О ТЕНЗОРЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Ф. Г. Басс

В работах [1,2] для среднего электрического поля $\overline{E}$ и флюктуационного электрического поля ξ были получены следующие уравнения:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{E} - k^2(\overline{\varepsilon}\,\overline{E} + \overline{\xi\,\delta\varepsilon}) = 0; \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\overline{\varepsilon}\,\overline{E} + \overline{\xi\,\delta\varepsilon}) = 0;$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\,\xi - k^2\overline{\varepsilon}\xi = k^2(\delta\varepsilon\,\overline{E} + \xi\delta\varepsilon - \overline{\delta\varepsilon\xi}); \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\overline{\varepsilon}\,\xi + \delta\varepsilon\xi - \overline{\delta\varepsilon\xi} + \delta\varepsilon\,\overline{E}) = 0.$$

Здесь $k = \omega/c$, $\overline{\varepsilon}$ — среднее значение диэлектрической проницаемости ε, $\delta\varepsilon$ — флюктуационная составляющая диэлектрической проницаемости, $\varepsilon = \overline{\varepsilon} + \delta\varepsilon$ (черта обозначает статистическое усреднение).

Если $\delta\varepsilon$ мала по сравнению с $\overline{\varepsilon}$, в уравнениях (2) можно пренебречь членами $\delta\varepsilon\xi$ и $\overline{\delta\varepsilon\xi}$ по сравнению с $\overline{\varepsilon}\,\xi$ и найти ξ. Подставляя значение ξ из (2) в (1) и проводя усреднение, окончательно получаем уравнения для компонент электрического поля [1,2]:

$$\left[(\Delta + \overline{\varepsilon}k^2)\,\delta_{lk} - \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k}\right]\overline{E}_k(r) + $$
$$+ \frac{k^4\,\overline{\delta\varepsilon^2}}{4\pi}\int dr'\,\frac{e^{ik\sqrt{\overline{\varepsilon}}\,|r-r'|}}{|r-r'|}\left(\delta_{lk} + \frac{1}{k^2\overline{\varepsilon}}\,\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_k}\right)(W(r-r')\,E_k(r')) = 0, \quad (3)$$

где $W(r-r') = \dfrac{\overline{\delta\varepsilon(r)\,\delta\varepsilon(r')}}{\overline{\delta\varepsilon^2}}$ — коэффициент корреляции между флюктуациями диэлектрической проницаемости, который мы будем считать четной функцией своего аргумента.

Рассмотрим случай, когда электрическое поле изменяется на расстояниях значительно больших, чем те, на которых существенно убывает коэффициент корреляции. В этом предположении $\overline{E}_k(r')$ можно вынести из-под интеграла в уравнении (3) и переписать его в следующем виде:

$$\left(\Delta\delta_{ik} + k^2\,\varepsilon'_{ik} - \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\right)\overline{E}_k(r) = 0, \quad (4)$$

где эффективный комплексный тензор диэлектрической проницаемости определяется формулой:

$$\varepsilon'_{ik} = \overline{\varepsilon}\,\delta_{ik} + \frac{k^2\,\overline{\delta\varepsilon^2}}{4\pi}\int d\rho\,\frac{e^{ik\sqrt{\overline{\varepsilon}}\,\rho}}{\rho}\left(\delta_{ik} + \frac{1}{k^2\overline{\varepsilon}}\,\frac{\partial^2}{\partial\rho_i\partial\rho_k}\right)W(\rho). \quad (5)$$

Если коэффициент корреляции зависит только от модуля вектора ρ, то тензор (5) вырождается в скаляр, и мы снова приходим к результатам работы [2], с той только разницей, что у нас $\overline{\varepsilon}$ не равно единице.

В том же случае, когда $W(\rho)$ по-разному зависит от ρ_x, ρ_y, ρ_z, т. е. неоднородности анизотропны, ε'_{ik} является симметричным комплексным тензором.

Среднее электрическое поле в среде со случайными анизотропными неоднородностями описывается теми же уравнениями, что и в кристалле, и, следовательно, в такой среде могут распространяться две волны с различными фазовыми скоростями [3].

Если соответствующие интегралы сходятся, то в формуле (3) можно разложить экспоненту в подынтегральном выражении в ряд по $k\sqrt{\overline{\varepsilon}}\,\rho$. При этом для ε'_{ik} получится следующее выражение:

$$\varepsilon'_{ik} = \overline{\varepsilon}\,\delta_{ik} + \frac{\overline{\delta\varepsilon^2}}{4\pi\overline{\varepsilon}}\int\frac{d\rho}{\rho}\,\frac{\partial^2 W}{\partial\rho_i\,\partial\rho_k} + $$
$$+ \frac{ik^3\,\overline{\delta\varepsilon^2}\,\sqrt{\overline{\varepsilon}}}{4\pi}\left[\int d\rho\,W(\rho)\,\delta_{ik} - \frac{1}{6}\int d\rho\,\rho^2\,\frac{\partial^2 W}{\partial\rho_i\,\partial\rho_k}\right]. \quad (6)$$

Остановимся на случае, когда $\delta\varepsilon$ зависит от одной координаты, например, от x. Тогда коэффициент корреляции зависит лишь от ρ_x. Непосредственно формулой (6) мы воспользоваться не можем, так как входящие в нее интегралы в этом случае расходятся. Однако ответ можно получить, если в формуле (5) произвести интегрирование по ρ_y и ρ_z и полученное выражение разложить в ряд по степеням $k\sqrt{\bar{\varepsilon}}$. В результате получаем:

$$\varepsilon'_{xx} = \bar{\varepsilon} - \frac{\overline{\delta\varepsilon^2}}{\bar{\varepsilon}}; \quad \varepsilon'_{ik} = \left(\bar{\varepsilon} + \frac{ikl\,\overline{\delta\varepsilon^2}}{\sqrt{\bar{\varepsilon}}}\right)\delta_{ik}, \tag{7}$$

где $l = \int\limits_0^\infty W(\rho_x)\,d\rho_x$; $i \neq x$ или $k \neq x$.

Заметим, что выражение для эффективного тензора диэлектрической проницаемости в случае зависимости флюктуации $\delta\varepsilon$ от одной координаты можно получить без предположения о малости $\delta\varepsilon$, если ограничиться нулевым приближением по k. Действительно, пренебрегая в уравнениях (2) членами порядка $k^2\bar{\varepsilon}$, мы видим, что в нулевом приближении поле можно рассматривать как потенциальное и ограничиться лишь вторым уравнением системы (2). Далее, во втором из уравнений системы (2) можно пренебречь ξ_y и ξ_z, так как эти величины первого или более высокого порядка по $k\sqrt{\bar{\varepsilon}}$. После указанных упрощений из второго уравнения системы (2) получим:

$$\xi_x = \frac{\overline{\delta\varepsilon\xi_x}}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon - \bar{\varepsilon}}{\varepsilon}\bar{E}_x. \tag{8}$$

Усредняя выражение (8) и учитывая, что $\bar{\xi}_x = 0$, имеем:

$$\overline{\delta\varepsilon\xi_x} = \left[\left(\overline{\frac{1}{\varepsilon}}\right)^{-1} - \bar{\varepsilon}\right]\bar{E}_x. \tag{9}$$

Отсюда следует, что тензор ε'_{ik} имеет вид:

$$\varepsilon'_{xx} = \left(\overline{\frac{1}{\varepsilon}}\right)^{-1}; \quad \varepsilon'_{ik} = \bar{\varepsilon}\,\delta_{ik}, \tag{10}$$

где $i \neq x$ или $k \neq x$. Естественно, что при малых $\delta\varepsilon$ формула (10) переходит в (7) с точностью до членов порядка $k\sqrt{\bar{\varepsilon}}$.

Заметим, что формула (10) по виду совпадает с формулой, выведенной другим методом Файнбергом и Хижняком [4] для периодически неоднородного диэлектрика. Отметим также, что, как видно из (3) и (7), анизотропия эффективного тензора диэлектрической проницаемости будет особенно сильно сказываться в диспергирующей среде при частотах, близких к корням $\bar{\varepsilon}$, например, в плазме при частотах, близких к лэнгмюровской.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Лифшиц, М. И Каганов, В. М. Цукерник, Уч. зап. ХГУ, труды физ-мат. ф-та, **2**, 41 (1950).
2. Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, **2**, 827 (1959).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1958.
4. Я. Б. Файнберг и Н. А. Хижняк, ЖТФ, **25**, 711 (1955).

Институт радиофизики и электроники АН УССР

Поступила в редакцию
21 сентября 1959 г.

ПРИМЕНЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКА ДЛЯ СОЗДАНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ПОЛЕЙ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

И. М. Вигдорчик

В поисках новых методов генерации электромагнитных волн следует обратить внимание на те возможности, которые возникают в связи с использованием ультразвуковой техники для целей создания как переменных полей, так и периодических структур При помощи ультразвука можно значительно уменьшить период замедляющей си-