейшем величина производной $\dot{s}_0(T)$ уменьшается и апостериорный сигнал $s_0(T)$ приближается к постоянному значению, который совпадает с истинным значением полезного сигнала. Погрешность $\Delta s \sim 1/\sqrt{a}$ при этом уменьшается до нуля.

Полученные уравнения (37) являются нелинейными В частном же случае, когда $f(n)$—линейная функция, они обращаются в линейные. Полагая $f(n) = \beta - n$, находим:

$$K a \dot{s}_0 = \beta [\dot{r} + \beta r - \beta s_0]; \quad K \dot{a} = \beta^2. \tag{41}$$

Последнее уравнение имеет решение

$$K a = \beta^2 T. \tag{42}$$

Подстановка его в первое уравнение дает уравнение

$$T \dot{s}_0 + s_0 = r + \dot{r}/\beta$$

(с начальным условием (38): $s(0) = r(0) + \dot{r}(0)/\beta$), решение которого записывается в виде:

$$s_0(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[r(t) + \frac{\dot{r}(t)}{\beta} \right] dt. \tag{43}$$

Этот результат можно было бы получить другим путем, непосредственно используя формулу (26). В самом деле, при линейной функции $f(n)$ шум $n(t)$ является гауссовым, и решение задачи существенно упрощается. Для негауссова шума другие удобные пути решения отсутствуют и целесообразно использовать именно уравнения (37).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, ГИТТЛ, М., 1954, стр. 53—60.
2. Ф. Вудворд и И. Девис, Сб. под ред. Н. А. Железнова „Теория передачи электрических сигналов при наличии помех", ИЛ, М., 1953.
3. А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, сер. матем., 5, 3 (1941).
4. N. Wiener, Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, New-York, 1949.
5. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, Автоматика и телемеханика, 15, 200 (1954).
6. L. Zadeh, J. Appl. Phys., 4, 396 (1953).
7. Д. Х. Лэнинг, Р. Г. Бэттин, Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, М., 1958, стр. 306—320.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
29 декабря 1958 г.