ФЛЮКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Н. Г. Денисов, Л. Н. Полянин

При расчете флюктуаций параметров волны, прошедшей через слой со случайными неоднородностями, обычно не учитывается поглощение волн в слое. В настоящей заметке такой расчет проводится с учетом поглощения. Получены условия, при выполнении которых влияние затухания на флюктуации параметров волны не существенно.

Будем считать, что среднее значение комплексной диэлектрической проницаемости ε' в слое зависит от z. В таком случае распространение скалярной волны будет описываться уравнением

$$\Delta E + k_0^2 \left[\varepsilon'(z) + \Delta\varepsilon'(x, y, z)\right] E = 0, \tag{1}$$

где $\Delta\varepsilon'(x, y, z)$ — случайное изменение комплексной диэлектрической проницаемости ($|\Delta\varepsilon'(x, y, z)| \ll |\varepsilon'(z)|$), $k_0 = \omega/c$ (ω — частота волны, c — скорость света). Если регулярный неоднородный слой — достаточно плавный и выполнены условия применимости метода плавных возмущений, в котором решение ищется в виде $E = \exp[\Phi_0(x, y, z) + \Phi_1(x, y, z) + \ldots]$, то, выбирая в качестве нулевого приближения решение, описывающее волну, распространяющуюся вдоль оси z,

$$\Phi_0 = -ik_0 \int_0^z \sqrt{\varepsilon'}\, dz - \frac{1}{4} \int_0^z \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon'} + \ln A_0, \tag{2}$$

для функции Φ_1 получим уравнение [1]

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} - 2ik_0 \sqrt{\varepsilon'(z)}\, \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + k_0^2 \Delta\varepsilon'(x, y, z) = 0. \tag{3}$$

Зависимость от времени выбрана в виде $e^{i\omega t}$.

Разложим случайные функции в (3) в интеграл Фурье по переменным x, y. Тогда для спектра функции Φ_1 можно получить следующую формулу [1]:

$$\varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, z) = \frac{ik_0}{2} \int_0^{L_0} f(\varkappa_1, \varkappa_2, z) \exp\left\{i \frac{\varkappa^2}{2k_0} [v(L_1) - v(z)]\right\} \frac{dz}{\sqrt{\varepsilon'}}, \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1 e^{-i(\varkappa_1 x + \varkappa_2 y)} dx dy; \quad \varkappa^2 = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2; \\ f(\varkappa_1, \varkappa_2, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Delta\varepsilon'(x, y, z)\, e^{-i(\varkappa_1 x + \varkappa_2 y)} dx dy; \quad v(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\varepsilon'}}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Предполагается, что точка наблюдения $z = L_1$ находится вне области, где имеются случайные неоднородности ($L_1 \geqslant L_0$).

Из решения (4) можно найти спектры корреляционных функций набега фазы $S_1 = \mathrm{Im}\, \Phi_1$ и уровня $A_1 = \mathrm{Re}\, \Phi_1$. Введем вначале некоторые обозначения. Запишем флюктуационное отклонение комплексной диэлектрической проницаемости в виде

$$\frac{\Delta\varepsilon'(x, y, z)}{\sqrt{\varepsilon'}} = \frac{\Delta\varepsilon_1(x, y, z) - i\,\Delta\varepsilon_2(x, y, z)}{n - i\chi} = Be^{i\alpha_1} \Delta N(x, y, z), \tag{6}$$

где $\Delta N(x, y, z)$ — флюктуационное изменение плотности частиц, n — показатель преломления и χ — показатель поглощения среды. Для плазмы

$$\varepsilon' = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2 (1 - is)} \qquad (s = \nu_{\text{эфф}}/\omega)$$

и

$$B = \frac{4\pi e^2}{m\omega^2 \sqrt{1 + s^2}\, |\sqrt{\varepsilon'}|}; \qquad \alpha_1 = \mathrm{arc\,tg}\, s + \mathrm{arc\,tg} \frac{\chi}{n}. \tag{7}$$

Запишем также функцию $i\,[v(L_1) - v(z)]\,\varkappa^2/2k_0$ в виде:

$$i\,\frac{\varkappa^2}{2k_0}\,[v(L_1) - v(z)] = i\,\frac{\varkappa^2}{2k_0}\int\limits_z^{L_1}\frac{n\,dz}{n^2+\chi^2} - \frac{\varkappa^2}{2k_0}\int\limits_z^{L_1}\frac{\chi\,dz}{n^2+\chi^2} = i\,\alpha_2(z) - \delta(z, L_1). \qquad (8)$$

Действительную и мнимую части решения (4) можно теперь записать следующим образом:

$$\operatorname{Re}\varphi = \frac{k_0}{2}\int\limits_0^{L_0} B(z)\,f_N(\varkappa_1, \varkappa_2, z)\,e^{-\delta(z)}\,\sin(\alpha_2+\alpha_1)\,dz;$$

$$\operatorname{Im}\varphi = \frac{k_0}{2}\int\limits_0^{L_0} B(z)\,f_N(\varkappa_1, \varkappa_2, z)\,e^{-\delta(z)}\,\cos(\alpha_2+\alpha_1)\,dz, \qquad (9)$$

где

$$f_N(\varkappa_1, \varkappa_2, z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta N(x, y, z)\,e^{-i(\varkappa_1 x + \varkappa_2 y)}\,dx\,dy.$$

Если считать, что изменение амплитуды и фазы поля за счет поглощения на расстояниях порядка масштаба случайных неоднородностей l пренебрежимо мало, то из (9) так же, как и в случае среды без поглощения [2], можно получить следующие формулы для спектров уровня и набега фазы:

$$F_{\substack{A\\S}} = \frac{k_0^2}{2}\int\limits_0^{L_0} B^2(z)\,\overline{(\Delta N)^2}\,e^{-2\delta(z)}\,\frac{\sin^2}{\cos^2}\left\{\alpha_2(z)+\alpha_1(z)\right\}dz\int\limits_0^{\infty}F_N(\varkappa_1, \varkappa_2, \zeta)\,d\zeta, \qquad (10)$$

где $F_N(\varkappa_1, \varkappa_2, \zeta)$ — спектр корреляционной функции $\overline{\Delta N_1\,\Delta N_2}/\overline{(\Delta N)^2}$,

$$\alpha_1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\chi}{n}; \quad \alpha_2 = \frac{\varkappa^2}{2k_0}\int\limits_z^{L_1}\frac{n\,dz}{n^2+\chi^2};$$

$$\delta(z) = \frac{\varkappa^2}{2k_0}\int\limits_z^{L_1}\frac{\chi\,dz}{n^2+\chi^2}.$$

Подсчитаем теперь спектр F_Φ корреляционной функции комплексной фазы $R_\Phi(\xi, \eta) = \overline{\Phi_1(x, y)\,\Phi_1(x+\xi, y+\eta)} = R_A + R_S$:

$$F_\Phi = F_A + F_S = \frac{k_0^2}{2}\int\limits_0^{L_0} B^2(z)\,\overline{(\Delta N)^2}\,e^{-2\delta(z)}\,dz\int\limits_0^{\infty}F_N(\varkappa_1, \varkappa_2, \zeta)\,d\zeta. \qquad (11)$$

Функция F_Φ тесно связана с угловым энергетическим спектром рассеянного поля [1]. Так как $\delta(z) = (\varkappa^2/2k_0)\int\limits_z^{L_1}\chi\,dz/(n^2+\chi^2)$, то в формулу (11) входит множитель $\exp\left[-(\varkappa^2/k_0)\int\limits_{L_0}^{L}\chi\,dz/(n^2+\chi^2)\right]$, определяющий изменение интенсивности компонент углового спектра в пространстве, где нет случайных неоднородностей ($z > L_0$). Если поглощение в оставшейся части слоя равно нулю, то угловой спектр, естественно, не зависит от расстояния $L_1 - L_0$.

Корреляционную функцию комплексной фазы подсчитаем по формуле

$$R_\Phi(\xi, \eta) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty}F_\Phi\,e^{+i(\varkappa_1\xi+\varkappa_2\eta)}\,d\varkappa_1\,d\varkappa_2.$$

Запишем вначале

$$\delta(z) = \frac{\varkappa^2}{2k_0} \int\limits_z^{L_1} \frac{\chi\, dz}{n^2 + \chi^2} = a\,\varkappa^2. \tag{12}$$

Тогда на основе формулы (11) и теоремы о свертке получим:

$$R_\Phi(\xi, \eta) = \frac{k_0^2}{8\pi a} \int\limits_0^{L_0} B^2(z)\,\overline{(\Delta N)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/4a}\,dx\,dy \int\limits_0^{\infty} \rho_N(\xi - x, \eta - y, \zeta)\,d\zeta, \tag{13}$$

где

$$\rho_N(\xi, \eta, \zeta) = \overline{\Delta N(x, y, z)\,\Delta N(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)}/\overline{(\Delta N)^2}.$$

Если поглощение в среде исчезает, то $a \to 0$ и функция $(1/4\pi a)\, e^{-(x^2+y^2)/4a}$ имеет своим пределом дельта-функцию. В этом случае легко вычислить двойной интеграл (13) и получить формулу для среды без поглощения [1]. При малых a двойной интеграл в (13) можно вычислить приближенно, разлагая в ряд функцию $\rho_N(\xi - x, \eta - y, \zeta)$. Отбрасывая члены, пропорциональные a^2, найдем формулу, пригодную при слабом поглощении:

$$R_\Phi(\xi, \eta) = \frac{k_0^2}{2} \int\limits_0^{L_0} B^2(z)\,\overline{(\Delta N)^2} \left[\int\limits_0^{\infty} \rho_N(\xi, \eta, \zeta)\,d\zeta + a \int\limits_0^{\infty} \nabla^2 \rho_N(\xi, \eta, \zeta)\,d\zeta \right] dz. \tag{14}$$

Второй член в фигурных скобках много меньше первого, если $a/l^2 \ll 1$ во всем интервале значений z (l — масштаб случайных неоднородностей). Используя формулу (12), запишем это неравенство в виде:

$$\frac{1}{2k_0 l^2} \int\limits_0^{L_1} \frac{\chi\, dz}{n^2 + \chi^2} = \frac{\lambda_0 L_1}{4\pi l^2}\, \frac{1}{L_1} \int\limits_0^{L_1} \frac{\chi\, dz}{n^2 + \chi^2} \ll 1. \tag{15}$$

Таким образом, при выполнении условия (15) в расчетах флюктуаций амплитуды и фазы можно не принимать во внимание поглощение. Отсюда следует, что если $\chi/(n^2 + \chi^2)$ невелико, поглощение можно не учитывать при $\lambda_0 L_1/l^2 \ll 1$, т. е. в зоне геометрической оптики.

Для ионосферы в диапазоне коротких волн обычно выполняется неравенство $\nu_{эфф}/\omega \ll 1$. При этом $\chi/(n^2 + \chi^2) \sim \nu_{эфф}/\omega$, а $L_1^{-1} \int\limits_0^{L_1} (\nu_{эфф}/\omega)\, dz = \overline{\nu}_{эфф}/\omega$, где $\overline{\nu}_{эфф}$ — среднее значение эффективного числа соударений в слое. Рассмотрим рассеяние радиоволн, проходящих через верхнюю ионосферу ($l \sim 10^3$ *м*, $\lambda_0 = 3$ *м*, $L_1 \sim 300$ *км*, $\nu_{эфф} \sim 10^3$ *сек*$^{-1}$). В этом случае параметр $\lambda_0 L_1/l^2 \sim 1$, $\nu_{эфф}/\omega \ll 1$ и условие (15) хорошо выполняется. Для E-слоя $l \sim 100$ *м*, $\lambda_0 = 30$ *м* ($\omega = 2\pi \cdot 10^7$ *сек*$^{-1}$), $L_1 = 200$ *км* и отношение $\lambda_0 L_1/l^2 \sim 500$, а $\nu_{эфф}/\omega \sim 1/300$ ($\nu_{эфф} \simeq 3 \cdot 10^5$ *сек*$^{-1}$). Последнее значение можно, вообще говоря, увеличить за счет того, что рассеянная волна проходит через D-слой, где число соударений $\nu_{эфф} \sim 10^6 \sim 10^7$ *сек*$^{-1}$. Таким образом, условие может нарушиться на частотах $\omega \lesssim 2\pi \cdot 10^7$ *сек*$^{-1}$, и при расчете рассеяния в E-слое в этом диапазоне нужно учитывать поглощение.

Заметим, наконец, что в проведенном расчете легко учесть и затухание среднего поля, определяемое самим эффектом рассеяния [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, 316 (1959).
2. Н. Г. Денисов, В. А. Зверев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 521 (1959).
3. Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, 827 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 7 октября 1959 г.