

Краткие сообщения и письма в редакцию

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Э. А. Канер

1. Исследованию статистических характеристик поля излучения в среде со случайными флюктуациями показателя преломления посвящено значительное количество теоретических работ (см., например, [1, 2] и приведенную там библиографию).

При этом всюду применялся в той или иной форме метод последовательных приближений, связанный с использованием малого параметра—флюктуации показателя преломления μ . Наряду с вычислением флюктуационных характеристик поля излучения представляет интерес корректно учесть влияние рассеяния от случайных неоднородностей на характеристики среднего поля (затухание, изменение фазовой скорости и т. п.)*. Однако в настоящее время в литературе нет достаточной ясности по указанному вопросу. Например, в работе Чернова [3] при вычислении потока энергии получается парадоксальный результат: поток энергии экспоненциально растет с дистанцией, в противоречии с законом сохранения энергии. Чтобы избежать этого противоречия и получить правильный результат, автору работы [3] приходится искусственно, *post factum* вводить затухание в среднее поле. Причина этого кроется не в методе малых возмущений, как указано в [3], а в непоследовательном его использовании. В настоящем сообщении с помощью метода малых возмущений в форме, предложенной в [4], исследуется эффект затухания и изменения фазовой скорости среднего поля за счет рассеяния на флюктуациях.

2. Рассмотрим вначале распространение электромагнитных волн в среде с малыми флюктуациями $\delta\epsilon$ диэлектрической постоянной ϵ вокруг среднего значения, равного единице. Полная система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad \text{div } \mathbf{D} = 0; \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{D} — вектор индукции, \mathbf{E} и \mathbf{H} — векторы электрического и магнитного полей (среду считаем немагнитной), c — скорость волн в вакууме. Связь между \mathbf{D} и \mathbf{E} предполагаем в виде:

$$\mathbf{D} = (1 + \delta\epsilon) \mathbf{E} \quad (\delta\epsilon \equiv 2\mu). \quad (2)$$

Исключая \mathbf{H} из (1) и представляя \mathbf{E} в виде

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} + \xi \quad (\bar{\xi} = 0),$$

получим:

$$\text{rot rot} (\bar{\mathbf{E}} + \xi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (1 + \delta\epsilon) (\bar{\mathbf{E}} + \xi) = 0. \quad (3)$$

Здесь черта означает усреднение по $\delta\epsilon$.

После статистического усреднения уравнения (3) находим:

$$\text{rot rot} \bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{\mathbf{E}} + \xi \delta\epsilon) \approx 0. \quad (4)$$

Обычно последним членом в уравнении (4) пренебрегают ввиду его малости. Однако именно это слагаемое обеспечивает затухание среднего поля $\bar{\mathbf{E}}$. Для вычисления $\bar{\xi} \delta\epsilon$ необходимо найти ξ . Уравнение для ξ получается вычитанием уравнений (3) и (4):

* Как любезно сообщил автору Л. А. Чернов, возможность учета затухания среднего поля во втором приближении метода плавных возмущений (метода Рытова) была высказана им в докладе на IV Всесоюзной акустической конференции (Москва, 1958). Автор признателен Чернову, обратившему внимание на указанную работу.

$$\text{rot rot } \xi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{E} \delta\varepsilon + \xi \delta\varepsilon - \bar{\xi} \delta\varepsilon). \quad (5)$$

При нахождении ξ и $\bar{\xi} \delta\varepsilon$ можно пренебречь разностью $\xi \delta\varepsilon - \bar{\xi} \delta\varepsilon$. Будем предполагать поля монохроматическими ($\sim \exp(-i\omega t)$); зависимостью $\delta\varepsilon$ от времени пренебрежем. Тогда решение уравнения (5), как известно, имеет вид:

$$\xi_l(r) = k^2 \int_{-\infty}^{\infty} dr' \delta\varepsilon(r') T_{lk}(|r - r'|) \bar{E}_k(r'), \quad (6)$$

где $T_{lk}(r)$ — тензор Грина для системы уравнений $\text{rot rot } \xi = k^2 \xi = p \delta(r)$:

$$T_{lk}(r) = \frac{1}{4\pi} \left(\delta_{lk} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \right) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (4), получаем:

$$\left[(\Delta - k^2) \delta_{lk} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \right] E_k(r) + k^4 \int_{-\infty}^{\infty} dr' \bar{\delta\varepsilon}(r') \delta\varepsilon(r') T_{lk}(|r - r'|) E_k(r') = 0. \quad (8)$$

Для статистически однородной среды функция корреляции равна

$$\bar{\delta\varepsilon}(r) \delta\varepsilon(r') = 4\mu^2 W(r - r')$$

(W — коэффициент корреляции, μ — флюктуация показателя преломления), и уравнение (8) позволяет найти постоянную распространения χ . Вместо последней мы будем искать эффективную диэлектрическую постоянную $\varepsilon_{\text{эфф}}$, связанную с χ соотношением

$$\varepsilon_{\text{эфф}} = \chi^2 k^2. \quad (9)$$

Подставляя в (8) $E_k(r) = a_k \exp(i\chi r)$ и приравнивая нулю характеристический определитель, получаем

$$\text{Det} |(\chi^2 - k^2) \delta_{lk} - \chi_i \chi_k - 4\mu^2 k^4 \int_{-\infty}^{\infty} d\rho T_{lk}(\rho) W(\rho) \exp(i\chi\rho)| = 0. \quad (10)$$

Будем считать среду изотропной, т. е. положим $W(\rho) = W(|\rho|)$. Тогда последний тензор в формуле (10), очевидно, имеет вид: $a(\chi) \delta_{lk} + b(\chi) \chi_i \chi_k$, и равенство нулю детерминанта тождественно уравнению:

$$\chi^2 k^2 = 1 + 4\mu^2 k^2 a(\chi), \quad (11)$$

поскольку $\text{Det} |\chi_i \chi_k| \equiv 0$. Величина $a(\chi)$ вычисляется без труда, и в результате приходим к следующему уравнению для $\varepsilon_{\text{эфф}}$:

$$\varepsilon_{\text{эфф}} = 1 + \frac{\mu^2}{2\pi} \frac{1}{k^2} \int_0^{\infty} d\rho \rho^2 W(\rho) \int_0^\infty d\theta e^{i\chi\rho} (\Delta - (n\tau)^2 + 2k^2) \frac{e^{ik\rho}}{\rho}. \quad (12)$$

Аналогичные вычисления для звуковых волн (скалярное волновое уравнение) приводят к формуле:

$$\varepsilon_{\text{эфф}} = 1 + 4\mu^2 \frac{k^2}{\chi} \int_0^{\infty} d\rho W(\rho) \sin(\chi\rho) e^{ik\rho}. \quad (13)$$

Здесь роль скорости волны c играет скорость звука.

Анализ полученных выражений показывает, что при $\sqrt{\frac{\mu^2}{k^2}} kl \ll 1$ (l — радиус корреляции) в формулах (12) и (13) χ можно заменить на k . Даже при этом ограничении возможен предельный случай $kl \gg 1$ (благодаря малости μ^2).

В таблице 1 приведены формулы для $\varepsilon_{\text{эфф}} = 1$, коэффициента поглощения по мощности $a = k \text{Im } \varepsilon_{\text{эфф}}$ и относительного изменения фазовой скорости — $\Delta v_{\text{фаз}} c = (1 - \varepsilon_{\text{эфф}}^{-1})$ в двух предельных случаях для электромагнитных и звуковых волн. Выражением I^n ($n = 1, 2, 3$) в таблице обозначен интеграл

$$\int_0^{\infty} d\rho \rho^{n-1} W(\rho).$$

3. Из приведенных результатов видно, что затухание среднего поля за счет расщепления на членомасштабных флюктуациях ($kl \ll 1$) подчиняется известному закону Рэлса $\alpha \sim \omega^4$. В случае крупномасштабных флюктуаций ($kl \gg 1$) затухание определяется не только флюктуациями уровня амплитуды, но и флюктуациями фазы поля излучения. Действительно, используя известные соотношения для интенсивности флюктуаций амплитуды и фазы (см., например, [1], формулы (159), (160)), легко видеть, что величина αL , определяющая ослабление среднего поля, равна сумме средних квадратов флюктуаций амплитуды и фазы (L — длина трассы). Это согласуется с результатом работы [3], исправленным после искусственного введения затухания (см. выше).

Таблица 1

	$kl \ll 1$			$kl \gg 1$		
	$\varepsilon_{\text{эфф}} - 1$	α	$-\Delta v_{\text{фаз}}/c$	$\varepsilon_{\text{эфф}} - 1$	α	$-\Delta v_{\text{фаз}}/c$
Электромагнитные волны	$\mu^2 \left(-\frac{4}{3} + i \frac{8}{3} k^3 l^3 \right)$	$\frac{8}{3} \mu^2 k^4 l^3$	$-\frac{2}{3} \mu^2$	$\mu^2 (2ikl \mp 1)$	$2\mu^2 k^2 l$	$\frac{1}{2} \mu^2$
Звук	$\mu^2 (4k^2 l^2 \pm i 4k^3 l^3)$	$4\mu^2 k^4 l^3$	$2\mu^2 k^2 l^2$	$\mu^2 (2ikl \pm 1)$	$2\mu^2 k^2 l$	$\frac{1}{2} \mu^2$

Что касается флюктуационной части поля излучения, то их относительные характеристики (например, средние квадраты флюктуаций фазы, относительные флюктуации амплитуды, корреляционные соотношения), очевидно, не изменятся, если вместо невозмущенного поля подставлять во все формулы найденное выше среднее поле с учетом затухания.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. А. Чёрнов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями изд. АН СССР, М., 1958.
- Д. М. Высоковский, Некоторые вопросы дальнего тропосферного распространения ультракоротких радиоволн, изд. АН СССР, М., 195.
- Л. А. Чернов, Акуст. ж., 3, 192 (1957). 8
- И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, В. М. Цукерник, Уч. зап. ХГУ, Труды физ.-мат. ф-та, 2, 41 (1950).

Харьковский институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
19 марта 1959 г.

* Используется практическая..рационализированная система единиц.