ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ СОЗДАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОГО ДИЭЛЕКТРИКА

С. С. Духин

В работе [1] исследован способ создания периодически неоднородной диэлектрической структуры посредством возбуждения в жидком диэлектрике стоячей звуковой волны. Использование ультразвука для создания периодических структур в особенности удобно для исследовательских целей, так как этот способ позволяет варьировать в широких пределах период структуры на одной и той же установке. Однако указанный метод в том виде, в котором он использовался в [1], обеспечивает слишком малые изменения диэлектрической постоянной. Приведенные в [1] данные позволяют рассчитать относительное изменение плотности, которое в этом случае составляет $5 \cdot 10^{-5}$ ввиду малой сжимаемости жидкости. Естественно, что при столь малом относительном изменении плотности и соответственно диэлектрической постоянной достигаемые изменения параметров электромагнитной волны очень малы [1].

Ценность ультразвукового метода получения периодических структур должна резко возрасти при его применении к дисперсным системам, например, к суспензиям или аэрозолям. В стоячей звуковой волне взвешенные частицы имеют тенденцию концентрироваться либо в пучностях, либо в узлах, в результате чего возникает периодическая структура, изменение диэлектрической постоянной вдоль которой при достаточно высокой концентрации частиц может приближаться к значению, равному разности диэлектрических постоянных среды и частиц. Обычно возникновение периодичности в распределении дисперсных частиц связывают с так называемым „давлением звука“, под воздействием которого частицы дрейфуют к ближайшей пучности или, в иных случаях, к узлу. При этом широко используется формула Кинга [2] для звукового давления, испытываемого малой сферой в стоячей звуковой волне:

$$F_{\text{зв}} = \frac{5}{2} km' (v-u)^2 f \sin(2kx), \tag{1}$$

где $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны, m' — масса вытесненной частицы среды, v и u — амплитуды скоростей частицы и среды, f — фактор порядка единицы, зависящий от отношения плотностей частицы и среды. При выводе этой формулы в [2] не учитывалась вязкость среды, вследствие чего ее нельзя применять в интересующем нас случае мельчайших частиц, колебательное движение которых относительно среды характеризуется числом Рейнольдса меньше единицы.

В этом случае воздействие звуковой волны на частицу осуществляется, в основном, посредством вязких сил, и для изучения дрейфа частиц достаточно рассмотреть уравнение колебательного движения частицы [3] во втором приближении (что эквивалентно учету ангармоничности колебаний):

$$\left(m + \frac{m'}{2}\right)\dot{v} + 6\pi\eta r\left[v + \frac{r}{\sqrt{\pi\nu}}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\dot{v}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\right] = \frac{3}{2}m\dot{u} + 6\pi\eta r\left[u + \frac{r}{\sqrt{\pi\nu}}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\dot{u}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\right], \tag{2}$$

где m — масса частицы, η и ν — вязкость и кинематическая вязкость среды, r — радиус частицы, t — время, $v = \dot{x}$ — скорость частицы, $u = A\sin(kx)\sin(\omega t)$ — распределение скоростей в стоячей волне.

Заметим, что уравнение (2) описывает движение в быстро осциллирующем поле [4], что позволяет использовать метод Капицы [5]. Так как амплитуда колебаний A много меньше длины волны λ, в правой части (2) x можно считать постоянным в течение одного периода ($x = x_0$). Решение уравнения (2) в этом приближении определяет гармоническое колебание частицы относительно точки $x = x_0$:

$$x - x_0 = A' \sin(kx_0)\cos(\omega t + \psi), \tag{3}$$

где

$$A' = A\left(1 + 3\beta + \frac{9}{2}\beta^2 + \frac{9}{2}\beta^3 + \frac{9}{4}\beta^4\right)^{1/2}\left[\frac{4}{9}\left(\frac{m}{m'} + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\beta\left(\frac{m}{m'} + \frac{1}{2}\right) + \frac{9}{2}\beta^2 + \frac{9}{2}\beta^3 + \frac{9}{4}\beta^4\right]^{-1/2};$$

$$\operatorname{tg}\psi = (1+\beta)\beta(1-m/m')\left[\frac{m}{m'}\left(\frac{2}{3}+\beta\right)+\frac{1}{3}+2\beta+\frac{9}{2}\beta^2+\frac{9}{2}\beta^3+\frac{9}{4}\beta^4\right]^{-1};$$

$$\beta = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}.$$

Правая часть (2) может рассматриваться как квазипериодическая сила с медленно меняющейся амплитудой, под влиянием которой частица колеблется и одновременно (в среднем) смещается за каждый период. Так как нас интересуют только эти смещения, последовательное суммирование которых отражает дрейф частицы, усредним уравнение (2) по периоду, предварительно разложив $\sin(kx)$ в ряд относительно точки $x=x_0$: $\sin(kx) = \sin(kx_0) + k\cos(kx_0)(x - x_0)$, куда в качестве $x-x_0$ следует подставить (3). Уравнение, полученное в результате усреднения, позволяет найти усредненную по периоду траекторию частицы $x_0(t)$:

$$\left(m+\frac{m'}{2}\right)\ddot{x}_0 + 6\pi\eta r\left[\dot{x}_0 + \frac{r}{\sqrt{\pi\nu}}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\ddot{x}_0(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\right] = F(x_0), \tag{4}$$

где

$$F(x_0) = \frac{k}{4}A'A\,\omega^2 m\left[\sin\psi\,\frac{9}{4}(\beta^2+\beta) - \cos\psi\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\beta\right)\right]\sin(2kx_0). \tag{5}$$

В рассматриваемом случае, характеризуемом числом Рейнольдса меньше единицы, можно показать, что первое и третье слагаемые в (4) малы по сравнению со вторым, откуда следует:

$$6\pi\eta r\dot{x}_0 = F(x_0). \tag{6}$$

Правая часть в уравнении (6), имеющая смысл усредненной по периоду силы, в случае аэрозолей, когда $m/m' \sim 10^3$, и при не слишком высоких частотах ($\beta^2 \gg m/m'$, что соответствует почти полному увлечению частицы колебаниями среды) на несколько порядков превосходит звуковое давление, рассчитываемое по формуле (1). Этот результат представляется весьма существенным, так как он отражает возможность более эффективного собирания мельчайших частиц в узловых плоскостях. В частности, на основе уравнения (6) можно получить для времени собирания Θ значение порядка 1 *сек* ($\lambda=3$ *см*, $r=1\mu$, плотность звуковой энергии $\Omega=100$ *эрг* $\cdot$ *см*$^{-3}$), в то время как, используя формулу (1), получим: $\Theta \sim 10^3$ *сек*.

Чтобы воспрепятствовать выпадению частиц под действием силы тяжести, целесообразно звуковой луч ориентировать вертикально. Тогда стационарное распределение частиц близ узловой плоскости, возникающее через время порядка Θ, определяется условием компенсации веса частицы силой $F(x_0)$:

$$mg = F(x_0). \tag{7}$$

Отсюда, например, следует, что при $\lambda = 3$ *см* и $\Omega = 100$ *эрг* $\cdot$ *см*$^{-3}$ частицы с радиусом $r < 1\mu$ размещаются в интервале $\Delta x \sim 3\cdot 10^{-2}$ *см* близ узла.

Оценка, проведенная по известной формуле Эйнштейна для среднеквадратичного смещения при тепловом движении, показывает, что, по крайней мере, при размере частиц больше $0{,}1\,\mu$ тепловое движение не может воспрепятствовать преимущественной концентрации частиц близ узлов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Гершензон, Сб. Применение ультраакустики в исследовании вещества, № 7, М., 1958, стр. 105.
2. L. King, Proc. Roy. Soc., **147A**, 212 (1934).
3. Н. А. Фукс, Механика аэрозолей, изд. АН СССР, М, 1955, § 20.
4. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика, Физматгиз, М., 1958, § 30.
5. П. Л. Капица, ЖТФ, **21**, 964 (1951).

Институт радиофизики и электроники АН УССР

Поступила в редакцию 9 июля 1959 г.