МЕТОД ГАМИЛЬТОНА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ АНИЗОТРОПНЫХ ПОГЛОЩАЮЩИХ СРЕД

Ю. А. Рыжов

В работе рассмотрен метод Гамильтона в применении к электродинамике точечных зарядов, движущихся в поглощающих диспергирующих анизотропных средах. Получены дифференциальные уравнения для координат поля. В качестве иллюстрации метода найдено поле диполя в изотропной поглощающей среде.

В работе Гинзбурга [1] развит общий метод нахождения полей точечных зарядов в анизотропных средах, носящий условно название метода Гамильтона. Этот метод является весьма удобным для решения ряда задач. В статье [2] метод Гамильтона распространен на случай гиротропной среды.

Представляет интерес дальнейшее развитие метода Гамильтона на случай, когда имеется поглощение. В данной работе рассмотрен случай электродинамики анизотропной среды с поглощением. При этом более последовательно, чем в работах [1, 2], учитывается дисперсия среды.

1. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

Уравнения поля точечных зарядов с учетом токов проводимости имеют вид:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \sum_k e_k \boldsymbol{V}_k \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k) + \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi \sum_k e_k \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k) + 4\pi\rho; \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \tag{2}$$

В уравнениях (1)—(2) магнитная проницаемость μ положена равной 1; индекс k относится к k-му точечному заряду.

Для простоты будем считать, что главные оси тензоров диэлектрической проницаемости ε_{ik} и проводимости σ_{ik} совпадают. Дисперсию будем учитывать, полагая ε_{ik}, σ_{ik} функциями частоты. Линейную связь между векторами $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{E}$ будем записывать в следующем виде:

$$\boldsymbol{D} = \hat{\varepsilon} \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{j} = \hat{\sigma} \boldsymbol{E}. \tag{3}$$

В системе координат, оси которой совпадают с главными осями тензоров ε_{ik}, σ_{ik}, уравнения (3) запишутся в виде:

$$D_\alpha = \hat{\varepsilon}_\alpha E_\alpha, \; j_\alpha = \hat{\sigma}_\alpha E_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{3a}$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_\alpha$ и $\hat{\sigma}_\alpha$ — соответственно главные значения тензоров $\hat{\varepsilon}_{ik}$ и $\hat{\sigma}_{ik}$, которые являются операторами, действующими на компоненты электрического поля, как функции времени (что отражено в записи значком $\wedge$). В том случае, когда мы имеем дело с полем, зависящим от времени по закону $e^{i\omega t}$, воздействие операторов $\hat{\varepsilon}_{ik}$, $\hat{\sigma}_{ik}$ сводится к умножению поля на значение диэлектрической проницаемости или проводимости при данной частоте ω, т. е. $\hat{\varepsilon} e^{i\omega t} = \varepsilon(\omega) e^{i\omega t}$.

Ток проводимости $\boldsymbol{j}$ и заряд ρ связаны уравнением непрерывности:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = -\partial\rho/\partial t. \tag{4}$$

Отсюда

$$\rho = -\int \operatorname{div} \boldsymbol{j}\, dt + \rho_0; \tag{5}$$

учитывая только объемный заряд, связанный с током проводимости $\boldsymbol{j}$, положим ρ_0 в (5) равным нулю.

Запишем уравнения поля в более удобной для наших целей форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c} \sum_k e_k \boldsymbol{V}_k \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k) + \frac{1}{c} \hat{\varepsilon}'_{\mathrm{I}} \boldsymbol{E}; \\ \operatorname{div}\left(\hat{\varepsilon}'_{\mathrm{II}} \boldsymbol{E}\right) &= 4\pi \sum_k e_k \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k), \end{aligned} \tag{1a}$$

где операторы

$$\hat{\varepsilon}'_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{\varepsilon} + 4\pi\hat{\sigma}\right); \quad \hat{\varepsilon}'_{\mathrm{II}} = \left(\hat{\varepsilon} + 4\pi\hat{\sigma} \int \ldots dt\right) \tag{6}$$

не требуют специальных пояснений. Операции $\partial/\partial t$ и $\hat{\varepsilon}$ и, соответственно, $\hat{\sigma}$ и $\int \ldots dt$ перестановочны.

Введем потенциалы поля $\boldsymbol{A}$ и φ обычным способом так, что:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi; \quad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}; \tag{7}$$

вторая пара уравнений Максвелла (2) удовлетворяется при этом автоматически.

Как и в [1], здесь удобно пользоваться кулоновской калибровкой типа $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$, которая для рассматриваемого случая анизотропной поглощающей среды обобщается и принимает вид:

$$\sum_\alpha \hat{\varepsilon}'_{\mathrm{I}\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{8}$$

Это условие можно записать также в виде

$$\sum_\alpha \hat{\varepsilon}'_{\mathrm{II}\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0.$$

Для гармонической зависимости от времени

$$\sum_\alpha \varepsilon'_\alpha(\omega) \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0,$$

где

$$\varepsilon'_\alpha(\omega) = \varepsilon_\alpha(\omega) + \frac{4\pi\sigma_\alpha(\omega)}{i\omega}$$

— комплексная диэлектрическая проницаемсcть.

Второе уравнение (1а) запишется в форме:

$$\sum_\alpha \widehat{\varepsilon}'_{II\alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha^2} = -4\pi \sum_k e_k \delta(x - x_k). \tag{9}$$

С помощью разложения решения в интеграл Фурье легко найти решение уравнения (9) в виде интеграла:

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \sum_k e_k \int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{e^{i\omega(t-\tau)}\, d\omega\, d\tau}{\sqrt{\varepsilon'_1(\omega)\,\varepsilon'_2(\omega)\,\varepsilon'_3(\omega)}\sqrt{\sum_\alpha [\varepsilon'_\alpha(\omega)]^{-1}[x_\alpha - x_\alpha(\tau,k)]^2}}. \tag{10}$$

В отсутствие дисперсии и поглощения получается известный результат:

$$\varphi(x,t) = \sum_k \frac{e_k}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\sqrt{\sum_\alpha \varepsilon_\alpha^{-1}[x_\alpha - x_\alpha(k,t)]^2}}. \tag{11}$$

Теперь обратимся к первому уравнению (1а). При подстановке потенциалов оно принимает вид:

$$\Delta A - \frac{1}{c^2}\sum_\alpha e_\alpha \widehat{\varepsilon}'_{I\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial t} - \frac{1}{c}\sum_\alpha e_\alpha \widehat{\varepsilon}'_{I\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} - \nabla \operatorname{div} A = -\frac{4\pi}{c}\sum_k e_k V_k \delta(x - x_k). \tag{12}$$

Нахождение решения этого уравнения является задачей следующего раздела.

2. МЕТОД ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЙ В СРЕДЕ С ПОГЛОЩЕНИЕМ

Как обычно, решение уравнения (12) будем искать в виде ряда Фурье, считая поле периодическим на кубе с ребром $L = 1$:

$$A(r,t) = \sum_{\lambda i} A_{\lambda i}, \tag{13}$$

где

$$A_{\lambda i} = \sqrt{4\pi c^2}\, a_{\lambda i}\, q_{\lambda i}(t)\, e^{ik_\lambda r}. \tag{14}$$

Для собственных волн в анизотропных поглощающих средах поперечным является не вектор электрической индукции, а вектор $D'_n = D - i\frac{4\pi}{\omega} j$, причем $D_{n\alpha} = \varepsilon'_\alpha(\omega) E_\alpha(\omega)$, где $\varepsilon'_\alpha = \varepsilon_\alpha - i\frac{4\pi\sigma_\alpha}{\omega}$ (см., например, [3]).

Векторы $B_{\lambda i}$, соответствующие вектору D_n, мы введем, разложив вектор $B = \widehat{\varepsilon}'_I A$ в ряд:

$$B = \sum_{\lambda i} \widehat{\varepsilon}'_I A_{\lambda i} = \sum_{\lambda i} B_{\lambda i}. \tag{15}$$

Согласно (8), $\operatorname{div} B = 0$ и, следовательно, $(k_\lambda B_{\lambda i}) = 0$. В качестве независимых поляризаций необходимо взять взаимно-ортогональные векторы $B_{\lambda 1}$ и $B_{\lambda 2}$, т. е.

$$(B_{\lambda 1} B_{\lambda 2}) = 0.$$

Это условие аналогично известному условию, которому удовлетворяют нормальные волны в анизотропных средах и которое для гиротропных сред имеет вид: $(\boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{D}_2^*) = 0$. Здесь $\boldsymbol{D}_1$ и $\boldsymbol{D}_2$ — векторы электрической индукции в двух нормальных волнах, отвечающих разным значениям показателя преломления (см., например, [6]).

В итоге выбор векторов $\boldsymbol{a}_{\lambda i}$ по направлению ограничен следующими условиями:

$$\begin{aligned} &\sum_\alpha \widehat{\varepsilon}'_{\mathrm{I}\alpha} (k_\lambda)_\alpha (A_{\lambda i})_\alpha = 0; \\ &\sum_\alpha \widehat{\varepsilon}'_{\mathrm{I}\alpha} (A_{\lambda 1})_\alpha \widehat{\varepsilon}'_{\mathrm{I}\alpha} (A_{\lambda 2})_\alpha = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Кроме того, введем условие $(\boldsymbol{B}_{\lambda 1} \boldsymbol{A}_{\lambda 2}) = 0$, т. е.

$$\sum_\alpha \widehat{\varepsilon}'_{\mathrm{I}\alpha} (A_{\lambda 1})_\alpha (A_{\lambda 2})_\alpha = 0, \tag{17}$$

которое вместе с условиями (16) означает компланарность векторов $\boldsymbol{B}_{\lambda i}$, $\boldsymbol{A}_{\lambda i}$, $\boldsymbol{k}_\lambda$.

Получение уравнений для $q_{\lambda i}$ проводится обычным способом: после подстановки в (12) суммы (13) обе части уравнения умножаются на $\sqrt{4\pi c^2}\,\boldsymbol{a}_{mn} e^{-i\boldsymbol{k}_m \boldsymbol{r}}$ и интегрируются по объему куба. Условие (17) обеспечивает разделение уравнений для $\dot{q}_{\lambda i}$ с разными i. В результате получаются следующие осцилляторные уравнения для координат поля $q_{\lambda i}$:

$$\sum_\alpha (a_{\lambda i})^2_\alpha \widehat{\varepsilon}'_{\mathrm{I}\alpha} \dot{q}_{\lambda i} + \nu^2_{\lambda i} q_{\lambda i} = \sqrt{4\pi} \sum_k e_k (\boldsymbol{V}_k \boldsymbol{a}_{\lambda i}) e^{-i\boldsymbol{k}_\lambda \boldsymbol{r}_k}, \tag{18}$$

где

$$\nu^2_{\lambda i} = k^2_\lambda c^2 n^{-2}_{\lambda i} = c^2 \left[k^2_\lambda a^2_{\lambda i} - (\boldsymbol{a}_{\lambda i} \boldsymbol{k}_\lambda)^2 \right], \tag{19}$$

или

$$\sum_\alpha (a_{\lambda i})^2_\alpha \widehat{\varepsilon}_\alpha \ddot{q}_{\lambda i} + \sum_\alpha 4\pi (a_{\lambda i})^2_\alpha \widehat{\sigma}_\alpha \dot{q}_{\lambda i} + \nu^2_{\lambda i} q_{\lambda i} = \sqrt{4\pi} \sum e_k (\boldsymbol{V}_k \boldsymbol{a}_{\lambda i}) e^{-i\boldsymbol{k}_\lambda \boldsymbol{r}_k}. \tag{18a}$$

Отличие от уравнений электродинамики анизотропных сред без поглощения заключается в наличии члена с $\dot{q}_{\lambda i}$. Дисперсия обусловливает операторный характер коэффициентов уравнения (вместо постоянных коэффициентов мы имеем операторы $\sum_\alpha (a_{\lambda i})^2_\alpha \widehat{\varepsilon}_\alpha$ и $\sum_\alpha (a_{\lambda i})^2_\alpha \widehat{\sigma}_\alpha$).

Уравнение упрощается в случае диспергирующей изотропной среды:

$$\widehat{\varepsilon}\, \ddot{q}_{\lambda i} + 4\pi \widehat{\sigma} \dot{q}_{\lambda i} + \frac{\nu^2_{\lambda i}}{a^2_{\lambda i}} q_{\lambda i} = \sqrt{4\pi} \frac{1}{a^2_{\lambda i}} \sum_k e_k (\boldsymbol{V}_k \boldsymbol{a}_{\lambda i}) e^{-i\boldsymbol{k}_\lambda \boldsymbol{r}_k}. \tag{20}$$

Поскольку собственные колебания являются затухающими, нас будут интересовать вынужденные решения уравнения (18). В случае гармонической правой части $e^{i\nu_0 t}$ вынужденные решения не отличаются от решений соответствующих уравнений с коэффициентами $\sum_\alpha (a_{\lambda i})^2_\alpha \varepsilon_\alpha(\nu_0)$ и $\sum_\alpha (a_{\lambda i})^2_\alpha \sigma_\alpha(\nu_0)$. Отметим, что частное решение уравнения

$$\widehat{\varepsilon}\, \ddot{x} + \widehat{\sigma} \dot{x} + \nu^2 x = f(t)$$

можно найти, используя разложение решения в интеграл Фурье:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_\omega e^{i\omega t}}{i\omega\sigma-\omega^2\varepsilon+\nu^2}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)\,e^{i\omega(t-\tau)}}{i\omega\sigma-\omega^2\varepsilon+\nu^2}\,d\omega\,dt, \tag{21}$$

где f_ω — спектральная плотность функции $f(t)$.

Выше ради простоты полагалось, что среда описывается симметричными тензорами $\hat{\varepsilon}_{ik}$, $\hat{\sigma}_{ik}$, что позволило упростить запись в системе главных осей этих тензоров. В случае гиротропной среды этого сделать нельзя [4]. Однако результаты сохраняют свою форму для произвольной тензорной связи между векторами $D_n=c^{-1}(4\pi j+\partial D/\partial t)$ и E. Считая, что $D_n=c^{-1}\hat{\varepsilon}_1' E$ или $(D_n)_\alpha=\frac{1}{c}\sum_k\hat{\varepsilon}_{1\alpha k}E_k$,

где

$$\hat{\varepsilon}'_{1\alpha k}=\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varepsilon}_{\alpha k}+4\pi\hat{\sigma}_{\alpha k},$$

мы получим следующее уравнение для $q_{\lambda i}$:

$$\sum_{\alpha k}(a'_{\lambda i})_\alpha(a_{\lambda i})_k\,\hat{\varepsilon}'_{1\alpha k}\dot{q}_{\lambda i}+\nu^2_{\lambda i}q_{\lambda i}=\sqrt{4\pi}\sum_k e_k\left(V_k a^*_{\lambda i}\right)e^{-ik_\lambda r_k}, \tag{22}$$

где

$$\nu^2_{\lambda i}=c^2\left[k^2_\lambda(a_{mn}a^*_{mn})-(k_m a^*_{mn})(k_m a_{mn})\right].$$

3. ПОЛЕ ОСЦИЛЛЯТОРА В ИЗОТРОПНОЙ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

В качестве примера использования метода Гамильтона мы найдем поле электрона в изотропной поглощающей среде. Пусть электрон, помещенный в начале координат, совершает малые колебания вдоль оси z по закону $z=z_0e^{i\nu_0 t}$. Считая, как обычно, множитель $e^{-ik_\lambda r_э}$ приблизительно равным 1, будем иметь уравнение:

$$\hat{\varepsilon}\ddot{q}_{\lambda i}+4\pi\hat{\sigma}\dot{q}_{\lambda i}+\frac{\nu^2_{\lambda i}}{a^2_{\lambda i}}q_{\lambda i}=i\sqrt{4\pi}\,e\,\nu_0\frac{(z_0 a_{\lambda i})}{a^2_{\lambda i}}e^{i\nu_0 t}, \tag{23}$$

вынужденное решение которого

$$q_{\lambda i}=i\frac{\sqrt{4\pi}\,e\,\nu_0(z_0 a_{\lambda i})}{\nu^2_{\lambda i}-\nu_0^2+4\pi i\xi\nu_0}e^{i\nu_0 t}. \tag{24}$$

Здесь положено

$$\xi=\sigma(\nu_0)/\varepsilon(\nu_0);\qquad \varepsilon(\nu_0)\,a^2_{\lambda i}=1.$$

При этом из (19) следует, что $\nu^2_{\lambda i}=c^2k^2_\lambda a^2_{\lambda i}=c^2k^2_\lambda/n^2(\nu_0)$.

Подставляя решение (24) в сумму (13), находим:

$$A(r,t)=4\pi cie^{i\nu_0 t}\sum_{\lambda i}\frac{e\nu_0(z_0a_{\lambda i})a_{\lambda i}}{\nu^2_{\lambda i}-\nu_0^2+4\pi i\xi\nu_0}e^{ik_\lambda r}. \tag{25}$$

Заменим суммирование в (25) интегрированием в сферической системе координат Θ, φ, r по телесному углу Ω, учитывая, что число осцилляторов в интервале частот $\nu_{\lambda i} \div \nu_{\lambda i} + d\nu_{\lambda i}$ с нормалями в телесном угле $d\Omega$ равно

$$\frac{k_\lambda^2 \, d\, k_\lambda}{(2\pi c)^3} = \frac{n_{\lambda i}^3 (\nu_0) \, \nu_{\lambda i}^2 \, d\nu_{\lambda i}}{(2\pi c)^3} \, d\Omega . \tag{26}$$

При интегрировании по частоте значок λi писать не будем.

Вычислим компоненту A_Θ в точке, радиус-вектор которой $\boldsymbol{R}_0$ ($\varphi = 0$, $\Theta = \beta$, $r = R_0$):

$$A_\Theta(\boldsymbol{R}_0, t) = i e^{i\nu_0 t} \frac{P_0 \nu_0 n(\nu_0)}{2\pi^2 c^2} \int\limits_\nu \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2\Theta\,(\cos\Theta\cos\varphi\cos\beta + \sin\Theta\sin\beta)}{\nu^2 - \nu_0^2 + 4\pi i \xi \nu_0} \times$$
$$\times e^{i \frac{n(\nu_0)}{c} R_0 \nu\, (\sin\Theta\cos\varphi\sin\beta + \cos\Theta\cos\beta)} \, d\nu\, d\varphi\, d\Theta . \tag{27}$$

($P_0 = ez_0$ — дипольный момент).

Интегрируя по φ, будем иметь:

$$A_\Theta(\boldsymbol{R}_0, t) = i e^{i\nu_0 t} \frac{P_0 \nu_0 n(\nu_0)}{\pi c} \int\limits_\nu \frac{\nu^2 d\nu}{\nu^2 - \nu_0^2 + 4\pi i \xi \nu_0} \Big\{ i\cos\beta \int\limits_0^\pi \sin^2\Theta \cos\Theta \times$$
$$\times I_1 \left[\frac{n(\nu_0)}{c} R_0 \nu \sin\Theta\sin\beta \right] \exp\left[i\, n(\nu_0)\, c^{-1} R_0 \nu \cos\Theta\cos\beta \right] d\Theta + \tag{28}$$
$$+ \sin\beta \int\limits_0^\pi \sin^3\Theta\, I_0 \left(\frac{n}{c} R_0 \nu \sin\Theta \sin\beta \right) \exp\left[i \frac{n(\nu_0)}{c} R_0 \nu \cos\Theta\cos\beta \right] d\Theta \Big\} .$$

Здесь I_0 и I_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядка. Фигурную скобку в (28) можно вычислить с помощью интеграла Гегенбауэра [5]:

$$\int\limits_0^\pi e^{iz\cos\Theta\cos\beta} I_{\nu-1/2}(z\sin\Theta\sin\beta)\, C_r^\nu(\cos\Theta) \sin^{\nu+1/2}\Theta\, d\Theta =$$
$$= \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{1/2} i^r \sin^{\nu-1/2}\beta\, C_r^\nu(\cos\beta)\, I_{\nu+r}(z) \tag{29}$$

(смысл функции $C_r^\nu(\cos\Theta)$ также указан в книге [5]); она получается равной

$$\frac{2c\sin\beta}{nR_0\nu} \left[\left(1 - \frac{c^2}{n^2 R_0^2 \nu^2}\right) \sin\left(\frac{nR_0\nu}{c}\right) + \frac{c}{nR_0\nu} \cos\left(\frac{nR_0\nu}{c}\right) \right] .$$

Находя с помощью теории вычетов интегралы по ν, имеем:

$$A_\Theta(\boldsymbol{R}_0) = \frac{P_0 \sin\beta}{R_0} e^{i(\nu_0 t - k' R_0)} \left[\frac{1}{R_0 \sqrt{\varepsilon'}} + i k_0 \left(1 - \frac{1}{k'^2 R_0^2} \right) \right] +$$
$$+ e^{i\nu_0 t} \frac{i P_0 k_0 \sin\beta}{R_0^3 k'^2} , \tag{30}$$

где

$$k' = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{\varepsilon'(\nu_0)} = k_0\sqrt{\varepsilon'(\nu_0)}\,, \quad \varepsilon'(\nu_0) = \varepsilon(\nu_0) + \frac{4\pi\sigma(\nu_0)}{i\nu_0}\,.$$

Найдем компоненту электрического поля

$$E_\Theta(\boldsymbol{R}_0) = -\,ik_0 A_\Theta(\boldsymbol{R}_0) - \frac{1}{R_0}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}(\boldsymbol{R}_0)\,.$$

Используя формулу (10) для вычисления $\mathrm{grad}_\Theta\varphi$, убеждаемся, что член $(1/R_0)\,\partial\varphi/\partial\Theta$, вычисленный приближенно с учетом малости z_0, сокращается с членом, соответствующим последнему слагаемому в (30), которое зависит только от времени. В итоге получаем известную формулу (см., например, [3])

$$E_\Theta(\boldsymbol{R}_0) = \frac{P_0\sin\beta}{\varepsilon' R_0}\left[k'^2 - \frac{1}{R_0}\left(ik' - \frac{1}{R_0}\right)\right].$$

В заключение выражаю благодарность В. В. Железнякову, советами которого я пользовался при написании работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, **10**, 601 (1940).
2. А. А. Коломенский, ЖЭТФ, **24**, 167 (1953).
3. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, ГИТТЛ, М., 1953.
4. М. Борн, Оптика, ГНТИУ, Харьков—Киев, 1937.
5. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.
6 Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957.

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 15 июля 1959 г.